
Ilkka Mellin
Todennäköisyyslaskenta

Liite 1: Joukko-oppi

Joukko-oppi

- >> Joukko-opin peruskäsitteet
- Joukko-opin perusoperaatiot
- Joukko-opin laskusäännöt
- Funktiot
- Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat
- Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia
- Boolean algebrat
- σ -algebrat

Joukko ja sen alkiot 1/2

- **Joukko** on *kokoelma olioita*, joita kutsutaan joukon **alkioiksi**.
- Joukkoja merkitään tavallisesti isoilla kirjaimilla
 $A, B, \dots, S, \dots, X, \dots$
ja joukon alkioita vastaavilla pienillä kirjaimilla
 $a, b, \dots, s, \dots, x, \dots$
- Joukko A on **hyvin määritelty**, jos *jokaisesta* oliosta s voidaan sanoa *onko se joukon A alkio vai ei*.
- Siten joukko on *hyvin määritelty*, jos *sen alkiot tunnetaan*.

Joukko ja sen alkiot 2/2

- Merkitään joukon ja sen alkioiden välistä relaatiota seuraavasti:

$$s \in A$$

ja sanotaan:

s on joukon A alkio

tai

s kuuluu joukkoon A

- Vastaavasti merkitään sitä, että *s ei ole joukon A alkio* eli *s ei kuulu joukkoon A* seuraavasti:

$$s \notin A$$

Joukon määrittely

- Joukko määritellään tavallisesti kuvailemalla sen *alkioiden ominaisuudet*.
- Joukon alkioden ominaisuudet määrittelevä lause kirjoitetaan tavallisesti lainausmerkkien väliin:

$A = \text{”Joukon } A \text{ alkioden}$
 $\text{ominaisuudet määrittelevä lause”}$

Joukon määrittelyminen: Esimerkkejä

- Esimerkkejä joukkojen määrittelemisestä:

$A =$ ”Kansanedustajien joukko”

$B =$ ”Teknilliseen korkeakouluun vuonna 2007
hyväksytyjen uusien opiskelijoiden joukko”

$C =$ ”Rahanheiton tulosvaihtoehtojen joukko”

$D =$ ”Lottoarvonnan tulosvaihtoehtojen joukko”

$E =$ ”Yhtälön $\sin(x) = 0$ ratkaisujen joukko, kun x on reaaliluku”

$F =$ ”Yhtälön $x^2 = -1$ ratkaisujen joukko,
kun x on kompleksiluku”

Joukon määrittäminen ehtolauseiden avulla

- Joukon alkioden määrittelevät ominaisuudet kuvaillaan tavallisesti antamalla *ehto*, joka alkioden on toteutettava.

- Oletetaan, että olio s on joukon A alkio eli

$$s \in A,$$

jos oliota s koskeva ehtolause $P(s)$ on *tosi*.

- Tällöin joukko A voidaan määritellä kirjoittamalla

$$A = \{s \mid P(s)\}$$

Joukko-opin peruskäsitteet

Joukon määrittäminen ehtolauseiden avulla: Esimerkki 1/2

- Olkoon A niiden reaalilukuparien (x, y) joukko, jotka toteuttavat ehdon

$$x^2 + y^2 = 1$$

- Joukko A on siis origokeskisen yksikkösaiteisen ympyrän kehän pisteiden joukko tasossa.

- Joukko A voidaan määritellä kirjoittamalla

$$A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$$

jossa \mathbb{R} on reaalilukujen joukko.

Joukon määrittäminen ehtolauseiden avulla: Esimerkki 2/2

- Esimerkiksi lukupari

$$\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \in A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$$

koska

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$$

- Sen sijaan lukupari

$$(1, 1) \notin A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$$

koska

$$1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 \neq 1$$

Joukko-opin peruskäsitteet

Äärelliset joukot

- Jos joukko on **äärellinen**, se voidaan määritellä *luettelemalla* sen alkiot.
- Olkoot joukon A alkiot s_1, s_2, \dots, s_n , jolloin siis

$$s_1, s_2, \dots, s_n \in A$$

- Joukko A voidaan määritellä kirjoittamalla

$$A = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

Äärelliset joukot: Esimerkkejä

- Olkoon A rahanheiton tulosvaihtoehtojen joukko.
- Rahanheiton tuloksena on joko Kruuna tai Klaava.
- Joukko A voidaan määritellä kirjoittamalla

$$A = \{\text{Kruuna, Klaava}\}$$

- Olkoon B nopanheiton tulosvaihtoehtojen joukko.
- Nopanheiton tuloksena on jokin silmäluvuista 1, 2, 3, 4, 5 tai 6.
- Joukko B voidaan määritellä kirjoittamalla

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Numeroituvasti äärettömät joukot 1/2

- Jos joukon alkiot *voidaan järjestää jonoon*, joukkoa sanotaan **numeroituvaksi**.
- *Äärelliset* joukot ovat aina numeroituvia.
- *Äärettömiä* numeroituvia joukkoja kutsutaan **numeroituvasti äärettömiksi**.
- Esimerkkejä:

Voidaan osoittaa, että *luonnollisten lukujen joukko* \mathbb{N} , *kokonaislukujen joukko* \mathbb{Z} ja *rationaalilukujen joukko* \mathbb{Q} ovat kaikki numeroituvasti äärettömiä ja siten *yhtä mahtavia*.

Numeroituvasti äärettömät joukot 2/2

- Numeroituvasti äärettömät joukot määritellään usein *luettelemalla* joukon alkioiden muodostamasta jonosta *muutama ensimmäisen alkio*.
- Esimerkkejä:
 - $\{1, 2, 3, \dots\} =$ *positiivisten kokonaislukujen eli luonnollisten lukujen joukko* \mathbb{N}
 - $\{1, 3, 5, \dots\} =$ *parittomien positiivisten kokonaislukujen joukko*
 - $\{2, 4, 6, \dots\} =$ *parillisten positiivisten kokonaislukujen joukko*

Ylinumeroituvat joukot

- Jos joukko on *ääretön* ja sen alkioita *ei voida järjestää jonoon*, joukkoa sanotaan **ylinumeroituvaksi**.
- Esimerkki:

Voidaan osoittaa, että reaalilukujen joukko \mathbb{R} on ylinumeroituva ja siten *mahtavampi* kuin luonnollisten lukujen joukko \mathbb{N} .

Joukon käsite ja joukon määrittelemine: Kommentteja

- Tässä esityksessä joukko on määritelty *kokoelmana joukon alkioiksi sanottuja olioita*.
- Tämä *naiivin joukko-opin* määritelmä joukolle *ei ole* matemaattisesti täsmällinen, koska se on *kehämääritelmä*:
Kokoelma \sim Joukko
- Joukon käsitteen epätäsmällisestä määritelmästä seuraa se, että *naiivissa joukko-opissa* on mahdollista määritellä joukkoja, joilla on *ristiriitaisia* ominaisuuksia.

Joukko-opin paradoksit 1/2

- Joukot eivät ole yleensä itsensä alkioita.
- Olkoon Z kaikkien niiden joukkojen joukko, jotka eivät ole itsensä alkioita:

$$Z = \{X \mid X \notin X\}$$

- Kysymys: Onko joukko Z itsensä alkio vai ei?
- Kysymykseen voidaan antaa kaksi *ristiriitaista* vastausta:
 - (i) Jos Z on joukon Z alkio, Z ei kuulu joukkoon Z joukon Z määritelmän mukaan.
 - (ii) Jos Z ei ole joukon Z alkio, Z kuuluu joukkoon Z joukon Z määritelmän mukaan.
- Joukon Z määritelmästä johdettua *ristiriitaa* kutsutaan *Russellin paradoksiksi*.

Joukko-opin paradoksit 2/2

- *Naiivissa joukko-opissa* voidaan johtaa useita *paradokseja*.
- Paradoksit perustuvat siihen, että naiivissa joukko-opissa voidaan *määritellä* joukkoja, joilla on *ristiriitaisia ominaisuuksia*.
- Tämä merkitsee sitä, että naiivi joukko-oppi suhtautuu *liian vapaamielisesti* joukkojen määrittelymiseen.
- Paradokseja *ei synny*, jos ristiriitaisilla ominaisuuksilla varustettujen joukkojen määrittelyminen *estetään*.
- Ristiriitaisilla ominaisuuksilla varustettujen joukkojen määrittelyminen saadaan estetyksi kehittämällä joukko-oppi *aksiomaattiseksi järjestelmäksi*.

Naiivi vs aksiomaattinen joukko-oppi

- Naiivin joukko-opin ongelmat voidaan välttää kehittämällä joukko-oppi *aksiomaattiseksi järjestelmäksi*.
- Naiivi joukko-oppi riittää kuitenkin perustaksi kaikissa joukko-opin *tavanomaisissa sovelluksissa* ja siksi tässä esityksessä ei käytetä aksiomaattista esitystapaa.

Joukko-opin peruskäsitteet

Joukkojen samuus

- Joukot ovat **samat**, jos niillä on samat alkiot.
- Siten joukot A ja B ovat samat, jos jokaiselle oliolle s pätee:

$$s \in A \Leftrightarrow s \in B$$

- Merkitään sitä, että joukot A ja B ovat samat seuraavasti:

$$A = B$$

Joukko-opin peruskäsitteet

Joukkojen samuus: Esimerkki

- Olkoon A yhtälön $x^2 = 4$ ratkaisujen joukko reaalilukujen joukossa \mathbb{R} :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\}$$

- Olkoon

$$B = \{-2, +2\}$$

- Tällöin

$$A = B$$

Osajoukko

- *Joukko B on joukon A osajoukko eli joukko B sisältyy joukkoon A , jos jokainen joukon B alkio kuuluu joukkoon A eli*

$$s \in B \Rightarrow s \in A$$

- *Merkitään sitä, että joukko B on joukon A osajoukko seuraavasti:*

$$B \subset A \text{ tai } A \supset B$$

Joukko-opin peruskäsitteet

Osajoukko-relaatio

- *Olla osajoukkona on kahden joukon välinen relaatio.*
- Jos joukko B ei ole joukon A osajoukko, merkitään
$$B \not\subset A$$
- Tällöin joukossa B on *ainakin yksi alkio*, joka ei kuulu joukkoon A .
- Jos A ja B ovat kaksi mielivaltaista joukkoa, kummankaan ei tarvitse olla toisen osajoukko.

