Ilkka Mellin

Tilastolliset menetelmät

Osa 4: Lineaarinen regressioanalyysi

Tilastollinen riippuvuus ja korrelaatio

Tilastollinen riippuvuus ja korrelaatio

>> Tilastollinen riippuvuus, korrelaatio ja regressio

Kahden muuttujan havaintoaineiston kuvaaminen

Pearsonin korrelaatiokertoimen estimointi ja testaus

Järjestyskorrelaatiokertoimet

Muuttujien väliset riippuvuudet tilastollisen tutkimuksen kohteena

- Tieteellisen tutkimuksen *tärkeimmät* ja *mielenkiintoisimmat kysymykset liittyvät* tavallisesti tutkimuksen kohteena olevaa ilmiötä kuvaavien **muuttujien välisiin riippuvuuksiin**.
- Jos tilastollisen tutkimuksen kohteena olevaan ilmiöön liittyy useampia kuin yksi muuttuja, *yhden muuttujan tilastolliset menetelmät* antavat tavallisesti vain *rajoittuneen kuvan* ilmiöstä.
- Sovellusten kannalta ehkä merkittävin osa tilastotiedettä käsittelee kahden tai useamman muuttujan välisten *riippuvuuksien kuvaamista* ja *mallintamista*.

Esimerkkejä riippuvuustarkasteluista

- Miten työttömyysaste Suomessa (% työvoimasta) *riippuu* BKT:n (bruttokansantuotteen) kasvu-vauhdista Suomessa, Suomen viennin volyymista sekä BKT:n kasvuvauhdista muissa EU-maissa ja USA:ssa?
- Miten alkoholin kulutus (l *per capita* vuodessa) *riippuu* alkoholijuomien hintatasosta, ihmisten käytettävissä olevista tuloista ja alkoholin saatavuudesta?
- Miten todennäköisyys sairastua keuhkosyöpään (*p*) *riippuu* tupakoinnin määrästä ja kestosta?
- Miten vehnän hehtaarisato (t/ha) *riippuu* kesän keskilämpö-tilasta ja sademäärästä sekä maan muokkauksesta, lannoituksesta ja tuholaisten torjunnasta?
- Miten betonin lujuus (kg/cm^2) *riippuu* sen kuivumisajasta?
- Miten kemiallisen aineen saanto (%) *riippuu* valmistusprosessissa käytettävästä lämpötilasta?

Eksakti *vs* tilastollinen riippuvuus

- Tarkastelemme tässä esityksessä yksinkertaisuuden vuoksi pääasiassa *kahden* muuttujan välistä riippuvuutta:

  (i) Muuttujien välinen *riippuvuus on* **eksaktia**, jos *toisen arvot voidaan ennustaa tarkasti toisen saamien arvojen perusteella*.

  (ii) Muuttujien välinen *riippuvuus on* **tilastollista**, jos niiden välillä *ei ole eksaktia riippuvuutta*, mutta *toisen muuttujan arvoja voidaan käyttää apuna toisen muuttujan arvojen ennustamisessa*.

Tilastollinen riippuvuus ja korrelaatio

- Kahden muuttujan välistä (lineaarista) *tilastollista riippuvuutta* kutsutaan tilastotieteessä tavallisesti **korrelaatioksi**.
- *Korrelaation* eli (lineaarisen) *tilastollisen riippuvuuden voimakkuutta* mittaavia tilastollisia tunnuslukuja kutsutaan **korrelaatiokertoimiksi**.
- Korrelaatiot muodostavat *perustan muuttujien välisten riippuvuuksien ymmärtämiselle*.

Tilastollinen riippuvuus ja regressio

- Vaikka korrelaatiot muodostavat perustan muuttujien välisten riippuvuuksien ymmärtämiselle, riippuvuuksia halutaan tavallisesti *analysoida* myös *tarkemmin*.
- **Regressioanalyysi** on tilastollinen menetelmä, jossa jonkin, ns. *selitettävän muuttujan* tilastollista riippuvuutta joistakin toisista, ns. *selittävistä muuttujista* pyritään mallintamaan **regressiomalliksi** kutsutulla tilastollisella mallilla; ks. lukua **Johdatus regressioanalyysiin**.
- Huomautus:

  Tässä luvussa rajoitutaan tarkastelemaan *korrelaatioiden estimointia* ja *testaamista*.

Kahden muuttujan havaintoaineiston kuvaaminen

- Kuten yhden muuttujan havaintoaineistojen tapauksessa, lähtökohdan kahden tai useamman muuttujan havainto-aineistojen kuvaamiselle muodostaa tutustuminen **havaintoarvojen jakaumaan**.
- Havaintoarvojen jakaumaa voidaan kuvailla ja esitellä *tiivistämällä* havaintoarvoihin sisältyvä *informaatio* sopivaan muotoon:
  - Havaintoarvojen *jakaumaa kokonaisuutena* voidaan kuvata sopivasti valituilla **graafisilla esityksillä**.
  - Havaintoarvojen *jakauman karakteristisia ominaisuuksia* voidaan kuvata sopivasti valituilla **otostunnusluvuilla**.

Kahden muuttujan havaintoaineiston kuvaaminen: Graafiset menetelmät

- Koska useampi- kuin kaksiulotteisten kuvioiden tekeminen ei ole käytännössä mahdollista, kolmen tai useamman muuttujan havaintoaineistoja havainnollistetaan tavallisesti niin, että *muuttujia tarkastellaan pareittain*.
- Kahden *järjestys*-, *välimatka*- tai *suhdeasteikoillisen* muuttujan havaittujen arvojen pareja havainnollistetaan tavallisesti graafisella esityksellä, jota kutsutaan **pistediagrammiksi**.
- Huomautus:

  Monimuuttujamenetelmien alueella on kehitetty myös sellaisia tilastografiikan menetelmiä, joilla voidaan havainnollistaa *useampi- kuin kaksiulotteisia aineistoja*.

Kahden muuttujan havaintoaineiston kuvaaminen: Tunnusluvut

- Usean muuttujan havaintoaineistojen karakteristisia ominaisuuksia voidaan kuvata *muuttujakohtaisilla* **otostunnusluvuilla**.
- Muuttujakohtaiset otostunnusluvut *eivät* kuitenkaan *voi antaa informaatiota muuttujien välisistä riippuvuuksista*.
- Muuttujien *pareittaisia tilastollisia riippuvuuksia voidaan kuvata* sopivasti valitulla **korrelaation mitalla**.

Kahden muuttujan havaintoaineiston kuvaaminen: Korrelaatio

- Tutkittavien muuttujien *mitta-asteikolliset ominaisuudet ohjaavat korrelaation mitan valintaa*:
  - **Välimatka- ja suhdeasteikollisille muuttujille** käytetään tavallisesti **Pearsonin korrelaatiokerrointa**.
  - **Järjestysasteikollisille muuttujille** käytetään tavallisesti **Spearmanin** tai **Kendallin järjestys-korrelaatiokerrointa**.

Testit korrelaatiolle

- *Satunnaismuuttujien väliseen korrelaatioon* voidaan kohdistaa erilaisia *tilastollisia testejä*.
- Tarkastelemme tässä esityksessä seuraavia *Pearsonin korrelaatiokertoimelle* sopivia testejä:
  - **Yhden otoksen testi korrelaatiokertoimelle**
  - **Korrelaatiokertoimien vertailutesti**
  - **Testi korreloimattomuudelle**
- Tarkastelemme tässä esityksessä seuraavia *Spearmanin ja Kendallin järjestyskorrelaatiokertoimille* sopivia testejä:
  - **Testit korreloimattomuudelle**

Tilastollinen riippuvuus ja korrelaatio

Tilastollinen riippuvuus, korrelaatio ja regressio

>> Kahden muuttujan havaintoaineiston kuvaaminen

Pearsonin korrelaatiokertoimen estimointi ja testaus

Järjestyskorrelaatiokertoimet

Pistediagrammi

- Tarkastellaan tilannetta, jossa tutkimuksen kohteina olevista *havaintoyksiköistä* on mitattu *kahden järjestys*-, *välimatka*- tai *suhdeasteikollisen* muuttujan x ja y arvot.
- Muuttujien x ja y arvojen samaan havaintoyksikköön liittyvien *parien* muodostamaa havaintoaineistoa voidaan kuvata graafisesti *pistediagrammilla*.
- Pistediagrammi sopii erityisesti kahden muuttujan välisen *riippuvuuden* havainnollistamiseen.
- Pistediagrammi on keskeinen työväline *korrelaatio*- ja *regressioanalyysissa*.

Pistediagrammi: Määritelmä

- Olkoot x ja y *järjestys-*, *välimatka-* tai *suhdeasteikollisia* muuttujia, joiden havaitut arvot ovat

  $x_1, x_2, \ldots, x_n$

  $y_1, y_2, \ldots, y_n$

- Oletetaan lisäksi, että havaintoarvot x_i ja y_i liittyvät *samaan havaintoyksikköön* kaikille $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Havaintoarvojen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ parien **pistediagrammi** saadaan esittämällä *lukuparit*

  (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \ldots, n$

  pisteinä avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Pistediagrammi: Havainnollistus

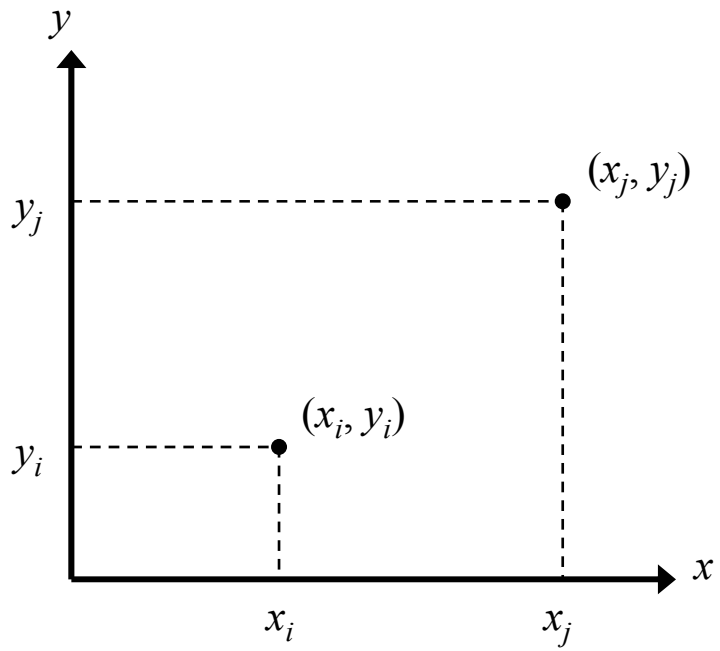
- Kuvio oikealla esittää lukuparien

  (x_i, y_i)

  ja

  (x_j, y_j)

  määrittelemien pisteiden esittämistä tasokoordinaatistossa.



