Ilkka Mellin

Tilastolliset menetelmät

Osa 2: Otokset, otosjakaumat ja estimointi

Estimointimenetelmät

Estimointimenetelmät

>> Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi

Suurimman uskottavuuden menetelmä

- **Normaalijakauman parametrien estimointi**
- **Eksponenttijakauman parametrien estimointi**
- **Bernoulli-jakauman parametrien estimointi**

Momenttimenetelmä

- **Normaalijakauman parametrien estimointi**
- **Eksponenttijakauman parametrien estimointi**
- **Bernoulli-jakauman parametrien estimointi**

Todennäköisyysjakaumat tilastollisten aineistojen kuvaajina

- **Tilastollinen aineisto** koostuu tutkimuksen kohteita kuvaavien muuttujien *havaituista arvoista*.
- Tilastollisissa tutkimusasetelmissa havaintoarvoihin liittyy aina *epävarmuutta* ja *satunnaisuutta*.
- Tilastollisissa tutkimusasetelmissa tutkimuksen kohteita kuvaavat muuttujat tulkitaan *satunnaismuuttujiksi*, jotka *generoivat* muuttujien havaitut arvot.
- *Havaintoarvot generoineiden satunnaismuuttujien todennäköisyysjakauma* muodostaa **tilastollisen mallin** sille satunnaisilmiölle, jota havainnot koskevat.

Todennäköisyysjakaumien parametrit 1/2

- Tarkastellaan jotakin tutkimuksen kaikkien mahdollisten kohteiden muodostaman perusjoukon S alkioiden ominaisuutta kuvaavaa *satunnaismuuttujaa* X.
- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *todennäköisyysjakaumaa*, jonka *pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktio*

$$f(x\,;\,\theta)$$

riippuu **parametrista** θ.
- Merkintä:

$$X \sim f(x\,;\theta)$$

Todennäköisyysjakaumien parametrit 2/2

- Satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio

  $$f(x\,;\,\theta)$$

  kuvaa satunnaismuuttujan X *todennäköisyysjakaumaa* ja parametri θ kuvaa jotakin jakauman *karakteristista ominaisuutta*.
- Koska parametrin θ arvoa *ei yleensä tunneta*, tilastollisen tutkimuksen tärkeimpiä osatehtäviä on **estimoida** eli *arvioida* tuntemattomalle parametrille θ sopiva arvo jakaumasta $f(x\,;\,\theta)$ *poimitun otoksen perusteella*.

Yksinkertainen satunnaisotos

- Olkoon

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  (**yksinkertainen**) **satunnaisotos** jakaumasta, jonka pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio $f(x \; ; \; \theta)$ riippuu parametrista θ.
- Tällöin havainnot $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ ovat *riippumattomia*, *identtisesti jakautuneita satunnaismuuttujia*, joilla on *sama pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktio* $f(x \; ; \; \theta)$:

  $$X_1, X_2, \ldots, X_n \perp$$

  $$X_i \sim f(x\,;\theta) \,,\, i = 1,2,\ldots,n$$

Havainnot ja havaintoarvot

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat (havainnot)

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  saavat *poimitussa otoksessa* **havaituiksi arvoikseen** luvut

  $$x_1 , x_2 , \ldots , x_n$$

- **Havaintoarvot**

  $$x_1 , x_2 , \ldots , x_n$$

  vaihtelevat satunnaisesti otoksesta toiseen jakaumasta

  $$f(x \, ; \, \theta)$$

  saatavin todennäköisyyksin.

Estimaattorit ja estimaatit 1/2

- Oletetaan, että todennäköisyysjakauman $f(x\ ;\ \theta)$ *parametrin* θ *estimoimiseen* käytetään satunnais-muuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ funktiota eli *tunnuslukua*

$$T = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

- Tällöin funktiota $T = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ kutsutaan parametrin θ **estimaattoriksi** ja *havaintoarvoista*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

laskettua funktion g arvoa

$$t = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

kutsutaan parametrin θ **estimaatiksi**.

Estimaattorit ja estimaatit 2/2

- Olkoon

$$T = g(X_1 , X_2 , \ldots , X_n)$$

jakauman $f(x\,;\,\theta)$ parametrin θ *estimaattori*.

- Tällöin estimaattorin T havaintoarvoista

$$x_1 , x_2 , \ldots , x_n$$

laskettu arvo eli *estimaatti*

$$t = g(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$$

on satunnaismuuttujan T arvon realisaatio otoksessa.

Estimaattoreiden johtaminen

- *Hyvien estimaattoreiden johtaminen* todennäköisyys-jakaumien tuntemattomille parametreille *on teoreettisen tilastotieteen keskeisiä ongelmia*.
- Tässä luvussa esitellään seuraavat estimaattoreiden johtamiseen käytettävät menetelmät:
  - **Suurimman uskottavuuden menetelmä**
  - **Momenttimenetelmä**
- *Suurimman uskottavuuden menetelmä on tärkein estimointimenetelmä*, koska sillä on niin vankka teoreettinen perusta.