Aito osajoukko

- Joukko B on joukon A **aito osajoukko**, jos

$$B \subset A$$

mutta

$$B \neq A$$

- Tällöin jokainen joukon B alkio kuuluu joukkoon A , mutta joukossa A on ainakin yksi alkio, joka ei kuulu joukkoon B .

Tyhjä joukko

- Joukko on **tyhjä**, jos siihen ei kuulu yhtään alkiota.
- Merkitään tyhjää joukkoa symbolilla

$$\emptyset$$

- Jos joukko \emptyset on tyhjä, *ei ole olemassa* yhtään oliota s , jolle

$$s \in \emptyset$$

- Tyhjä joukko \emptyset on *jokaisen* joukon osajoukko eli mielivaltaiselle joukolle A pätee:

$$\emptyset \subset A$$

Perusjoukko

- Sekaannuksien välttämiseksi joukkoja sekä niiden välisiä relaatioita ja operaatioita on aina syytä tarkastella *hyvin määritellyssä perusjoukossa*.
- Merkitsemme perusjoukkoa usein kirjaimella

S

- Tällöin kaikille tarkasteltaville joukoille A, B, \dots pitää päteä:

$$A \subset S, B \subset S, \dots$$

Perusjoukon määrittelymerkitys: Esimerkki

- *Perusjoukon eksplisiittinen tai implisiittinen määrittely on sekaannuksien välttämiseksi välttämätöntä.*

- Jos kirjoitetaan

$$A = \{x \mid x^2 = -1\}$$

ei voida olla varmoja siitä, mikä joukko A on.

- Olkoot

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}, \text{ jossa } \mathbb{R} \text{ on reaalilukujen joukko}$$

$$C = \{x \in \mathbb{C} \mid x^2 = -1\}, \text{ jossa } \mathbb{C} \text{ on kompleksilukujen joukko}$$

- Tällöin

$$B = \emptyset$$

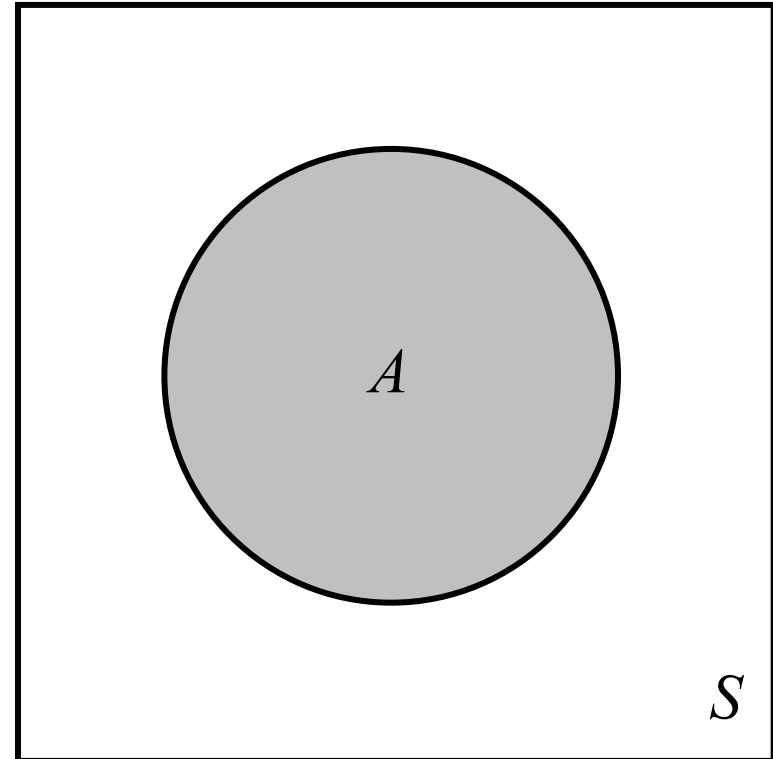
ja

$$C = \{-i, +i\}, \text{ jossa } i = \sqrt{-1}$$

Joukko-opin peruskäsitteet

Venn-diagrammi

- Joukko-opin operaatioita ja laskusääntöjä voidaan havainnollistaa ns. **Venn-diagrammien** avulla.
- Olkoon tarkasteltava joukko A perusjoukon S osajoukko.
- *Perusjoukkoa* S kuvataan suorakaiteella.
- *Joukkoa* $A \subset S$ kuvataan suorakaiteen osa-alueella.
- Tavallisesti tarkasteltava joukko A *varjostetaan*.

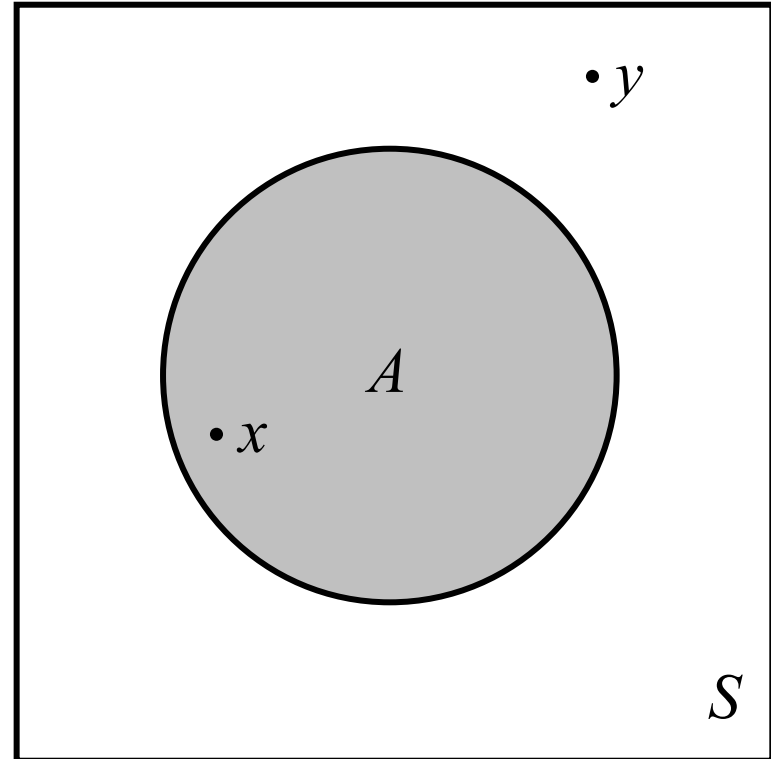


Venn-diagrammi: Kommentteja

- Joukko-opin laskusäännön *havainnollistus Venn-diagrammin avulla ei sisällä säännön todistusta.*
- Venn-diagrammien avulla voidaan havainnollistaa kätevästi myös *todennäköisyyslaskennan* peruslaskusääntöjä.

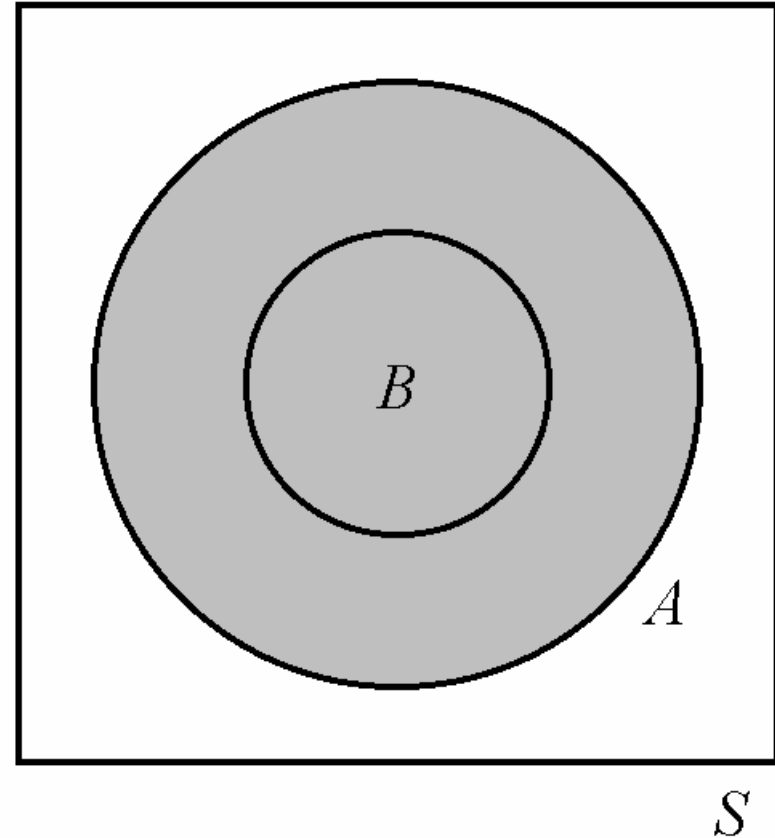
Joukko-opin peruskäsitteet
Venn-diagrammi:
Joukkoon kuuluminen

- Olkoot x ja y perusjoukon S alkioita ja olkoon A perusjoukon S osajoukko:
 $x \in S, y \in S, A \subset S$
- Viereinen Venn-diagrammi kuvaa tilannetta, jossa alkio x kuuluu joukkoon A , mutta alkio y ei kuulu:
 $x \in A, y \notin A$



Joukko-opin peruskäsitteet
Venn-diagrammi:
Olla osajoukkona

- Olkoot joukot A ja B perusjoukon S osajoukkoja:
 $A \subset S$ ja $B \subset S$
- Viereinen Venn-diagrammi kuvaa tilannetta, jossa joukko B on joukon A (aito) osajoukko:
 $B \subset A$



Joukko-opin peruskäsitteet

Lukujoukot 1/2

- Tavalliset *lukujoukot*:

Luonnollisten lukujen joukko:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Kokonaislukujen joukko:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$$

Rationaalilukujen joukko:

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \mid q = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Reaalilukujen joukko:

$$\mathbb{R}$$

Joukko-opin peruskäsitteet

Lukujoukot 2/2

Kompleksilukujen joukko:

$$\mathbb{C} = \left\{ z \mid z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \right\}$$

- Huomautus:

Joukot \mathbb{N} , \mathbb{Z} ja \mathbb{Q} ovat *numeroituvasti äärettömiä* ja *yhtä mahtavia*, kun taas joukot \mathbb{R} ja \mathbb{C} ovat *ylinumeroituvia* ja siten *mahtavampia* kuin luonnollisten lukujen joukko \mathbb{N} .