Pistediagrammi: 1. esimerkki − 1/2

- *Hooken lain* mukaan kierrejousen pituus riippuu *lineaarisesti* jouseen ripustetusta painosta.
- Oikealla on tulokset kokeesta, jossa Hooken lain pätevyyttä tutkittiin ripustamalla jouseen 6 erikokoista painoa.
- Merkitään:

  (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

  jossa

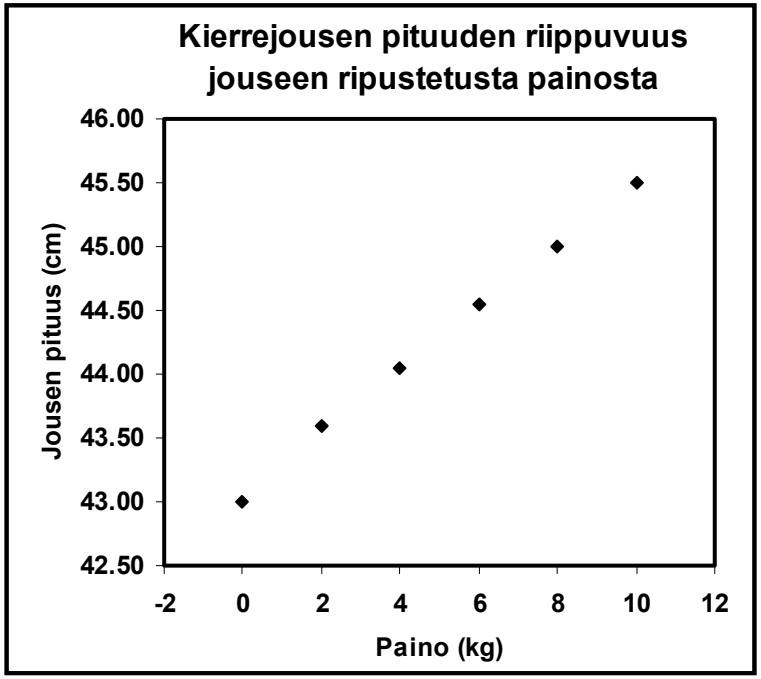
  x_i = paino i

  y_i = jousen pituus, kun painona on x_i

Paino (kg)	Pituus (cm)
0	43.00
2	43.60
4	44.05
6	44.55
8	45.00
10	45.50

Pistediagrammi: 1. esimerkki – 2/2

- Pistediagrammi oikealla havainnollistaa koetuloksia graafisesti.
- Ovatko havainnot *sopusoinnussa* Hooken lain kanssa?
- Vastausta tarkastellaan luvuissa **Johdatus regressioanalyysiin** ja **Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli**.



Pistediagrammi: 2. esimerkki – 1/2

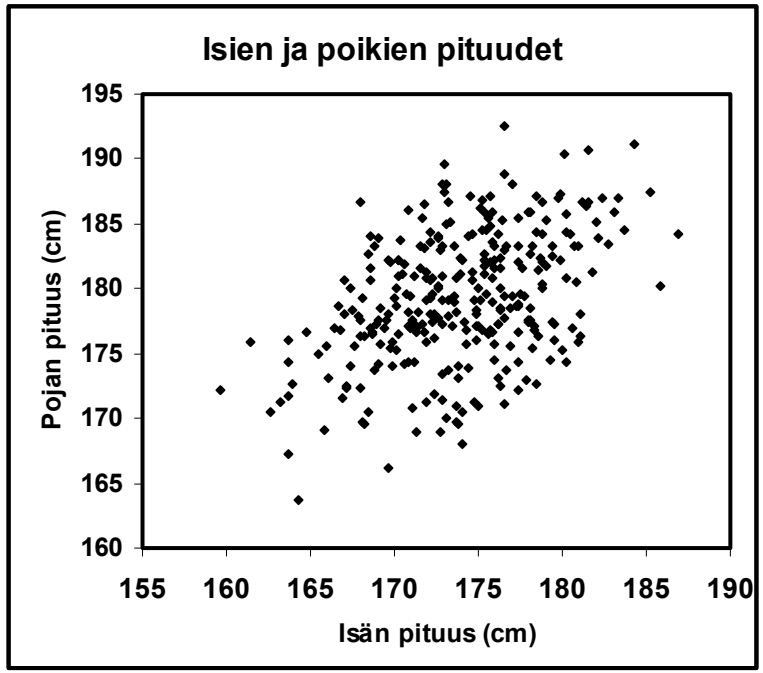
- Perinnöllisyystieteen mukaan lapset perivät geneettiset ominaisuutensa vanhemmiltaan.
- Periytyykö isän pituus heidän pojilleen?
- Havaintoaineisto koostuu 300:n isän ja heidän poikiensa pituuksien muodostamasta lukuparista

  (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \ldots, 300$

  jossa

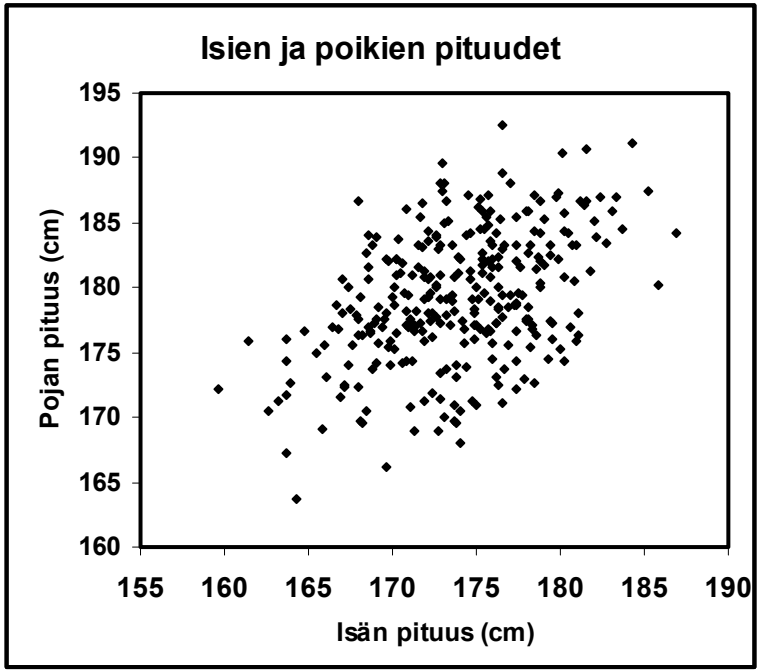
  x_i = isän i pituus

  y_i = isän i pojan pituus
- Ks. pistediagrammia oikealla.



Pistediagrammi: 2. esimerkki – 2/2

- Yhtä pitkillä isillä näyttää olevan monen mittaisia poikia.
- Mutta: Lyhyillä isillä näyttää olevan *keskimäärin* lyhyempiä poikia kuin pitkillä isillä ja pitkillä isillä näyttää olevan *keskimäärin* pitempiä poikia kuin lyhyillä isillä.
- Tällaisten *tilastollisten riippuvuuksien* analysoimista lineaaristen regressiomallien avulla tarkastellaan luvuissa **Johdatus regressioanalyysiin** ja **Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli**.



Pistediagrammi: 3. esimerkki – 1/2

- Onko keuhkosyöpä yleisempää sellaisissa maissa, joissa tupakoidaan paljon?
- Oikealla on tiedot savukkeiden kulutuksesta ja keuhkosyövän yleisyydestä 10:ssä maassa.
- Havaintoaineisto koostuu 10:stä lukuparista

  (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \ldots, 10$

  jossa

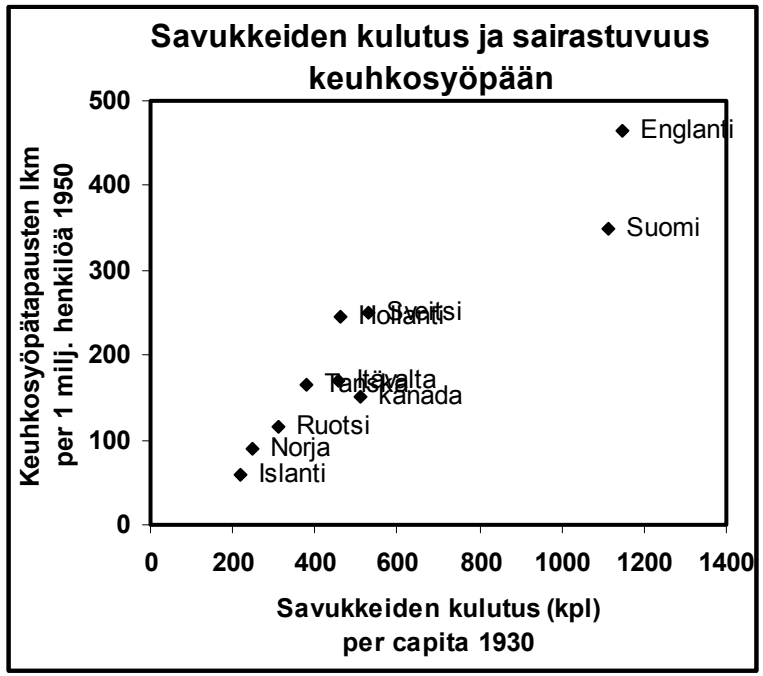
  x_i = savukkeiden kulutus maassa i 1930

  y_i = sairastuvuus keuhkosyöpään maassa i 1950

Maa	Savukkeiden kulutus (kpl) per capita 1930	Keuhkosyöpätapausten lkm per 1 milj. henkilöä 1950
Islanti	220	58
Norja	250	90
Ruotsi	310	115
Kanada	510	150
Tanska	380	165
Itävalta	455	170
Hollanti	460	245
Sveitsi	530	250
Suomi	1115	350
Englanti	1145	465

Pistediagrammi: 3. esimerkki – 2/2

- Pistediagrammi oikealla havainnollistaa savukkeiden kulutuksen ja keuhkosyövän yleisyyden välistä yhteyttä.
- Sairastuvuus keuhkosyöpään näyttää olevan *keskimäärin* korkeampaa sellaisissa maissa, joissa savukkeiden kulutus on ollut *keskimääräistä* suurempaa.
- Tällaisten *tilastollisten riippuvuuksien* analysoimista lineaaristen regressiomallien avulla tarkastellaan luvussa **Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli**.