Piste-estimointi ja väliestimointi

- Todennäköisyysjakauman *parametrin arvon estimointia* kutsutaan usein **piste-estimoinniksi**.
- Parametrin estimaattiin on aina syytä liittää **luottamusväliksi** kutsuttu *väli*, *joka sisältää estimoidun parametrin todellisen*, *mutta tuntemattoman arvon tietyllä*, *soveltajan valittavissa olevalla todennäköisyydellä*.
- Luottamusvälin määräämistä kutsutaan **väliestimoinniksi**; ks. lukua **Väliestimointi**.

Estimointimenetelmät

- Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi
- >> Suurimman uskottavuuden menetelmä
  - Normaalijakauman parametrien estimointi
  - Eksponenttijakauman parametrien estimointi
  - Bernoulli-jakauman parametrien estimointi
- Momenttimenetelmä
  - Normaalijakauman parametrien estimointi
  - Eksponenttijakauman parametrien estimointi
  - Bernoulli-jakauman parametrien estimointi

Uskottavuusfunktio 1/2

- Olkoon X_1 , X_2 , … , X_n *yksinkertainen satunnaisotos* jakaumasta $f(x\ ;\ \theta)$, jonka *parametrina* on θ.
- Koska havainnot X_1 , X_2 , … , X_n on oletettu tässä riippumattomiksi, niiden *yhteisjakauman piste-todennäköisyys*- tai *tiheysfunktio* on

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n\ ;\ \theta) = f(x_1\ ;\ \theta) f(x_2\ ;\ \theta) \cdots f(x_n\ ;\ \theta)$$

jossa

$$f(x_i\ ;\ \theta)\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

on havaintoon X_i liittyvä pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio.

Uskottavuusfunktio 2/2

- Otoksen $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ **uskottavuusfunktio**

  $$L(\theta\,;x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n\,;\theta)$$

  on havaintojen

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  yhteisjakauman pistetodennäköisyys- tai *tiheysfunktion f* arvo pisteessä

  $$x_1 , x_2 , \ldots , x_n$$

  tulkittuna *parametrin* θ *arvojen funktioksi*.
- Huomautus:

  Uskottavuusfunktio L sisältää *kaiken informaation otoksesta*.

Suurimman uskottavuuden estimaattori 1/2

- Olkoon

$$t = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

parametrin θ arvo, joka *maksimoi uskottavuusfunktion*

$$L(\theta\,; x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

parametrin θ suhteen.

- Huomautus:

Uskottavuusfunktion L maksimin antava parametrin θ arvo t on muuttujien X_1 , X_2 , … , X_n havaittujen arvojen x_1 , x_2 , … , x_n funktio.

Suurimman uskottavuuden estimaattori 2/2

- Sijoittamalla uskottavuusfunktion L maksimin parametrin θ suhteen antavassa lausekkeessa

  $$t = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

  muuttujien

  $$x_1 , x_2 , \ldots , x_n$$

  paikalle havainnot (satunnaismuuttujat)

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  saadaan parametrin θ **suurimman uskottavuuden estimaattori** eli **SU-estimaattori**

  $$\hat{\theta} = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Kommentteja

- Parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{\theta}$ tuottaa parametrille θ arvon, joka *maksimoi poimitun otoksen* eli *saatujen havaintoarvojen uskottavuuden* (~ *todennäköisyyden*).
- Parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattorin $\hat{\theta}$ otoskohtainen arvo *maksimoi todennäköisyyden saada juuri se otos*, *joka on saatu*.

SU-estimaattorin määrääminen 1/2

- Parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori määrätään *maksimoimalla uskottavuusfunktio*

  $$L(\theta) = L(\theta\,;x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

  parametrin θ suhteen.
- Kaikissa säännöllisissä tapauksissa maksimi löydetään merkitsemällä uskottavuusfunktion $L(\theta)$ *derivaatta*

  $$L'(\theta)$$

  nollaksi ja ratkaisemalla θ saadusta *normaaliyhtälöstä*

  $$L'(\theta) = 0$$

SU-estimaattorin määrääminen 2/2

- Jos parametrin θ arvo

  $$t = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

  tuottaa uskottavuusfunktion $L(\theta)$ maksimin, parametrin θ *suurimman uskottavuuden estimaattori* on

  $$\hat{\theta} = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

  jossa X_1 , X_2 , … , X_n on yksinkertainen satunnaisotos siitä jakaumasta, johon uskottavuusfunktio $L(\theta)$ liittyy.

Logaritminen uskottavuusfunktio 1/3

- Uskottavuusfunktion maksimi kannattaa tavallisesti etsiä maksimoimalla uskottavuusfunktion sijasta *logaritminen uskottavuusfunktio* (uskottavuusfunktion logaritmi)

$$l(\theta) = \log L(\theta)$$

- Tämä johtuu seuraavista seikoista:

(i) Logaritminen uskottavuusfunktio ja uskottavuusfunktio saavuttavat ääriarvonsa *samassa pisteessä*, koska logaritmi on *aidosti monotoninen funktio*.