Lukujoukkojen keskinäiset suhteet

- Lukuja tarkasteltaessa *perusjoukkona* käytetään tavallisesti *kompleksilukujen joukkoa* \mathbb{C} , koska lukujoukkojen välillä on seuraavat (aidot) osajoukkorelaatiot:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

ja lisäksi yksikään seuraavista *laskutoimituksista* ei vie kompleksilukujen joukon *ulkopuolelle*:

- yhteenlasku
- vähennyslasku
- kertolasku
- jakolasku
- juurenotto

Joukko-oppi

Joukko-opin peruskäsitteet

>> Joukko-opin perusoperaatiot

Joukko-opin laskusäännöt

Funktiot

Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Boolean algebrat

σ -algebrat

Joukko-opin perusoperaatiot

Mitä opimme?

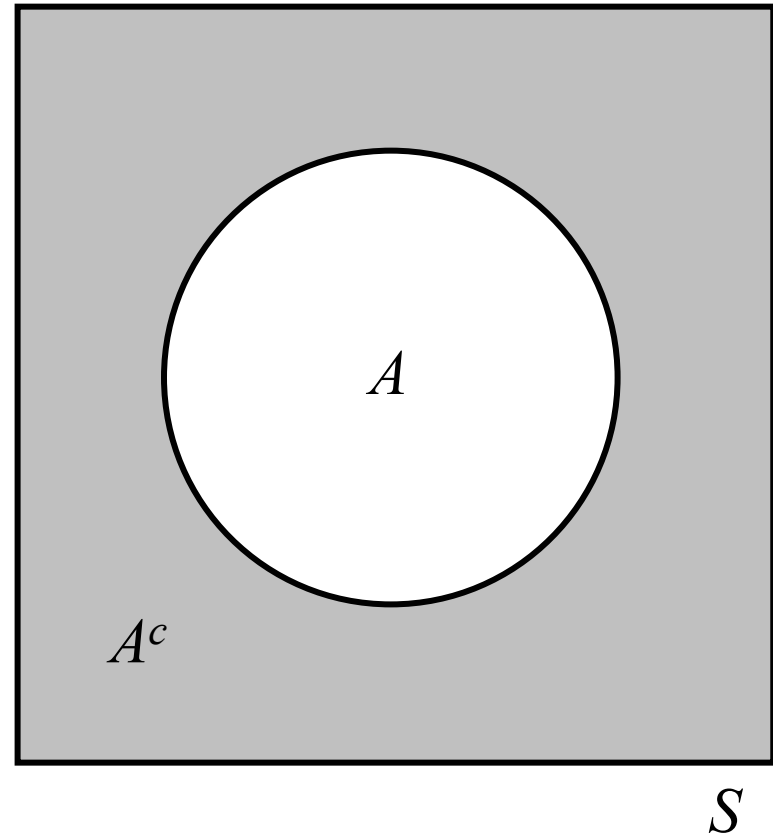
- Tarkastelemme tässä kappaleessa seuraavia joukko-opin *perusoperaatioita*:
 - (i) Joukon **komplementtijoukon** muodostaminen.
 - (ii) Kahden joukon **yhdisteen** eli **unionin** muodostaminen.
 - (iii) Kahden joukon **leikkauksen** muodostaminen.
 - (iv) Kahden joukon **erotuksen** muodostaminen.
 - (v) Kahden joukon **symmetrisen erotuksen** muodostaminen.

Joukko-opin perusoperaatiot

Komplementtijoukko

- Olkoon $A \subset S$ perusjoukon S osajoukko.
- Joukon A **komplementti-joukko** eli **komplementti** A^c on niiden perusjoukon S alkuiden joukko, jotka *eivät kuulu joukkoon* A :

$$A^c = \{s \in S \mid s \notin A\}$$



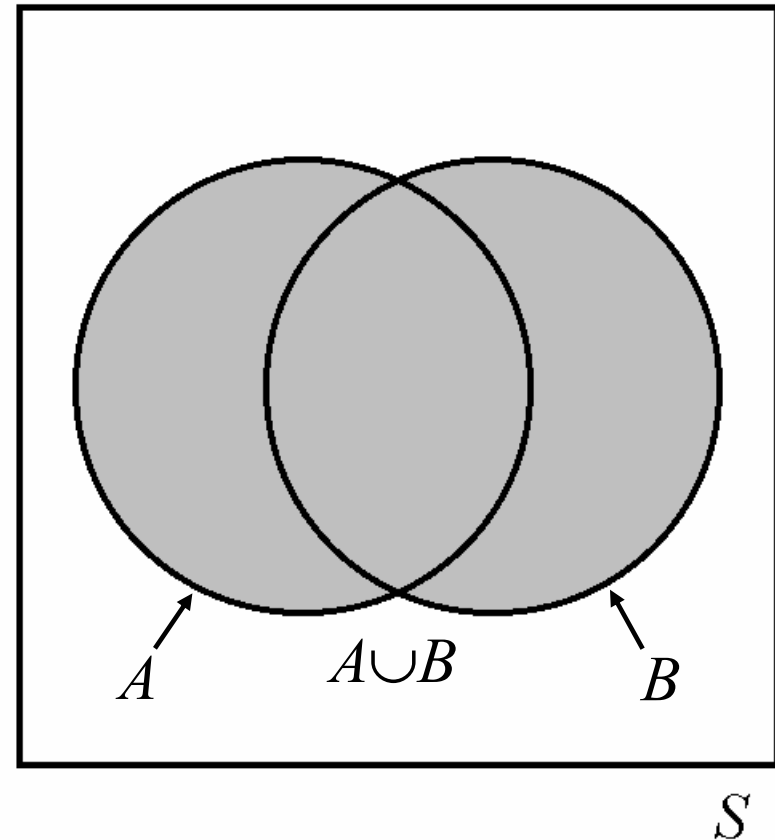
Joukko-opin perusoperaatiot

Yhdiste eli unioni

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ perusjoukon S osajoukkoja.
- Joukkojen A ja B **yhdiste** eli **unioni** $A \cup B$ on niiden perusjoukon S alkuiden joukko, jotka *kuuluvat joukkoon A tai joukkoon B tai molempiin*:

$$A \cup B$$

$$= \{s \in S \mid s \in A \text{ tai } s \in B\}$$



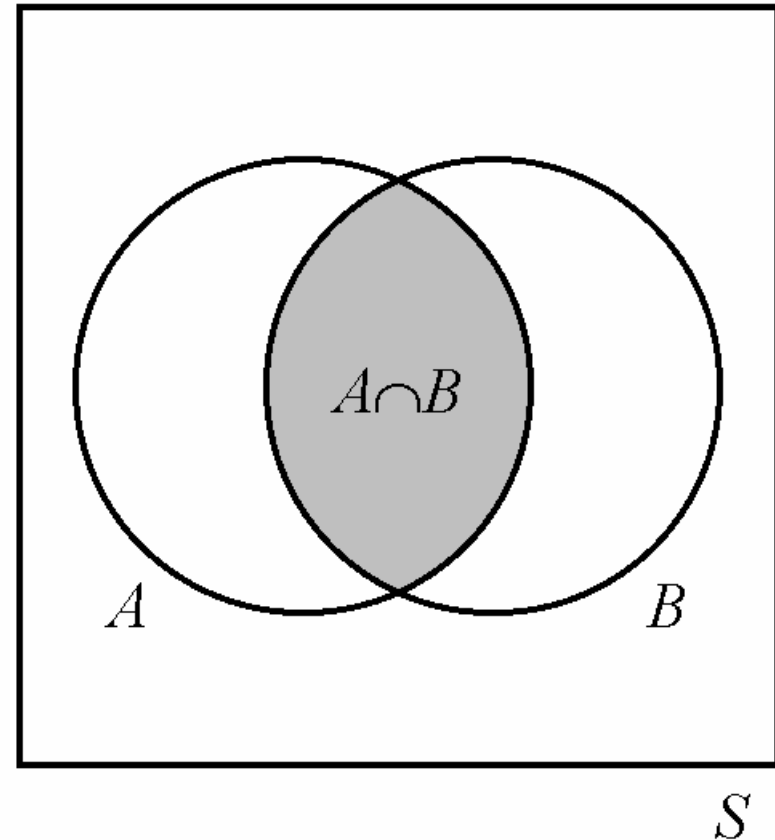
Joukko-opin perusoperaatiot

Leikkaus

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ perusjoukon S osajoukkoja.
- Joukkojen A ja B **leikkaus** $A \cap B$ on niiden perusjoukon S alkuiden joukko, jotka *kuuluvat joukkoon A ja joukkoon B :*