Pistediagrammi: 4. esimerkki − 1/2

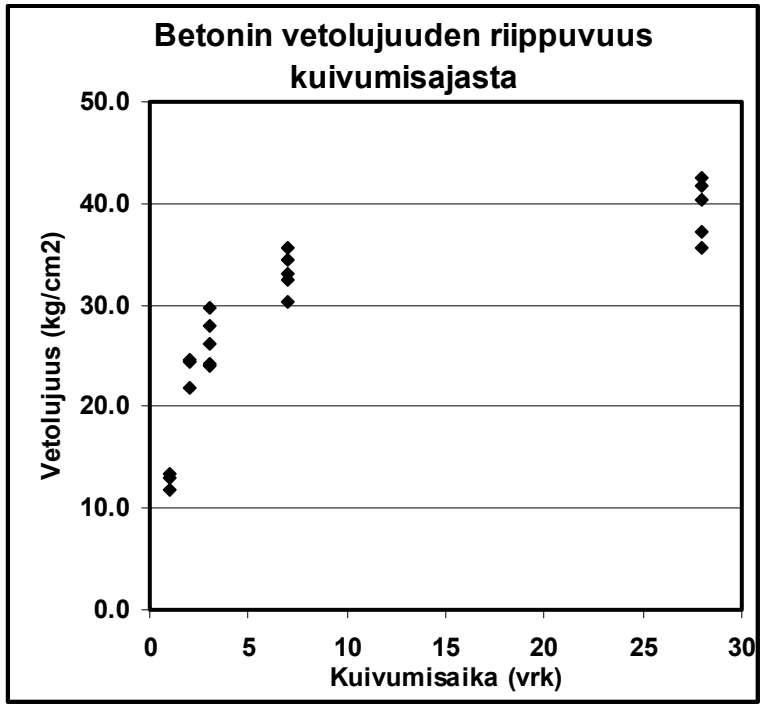
- Kokeessa tutkittiin betonin vetolujuuden riippuvuutta betonin kuivumisajasta.
- Havaintoaineisto koostuu 21:stä lukuparista

  (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \ldots, 21$

  jossa

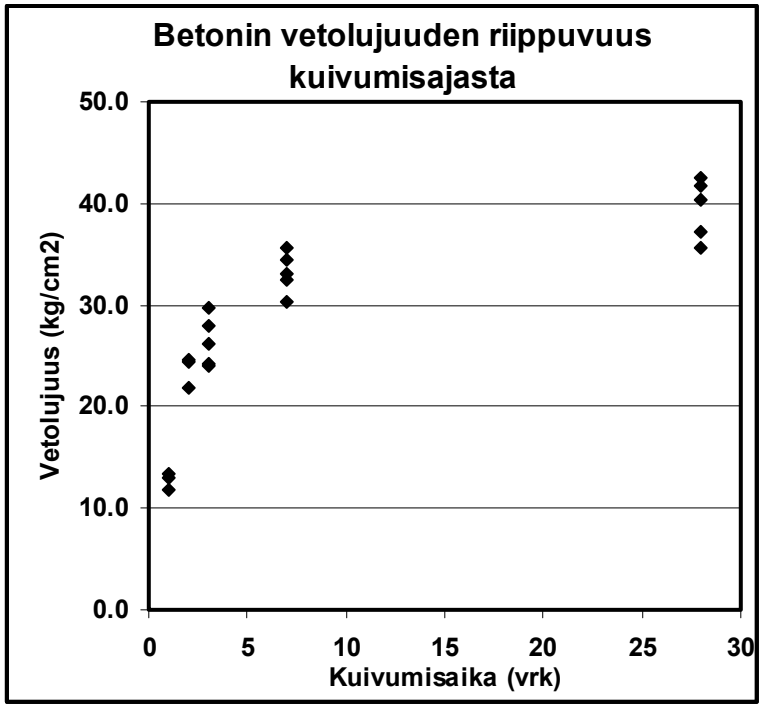
  x_i = betoniharkon i kuivumisaika

  y_i = betoniharkon i vetolujuus
- Ks. pistediagrammia oikealla.



Pistediagrammi: 4. esimerkki – 2/2

- Vetolujuus näyttää riippuvan kuivumisajasta *epälineaarisesti*.
- *Tässä tapauksessa* muuttujien välinen epälineaarinen riippuvuus voidaan kuitenkin *linearisoida*; ks. lukua **Johdatus regressio-analyysiin**.
- Linearisoinnin jälkeen riippuvuutta voidaan analysoida lineaaristen regressiomallien avulla.



Aikasarjadiagrammi: Määritelmä 1/2

- Oletetaan, että *järjestys*-, *välimatka*- tai *suhdeasteikollisen* muuttujan x havaitut arvot

  $$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

  muodostavat *aikasarjan*.
- Tällä tarkoitetaan sitä, että havaintoarvot on indeksoitu niin, että indeksit viittaavat *peräkkäisiin* ajanhetkiin, jolloin havainnot ovat *aikajärjestyksessä*.

Aikasarjadiagrammi: Määritelmä 2/2

- **Aikasarjadiagrammi** on pistediagrammi, jossa *lukuparit*

  $$(t, x_t)\ ,\ t = 1, 2, \ldots , n$$

  esitetään pisteinä avaruudessa $\mathbb{R}^2$.
- Tavallisesti *peräkkäisiin ajanhetkiin liittyvät pisteet*

  $$(t-1, x_{t-1}),\ (t, x_t)\ ,\ t = 2, 3, \ldots , n$$

  yhdistetään aikasarjadiagrammissa toisiinsa *janoilla*.

Aikasarjadigarammi: Havainnollistus

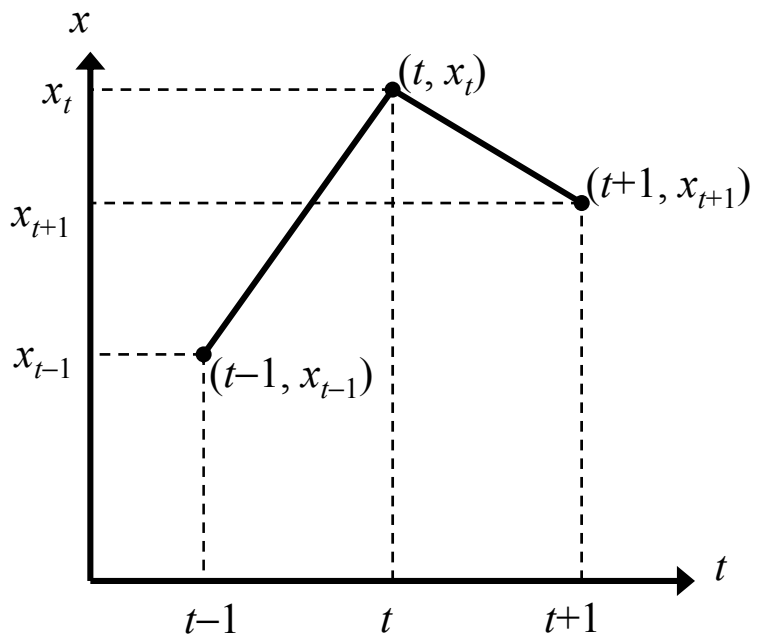
- Kuvio oikealla esittää aikasarjan

  x_t , $t = 1, 2, \ldots, n$

  peräkkäisten havaintoarvojen

  x_{t-1}, x_t, x_{t+1}

  määrittelemien pisteiden esittämistä tasokoordinaatistossa.



Aikasarjadiagrammi: Esimerkki

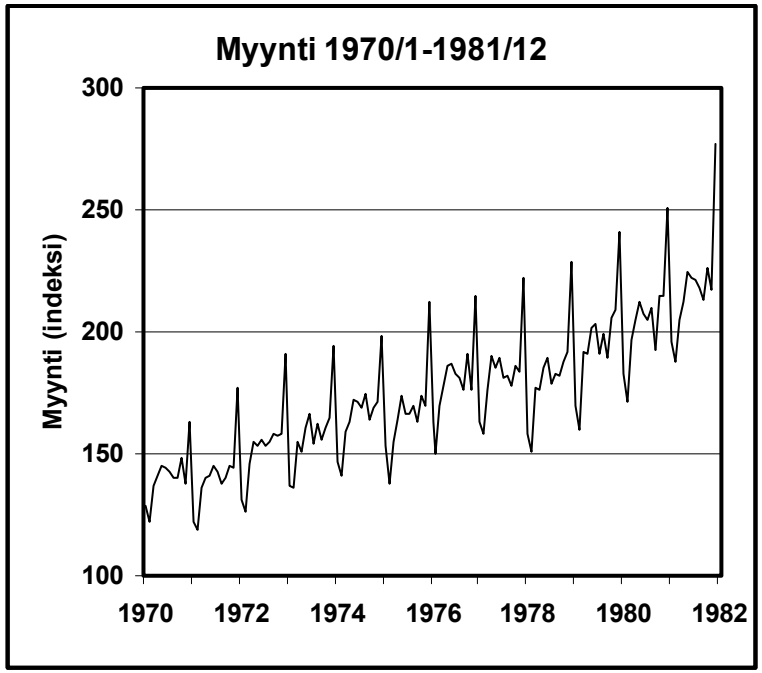
- Aikasarjadiagrammi oikealla esittää erään tukkukaupan kk-myynnin arvon vaihtelua.
- Havaintoaineisto koostuu 144:stä lukuparista

  (t, x_t)

  jossa

  t = aika (1970/1-1981/12)

  x_t = kk-myynnin arvoa kuvaava indeksi (1960/1 = 100)
- Huomaa, että kk-myynnissä on ollut *nouseva trendi* ja selvää *kausivaihtelua*.



Tunnusluvut

- Kahden *välimatka-* tai *suhdeasteikollisen* muuttujan havaintoarvojen parien muodostamaa jakaumaa voidaan *karakterisoida* seuraavilla *tunnusluvuilla*:
  - Havaintoarvojen keskimääräistä *sijaintia* kuvataan **aritmeettisilla keskiarvoilla**.
  - Havaintoarvojen *hajaantuneisuutta* tai *keskittyneisyyttä* kuvataan **keskihajonnoilla** tai (**otos-**) **variansseilla**.
  - Havaintoarvojen (lineaarista) riippuvuutta kuvataan **otoskovarianssilla** ja **otoskorrelaatiokertoimella**.

Havainnot

- Olkoot

  $$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

  ja

  $$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

  välimatka- tai *suhdeasteikollisten* muuttujien x ja y havaittuja arvoja.
- Oletetaan lisäksi, että havaintoarvot x_i ja y_i liittyvät *samaan havaintoyksikköön i kaikille* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Aritmeettiset keskiarvot: Määritelmät

- Havaintoarvojen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **aritmeettinen keskiarvo** on

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

- Havaintoarvojen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ **aritmeettinen keskiarvo** on

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

Aritmeettiset keskiarvot: Tulkinnat

- Havaintoarvojen pareista

  $$(x_i, y_i)\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

  laskettujen aritmeettisten keskiarvojen $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ muodostama lukupari

  $$(\bar{x}, \bar{y})$$

  on havaintoarvojen parien muodostamien pisteiden *painopiste*.
- Havaintoarvojen aritmeettinen keskiarvo kuvaa havainto-arvojen *keskimääräistä sijaintia*.

Varianssit: Määritelmät

- Havaintoarvojen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (otos-) **varianssi** on

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

  jossa $\bar{x}$ on x-havaintoarvojen aritmeettinen keskiarvo.

- Havaintoarvojen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (otos-) **varianssi** on

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2$$

  jossa $\bar{y}$ on y-havaintoarvojen aritmeettinen keskiarvo.

- Havaintoarvojen varianssi mittaa havaintoarvojen *hajaantuneisuutta* tai *keskittyneisyyttä* havaintoarvojen aritmeettisen keskiarvon suhteen.