(ii) Logaritminen uskottavuusfunktio on monien todennäköisyysjakaumien tapauksessa uskottavuusfunktiota *yksinkertaisempi* muodoltaan.

Logaritminen uskottavuusfunktio 2/3

- Koska havainnot X_1 , X_2 , … , X_n on tässä oletettu *riippumattomiksi*, *logaritminen uskottavuusfunktio* voidaan kirjoittaa seuraavaan muotoon:

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \log L(\theta) \\ &= \log\left(f(x_1\,;\theta) f(x_2\,;\theta) \cdots f(x_n\,;\theta) \right) \\ &= \log f(x_1\,;\theta) + \log f(x_2\,;\theta) + \cdots + \log f(x_n\,;\theta) \\ &= l(\theta\,; x_1) + l(\theta\,; x_2) + \cdots + l(\theta\,; x_n) \end{aligned}$$

jossa

$$l(\theta\,; x_i) = \log f(x_i\,;\,\theta)\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

on havaintoarvoon x_i liittyvä logaritminen uskottavuus-funktio.

Logaritminen uskottavuusfunktio 3/3

- Logaritmisen uskottavuusfunktion summaesityksen

$$l(\theta) = l(\theta\,;x_1) + l(\theta\,;x_2) + \cdots + l(\theta\,;x_n)$$

maksimointi on usein *ratkaisevasti helpompaa* kuin uskottavuusfunktion itsensä maksimointi.

SU-estimaattorin ominaisuudet

- Olkoon $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *yksinkertainen satunnaisotos* jakaumasta $f(x \,;\, \theta)$, jonka *parametrina* on θ.
- Olkoon $\hat{\theta}$ parametrin θ **suurimman uskottavuuden** eli **SU-estimaattori**.
- Hyvä estimaattori on *tyhjentävä*, *harhaton*, *tehokas* ja *tarkentuva* (ks. lukua Estimointi).
- **SU-estimaattori ei välttämättä täytä yhtäkään hyvän estimaattorin kriteeriä, joten suurimman uskottavuuden menetelmää käytettäessä on aina erikseen varmistettava tuloksena saadun estimaattorin hyvyys.**

SU-estimaattorin asymptoottiset ominaisuudet 1/3

- Jos parametrin θ SU-estimaattori $\hat{\theta}$ ei täytä hyvän estimaattorin kriteereitä *äärellisillä havaintojen lukumäärillä*, SU-estimaattorin $\hat{\theta}$ valintaa parametrin θ estimaattoriksi voidaan usein perustella SU-estimaattorin *yleisillä* **asymptoottisilla ominaisuuksilla**:

  (i) SU-estimaattori $\hat{\theta}$ on **tarkentuva** eli

  $$\Pr(\hat{\theta} \to \theta) = 1, \text{ kun } n \to +\infty$$

  (ii) SU-estimaattori $\hat{\theta}$ on **asymptoottisesti normaalinen**.

SU-estimaattorin asymptoottiset ominaisuudet 2/3

- SU-estimaattorin *tarkentuvuus* merkitsee sitä, että SU-estimaattori toteuttaa **suurten lukujen lain** (ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukua **Stokastiikan knvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet**).
- Suurten lukujen lain mukaan SU-estimaattorin arvo *lähestyy stokastisesti parametrin oikeata arvoa*, kun otoskoko kasvaa.

SU-estimaattorin asymptoottiset ominaisuudet 3/3

- SU-estimaattorin *asymptoottinen normaalisuus* merkitsee sitä, että SU-estimaattori toteuttaa **keskeisen raja-arvolauseen** (ks. kalvokokoelman **Johdatus todennäköisyyslaskentaan** lukua **Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet**).
- SU-estimaattorin asymptoottinen normaalisuus merkitsee sitä, että *SU-estimaattorin jakaumaa voidaan suurissa otoksissa approksimoida normaalijakaumalla*.
- Se, että SU-estimaattori on erittäin yleisten ehtojen pätiessä asymptoottisesti normaalinen, on tärkeä lisäperuste *normaalijakauman keskeiselle asemalle* tilastotieteessä.

Suurimman uskottavuuden menetelmä *vs* momenttimenetelmä

- Suurimman uskottavuuden menetelmä *ei tuota* todennäköisyysjakauman parametreille välttämättä samoja estimaattoreita kuin ns. momenttimenetelmä.
- Monissa alkeellisissa tilanteissa molemmilla menetelmillä kuitenkin saadaan samat estimaattorit.
- Suurimman uskottavuuden menetelmä *on hyvin pitkälti syrjäyttänyt* momenttimenetelmän todennäköisyysjakaumien parametrien estimaattoreita johdettaessa.
- Suurimman uskottavuuden menetelmän suosituimmuusasemaa perustuu sen momenttimenetelmää *vankempaan* teoreettiseen perustaan.