$$A \cap B$$

$$= \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \in B\}$$



Joukko-opin perusoperaatiot

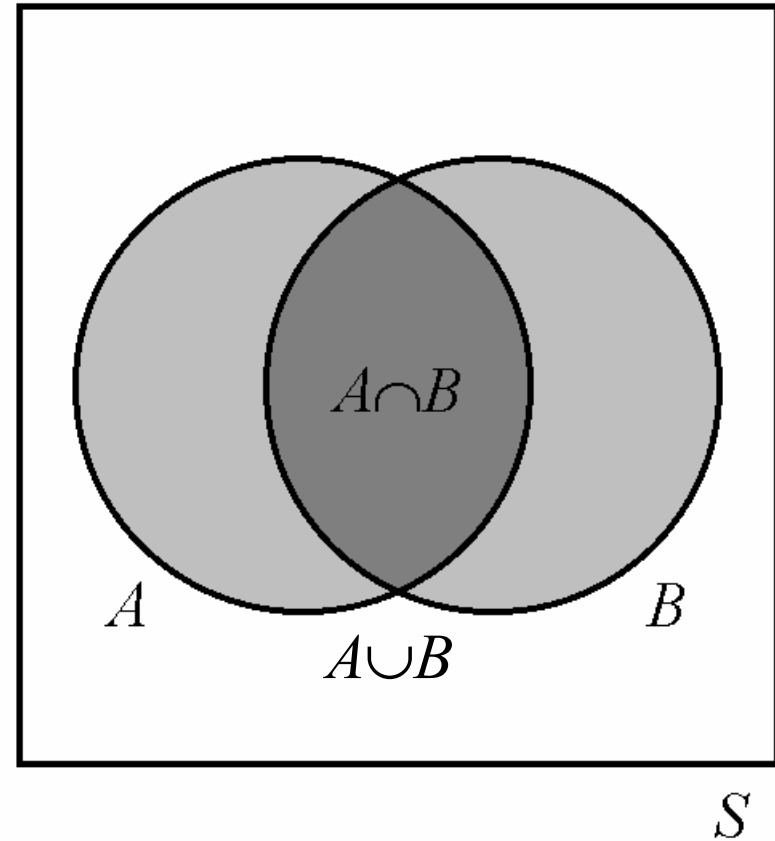
Yhdiste ja leikkaus

- Joukkojen A ja B yhdiste
 $A \cup B$ voidaan esittää joukon A
ja joukon B komplementtien
leikkauksen komplementtina:

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$$

- Joukkojen A ja B leikkaus
 $A \cap B$ voidaan esittää joukon A
ja joukon B komplementtien
yhdisteen komplementtina:

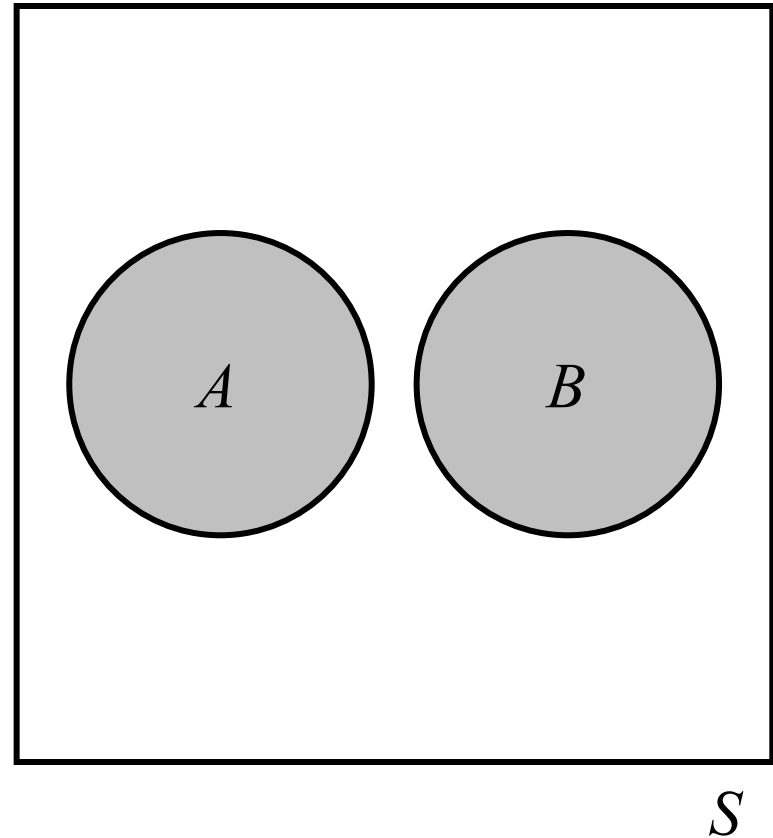
$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$$



Joukko-opin perusoperaatiot

Pistevieraat joukot

- Jos joukoilla A ja B ei ole yhteisiä alkioita, sanotaan, että joukot A ja B ovat **pistevieraita**.
- Joukot A ja B ovat pistevieraita, jos ja vain jos $A \cap B = \emptyset$



Joukko-opin perusoperaatiot

Pistevieraat joukot:

Esimerkki eduskunnasta

- Kansanedustaja ei voi olla kahden puolueen jäsen.
- Määritellään perusjoukko:

$$S = \text{”Kansanedustajien joukko”}$$

- Määritellään Kokoomuspuolueen ja Vasemmistoliiton kansanedustajien joukot:

$$K = \{s \in S \mid s \text{ on Kokoomuspuolueen kansanedustaja}\}$$

$$V = \{s \in S \mid s \text{ on Vasemmistoliiton kansanedustaja}\}$$

- Tällöin joukot K ja V ovat pistevieraita:

$$K \cap V = \emptyset$$

Joukko-opin perusoperaatiot

Erotus 1/2

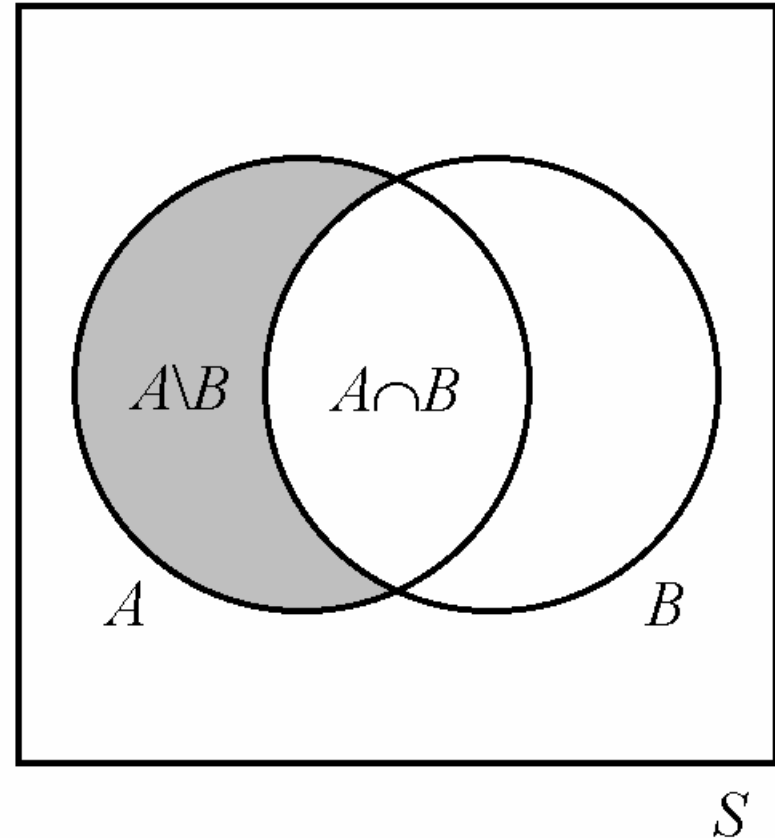
- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ perusjoukon S osajoukkoja.
- Joukkojen A ja B **erotus**

$$A \setminus B$$

on niiden perusjoukon S alkuiden joukko, jotka kuuluvat joukkoon A , mutta eivät kuulu joukkoon B :

$$A \setminus B$$

$$= \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \notin B\}$$



Joukko-opin perusoperaatiot

Erotus 2/2

- Joukkojen A ja B erotus $A \setminus B$ voidaan esittää joukon A ja joukon B komplementin leikkauksena:

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

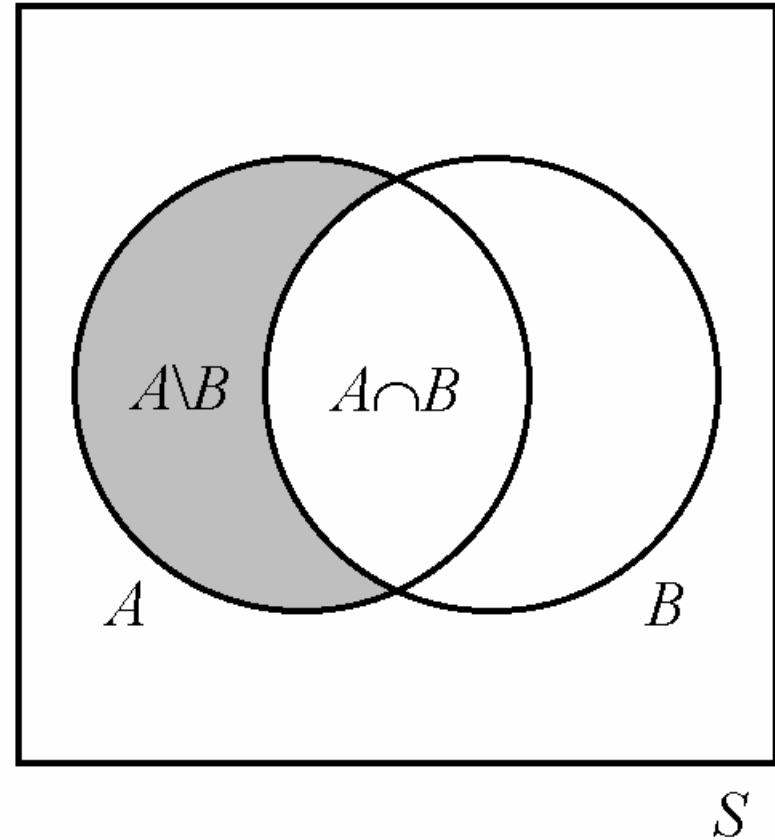
- Perustelu:

$$s \in A \setminus B \Leftrightarrow$$

$$s \in A \text{ ja } s \notin B \Leftrightarrow$$

$$s \in A \text{ ja } s \in B^c \Leftrightarrow$$

$$s \in A \cap B^c$$



Joukko-opin perusoperaatiot

Komplementti ja erotus

- Joukon A *komplementti* A^c voidaan esittää perusjoukon S ja joukon A erotuksena:

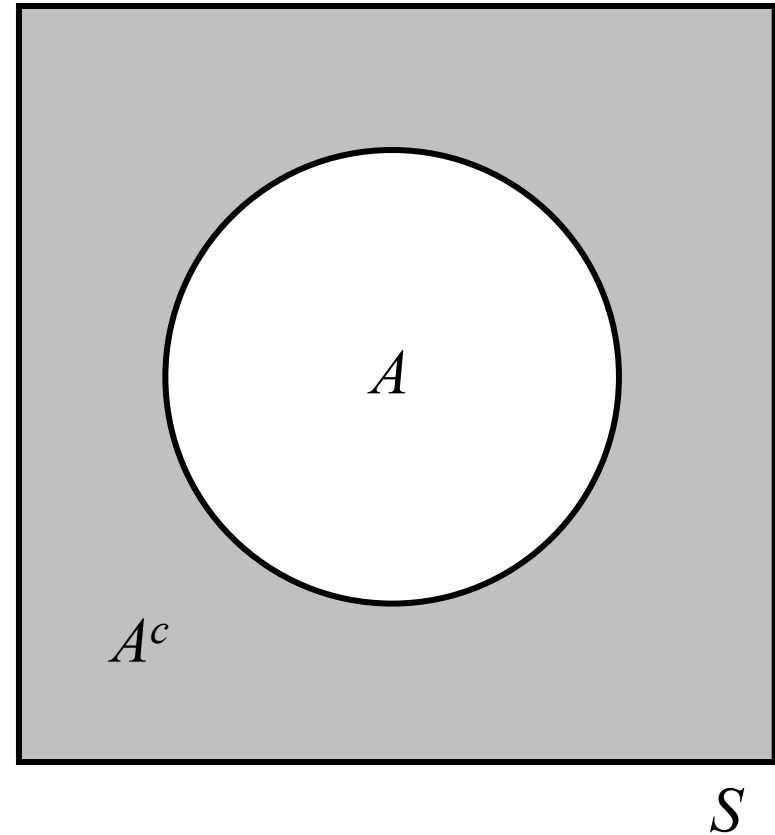
$$A^c = S \setminus A$$

- Perustelu:

$$s \in A^c \Leftrightarrow$$

$$s \in S \text{ ja } s \notin A \Leftrightarrow$$

$$s \in S \setminus A$$

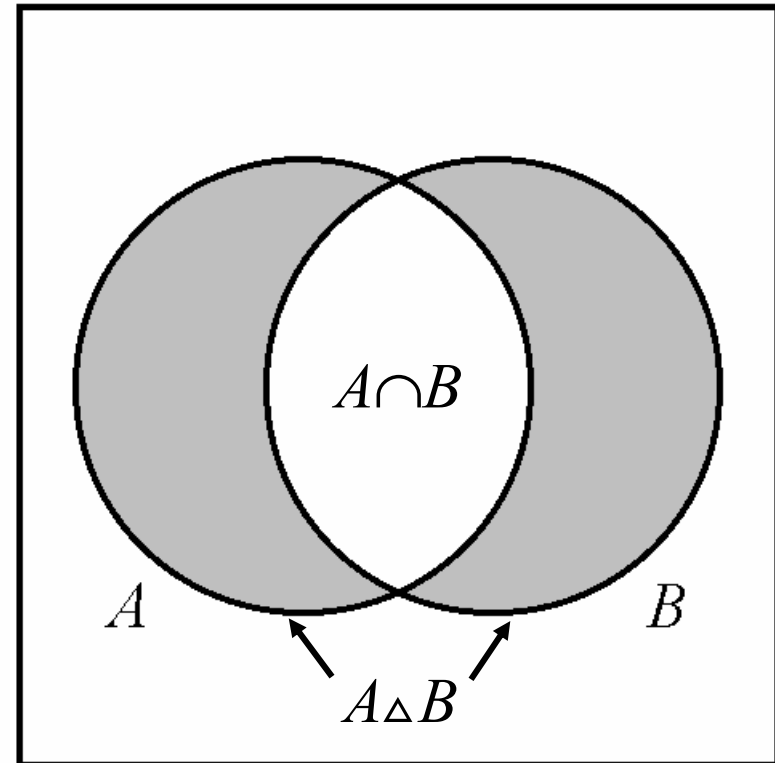


Joukko-opin perusoperaatiot

Symmetrinen erotus 1/3

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ perusjoukon S osajoukkoja.
- Joukkojen A ja B **symmetrinen erotus** $A \Delta B$ on niiden perusjoukon S alkioiden joukko, jotka *kuuluvat joukkoon A tai joukkoon B , mutta eivät molempiin*:

$$A \Delta B = \{s \in S \mid s \in A \text{ tai } s \in B, \text{ mutta } s \notin A \cap B\}$$



Joukko-opin perusoperaatiot

Symmetrinen erotus 2/3

- Joukkojen A ja B *symmetrinen erotus* voidaan esittää joukkojen A ja B yhdisteen ja leikkauksen erotuksena:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

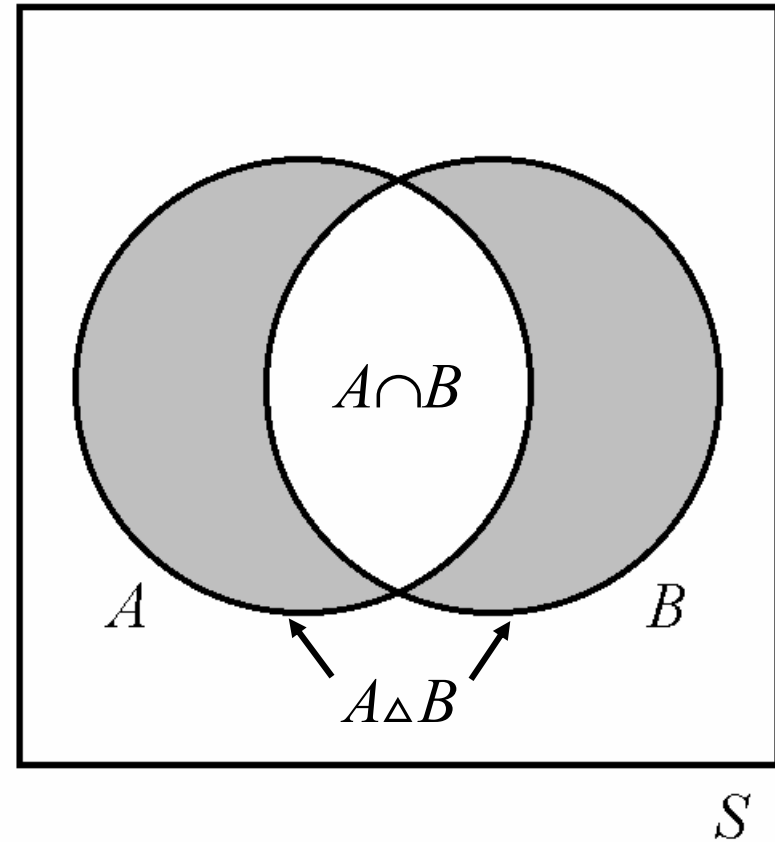
- Perustelu:

$$s \in A \Delta B \Leftrightarrow$$

$$s \in A \text{ tai } s \in B, \text{ mutta } s \notin A \cap B \Leftrightarrow$$

$$s \in A \cup B, \text{ mutta } s \notin A \cap B \Leftrightarrow$$

$$s \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



Joukko-opin perusoperaatiot

Symmetrinen erotus 3/3

- Joukkojen A ja B *symmetrinen erotus* voidaan esittää joukkojen A ja B erotuksen ja joukkojen B ja A erotuksen yhdisteenä:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- Perustelu:

$$s \in A \Delta B \Leftrightarrow$$

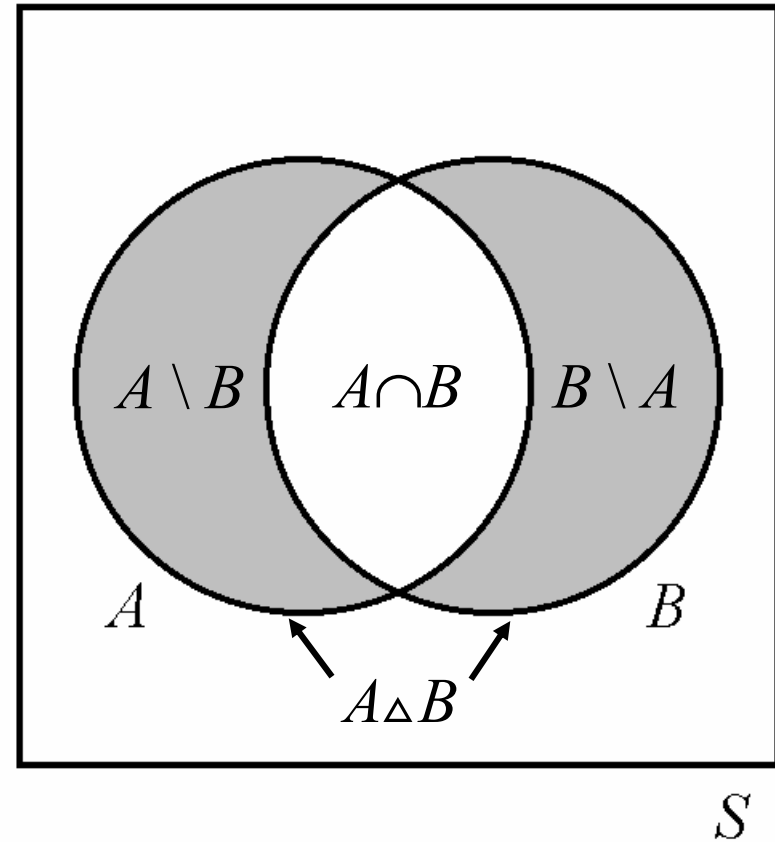
$$s \in A \text{ tai } s \in B, \text{ mutta } s \notin A \cap B \Leftrightarrow$$

$$s \in A, \text{ mutta } s \notin B \text{ tai}$$

$$s \in B, \text{ mutta } s \notin A \Leftrightarrow$$

$$s \in A \setminus B \text{ tai } s \in B \setminus A \Leftrightarrow$$

$$s \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Yhdiste vs symmetrinen erotus 1/2