Keskihajonnat: Määritelmät

- Havaintoarvojen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **keskihajonta** on

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

  jossa $\bar{x}$ on x-havaintoarvojen aritmeettinen keskiarvo.

- Havaintoarvojen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ **keskihajonta** on

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

  jossa $\bar{y}$ on y-havaintoarvojen aritmeettinen keskiarvo.

- Havaintoarvojen keskihajonta mittaa havaintoarvojen *hajaantuneisuutta* tai *keskittyneisyyttä* havaintoarvojen aritmeettisen keskiarvon suhteen.

Otoskovarianssi: Määritelmä

- Havaintoarvojen pareista (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \ldots , n$ laskettu **otoskovarianssi** on

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

jossa

$\bar{x}$ = x-havaintoarvojen aritmeettinen keskiarvo

$\bar{y}$ = y-havaintoarvojen aritmeettinen keskiarvo

- Huomaa, että x- ja y-havaintoarvojen otoskovarianssit niiden itsensä kanssa ovat niiden *variansseja*:

$$s_{xx} = s_x^2$$

$$s_{yy} = s_y^2$$

Otoskovarianssi: Merkin määräytyminen 1/4

- Otoskovarianssin s_{xy} *merkin* määrää summalauseke

  (1) $\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

- Summalausekkeen (1) *i*. termin

  $$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

  itseisarvo

  $$|x_i - \bar{x}||y_i - \bar{y}|$$

  on sellaisen *suorakaiteen pinta-ala*, jonka sivujen pituudet ovat

  $$|x_i - \bar{x}|$$

  ja

  $$|y_i - \bar{y}|$$

Otoskovarianssi: Merkin määräytyminen 2/4

- Summalausekkeen (1) i. termin

  $$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

  merkki määräytyy seuraavalla tavalla:

  $$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \geq 0 \quad \begin{cases} \text{jos } x_i \geq \bar{x} \text{ ja } y_i \geq \bar{y} \\ \text{jos } x_i \leq \bar{x} \text{ ja } y_i \leq \bar{y} \end{cases}$$

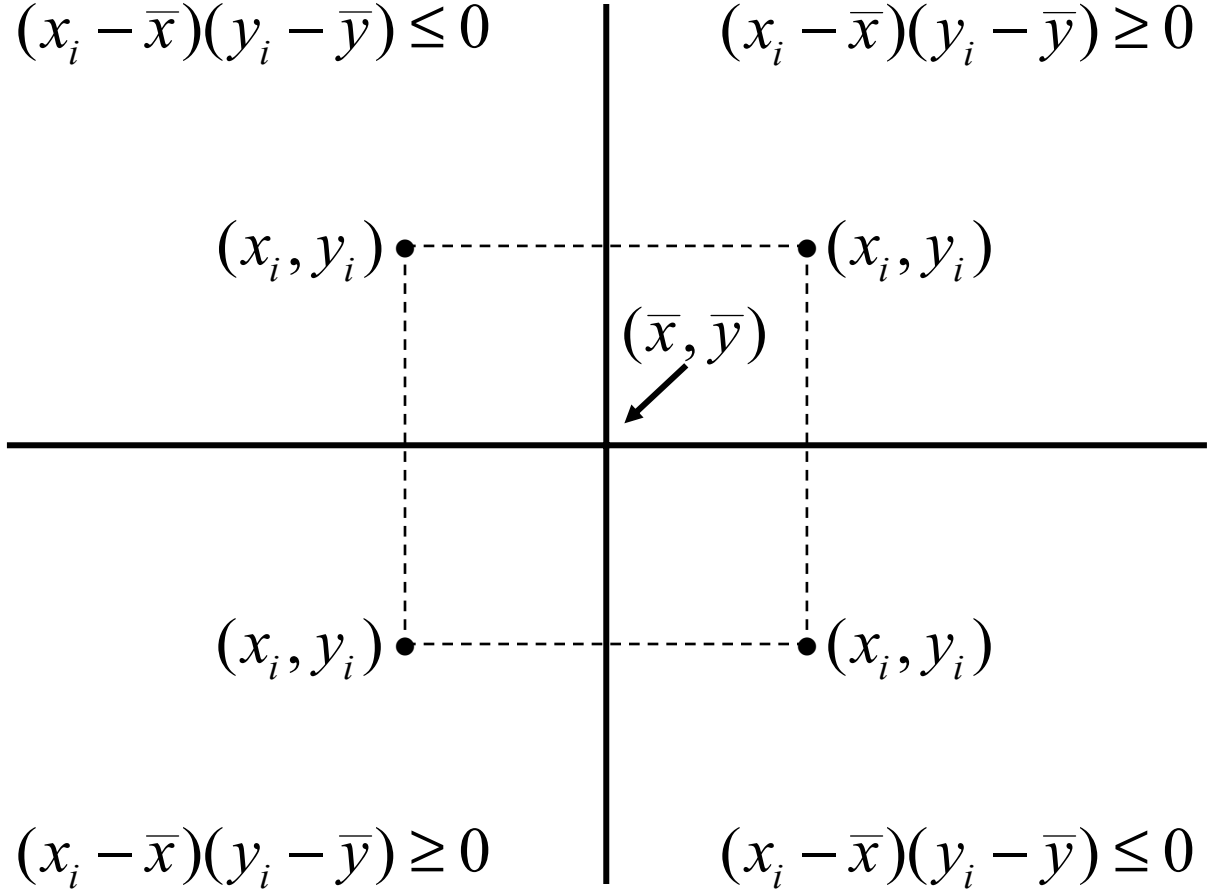
  $$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \leq 0 \quad \begin{cases} \text{jos } x_i \geq \bar{x} \text{ ja } y_i \leq \bar{y} \\ \text{jos } x_i \leq \bar{x} \text{ ja } y_i \geq \bar{y} \end{cases}$$

- Merkin määräytymistä voidaan *havainnollistaa geometrisesti* seuraavalla tavalla (ks. kuviota seuraavalla kalvolla):

  (i) Jaetaan xy-taso neljään osaan eli *neljännekseen* pisteen $(\bar{x}, \bar{y})$ kautta piirretyillä koordinaattiakseleiden suuntaisilla suorilla.

  (ii) Termin $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ *merkin* määrää se, *mihin neljännekseen havaintopiste* (x_i, y_i) *sijoittuu*.

Otoskovarianssi: Merkin määräytyminen 3/4



Otoskovarianssi: Merkin määräytyminen 4/4

- Jos positiiviset termit summalausekkeeseen

  (1) $\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

  tuottavien suorakaiteiden yhteenlaskettu pinta-ala on *suurempi* (*pienempi*) kuin negatiiviset termit tuottavien suorakaiteiden yhteenlaskettu pinta-ala, otoskovarianssin s_{xy} merkki on *positiivinen* (*negatiivinen*).
- Siten otoskovarianssilla on taipumus saada *positiivisia* (*negatiivisia*) arvoja, jos havaintopisteiden muodostama pistepilvi tai -parvi *näyttää nousevalta* (*laskevalta*) *oikealle mentäessä*; ks. *pistediagrammin* ilmeen ja Pearsonin *otoskorrelaatiokertoimen* yhteyttä kuvaavia havainnollistuksia tässä kappaleessa.

Otoskovarianssi: Tulkinta

- Havaintoarvojen pareista (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \ldots , n$ laskettu otoskovarianssi s_{xy} mittaa x- ja y-havaintoarvojen *yhteisvaihtelua* niiden aritmeettisten keskiarvojen ympärillä.
- Mitä suurempi on otoskovarianssin s_{xy} itseisarvo

  $$|s_{xy}|$$

  sitä voimakkaampaa on x- ja y-havaintoarvojen yhteisvaihtelu.

Otoskovarianssi ja Pearsonin otoskorrelaatiokerroin

- Otoskovarianssin s_{xy} avulla voidaan määritellä x- ja y-havaintoarvojen *lineaarisen tilastollisen riippuvuuden voimakkuuden mittari*, jota kutsutaan **Pearsonin otoskorrelaatiokertoimeksi**.
- Pearsonin otoskorrelaatiokerroin r_{xy} saadaan otos-kovarianssista s_{xy} *normeerausoperaatiolla*, jossa x- ja y-havaintoarvojen otoskovarianssi s_{xy} jaetaan x- ja y-havaintoarvojen keskihajonnoilla s_x ja s_y .

Pearsonin otoskorrelaatiokerroin: Määritelmä 1/2

- Havaintoarvojen pareista (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \ldots, n$ laskettu **Pearsonin otoskorrelaatiokerroin** on

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

jossa

s_{xy} = x- ja y-havaintoarvojen otoskovarianssi

s_x = x-havaintoarvojen keskihajonta

s_y = y-havaintoarvojen keskihajonta

Pearsonin otoskorrelaatiokerroin: Määritelmä 2/2

- Havaintoarvojen pareista (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \ldots , n$ laskettu *Pearsonin otoskorrelaatiokerroin* voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$$

jossa

$\bar{x}$ = x-havaintoarvojen aritmeettinen keskiarvo

$\bar{y}$ = y-havaintoarvojen aritmeettinen keskiarvo

Pearsonin otoskorrelaatiokerroin: Ominaisuuksia

- Havaintoarvojen pareista (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \ldots, n$ lasketulla *Pearsonin otoskorrelaatiokertoimella* r_{xy} on seuraavat ominaisuudet:

  (i) $-1 \le r_{xy} \le +1$

  (ii) $r_{xy} = \pm 1$, jos ja vain jos

  $$y_i = \alpha + \beta x_i$$

  jossa α ja β ovat reaalisia *vakiota* ja $\beta \neq 0$.