Esimerkkejä 1/2

- Olkoon

$$X_1\,,X_2\,,\,\ldots\,,X_n$$

yksinkertainen satunnaisotos jakaumasta $f(x\,;\,\theta)$.

- Tarkastellaan seuraavien jakaumien parametrien SU-estimointia eli estimointia suurimman uskottavuuden menetelmällä (ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukuja **Diskreettejä jakaumia** ja **Jatkuvia jakaumia**):
  - **Normaalijakauma**
  - **Eksponenttijakauma**
  - **Bernoulli-jakauma**

Esimerkkejä 2/2

- Huomautuksia:
  - Normaalijakauman, eksponenttijakauman ja Bernoulli-jakauman parametrien estimointia *momenttimenetelmällä* tarkastellaan seuraavassa kohdassa.
  - Normaalijakauman, eksponenttijakauman ja Bernoulli-jakauman tapauksessa suurimman uskottavuuden menetelmä ja momentti-menetelmä tuottavat jakaumien parametreille *samat estimaattorit*.

Normaalijakauma ja sen parametrointi

- Satunnaismuuttuja X noudattaa **normaalijakaumaa** $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, jos sen *tiheysfunktio* on

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

$$-\infty < \mu < +\infty\ ,\ \sigma > 0$$

- Normaalijakauman *parametreina* ovat jakauman *odotusarvo*

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

ja *varianssi*

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

Otos normaalijakaumasta

- Olkoon

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

yksinkertainen satunnaisotos normaalijakaumasta

$$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

- Tällöin havainnot $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ ovat *riippumattomia*, *samaa normaalijakaumaa*

$$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

noudattavia satunnaismuuttujia.

Normaalijakautuneen otoksen uskottavuusfunktio ja log-uskottavuusfunktio

- Otoksen $X_1\,, X_2\,, \ldots\,, X_n$ *uskottavuusfunktio* on

$$
\begin{aligned}
&L(\mu,\sigma^2\,; x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\quad = f(x_1\,;\mu,\sigma^2)f(x_2\,;\mu,\sigma^2)\cdots f(x_n\,;\mu,\sigma^2) \\
&\quad = \sigma^{-n}(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}
\end{aligned}
$$

- Otoksen $X_1\,, X_2\,, \ldots\,, X_n$ *logaritminen uskottavuusfunktio* on

$$
\begin{aligned}
&l(\mu,\sigma^2\,; x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\quad = \log L(\mu,\sigma^2\,; x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\quad = -\frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2}n\log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2
\end{aligned}
$$

Normaalijakauman parametrien SU-estimaattorit

- Normaalijakauman N(μ, σ^2) odotusarvon μ ja varianssin σ^2 **SU-estimaattorit** eli **suurimman uskottavuuden estimaattorit** ovat havaintojen $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *aritmeettinen keskiarvo*

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

ja *otosvarianssi*

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

- Huomautus:

  Parametrien μ ja σ^2 SU-estimaattorit yhtyvät niiden *momentti-estimaattoreihin*.

SU-estimaattoreiden johto 1/2

- *Derivoidaan* logaritminen uskottavuusfunktio

$$l(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2}n\log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

ensin parametrin μ suhteen ja merkitään derivaatta nollaksi:

$$\frac{\partial l(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$$

- Derivaatan ainoa *nollakohta*

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \overline{x}$$

antaa log-uskottavuusfunktion *maksimin* parametrin μ suhteen.

SU-estimaattoreiden johto 2/2

- *Sijoitetaan* ratkaisu $\mu = \overline{x}$ logaritmiseen uskottavuusfunktioon:

$$l(\overline{x},\sigma^2) = -\frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2}n\log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

- *Derivoidaan* funktio $l(\overline{x},\sigma^2)$ parametrin σ^2 suhteen ja merkitään derivaatta nollaksi:

$$\frac{\partial l(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$$

- Derivaatan ainoa *nollakohta*

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

antaa log-uskottavuusfunktion *maksimin* parametrin σ^2 suhteen.

SU-estimaattoreiden ominaisuudet 1/2

- Normaalijakauman N(μ, σ^2) odotusarvon μ SU-estimaattorilla $\hat{\mu}$ on seuraavat ominaisuudet:

  (i) $\hat{\mu}$ on *harhaton*.

  (ii) $\hat{\mu}$ ja $\hat{\sigma}^2$ ovat yhdessä *tyhjentäviä* parametreille μ ja σ^2.

  (iii) $\hat{\mu}$ *on tehokas* eli minimivarianssinen estimaattori.

  (iv) $\hat{\mu}$ on *tarkentuva*.

  (v) $\hat{\mu}$ noudattaa *normaalijakaumaa*:

$$\hat{\mu} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

SU-estimaattoreiden ominaisuudet 2/2

- Normaalijakauman N(μ, σ^2) varianssin σ^2 SU-estimaattorilla $\hat{\sigma}^2$ on seuraavat ominaisuudet:

(i) $\hat{\sigma}^2$ on *harhainen*, mutta estimaattori

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

on *harhaton*.