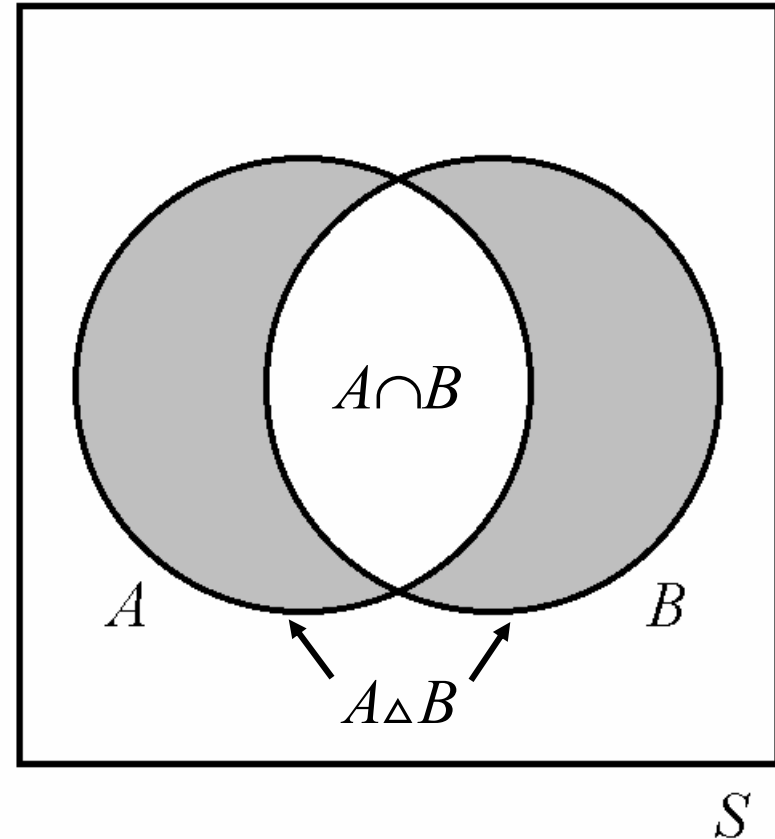
- Huomaa joukkojen A ja B yhdisteen ja symmetrisen erotuksen ero:

$$A \cup B$$

$$= \{s \in S \mid s \in A \text{ tai } s \in B\}$$

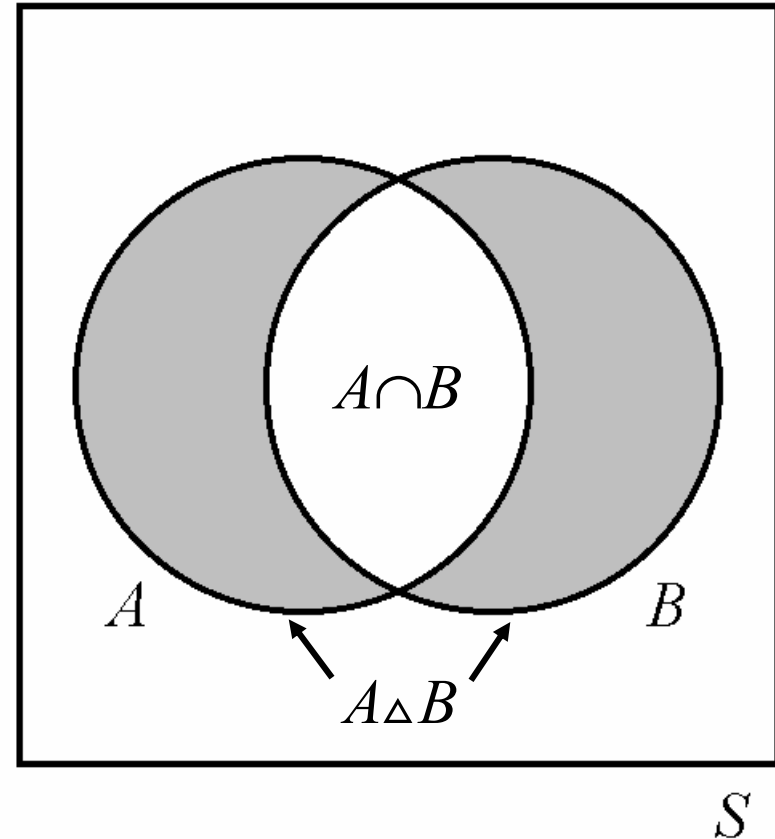
$$A \Delta B$$

$$= \{s \in S \mid s \in A \text{ tai } s \in B, \\ \text{mutta } s \notin A \cap B\}$$



Yhdiste vs symmetrinen erotus 2/2

- Yhdisteen määritelmän mukaan:
 $s \in A \cup B \Leftrightarrow s \in A \text{ tai } s \in B$
Yhdisteessä perusjoukon S alkio s on *joko* joukon A alkio *tai* joukon B alkio *tai molempien* alkio.
- Symmetrisen erotuksen määritelmän mukaan:
 $s \in A \Delta B \Leftrightarrow s \in A \text{ tai } s \in B,$
mutta $s \notin A \cap B$
Symmetrisessä erotuksessa perusjoukon S alkio s on *joko* joukon A alkio *tai* joukon B alkio, *mutta ei molempien* alkio.



Yhdiste pistevieraiden joukkojen yhdisteenä

- Joukkojen A ja B yhdiste voidaan esittää seuraavilla tavoilla *pareittain pistevieraiden* joukkojen

$$A \setminus B, B \setminus A, A \cap B$$

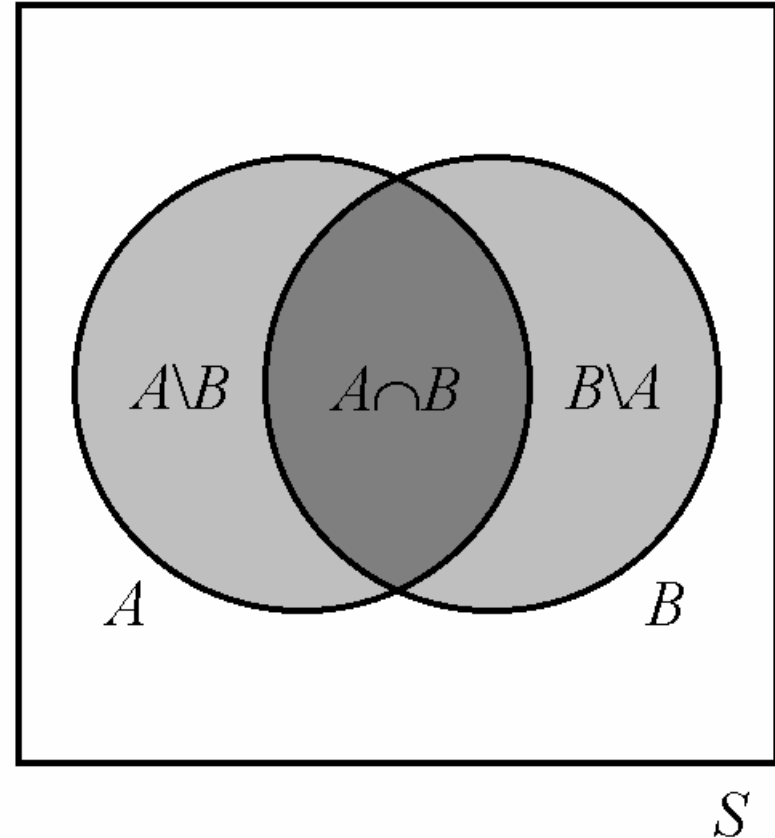
yhdisteenä:

$$A \cup B$$

$$= A \cup (B \setminus A)$$

$$= B \cup (A \setminus B)$$

$$= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$



Joukko-oppi

Joukko-opin peruskäsitteet

Joukko-opin perusoperaatiot

>> Joukko-opin laskusäännöt

Funktiot

Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Boolean algebrat

σ -algebrat

Osajoukko-relaation ominaisuudet

- Kaikille joukoille A, B, C pätee:
 - (1) $A \subset A$
 - (2) $A \subset B$ ja $B \subset A \Rightarrow A = B$
 - (3) $A \subset B$ ja $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Joukko-opin operaatiot ja osajoukko-relaatio 1/3