  Lisäksi $\text{sgn}(\beta) = \text{sgn}(r_{xy})$

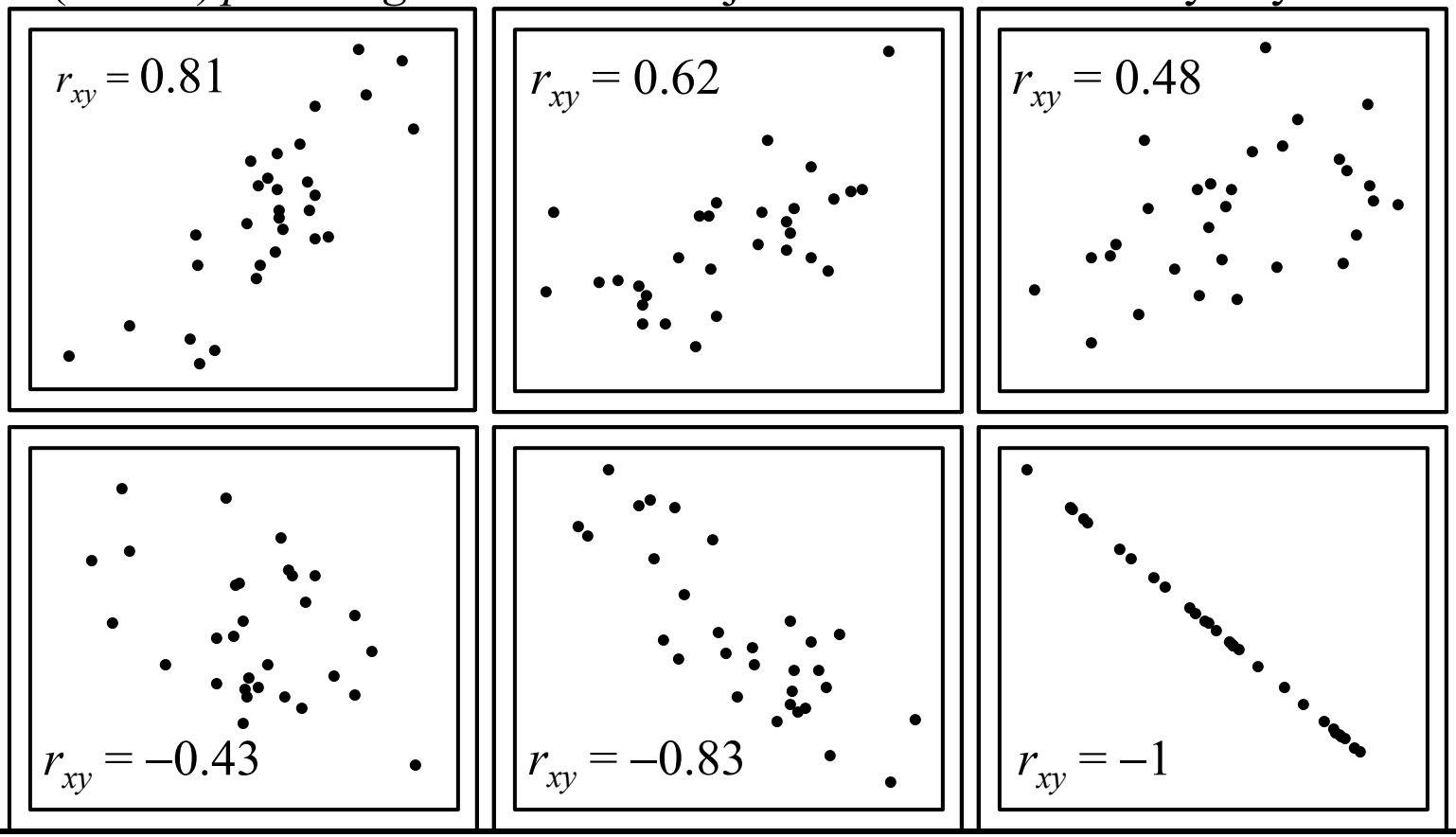
  (iii) Korrelaatiokertoimella r_{xy} ja kovarianssilla s_{xy} on aina *sama merkki*.

Pearsonin otoskorrelaatiokerroin: Tulkinta

- Havaintoarvojen pareista (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \ldots , n$ laskettu *Pearsonin otoskorrelaatiokerroin* r_{xy} mittaa x- ja y-havaintoarvojen *lineaarisen tilastollisen riippuvuuden voimakkuutta*.
- Jos $r_{xy} = \pm 1$, niin x- ja y-havaintoarvojen välillä *on eksakti* eli *funktionaalinen lineaarinen riippuvuus*, mikä merkitsee sitä, että kaikki havaintopisteet (x_i, y_i) asettuvat samalle suoralle.
- Jos $r_{xy} = 0$, niin x- ja y-havaintoarvojen välillä *ei voi olla eksaktia lineaarista riippuvuutta*.
- Vaikka $r_{xy} = 0$, x- ja y-havaintoarvojen välillä *saattaa silti olla jopa eksakti epälineaarinen riippuvuus*.

Pearsonin otoskorrelaatiokerroin: Havainnollistus

- Kuviot alla havainnollistavat kahden muuttujan havaittujen arvojen ($n = 30$) *pistediagrammin ilmeen* ja *korrelaation* välistä yhteyttä.



Tunnuslukujen laskeminen 1/4

- Oletetaan, että haluamme laskea havaintoarvojen pareista

  (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \ldots, n$

  seuraavat otostunnusluvut *käsin* tai käyttämällä *laskinta*:

  (i) *Aritmeettiset keskiarvot*: $\overline{x}$, $\overline{y}$

  (ii) *Varianssit*: s_x^2 , s_y^2

  (iii) *Keskihajonnat*: s_x , s_y

  (iv) *Kovarianssi*: s_{xy}

  (v) *Korrelaaatio*: r_{xy}

- Tällöin tarvittavat laskutoimitukset on mukavinta järjestää seuraavalla kalvolla esitettävän kaavion muotoon.

Tunnuslukujen laskeminen 2/4

- Määrätään ensin havaintoarvojen *summat*, *neliösummat* ja *tulosumma*:

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	x_1	y_1	x_1^2	y_1^2	$x_1 y_1$
2	x_2	y_2	x_2^2	y_2^2	$x_2 y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_n	y_n	x_n^2	y_n^2	$x_n y_n$
Summa	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} y_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Tunnuslukujen laskeminen 3/4

- Havaintoarvojen *aritmeettiset keskiarvot*, *varianssit* ja *kovarianssi* saadaan havaintoarvojen *summista*, *neliö-summista* ja *tulosummasta* alla esitetyillä kaavoilla:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad s_x^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad s_y^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\right)$$

Tunnuslukujen laskeminen 4/4

- Havaintoarvojen *keskihajonnat* ja *Pearsonin otos-korrelaatiokerroin* saadaan havaintoarvojen *variansseista* ja *kovarianssista* alla esitetyillä kaavoilla:

$$s_x = \sqrt{s_x^2}$$

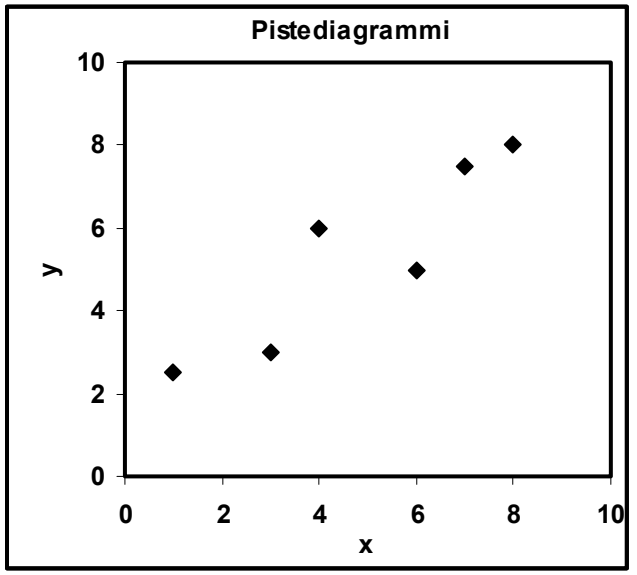
$$s_y = \sqrt{s_y^2}$$

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

Tunnuslukujen laskeminen: Havainnollistava esimerkki 1/5

- Taulukossa oikealla on keinotekoisen kahden muuttujan aineiston havaintoarvot ($n = 6$).
- Aineistoa kuvaava *pistediagrammi* on oikealla alhaalla.

i	*x*	*y*
1	1	2.5
2	3	3
3	4	6
4	6	5
5	7	7.5
6	8	8



Tunnuslukujen laskeminen: Havainnollistava esimerkki 2/5

- Alla olevassa taulukossa on laskettu muuttujien *x* ja *y* havaittujen arvojen *summat*, *neliösummat* ja *tulosumma*.

i	*x*	*y*	x^2	y^2	*xy*
1	1	2.5	1	6.25	2.5
2	3	3	9	9	9
3	4	6	16	36	24
4	6	5	36	25	30
5	7	7.5	49	56.25	52.5
6	8	8	64	64	64
Summa	29	32	175	196.5	182

- Muuttujien *x* ja *y* havaittujen arvojen *aritmeettiset keskiarvot*, *otosvarianssit*, *keskihajonnat*, *otoskovarianssi* ja *otoskorrelaatio* voidaan laskea näistä viidestä summasta; ks. seuraavaa kalvoa.

Tunnuslukujen laskeminen: Havainnollistava esimerkki 3/5

- Keskiarvot, otosvarianssit ja otoskovarianssi:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{6} \times 29 = 4.833$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right) = \frac{1}{6-1}\left(175 - \frac{1}{6} \times 29^2 \right) = 6.967$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{6} \times 32 = 5.333$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)^2 \right) = \frac{1}{6-1}\left(196.5 - \frac{1}{6} \times 32^2 \right) = 5.167$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right) \right) = \frac{1}{6-1}\left(182 - \frac{1}{6} \times 29 \times 32 \right)$$

$$= 5.467$$

Tunnuslukujen laskeminen: Havainnollistava esimerkki 4/5

- Otoskeskihajonnat ja otoskorrelaatio:

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{6.967} = 2.639$$

$$s_y = \sqrt{s_y^2} = \sqrt{5.167} = 2.273$$

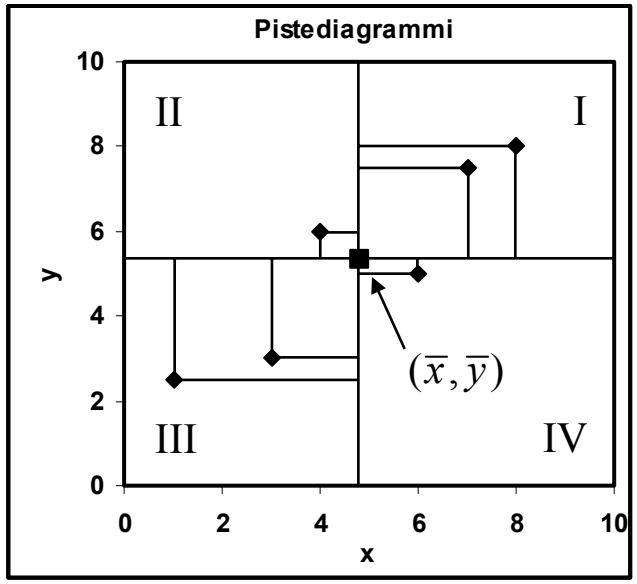
$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{5.467}{2.639 \times 2.273} = 0.9112$$

Tunnuslukujen laskeminen: Havainnollistava esimerkki 5/5

- Kuvioon oikealla on lisätty havainto-pisteiden *painopiste*

  $(\bar{x}, \bar{y}) = (4.833, 5.333)$

- Lisäksi kuvioon on piirretty painopisteen kautta kulkevat koordinaattiakseleiden suuntaiset suorat sekä *kovarianssin* ja *korrelaation merkin määräytymistä* havainnollistavat suorakaiteet.
- Kovarianssi (ja siten myös korrelaatio) on *positiivinen*, koska I ja III neljänneksen suorakaiteiden yhteenlaskettu pinta-ala on *suurempi* kuin II ja IV neljänneksen suora-kaiteiden yhteenlaskettu pinta-ala; ks. tässä kappaleessa esitettyä selitystä *kovarianssin merkin* määräytymisestä.