(ii) $\hat{\mu}$ ja $\hat{\sigma}^2$ ovat yhdessä *tyhjentäviä* parametreille μ ja σ^2.

(iii) $\hat{\sigma}^2$ *ei ole tehokas* eli minimivarianssinen estimaattori.

(iv) $\hat{\sigma}^2$ on *tarkentuva*.

(v) $(n - 1)\, s^2/\sigma^2$ noudattaa χ^2-*jakaumaa*:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Eksponenttijakauma ja sen parametrointi

- Satunnaismuuttuja X noudattaa **eksponenttijakaumaa** Exp(λ), jos sen *tiheysfunktio* on

$$f(x;\lambda) = \lambda \exp(-\lambda x)\ ,\ x \geq 0\ ,\ \lambda > 0$$

- Eksponenttijakauman ainoa *parametri*

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{E}(X)}$$

voidaan tulkita sopivat ehdot toteuttavassa jono-tapahtumassa 1. *tapahtuman odotusajaksi* tai *tapahtuma-intensiteetiksi*.

Otos eksponenttijakaumasta

- Olkoon

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

yksinkertainen satunnaisotos eksponenttijakaumasta

$$\mathrm{Exp}(\lambda)$$

- Tällöin havainnot $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ ovat *riippumattomia*, *samaa eksponenttijakaumaa*

$$\mathrm{Exp}(\lambda)$$

noudattavia satunnaismuuttujia.

Eksponenttijakautuneen otoksen uskottavuusfunktio ja log-uskottavuusfunktio

- Otoksen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *uskottavuusfunktio* on

$$\begin{aligned} &L(\lambda\,; x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\quad = f(x_1\,;\lambda) f(x_2\,;\lambda) \cdots f(x_n\,;\lambda) \\ &\quad = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \end{aligned}$$

- Otoksen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *logaritminen uskottavuusfunktio* on

$$\begin{aligned} &l(\lambda\,; x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\quad = \log L(\lambda\,; x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\quad = n\log(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

Eksponenttijakauman parametrin SU-estimaattori

- Eksponenttijakauman Exp(λ) parametrin λ **SU-estimaattori** eli **suurimman uskottavuuden estimaattori** on

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$$

jossa

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

on havaintojen X_1 , X_2 , … , X_n *aritmeettinen keskiarvo*.

- Huomautuksia:
  - Parametrin λ SU-estimaattori yhtyy sen *momenttiestimaattoriin*.
  - Estimaattorin $\hat{\lambda}$ ominaisuudet *sivuutetaan*.

SU-estimaattorin johto

- *Derivoidaan* logaritminen uskottavuusfunktio

$$l(\lambda) = n\log(\lambda) - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i$$

parametrin λ suhteen ja merkitään derivaatta nollaksi:

$$\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

- Derivaatan ainoa *nollakohta*

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$

antaa log-uskottavuusfunktion *maksimin* parametrin λ suhteen.

Bernoulli-jakauma ja sen parametrointi

- Olkoon A *tapahtuma*, jonka todennäköisyys on p:

$$\Pr(A) = p$$

- Määritellään satunnaismuuttuja X seuraavasti:

$$X = \begin{cases} 1, \text{ jos } A \text{ tapahtuu} \\ 0, \text{ jos } A \text{ ei tapahdu} \end{cases}$$

- Satunnaismuuttuja X noudattaa **Bernoulli-jakaumaa** Ber(p) ja sen *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x} \text{ , } x = 0,1\,;\ 0 < p < 1$$

- Bernoulli-jakauman ainoa *parametri* p yhtyy jakauman *odotusarvoon*:

$$p = \mathrm{E}(X)$$

Otos Bernoulli-jakaumasta

- Olkoon

  $$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

  yksinkertainen satunnaisotos Bernoulli-jakaumasta

  $$\mathrm{Ber}(p)$$

- Tällöin havainnot $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ovat *riippumattomia*, s*amaa Bernoulli-jakaumaa*

  $$\mathrm{Ber}(p)$$

  noudattavia satunnaismuuttujia.

Bernoulli-jakautuneen otoksen uskottavuusfunktio ja log-uskottavuusfunktio

- Otoksen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *uskottavuusfunktio* on

$$
\begin{aligned}
&L(p\,;x_1,x_2,\ldots,x_n) \\
&\quad = f(x_1\,;p)f(x_2\,;p)\cdots f(x_n\,;p) \\
&\quad = p^{\Sigma x_i}(1-p)^{n-\Sigma x_i}
\end{aligned}
$$

- Otoksen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *logaritminen uskottavuusfunktio* on

$$
\begin{aligned}
&l(p\,;x_1,x_2,\ldots,x_n) \\
&\quad = \log L(p\,;x_1,x_2,\ldots,x_n) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} x_i \log(p) + (n-\sum_{i=1}^{n} x_i)\log(1-p)
\end{aligned}
$$

Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin SU-estimaattori 1/2

- Bernoulli-jakauman Ber(p) odotusarvoparametrin p **SU-estimaattori** eli **suurimman uskottavuuden estimaattori** on havaintojen $X_1 , X_2 , \dots , X_n$ *aritmeettinen keskiarvo*

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

- Huomautus:

  Parametrin p SU-estimaattori yhtyy sen *momenttiestimaattoriin*.

Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin SU-estimaattori 2/2

- Koska

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ jos } A \text{ tapahtuu} \\ 0, \text{ jos } A \text{ ei tapahdu} \end{cases}$$

niin

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = f$$

jossa f on tapahtuman A *frekvenssi* otoksessa.

- Siten Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin p *suurimman uskottavuuden estimaattori*

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{f}{n}$$

on tapahtuman A *suhteellinen frekvenssi* otoksessa.

Bernoulli-jakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

SU-estimaattorin johto

- *Derivoidaan* logaritminen uskottavuusfunktio

$$l(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log(p) + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i) \log(1-p)$$

parametrin *p* suhteen ja merkitään derivaatta nollaksi:

$$\frac{\partial l(p)}{\partial p} = \frac{\Sigma x_i}{p} - \frac{n - \Sigma x_i}{1-p} = 0$$

- Derivaatan ainoa *nollakohta*

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$$

antaa uskottavuusfunktion *maksimin*.

SU-estimaattorin ominaisuudet

- Bernoulli-jakauman Ber(p) odotusarvoparametrin p SU-estimaattorilla $\hat{p}$ on seuraavat ominaisuudet:

  (i) $\hat{p}$ on *harhaton*.

  (ii) $\hat{p}$ on *tyhjentävä*.

  (iii) $\hat{p}$ on *tehokas* eli minimivarianssinen estimaattori.

  (iv) $\hat{p}$ on *tarkentuva*.

  (v) $\hat{p}$ noudattaa *asymptoottisesti normaalijakaumaa*:

$$\hat{p} \sim_a \mathrm{N}\left(p\,, \frac{p(1-p)}{n} \right)$$

Estimointimenetelmät

Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi

Suurimman uskottavuuden menetelmä

- **Normaalijakauman parametrien estimointi**
- **Eksponenttijakauman parametrien estimointi**
- **Bernoulli-jakauman parametrien estimointi**

>> Momenttimenetelmä

- **Normaalijakauman parametrien estimointi**
- **Eksponenttijakauman parametrien estimointi**
- **Bernoulli-jakauman parametrien estimointi**

Momentit

- Olkoon

  $$X_1 , X_2 , \dots , X_n$$

  yksinkertainen satunnaisotos jakaumasta $f(x\,;\,\theta)$, jonka *parametrina* on p-vektori

  $$\theta = (\theta_1 , \theta_2 , \dots , \theta_p)$$

- Oletetaan, että jakaumalla $f(x\,;\,\theta)$ on kaikki (origo-) **momentit** α_k kertalukuun p saakka (ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukua **Jakaumien tunnusluvut**):

  $$\mathrm{E}(X_i^k) = \alpha_k \ , k = 1, 2, \dots, p \ , i = 1, 2, \dots, n$$

Parametrien ja momenttien yhteys 1/2

- Oletetaan, että momenttien

  $$\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_p$$

  ja parametrien

  $$\theta_1 , \theta_2 , \ldots , \theta_p$$

  välillä on jatkuva *bijektio* eli kääntäen yksikäsitteinen kuvaus:

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_1 = g_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p) \\ \alpha_2 = g_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p) \\ \quad \vdots \\ \alpha_p = g_p(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p) \end{cases}$$

Parametrien ja momenttien yhteys 2/2

- Tällöin parametrit

  $$\theta_1 , \theta_2 , \ldots , \theta_p$$

  voidaan esittää momenttien

  $$\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_p$$

  funktioina:

  $$(2)\quad \begin{cases} \theta_1 = h_1(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p) \\ \theta_2 = h_2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p) \\ \quad\vdots \\ \theta_p = h_p(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p) \end{cases}$$

Momenttiestimaattorit

- Estimoidaan momentit α_1 , α_2 , … , α_p vastaavilla *otos-momenteilla* (ks. lukua **Tilastollisten aineistojen kuvaaminen**):

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

- Sijoittamalla estimaattorit a_1 , a_2 , … , a_p momenttien α_1 , α_2 , … , α_p paikalle yhtälöihin (2), saadaan parametrien θ_1 , θ_2 , … , θ_p **momenttiestimaattorit** eli **MM-estimaattorit**

$$(3)\quad \begin{cases} \hat{\theta}_1 = h_1(a_1, a_2, \ldots, a_p) \\ \hat{\theta}_2 = h_2(a_1, a_2, \ldots, a_p) \\ \quad\vdots \\ \hat{\theta}_p = h_p(a_1, a_2, \ldots, a_p) \end{cases}$$

Kommentteja

- Monet todennäköisyysjakaumat on *parametroitu jakauman* (origo-) *momenteilla* tai *keskusmomenteilla*:

  (i) Jos jakauman parametreina on jakauman (origo-) momentteja, *vastaavat otosmomentit* ovat ko. parametrien *momenttiestimaattoreita*.