- Kaikille joukoille A, B pätee:

$$(4a) \quad A \subset (A \cup B)$$

$$(4b) \quad B \subset (A \cup B)$$

$$(5a) \quad (A \cap B) \subset A$$

$$(5b) \quad (A \cap B) \subset B$$

$$(6) \quad (A \cap B) \subset (A \cup B)$$

Joukko-opin operaatiot ja osajoukko-relaatio 2/3

- Kaikille joukoille A, B pätee:

$$(7a) \quad (A \setminus B) \subset A$$

$$(7b) \quad (B \setminus A) \subset B$$

$$(8) \quad (A \Delta B) \subset (A \cup B)$$

$$(9a) \quad (A \setminus B) \subset (A \Delta B)$$

$$(9b) \quad (B \setminus A) \subset (A \Delta B)$$

Joukko-opin operaatiot ja osajoukko-relaatio 3/3

- Kaikille joukoille A, B pätee:

$$(10) \quad A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$$

$$(11) \quad A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$$

$$(12) \quad A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

$$(13) \quad A \subset B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$$

$$(14) \quad A \subset B \Rightarrow A \cup (B \setminus A) = B$$

$$(15) \quad A \subset B \Rightarrow (A \Delta B) = B \setminus A$$

Joukkojen algebran säännöt 1/3

- Kaikille joukoille A, B, C pätee:

Idempotenttisuus

$$(1a) \quad A \cup A = A$$

$$(1b) \quad A \cap A = A$$

Assosiatiivisuus

$$(2a) \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(2b) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Kommutatiivisuus

$$(3a) \quad A \cup B = B \cup A$$

$$(3b) \quad A \cap B = B \cap A$$

Joukkojen algebran säännöt 2/3

- Kaikille joukoille A, B, C pätee:

Distributiivisuus

$$(4a) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(4b) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Identiteetti-lait

$$(5a) \quad A \cup \emptyset = A$$

$$(5b) \quad A \cap S = A, \text{ jossa } A \text{ on } \textit{perusjoukon } S \text{ osajoukko}$$

$$(6a) \quad A \cup S = S, \text{ jossa } A \text{ on } \textit{perusjoukon } S \text{ osajoukko}$$

$$(6b) \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

Joukkojen algebran säännöt 3/3

- Kaikille joukoille A, B pätee:

Komplementti-lait

$$(7a) \quad A \cup A^c = S, \text{ jossa } A \text{ on } \textit{perusjoukon } S \text{ osajoukko}$$

$$(7b) \quad A \cap A^c = \emptyset$$

$$(8a) \quad (A^c)^c = A$$

$$(8b) \quad S^c = \emptyset \text{ ja } \emptyset^c = S, \text{ jossa } S \text{ on } \textit{perusjoukko}$$

De Morganin lait

$$(9a) \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(9b) \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Joukko-oppi

Joukko-opin peruskäsitteet

Joukko-opin perusoperaatiot

Joukko-opin laskusäännöt

>> Funktiot

Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Boolean algebrat

σ -algebrat

Funktiot

Funktio eli kuvaus

- Olkoon f sääntö, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon yksikäsitteisen joukon B alkion.
- Tällöin sanotaan, että f on **funktio** eli **kuvaus** joukosta A joukkoon B .
- Jos f on funktio joukosta A joukkoon B , merkitään

$$f: A \rightarrow B$$

tai

$$A \xrightarrow{f} B$$

Funktiot

Kuva

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B :

$$f: A \rightarrow B$$

- Jos funktio f liittää joukon A alkioon a joukon B alkion b , merkitään

$$f(a) = b$$

tai hieman perusteellisemmin

$$a \xrightarrow{f} f(a) = b$$

ja sanotaan, että funktio f kuvaa joukon A alkion a joukon B alkiolle b .

- Alkiota $f(a) = b \in B$ kutsutaan on alkion $a \in A$ **kuvaksi** kuvauksessa f .

Funktiot

Funktion arvo

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B :

$$f: A \rightarrow B$$

- Jos siis $a \in A$, niin $f(a) = b \in B$.
- Erityisesti siinä tapauksessa, että A ja B ovat *lukujoukkoja*, sanotaan, että funktio f saa **arvon** $f(a) = b$ *pisteessä* a .

Funktion määrittelyalue ja arvoalue

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B :

$$f: A \rightarrow B$$

- Tällöin joukkoa A sanotaan funktion f **määrittelyalueeksi**.
- Niiden joukon B alkioiden joukkoa, jotka ovat jonkin määrittelyalueen A alkion *kuvia* kuvauksessa f , sanotaan funktion f **arvoalueeksi**.
- Funktion $f: A \rightarrow B$ arvoalue $f(A)$ voidaan määritellä seuraavalla tavalla:

$$f(A) = \{b \in B \mid \text{On olemassa } a \in A \text{ siten, että } f(a) = b\}$$

- Funktion $f: A \rightarrow B$ arvoalue $f(A)$ on joukon B osajoukko:

$$f(A) \subset B$$

Funktiot

Funktioiden samuus

- Olkoot f ja g kaksi funktiota, joilla on sama *määrittelyalue*.
- Funktiot f ja g ovat **samat**, jos ne saavat samat *arvot*.
- Olkoon siis funktioiden f ja g määrittelyalue A .
- Funktiot f ja g ovat *samat*, jos

$$f(a) = g(a)$$

kaikille $a \in A$.

- Jos funktiot f ja g ovat samat, kirjoitetaan

$$f = g$$

Funktiot

Surjektio

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B :

$$f: A \rightarrow B$$

- Funktio f on **surjektio**, jos joukon B jokainen alkio on jonkin joukon A alkion kuva eli funktion f arvoalueena on *koko* joukko B .
- Siten funktio $f: A \rightarrow B$ on *surjektio*, jos
$$f(A) = B$$
- Tällöin sanotaan, että funktio f *kuvaa* joukon A joukolle B .

Funktiot

Injektio

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B :

$$f: A \rightarrow B$$

- Funktio f on **injektio**, jos yksikään joukon B alkio *ei ole* kahden tai useamman joukon A alkion kuva.
- Siten funktio $f: A \rightarrow B$ on *injektio*, jos

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

tai yhtäpitävästi

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

Funktiot

Bijektio

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B :

$$f: A \rightarrow B$$

- Funktio f on **bijektio** eli *kääntäen yksikäsitteinen kuvaus*, jos seuraavat kaksi ehtoa pätevät:

- (i) f on *surjektio*:

$$f(A) = B$$

- (ii) f on *injektio*:

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

tai yhtäpitävästi:

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

Identtinen funktio

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon A :

$$f: A \rightarrow A$$

- Funktio f on **identtinen funktio** tai **kuvaus** joukossa A , jos se kuvaa joukon A jokaisen alkion *itselleen*.
- Siten funktio $f: A \rightarrow A$ on *identtinen funktio* joukossa A , jos

$$f(a) = a$$

kaikille $a \in A$.

- Merkitsemme identtistä funktiota joukossa A usein seuraavasti:

$$1_A$$

Funktiot

Vakiofunktio

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B :

$$f: A \rightarrow B$$

- Funktio f on **vakiofunktio** tai **-kuvaus**, jos se kuvaa joukon A jokaisen alkion *samalle* joukon B alkiolle.
- Siten funktio $f: A \rightarrow B$ on *vakiofunktio*, jos on olemassa $b \in B$ niin, että

$$f(a) = b$$

kaikille $a \in A$.

Funktioiden yhdistäminen 1/3

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B :

$$f: A \rightarrow B$$

ja g funktio joukosta B joukkoon C :

$$g: B \rightarrow C.$$

- Kuvaus f liittää *jokaiseen* joukon A alkioon a *yksikäsitteisen* joukon B alkion b :

$$a \in A \Rightarrow f(a) = b \in B$$

- Kuvaus g liittää *jokaiseen* joukon B alkioon b *yksikäsitteisen* joukon C alkion c :

$$b \in B \Rightarrow g(b) = c \in C$$

Funktioiden yhdistäminen 2/3

- Soveltamalla kuvauksia f ja g peräkkäin saadaan *sääntö*, joka liittää *jokaiseen* joukon A alkioon a *yksikäsitteisen* joukon C alkion c .
- Jos siis $a \in A$, niin $f(a) = b \in B$.
- Soveltamalla kuvausta g joukon B alkioon $f(a) = b$ saadaan jokin joukon C alkio c :

$$g(f(a)) = g(b) = c \in C$$

- Tätä *kuvausten yhdistämistä* voidaan kuvata seuraavalla kaaviolla:

$$a \xrightarrow{f} f(a) = b \xrightarrow{g} g(f(a)) = g(b) = c$$

Funktioiden yhdistäminen 3/3

- Olkoot siis $f: A \rightarrow B$ ja $g: B \rightarrow C$ funktioita.
- Oletetaan, että $a \in A$.
- Tällöin

$$f(a) = b \in B$$

ja

$$g(f(a)) = g(b) = c \in C$$

- Määritellään funktioiden f ja g **yhdistetty funktio**

$$(g \circ f): A \rightarrow C$$

kaavalla

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Funktiot

Funktioiden yhdistämissääntöjä 1/2

- Olkoon $f: A \rightarrow B$ funktio.
- Olkoot

$$1_A : A \rightarrow A$$

identtinen funktio joukossa A ja

$$1_B : B \rightarrow B$$

identtinen funktio joukossa B .

- Tällöin pätee:

$$f \circ 1_A = f$$

$$1_B \circ f = f$$

Funktioiden yhdistämissääntöjä 2/2

- Olkoot $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ ja $h: C \rightarrow D$ funktioita.
- *Yhdistetään* funktiot f , g ja h seuraavilla tavoilla:
 - (i) Muodostetaan *ensin* yhdistetty funktio $g \circ f$ ja *sitten* yhdistetty funktio $h \circ (g \circ f)$.
 - (ii) Muodostetaan *ensin* yhdistetty funktio $h \circ g$ ja *sitten* yhdistetty funktio $(h \circ g) \circ f$.
- Näin muodostetut yhdistetyt funktiot ovat *samat*:
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Käänteisalkio

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B :

$$f: A \rightarrow B$$

- Joukon A alkio a on joukon B alkion b **käänteisalkio** kuvauksessa f , jos $f(a) = b$.
- Joukon B alkiolla voi olla useita käänteisalkioita, mutta toisaalta kaikilla joukon B alkiolla ei ole välttämättä yhtään käänteisalkiota.
- Jos funktio f on *surjektio*, joukon B jokaisella alkiolla on käänteisalkio.
- Jos joukon B alkiolla on käänteisalkio ja funktio f on *injektio*, käänteisalkio on *yksikäsitteinen*.