Tilastollinen riippuvuus ja korrelaatio

Tilastollinen riippuvuus, korrelaatio ja regressio
Kahden muuttujan havaintoaineiston kuvaaminen
>> Pearsonin korrelaatiokertoimen estimointi ja testaus
Järjestyskorrelaatiokertoimet

Korrelaation estimointi ja testaus

- Tarkastellaan *välimatka*- tai *suhdeasteikollisten* satunnaismuuttujien X ja Y *Pearsonin* (*tulomomentti*-) *korrelaatiokertoimen* ρ_{XY} **estimointia** sekä seuraavia testejä *korrelaatiokertoimelle* ρ_{XY} :
  - **Yhden otoksen testi korrelaatiokertoimelle**
  - **Korrelaatiokertoimien vertailutesti**
  - **Korreloimattomuuden testaaminen**
- Lisätietoja moniulotteisista satunnaismuuttujista ja jakaumista: Ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukuja **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja jakaumat** ja **Moniulotteisia jakaumia.**

Satunnaismuuttujien kovarianssi ja korrelaatio 1/2

- Olkoon

  (X, Y)

  satunnaismuuttujien X ja Y muodostama järjestetty *pari*.

- Olkoot

  $$\mu_X = \mathrm{E}(X)$$

  $$\mu_Y = \mathrm{E}(Y)$$

  satunnaismuuttujien X ja Y *odotusarvot* ja

  $$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \mathrm{E}[(X - \mu_X)^2]$$

  $$\sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{D}^2(Y) = \mathrm{E}[(Y - \mu_Y)^2]$$

  satunnaismuuttujien X ja Y *varianssit*.

Satunnaismuuttujien kovarianssi ja korrelaatio 2/2

- Määritellään satunnaismuuttujien X ja Y **kovarianssi** σ_{XY} kaavalla

$$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

- Määritellään satunnaismuuttujien X ja Y **korrelaatio** ρ_{XY} kaavalla

$$\rho_{XY} = \mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

jossa

$$\sigma_X = \mathrm{D}(X) = \sqrt{\sigma_X^2}$$

$$\sigma_Y = \mathrm{D}(Y) = \sqrt{\sigma_Y^2}$$

Satunnaismuuttujien korrelaatio

- Satunnaismuuttujien X ja Y korrelaatiota

  $$\rho_{XY} = \mathrm{Cor}(X, Y)$$

  kutsutaan tavallisesti **Pearsonin** (**tulomomentti-**) **korrelaatiokertoimeksi**.
- Pearsonin korrelaatiokerroin ρ_{XY} mittaa satunnaismuuttujien X ja Y *lineaarisen riippuvuuden voimakkuutta*.

Pearsonin korrelaatiokertoimen estimointi 1/3

- Oletetaan, että satunnaismuuttujien X ja Y muodostama järjestetty pari (X, Y) noudattaa 2-*ulotteista normaali-jakaumaa* $\mathrm{N}_2(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho_{XY})$, jossa

$$\mu_X = \mathrm{E}(X) \qquad \mu_Y = \mathrm{E}(Y)$$

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) \qquad \sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(Y)$$

$$\rho_{XY} = \mathrm{Cor}(X, Y)$$

- Olkoon

$$(X_i, Y_i)\,, i = 1, 2, \ldots, n$$

riippumaton satunnaisotos satunnaismuuttujien X ja Y muodostaman parin (X, Y) jakaumasta.

Pearsonin korrelaatiokertoimen estimointi 2/3

- Olkoot

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad s_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$$

$$s_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}$$

tavanomaiset havaintoarvojen pareista (X_i, Y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ lasketut *otostunnusluvut*.

Pearsonin korrelaatiokertoimen estimointi 3/3

- Satunnaismuuttujien X ja Y *Pearsonin* (*tulomomentti*-) *korrelaatiokerroin*

$$\rho_{XY} = \mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

voidaan **estimoida** vastaavalla *Pearsonin otoskorrelaatio-kertoimella*

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}$$

- Huomautus:

  Estimaattori r_{XY} voidaan johtaa sekä *momenttimenetelmällä* että *suurimman uskottavuuden menetelmällä*.

Fisherin *z*-muunnos

- Määritellään **Fisherin *z*-muunnos** kaavalla

$$z = f(u) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

- Soveltamalla Fisherin *z*-muunnosta **luottamusvälit** ja **testit Pearsonin tulomomenttikorrelaatiokertoimelle** ρ_{XY} voidaan konstruoida *samanlaisella tekniikalla* kuin luottamusvälit ja testit konstruoidaan *normaalijakauman odotusarvolle*; ks. lukuja **Väliestimointi** ja **Testit suhde-asteikollisille muuttujille.**

Luottamusväli Pearsonin korrelaatiokertoimelle: Oletukset

- Oletetaan, että satunnaismuuttujien X ja Y muodostama järjestetty pari (X, Y) noudattaa 2-*ulotteista normaali-jakaumaa* $\mathrm{N}_2(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho_{XY})$, jossa

$$\mu_X = \mathrm{E}(X) \qquad \mu_Y = \mathrm{E}(Y)$$

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) \qquad \sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(Y)$$

$$\rho_{XY} = \mathrm{Cor}(X, Y)$$

- Olkoon

$$(X_i, Y_i)\,, i = 1, 2, \ldots, n$$

riippumaton satunnaisotos satunnaismuuttujien X ja Y muodostaman parin (X, Y) jakaumasta.

Luottamusväli Pearsonin korrelaatiokertoimelle: Parametrien estimointi

- Estimoidaan 2-ulotteisen normaalijakauman parametrit *tavanomaisilla estimaattoreillaan*:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad s_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$$

$$s_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}$$

Luottamusväli Pearsonin korrelaatiokertoimelle: Fisherin *z*-muunnos 1/2

- Sovelletaan *Fisherin z-muunnosta* $z = f(u)$ otoskorrelaatiokertoimeen r_{XY} :

$$z = f(r_{XY}) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+r_{XY}}{1-r_{XY}}\right)$$

- Voidaan osoittaa, että satunnaismuuttuja z noudattaa suurissa otoksissa *approksimatiivisesti normaalijakaumaa*:

$$z \sim_a \mathrm{N}(\mu_z, \sigma_z^2)$$

jossa

$$\mu_z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\rho_{XY}}{1-\rho_{XY}}\right) \quad \text{ja} \quad \sigma_z^2 = \frac{1}{n-3}$$

- Approksimaatio on käytännössä *riittävän hyvä*, kun $n > 25$.

Luottamusväli Pearsonin korrelaatiokertoimelle: Fisherin *z*-muunnos 2/2

- Pearsonin korrelaatiokertoimelle ρ_{XY} voidaan konstruoida *approksimatiivinen luottamusväli Fisherin z-muunnoksen* avulla.
- Olkoon

$$\mu_z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\rho_{XY}}{1-\rho_{XY}}\right) \quad \text{ja} \quad \sigma_z^2 = \frac{1}{n-3}$$

- Tällöin *standardoitu satunnaismuuttuja*

$$v = \frac{z-\mu_z}{\sigma_z}$$

noudattaa suurissa otoksissa *approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa* N(0,1):

$$v \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

Luottamusväli Pearsonin korrelaatiokertoimelle: Luottamustaso

- Määrätään *approksimatiivinen* **luottamusväli Pearsonin korrelaatiokertoimelle** ρ_{XY} .
- Valitaan **luottamustasoksi**

  $1 - \alpha$

- Luottamustason valinta kiinnittää todennäköisyyden, jolla konstruoitava luottamusväli peittää korrelaatiokertoimen ρ_{XY} oikean arvon.

Luottamusväli Pearsonin korrelaatiokertoimelle: Luottamuskertoimet 1/2

- Olkoon luottamustasona $(1 - \alpha)$.
- Valitaan **luottamuskerroin** eli piste

  $+z_{\alpha/2}$

  siten, että se *erottaa standardoidun normaalijakauman* N(0, 1) *oikealle hännälle todennäköisyysmassan* $\alpha/2$.
- Koska normaalijakauma on *symmetrinen*, **luottamus-kerroin** eli piste

  $-z_{\alpha/2}$

  erottaa standardoidun normaalijakauman vasemmalle hännälle todennäköisyysmassan $\alpha/2$.

Luottamusväli Pearsonin korrelaatiokertoimelle: Luottamuskertoimet 2/2

- Siten luottamuskertoimet $+z_{\alpha/2}$ ja $-z_{\alpha/2}$ valitaan siten, että

$$\Pr(z \geq +z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Pr(z \leq -z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

  jossa satunnaismuuttuja z noudattaa standardoitua normaalijakaumaa:

$$z \sim \mathrm{N}(0,1)$$

- Huomaa, että

$$\Pr(-z_{\alpha/2} \leq z \leq +z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Luottamusväli Pearsonin korrelaatiokertoimelle: Parametrin μ_z luottamusväli 1/2

- **Parametrin**

$$\mu_z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\rho_{XY}}{1-\rho_{XY}}\right)$$

approksimatiivinen **luottamusväli luottamustasolla** $(1-\alpha)$ on edellä esitetyn nojalla muotoa

$$\left(z - z_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n-3}}, z + z_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n-3}}\right)$$

Luottamusväli Pearsonin korrelaatiokertoimelle: Parametrin μ_z luottamusväli 2/2

- Parametrin μ_z approksimatiivisen luottamusvälin

$$\left(z - z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n-3}} , z + z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n-3}} \right)$$

kaavassa

$$z = f(r_{XY}) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + r_{XY}}{1 - r_{XY}} \right)$$

n = havaintojen *lukumäärä*

$-z_{\alpha/2}$, $+z_{\alpha/2}$ = luottamustasoon $(1 - \alpha)$ liittyvät *luottamuskertoimet standardoidusta normaalijakaumasta* N(0, 1)

Luottamusväli Pearsonin korrelaatiokertoimelle: Parametrin μ_z luottamusvälin tulkinta

- Parametrin μ_z approksimatiivisen luottamusvälin

$$\left(z - z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n-3}} , z + z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n-3}} \right)$$

konstruktiosta seuraa, että

$$\Pr\left(z - z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n-3}} \leq \mu_z \leq z + z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n-3}} \right) =_a 1-\alpha$$

- Siten konstruoitu luottamusväli *peittää* parametrin μ_z oikean arvon approksimatiivisesti todennäköisyydellä $(1 - \alpha)$ ja se *ei peitä* parametrin μ_z oikeata arvoa approksimatiivisesti todennäköisyydellä α.