  (ii) Jos jakauman parametreina on jakauman keskus-momentteja, *vastaavat otoskeskusmomentit* ovat ko. parametrien *momenttiestimaattoreita*.

Momenttiestimaattoreiden ominaisuudet

- Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *yksinkertainen satunnaisotos* jakaumasta $f_X(x\,;\,\theta)$, jonka *parametrina* on θ.
- Olkoon $\hat{\theta}$ parametrin θ **momenttiestimaattori** eli **MM-estimaattori**.
- Hyvä estimaattori on *harhaton*, *tyhjentävä*, *tehokas* ja *tarkentuva* (ks. lukua **Estimointi**).
- **MM-estimaattori ei välttämättä täytä yhtäkään hyvän estimaattorin kriteeriä, joten momenttimenetelmää käytettäessä on aina erikseen varmistettava tuloksena saadun estimaattorin hyvyys.**

Momenttimenetelmä *vs* suurimman uskottavuuden menetelmä

- Momenttimenetelmä *ei tuota* todennäköisyysjakauman parametreille välttämättä samoja estimaattoreita kuin suurimman uskottavuuden menetelmä.
- Monissa alkeellisissa tilanteissa molemmilla menetelmillä saadaan kuitenkin samat estimaattorit.
- Momenttimenetelmä on menetelmistä vanhempi ja se perustuu *naiiviin analogia-periaatteeseen*: Teoreettiset momentit voidaan estimoida vastaavilla otossuureilla.
- Suurimman uskottavuuden menetelmä *on hyvin pitkälti syrjäyttänyt* momenttimenetelmän todennäköisyys-jakaumien parametrien estimaattoreita johdettaessa.

Esimerkkejä 1/2

- Olkoon

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

yksinkertainen satunnaisotos jakaumasta $f(x\,;\,\theta)$, jonka *parametrina* on θ.

- Tarkastellaan seuraavien jakaumien parametrien MM-estimointia eli estimointia momenttimenetelmällä (ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukuja **Diskreettejä jakaumia** ja **Jatkuvia jakaumia**):
  - **Normaalijakauma**
  - **Eksponenttijakauma**
  - **Bernoulli-jakauma**

Esimerkkejä 2/2

- Huomautuksia:
  - Normaalijakauman, eksponenttijakauman ja Bernoulli-jakauman parametrien estimointia *suurimman uskottavuuden menetelmällä* on tarkasteltu edellisessä kohdassa.
  - Normaalijakauman, eksponenttijakauman ja Bernoulli-jakauman tapauksessa momenttimenetelmä ja suurimman uskottavuuden menetelmä tuottavat jakaumien parametreille *samat estimaattorit*.
  - Estimaattoreiden ominaisuuksia on käsitelty suurimman uskottavuuden menetelmän soveltamisen yhteydessä.

Normaalijakauma ja sen parametrointi

- Satunnaismuuttuja X noudattaa **normaalijakaumaa** $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$, jos sen *tiheysfunktio* on

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

$$-\infty < \mu < +\infty\ ,\ \sigma > 0$$

- Normaalijakauman *parametreina* ovat jakauman *odotusarvo*

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

ja *varianssi*

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

Normaalijakauman parametrien ja momenttien yhteys

- Määritellään satunnaismuuttujan X 1. ja 2. *momentti* kaavalla

$$\alpha_k = \mathrm{E}(X^k)\,,\; k = 1,2$$

- Normaalijakauman parametrien μ ja σ^2 sekä momenttien α_1 ja α_2 välillä on seuraava *bijektio*:

(i) Parametrit lausuttuina momenttien funktioina:

$$\begin{cases} \mu = \mathrm{E}(X) = \alpha_1 \\ \sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 \end{cases}$$

(ii) Momentit lausuttuina parametrien funktioina:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \mathrm{E}(X) = \mu \\ \alpha_2 = \mathrm{E}(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases}$$

Otos normaalijakaumasta

- Olkoon

  $$X_1, X_2, \dots, X_n$$

  yksinkertainen satunnaisotos normaalijakaumasta

  $$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

- Tällöin havainnot $X_1, X_2, \dots, X_n$ ovat *riippumattomia*, *samaa normaalijakaumaa*

  $$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

  noudattavia satunnaismuuttujia.

Normaalijakauman parametrien momenttiestimaattorit 1/2

- Määritellään havaintojen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 1. ja 2. *otosmomentti* kaavalla

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \,, k = 1, 2$$

- Siten normaalijakauman N(μ, σ^2) parametrien μ ja σ^2 **MM-estimaattorit** eli **momenttiestimaattorit** ovat

$$\begin{cases} \hat{\mu} = a_1 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \\ \hat{\sigma}^2 = a_2 - a_1^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - a_1^2 \end{cases}$$

Normaalijakauman parametrien momenttiestimaattorit 2/2

- Odotusarvon μ momenttiestimaattori

$$\hat{\mu} = a_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

on havaintojen X_1 , X_2 , … , X_n *aritmeettinen keskiarvo*.