Luottamusväli Pearsonin korrelaatiokertoimelle: Korrelaatiokertoimen ρ_{XY} luottamusväli 1/2

- *Pearsonin korrelaatiokertoimen ρ_{XY} approksimatiivinen luottamusväli* saadaan parametrin μ_z luottamusvälistä ratkaisemalla ρ_{XY} epäyhtälöketjusta

$$z - z_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{1}{2}\log\frac{1+r_{XY}}{1-r_{XY}} - z_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

$$\leq \mu_z = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho_{XY}}{1-\rho_{XY}}$$

$$\leq z + z_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{1}{2}\log\frac{1+r_{XY}}{1-r_{XY}} + z_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

Luottamusväli Pearsonin korrelaatiokertoimelle: Korrelaatiokertoimen ρ_{XY} luottamusväli 2/2

- **Pearsonin korrelaatiokertoimen** ρ_{XY} *approksimatiiviseksi* **luottamusväliksi** saadaan

$$(lb, ub)$$

jossa

$$lb = \frac{(1+r_{XY}) - (1-r_{XY})\exp\left(+2z_{\alpha/2}/\sqrt{n-3}\right)}{(1+r_{XY}) + (1-r_{XY})\exp\left(+2z_{\alpha/2}/\sqrt{n-3}\right)}$$

on luottamusvälin *alaraja* ja

$$ub = \frac{(1+r_{XY}) - (1-r_{XY})\exp\left(-2z_{\alpha/2}/\sqrt{n-3}\right)}{(1+r_{XY}) + (1-r_{XY})\exp\left(-2z_{\alpha/2}/\sqrt{n-3}\right)}$$

on luottamusvälin *yläraja*.

Luottamusväli Pearsonin korrelaatiokertoimelle: Korrelaatiokertoimen ρ_{XY} luottamusvälin tulkinta

- Pearsonin korrelaatiokertoimen ρ_{XY} approksimatiivisen luottamusvälin

  $$(lb, ub)$$

  konstruktiosta seuraa, että

  $$\Pr\left(lb \leq \rho_{XY} \leq ub\right) =_a 1 - \alpha$$

- Siten konstruoitu luottamusväli *peittää* korrelaatio-kertoimen ρ_{XY} oikean arvon approksimatiivisesti toden-näköisyydellä $(1 - \alpha)$ ja se *ei peitä* korrelaatiokertoimen ρ_{XY} oikeata arvoa approksimatiivisesti todennäköisyydellä α.

Yhden otoksen testi korrelaatiokertoimelle: Testausasetelma

- Tarkastellaan *yhden otoksen testiä Pearsonin korrelaatiokertoimelle*.
- Fisherin *z*-muunnoksen avulla testi voidaan pukea tavanomaisen *t-testin* muotoon.

Yhden otoksen testi korrelaatiokertoimelle: Yleinen hypoteesi

- *Yleinen hypoteesi* H :

  (i) Oletetaan, että satunnaismuuttujien X ja Y muodostama järjestetty pari (X, Y) noudattaa 2-*ulotteista normaalijakaumaa*, jonka parametrit ovat

  $$\mu_X = \mathrm{E}(X) \qquad \mu_Y = \mathrm{E}(Y)$$

  $$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) \qquad \sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(Y)$$

  $$\rho_{XY} = \mathrm{Cor}(X, Y)$$

  (ii) Olkoon

  $$(X_i, Y_i)\,, i = 1, 2, \ldots, n$$

  riippumaton satunnaisotos satunnaismuuttujien X ja Y muodostaman parin (X, Y) jakaumasta.

Yhden otoksen testi korrelaatiokertoimelle: Nollahypoteesi ja vaihtoehtoinen hypoteesi

- *Nollahypoteesi* H_0 :

$$\mathrm{H}_0 : \rho_{XY} = \rho_0$$

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{H}_1 : \rho_{XY} > \rho_0 \\ \mathrm{H}_1 : \rho_{XY} < \rho_0 \end{array}\right\} \text{ 1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : \rho_{XY} \neq \rho_0 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Yhden otoksen testi korrelaatiokertoimelle: Parametrien estimointi

- Estimoidaan 2-ulotteisen normaalijakauman parametrit *tavanomaisilla estimaattoreillaan*:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad s_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$$

$$s_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}$$

Yhden otoksen testi korrelaatiokertoimelle: Fisherin *z*-muunnos 1/2

- Sovelletaan *Fisherin z-muunnosta* $z = f(u)$ otoskorrelaatiokertoimeen r_{XY} :

$$z = f(r_{XY}) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+r_{XY}}{1-r_{XY}}\right)$$

- Satunnaismuuttuja z noudattaa suurissa otoksissa *approksimatiivisesti normaalijakaumaa*:

$$z \sim_a \mathrm{N}(\mu_z, \sigma_z^2)$$

jossa

$$\mu_z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\rho_{XY}}{1-\rho_{XY}}\right) \quad \text{ja} \quad \sigma_z^2 = \frac{1}{n-3}$$

- Approksimaatio on *riittävän hyvä*, kun $n > 25$.

Yhden otoksen testi korrelaatiokertoimelle: Fisherin *z*-muunnos 2/2

- Testi nollahypoteesille

$$\mathrm{H}_0 : \rho_{XY} = \rho_0$$

voidaan perustaa *Fisherin z-muunnoksen* käyttöön.

- *Jos nollahypoteesi* H_0 *pätee*,

$$\mathrm{E}(z) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right) = \mu_z^0$$

- Siten satunnaismuuttuja

$$v = \frac{z - \mu_z^0}{\sigma_z}$$

noudattaa *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä* suurissa otoksissa *approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa*.

Yhden otoksen testi korrelaatiokertoimelle: Testisuure ja sen jakauma

- Määritellään **testisuure**

$$v = \frac{\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+r_{XY}}{1-r_{XY}}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n-3}}}$$

- *Jos nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \rho_{XY} = \rho_0$$

pätee, testisuure *v noudattaa* suurissa otoksissa *approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa*:

$$v \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

Yhden otoksen testi korrelaatiokertoimelle: Testi

- Testisuureen *v normaaliarvo* = 0, koska *nollahypoteesin* $H_0 : \rho_{XY} = \rho_0$ *pätiessä*

  $E(v) = 0$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen *v* arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- Nollahypoteesi H_0 *hylätään*, jos testin *p*-arvo on *kyllin pieni*.

Korrelaatiokertoimien vertailutesti: Testausasetelma

- Tarkastellaan *vertailutestiä Pearsonin korrelaatio-kertoimille*.
- Fisherin *z*-muunnoksen avulla testi voidaan pukea tavanomaisen *riippumattomien otosten t-testin* muotoon.

Korrelaatiokertoimien vertailutesti: Hypoteesit

- *Yleinen hypoteesi* H :

  Oletetaan, että käytössä on kaksi toisistaan riippumatonta yksinkertaista satunnaisotosta perusjoukoista, jotka noudattavat 2-*ulotteisia normaalijakaumia*, joiden korrelaatiokertoimet ovat ρ_1 ja ρ_2 .

- *Nollahypoteesi* H_0 :

  $$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_0$$

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

  $$\left.\begin{array}{l} H_1 : \rho_1 > \rho_2 \\ H_1 : \rho_1 < \rho_2 \end{array}\right\}$$ 1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit

  $H_1 : \rho_1 \neq \rho_2$ 2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi

Korrelaatiokertoimien vertailutesti: Parametrien estimointi

- Olkoot

  n_1 ja n_2

  otoskoot otoksista 1 ja 2.

- Olkoot

  r_1 ja r_2

  otoksista 1 ja 2 lasketut *Pearsonin otoskorrelaatio-kertoimet*.

Korrelaatiokertoimien vertailutesti: Fisherin *z*-muunnokset

- Olkoon

$$z_k = f(r_k) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+r_k}{1-r_k}\right)$$

  Fisherin z-muunnos otoksesta k lasketulle otoskorrelaatio-kertoimelle r_k , $k = 1, 2$.

- *Jos nollahypoteesi* $\mathrm{H}_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_0$ *pätee*, satunnaismuuttuja z_k , $k = 1, 2$ noudattaa suurissa otoksissa *approksimatiivisesti normaalijakaumaa* $\mathrm{N}(\mu_z^0, \sigma_k^2)$, jossa

$$\mu_z^0 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right) \quad \text{ja} \quad \sigma_k^2 = \frac{1}{n_k - 3}$$

- Approksimaatio on *riittävän hyvä*, kun $n_1 > 25$ ja $n_2 > 25$.

Korrelaatiokertoimien vertailutesti: Testisuure ja sen jakauma 1/2

- Koska satunnaismuuttujat z_1 ja z_2 ovat *riippumattomia*, satunnaismuuttuja

$$v = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}}$$

noudattaa *nollahypoteesin* $\mathrm{H}_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_0$ *pätiessä* suurissa otoksissa *approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa*:

$$v \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

Korrelaatiokertoimien vertailutesti: Testisuure ja sen jakauma 2/2

- Määritellään **testisuure**

$$v = \frac{\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+r_1}{1-r_1}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+r_2}{1-r_2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}}$$

- *Jos nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_0$$

pätee, testisuure *v noudattaa* suurissa otoksissa *approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa*:

$$v \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

Korrelaatiokertoimien vertailutesti: Testi

- Testisuureen *v normaaliarvo* = 0, koska *nollahypoteesin* $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_0$ *pätiessä*

  $E(v) = 0$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen *v* arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- Nollahypoteesi H_0 *hylätään*, jos testin *p*-arvo on *kyllin pieni*.

Korreloimattomuuden testaaminen: Testausasetelma

- Monissa tutkimustilanteissa ollaan kiinnostuneita siitä ovatko satunnaismuuttujat *X* ja *Y korreloimattomia* vai ei.
- Huomautuksia:
  - **Satunnaismuuttujien *X* ja *Y korreloimattomuudesta ei välttämättä seuraa niiden riippumattomuus*, vaikka satunnaismuuttujien *X* ja *Y riippumattomuudesta seuraa aina niiden korreloimattomuus***.
  - Jos satunnaismuuttujat *X* ja *Y* noudattavat 2-*ulotteista normaalijakaumaa*, satunnaismuuttujien *X* ja *Y korreloimattomuudesta seuraa niiden riippumattomuus*.
  - Monissa tutkimusasetelmissa toivotaan, että korreloimattomuusoletus *tulee* testissä *hylätyksi*.

Korreloimattomuuden testaaminen: Yleinen hypoteesi

- *Yleinen hypoteesi* H :

  (i) Oletetaan, että satunnaismuuttujien X ja Y järjestetty pari (X, Y) noudattaa 2-*ulotteista normaalijakaumaa*, jonka parametrit ovat

  $$\mu_X = \mathrm{E}(X) \qquad \mu_Y = \mathrm{E}(Y)$$
  $$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) \qquad \sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(Y)$$
  $$\rho_{XY} = \mathrm{Cor}(X, Y)$$

  (ii) Olkoon

  $$(X_i, Y_i)\,, i = 1, 2, \ldots, n$$

  riippumaton satunnaisotos satunnaismuuttujien X ja Y muodostaman parin (X, Y) jakaumasta.

Korreloimattomuuden testaaminen: Nollahypoteesi ja vaihtoehtoinen hypoteesi

- *Nollahypoteesi* H_0 :

$$\mathrm{H}_0 : \rho_{XY} = 0$$

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{H}_1 : \rho_{XY} > 0 \\ \mathrm{H}_1 : \rho_{XY} < 0 \end{array}\right\} \quad \text{1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : \rho_{XY} \neq 0 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Korreloimattomuuden testaaminen: Parametrien estimointi

- Estimoidaan 2-ulotteisen normaalijakauman parametrit *tavanomaisilla estimaattoreillaan*:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad s_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$$

$$s_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}$$

Korreloimattomuuden testaaminen: Testisuure ja sen jakauma

- Määritellään ***t*-testisuure**

$$t = \sqrt{n-2}\,\frac{r_{XY}}{\sqrt{1-r_{XY}^2}}$$

- *Jos nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \rho_{XY} = 0$$

pätee, testisuure *t noudattaa Studentin t-jakaumaa*, jonka vapausasteluku on $n-2$:

$$t \sim t(n-2)$$

Korreloimattomuuden testaaminen: Testi

- Testisuureen *t normaaliarvo* = 0, koska *nollahypoteesin* $H_0 : \rho_{XY} = 0$ *pätiessä*

  $E(t) = 0$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen *t* arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- Nollahypoteesi H_0 *hylätään*, jos testin *p*-arvo on *kyllin pieni*.

Tilastollinen riippuvuus ja korrelaatio

Tilastollinen riippuvuus, korrelaatio ja regressio

Kahden muuttujan havaintoaineiston kuvaaminen

Pearsonin korrelaatiokertoimen estimointi ja testaus

>> Järjestyskorrelaatiokertoimet

Korreloimattomuuden testaaminen järjestysasteikollisilla muuttujilla

- Tarkastellaan *korrelaatiokertoimen määrittelemistä* ja *korreloimattomuuden testaamista järjestysasteikollisille muuttujille*.
- Tarkastelun kohteena ovat seuraavat *järjestyskorrelaatio-kertoimet*:
  - **Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin**
  - **Kendallin järjestyskorrelaatiokerroin**
- Tarkasteltavat järjestyskorrelaatiokertoimet ja testit sopivat myös *välimatka*- ja *suhdeasteikollisille* muuttujille.

Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin: Kertoimen idea

- *Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin* ρ_S mittaa kahden muuttujan havaintoarvojen suuruusjärjestyksien yhteensopivuutta.
- Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin sopii *järjestys*-, *välimatka*- ja *suhdeasteikollisille* muuttujille.
- Spearmanin järjestyskorrelaatiokertoimella on samantapaiset ominaisuudet kuin *Pearsonin otoskorrelaatiokertoimella*.

Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin: Määritelmä 1/3

- Olkoot $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ja $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ *järjestys-*, *välimatka-* tai *suhdeasteikollisten* satunnaismuuttujien X ja Y havaittuja arvoja.
- Oletetaan lisäksi, että havainnot X_i ja Y_i liittyvät *samaan havaintoyksikköön kaikille* $i = 1, 2, \ldots, n$.
- *Järjestetään* sekä X- että Y-muuttujan havaitut arvot *suuruusjärjestykseen* pienimmästä suurimpaan.

Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin: Määritelmä 2/3

- Liitetään sekä X- että Y-muuttujan havaittuihin arvoihin niiden *suuruusjärjestyksien* mukaiset järjestysnumerot:

  $R(X_i)$ = havainnon X_i järjestysnumero parissa i

  $R(Y_i)$ = havainnon Y_i järjestysnumero parissa i

  sekä määritellään erotukset

  $$D_i = R(X_i) - R(Y_i)$$

- Muuttujien X ja Y havaituille arvoille voidaan määritellä *järjestyskorrelaatiokerroin* erotuksien D_i avulla.

Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin: Määritelmä 3/3

- Määritellään **Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin** ρ_S eli *Spearmanin rho* kaavalla

$$\rho_S = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n^3 - n}$$

- Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin ρ_S voidaan laskea myös soveltamalla *Pearsonin otoskorrelaatio-kertoimen* kaavaa muuttujien X ja Y havaittujen arvojen pareja (X_i, Y_i) vastaaviin järjestyslukujen eli *rankien* pareihin

$$(R(X_i), R(Y_i))$$

Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin: Ominaisuudet 1/2

- Spearmanin järjestyskorrelaatiokertoimella ρ_S on kaikki *hyvältä korrelaation mitalta vaadittavat ominaisuudet*:

  (i) $-1 \leq \rho_S \leq +1$

  (ii) Jos muuttujien X ja Y havaittujen arvojen järjestysnumerot ovat jokaisessa havaintoparissa *samat*,

  $$\rho_S = +1$$

  (iii) Jos muuttujien X ja Y havaittujen arvojen järjestysnumerot liittyvät toisiinsa *täysin satunnaisesti*,

  $$\rho_S \approx 0$$

  Jos $\rho_S = 0$, sanotaan, että muuttujat X ja Y ovat *korreloimattomia*.

Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin: Ominaisuudet 2/2

(iv) Jos sekä *suuret* muuttujien X ja Y järjestysnumerot että *pienet* muuttujien X ja Y järjestysnumerot liittyvät havaintopareissa (X_i, Y_i) toisiinsa, kertoimella ρ_S on taipumus saada *positiivisia* arvoja.

(v) Jos *suuret* ja *pienet* muuttujien X ja Y järjestysnumerot liittyvät havaintopareissa (X_i, Y_i) toisiinsa, kertoimella ρ_S on taipumus saada *negatiivisia* arvoja.

Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin: Korreloimattomuuden testaaminen 1/2

- Määritellään ***t*-testisuure**

$$z = \sqrt{n-2}\,\frac{\rho_S}{\sqrt{1-\rho_S^2}}$$

- *Jos nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \mathrm{Cor}(X, Y) = 0$$

pätee, testisuure *z noudattaa* suurissa otoksissa *approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa*:

$$z \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin: Korreloimattomuuden testaaminen 2/2

- Testisuure z noudattaa *suurissa otoksissa approksimatiivisesti* standardoitua normaalijakaumaa N(0, 1), jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*.
- Approksimaatio on melko hyvä jo, kun $n > 10$ ja riittävä lähes kaikkiin tarkoituksiin, kun $n > 30$.
- Testisuureen z normaaliarvo = 0, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$E(z) = 0$$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen z arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- Nollahypoteesi H_0 *hylätään*, jos testin p-arvo on *kyllin pieni*.

Kendallin järjestyskorrelaatiokerroin: Kertoimen idea

- *Kendallin järjestyskorrelaatiokerroin* τ mittaa kahden muuttujan havaintoarvojen suuruusjärjestyksien yhteensopivuutta.
- Kendallin järjestyskorrelaatiokerroin sopii *järjestys*-, *välimatka*- ja *suhdeasteikollisille* muuttujille.
- Kendallin järjestyskorrelaatiokertoimella on samantapaiset ominaisuudet kuin *Pearsonin otoskorrelaatiokertoimella*.

Kendallin järjestyskorrelaatiokerroin: Määritelmä 1/3

- Olkoot $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ja $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ *järjestys-*, *välimatka-* tai *suhdeasteikollisten* satunnaismuuttujien X ja Y havaittuja arvoja.
- Oletetaan lisäksi, että havainnot X_i ja Y_i liittyvät *samaan havaintoyksikköön kaikille* $i = 1, 2, \ldots, n$.
- *Järjestetään* parit (X_i, Y_i) muuttujan X havaittujen arvojen mukaan *suuruusjärjestykseen* pienimmästä suurimpaan.
- Kendallin järjestyskorrelaatiokerroin perustuu tunnuslukuun, joka mittaa muuttujan Y arvojen *epäjärjestystä* muuttujan X arvoihin nähden.

Kendallin järjestyskorrelaatiokerroin: Määritelmä 2/3

- *Järjestetään* parit (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \ldots , n$ *muuttujan* X *havaittujen arvojen mukaan* siten, että ensimmäiseksi tulee pari, jossa muuttujan X arvo on pienin ja viimeiseksi pari, jossa muuttujan X arvo on suurin.
- Olkoon (X_k, Y_k) järjestetykseen asetetuista pareista numero k.
- Määritellään havaintoarvoon Y_k liittyvät *epäjärjestyspisteet*

  $$S_{kl} , \; l = k+1, k+2, \ldots , n , \; k = 1, 2, \ldots , n-1$$

  seuraavalla tavalla:

  $$S_{kl} = +1, \text{ jos } Y_l > Y_k$$
  $$S_{kl} = -1, \text{ jos } Y_l < Y_k$$

Kendallin järjestyskorrelaatiokerroin: Määritelmä 3/3

- Muuttujan Y arvojen *epäjärjestysmitta* S muuttujan X arvojen suhteen määritellään kaavalla

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} S_{kl}$$

- Määritellään **Kendallin järjestyskorrelaatiokerroin** τ eli *Kendallin tau* kaavalla

$$\tau = \frac{S}{\frac{1}{2} n(n-1)}$$

Kendallin järjestyskorrelaatiokerroin: Ominaisuudet 1/2

- Kendallin järjestyskorrelaatiokertoimella τ on kaikki *hyvältä korrelaation mitalta vaadittavat ominaisuudet*:

  (i) $-1 \leq \tau \leq +1$

  (ii) Jos muuttujien X ja Y havaittujen arvojen järjestysnumerot ovat jokaisessa havaintoparissa *samat*,

  $$\tau = +1$$

  (iii) Jos muuttujien X ja Y havaittujen arvojen järjestysnumerot liittyvät toisiinsa *täysin satunnaisesti*,

  $$\tau \approx 0$$

  Jos $\tau = 0$, sanotaan, että muuttujat X ja Y ovat *korreloimattomia*.

Kendallin järjestyskorrelaatiokerroin: Ominaisuudet 2/2

(iv) Jos sekä *suuret* muuttujien X ja Y järjestysnumerot että *pienet* muuttujien X ja Y järjestysnumerot liittyvät havaintopareissa (X_i, Y_i) toisiinsa, kertoimella τ on taipumus saada *positiivisia* arvoja.

(v) Jos *suuret* ja *pienet* muuttujien X ja Y järjestys-numerot liittyvät havaintopareissa (X_i, Y_i) toisiinsa, kertoimella τ on taipumus saada *negatiivisia* arvoja.

Kendallin järjestyskorrelaatiokerroin: Korreloimattomuuden testaaminen 1/2

- Määritellään **testisuure**

$$z = \frac{\tau}{\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n+1)}}}$$

- *Jos nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \mathrm{Cor}(X, Y) = 0$$

pätee, testisuure z *noudattaa* suurissa otoksissa *approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa*:

$$z \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

Kendallin järjestyskorrelaatiokerroin: Korreloimattomuuden testaaminen 2/2

- Testisuure z noudattaa *suurissa otoksissa approksimatiivisesti* standardoitua normaalijakaumaa N(0, 1), jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*.
- Approksimaatio on melko hyvä jo, kun $n > 10$ ja riittävä lähes kaikkiin tarkoituksiin, kun $n > 30$.
- Testisuureen z normaaliarvo = 0, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$E(z) = 0$$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen z arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- Nollahypoteesi H_0 *hylätään*, jos testin p-arvo on *kyllin pieni*.