- Varianssin σ^2 momenttiestimaattori

$$\hat{\sigma}^2 = a_2 - a_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = m_2$$

on havaintojen X_1 , X_2 , … , X_n *otosvarianssi* eli 2. keskusmomentti.

Eksponenttijakauma ja sen parametrointi

- Satunnaismuuttuja X noudattaa **eksponenttijakaumaa** Exp(λ), jos sen *tiheysfunktio* on

$$f(x;\lambda) = \lambda \exp(-\lambda x)\ ,\ x \geq 0\ ,\ \lambda > 0$$

- Eksponenttijakauman ainoa *parametri*

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{E}(X)}$$

voidaan tulkita sopivat ehdot toteuttavassa jono-tapahtumassa 1. *tapahtuman odotusajaksi* tai *tapahtuma-intensiteetiksi*.

Eksponenttijakauman parametrin ja 1. momentin yhteys

- Määritellään satunnaismuuttujan X 1. *momentti* kaavalla

$$\alpha_1 = \mathrm{E}(X)$$

- Eksponenttijakauman parametrin λ ja 1. momentin α_1 välillä on seuraava *bijektio*:

(i) Parametri λ lausuttuna momentin α_1 funktiona:

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{E}(X)} = \frac{1}{\alpha_1}$$

(ii) Momentti α_1 lausuttuna parametrin λ funktiona:

$$\alpha_1 = \mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Otos eksponenttijakaumasta

- Olkoon

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

yksinkertainen satunnaisotos eksponenttijakaumasta

$$\mathrm{Exp}(\lambda)$$

- Tällöin havainnot $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ ovat *riippumattomia*, *samaa eksponenttijakaumaa*

$$\mathrm{Exp}(\lambda)$$

noudattavia satunnaismuuttujia.

Eksponenttijakauman parametrin momenttiestimaattori

- Määritellään havaintojen $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ 1. *otosmomentti* kaavalla

$$a_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Siten eksponenttijakauman Exp(λ) parametrin λ **MM-estimaattori** eli **momenttiestimaattori** on

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{\overline{X}}$$

jossa

$$\overline{X} = a_1$$

on havaintojen $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *aritmeettinen keskiarvo*.

Bernoulli-jakauma ja sen parametrointi

- Olkoon A *tapahtuma*, jonka todennäköisyys on p:

$$\Pr(A) = p$$

- Määritellään satunnaismuuttuja X seuraavasti:

$$X = \begin{cases} 1, \text{ jos } A \text{ tapahtuu} \\ 0, \text{ jos } A \text{ ei tapahdu} \end{cases}$$

- Satunnaismuuttuja X noudattaa **Bernoulli-jakaumaa** Ber(p) ja sen *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x} \text{ , } x = 0,1 \text{ ; } 0 < p < 1$$

- Bernoulli-jakauman ainoa *parametri p* yhtyy jakauman *odotusarvoon*:

$$p = \mathrm{E}(X)$$

Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin ja 1. momentin yhteys

- Määritellään satunnaismuuttujan X 1. *momentti* kaavalla

$$\alpha_1 = \mathrm{E}(X)$$

- Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin p ja 1. momentin α_1 välillä on seuraava *bijektio*:

(i) Parametri p lausuttuna momentin α_1 funktiona:

$$p = \mathrm{E}(X) = \alpha_1$$

(ii) Momentti α_1 lausuttuna parametrin p funktiona:

$$\alpha_1 = \mathrm{E}(X) = p$$

Otos Bernoulli-jakaumasta

- Olkoon

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

yksinkertainen satunnaisotos Bernoulli-jakaumasta

$$\mathrm{Ber}(p)$$

- Tällöin havainnot $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ ovat *riippumattomia*, s*amaa Bernoulli-jakaumaa*

$$\mathrm{Ber}(p)$$

noudattavia satunnaismuuttujia.

Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin momenttiestimaattori 1/2

- Määritellään havaintojen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 1. *otosmomentti* kaavalla

$$a_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Siten Bernoulli-jakauman Ber(p) odotusarvoparametrin p **MM-estimaattori** eli **momenttiestimaattori** on

$$\hat{p} = a_1 = \bar{X}$$

jossa

$$\bar{X} = a_1$$

on havaintojen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *aritmeettinen keskiarvo*.

Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin momenttiestimaattori 2/2

- Koska

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ jos } A \text{ tapahtuu} \\ 0, \text{ jos } A \text{ ei tapahdu} \end{cases}$$

niin

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = f$$

jossa f on tapahtuman A *frekvenssi* otoksessa.

- Siten Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin p *momenttiestimaattori*

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{f}{n}$$

on tapahtuman A *suhteellinen frekvenssi* otoksessa.