Joukon alkukuva

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B :

$$f: A \rightarrow B$$

- Joukon B osajoukon D **alkukuva** kuvauksessa f on niiden joukon A alkuiden a joukko, jotka f kuvaa joukolle D .
- Jos siis $f: A \rightarrow B$ ja $D \subset B$, niin joukon D *alkukuva* $f^{-1}(D)$ kuvauksessa f voidaan määritellä seuraavalla tavalla:

$$f^{-1}(D) = \{a \in A \mid f(a) \in D\}$$

- Joukon B osajoukon D *alkukuva* $f^{-1}(D)$ on joukon A *osajoukko*:

$$f^{-1}(D) \subset A$$

- Joukon B osajoukon D *alkukuva* $f^{-1}(D)$ voi olla *tyhjä*.

Funktiot

Yhden alkion alkukuva

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B :

$$f: A \rightarrow B$$

- Joukon B **alkion b alkukuva** kuvauksessa f on niiden joukon A alkioden a joukko, jotka f kuvaa alkioille b .
- Jos siis $f: A \rightarrow B$ ja $b \in B$, niin alkion b *alkukuva* $f^{-1}(b)$ kuvauksessa f voidaan määritellä seuraavalla tavalla:

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

- Joukon B alkion b *alkukuva* $f^{-1}(b)$ on joukon A osajoukko:

$$f^{-1}(b) \subset A$$

- Joukon B alkion b *alkukuva* $f^{-1}(b)$ voi koostua *yhdestä* tai *useammasta* joukon A alkioista tai voi olla *tyhjä*.

Käänteisfunktio 1/2

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B :

$$f: A \rightarrow B$$

- Tällöin joukon B alkion b *alkukuva*

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

kuvauksessa f on joukon A osajoukko, joka voi koostua *yhdestä* tai *useammasta* joukon A alkion a tai voi olla *tyhjä*.

- Jos f on **bijektio**, joukon B jokaisen alkion b alkukuva $f^{-1}(b)$ koostuu *täsmälleen yhdestä* joukon A alkion a .
- Tällöin *jokaiseen* joukon B alkioon b voidaan liittää *yksikäsitteinen käänteisalkio* $f^{-1}(b) = a$.

Käänteisfunktio 2/2

- Olkoon siis f **bijektio** joukosta A joukkoon B :

$$f: A \rightarrow B$$

- *Sääntö*, joka liittää *jokaiseen* joukon B alkioon b *yksikäsitteisen käänteisalkion*

$$f^{-1}(b) = a$$

määrittelee funktion f **käänteisfunktion** f^{-1} joukosta B joukkoon A :

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$

Käänteisfunktion ominaisuudet 1/2

- Oletetaan, että funktio

$$f: A \rightarrow B$$

on *bijektio*, jolloin funktiolla f on *käänteisfunktio*

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

- Tällöin *yhdistetty funktio* $(f^{-1} \circ f)$ on *identtinen funktio* joukossa A ja *yhdistetty funktio* $(f \circ f^{-1})$ on *identtinen funktio* joukossa B :

$$(f^{-1} \circ f) = 1_A$$

$$(f \circ f^{-1}) = 1_B$$

Käänteisfunktion ominaisuudet 2/2

- Olkoot

$$f: A \rightarrow B$$

ja

$$g: B \rightarrow A$$

- Oletetaan, että *yhdistetty funktio*

$$(g \circ f): A \rightarrow A$$

on *identtinen funktio* joukossa A ja *yhdistetty funktio*

$$(f \circ g): B \rightarrow B$$

on *identtinen funktio* joukossa B .

- Tällöin g on funktion f *käänteisfunktio*: $g = f^{-1}$.

Joukko-oppi

Joukko-opin peruskäsitteet

Joukko-opin perusoperaatiot

Joukko-opin laskusäännöt

Funktiot

>> Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Boolean algebrat

σ -algebrat

Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

Järjestetty pari

- Sanomme, että

$$(a, b)$$

on olioiden a ja b **järjestetty pari**, jossa

$$a = \text{parin 1. alkio}$$

$$b = \text{parin 2. alkio}$$

- Järjestetyt parit (a, b) ja (c, d) ovat *samat*, jos

$$a = c$$

ja

$$b = d$$

Tulojoukko

- Olkoot A ja B joukkoja.
- Joukkojen A ja B **tulojoukko** eli **karteesinen tulo** $A \times B$ muodostuu kaikista järjestetyistä pareista (a, b) , joissa $a \in A$ ja $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

Funktion kuvaaja

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B :

$$f: A \rightarrow B$$

- Funktion f **kuvaaja** f^* on kaikkien niiden järjestettyjen parien (a, b) joukko, joissa $a \in A$ ja $b = f(a)$:

$$f^* = \{(a, b) \mid a \in A, b = f(a)\}$$

- Siten funktion f kuvaaja f^* on tulojoukon $A \times B$ osajoukko:

$$f^* \subset A \times B$$

Funktion kuvaajan ominaisuudet

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B :

$$f: A \rightarrow B$$

- Funktion f kuvaajalla

$$f^* = \{(a, b) \mid a \in A, b = f(a)\}$$

on seuraavat ominaisuudet:

- (i) Jos $a \in A$ ja $f(a) = b$, niin järjestetty pari $(a, b) \in f^*$.
- (ii) Jokainen $a \in A$ voi olla ensimmäisenä alkiona *vain yhdessä* joukkoon f^* kuuluvassa järjestetyssä parissa:
Jos $(a, b) \in f^*$ ja $(a, c) \in f^*$, niin $b = c$.

Funktio järjestettyjen parien joukkona 1/4

- Olkoon f^* joukkojen A ja B *karteesisen tulon*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

osajoukko:

$$f^* \subset A \times B$$

- Oletetaan, että joukolla f^* on seuraavat ominaisuudet:
 - (i) Jos $a \in A$, niin *on olemassa* $b \in B$ siten, että järjestetty pari $(a, b) \in f^*$.
 - (ii) Jokainen $a \in A$ voi olla ensimmäisenä alkiona *vain yhdessä* joukkoon f^* kuuluvassa järjestetyssä parissa: Jos $(a, b) \in f^*$ ja $(a, c) \in f^*$, niin $b = c$.

Funktio järjestettyjen parien joukkona 2/4

- Tällöin f^* määrittelee säännön, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon a yksikäsitteisen joukon B alkion b :
 - Ominaisuus (i) takaa sen, että jokaiseen joukon A alkioon a liittyy jokin joukon B alkio b .
 - Ominaisuus (ii) takaa sen, että joukon A alkioon a liittyvä joukon B alkio b on yksikäsitteinen.
- Siten f^* määrittelee **funktion** f joukosta A joukkoon B .

Funktio järjestettyjen parien joukkona 3/4

- Edellä esitetty merkitsee sitä, että jokaista funktiota

$$f: A \rightarrow B$$

vastaa *kääntäen yksikäsitteisesti* karteesisen tulon $A \times B$ osajoukko f^* , joka toteuttaa ehdot

(i) Jos $a \in A$, niin *on olemassa* $b \in B$ siten, että järjestetty pari $(a, b) \in f^*$.

(ii) Jos $(a, b) \in f^*$ ja $(a, c) \in f^*$, niin $b = c$.

- Siten funktiot ja ehdot (i) ja (ii) toteuttavat karteesisten tulojen osajoukot voidaan *samastaa*.
- Tämä merkitsee sitä, että ***funktiota ja sen kuvaajaa ei normaalisti tarvitse erottaa toisistaan.***

Funktio järjestettyjen parien joukkona 4/4

- Funktiot voidaan siis määritellä myös seuraavalla tavalla:

Kartesisen tulon

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

osajoukko f määrittelee funktion joukosta A joukkoon B , jos jokainen $a \in A$ on ensimmäisenä alkiona täsmälleen yhdessä joukkoon f kuuluvassa järjestetyssä parissa.

Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

Yleistetty karteesinen tulo 1/2

- Olkoot

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

joukkoja ja

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

niiden alkioita siten, että

$$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$$

- Kutsutaan alkioiden a_1, a_2, \dots, a_n järjestettyä jonoa

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

n-tuppeliksi (tai *n:iköksi*).

Yleistetty karteesinen tulo 2/2

- Joukkojen

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

karteesinen tulo

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

on kaikkien joukkojen A_1, A_2, \dots, A_n alkioiden a_1, a_2, \dots, a_n *n-tuppeleiden* eli järjestettyjen jonojen

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

muodostama joukko:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

$$= \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

Joukko-oppi

Joukko-opin peruskäsitteet

Joukko-opin perusoperaatiot

Joukko-opin laskusäännöt

Funktiot

Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

>> Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Boolean algebrat

σ -algebrat

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Joukkoperheet

- *Joukkojen kokoelmaa* eli joukkoa, jonka alkiot ovat joukkoja kutsutaan tavallisesti **joukkoperheeksi**.
- Joukkoperhe on siis *joukkojen muodostama joukko*.

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Potenssijoukko

- Olkoon joukko A perusjoukon S osajoukko.
- Joukon A *kaikkien* osajoukkojen muodostamaa joukko-perhettä kutsutaan joukon A **potenssijoukoksi**.
- Joukon A potenssijoukkoa merkitään seuraavasti:
 2^A
- Joukon A potenssijoukko 2^A voidaan määritellä seuraavalla tavalla:

$$2^A = \{C \mid C \subset A\}$$

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Potenssijoukko: Esimerkki

- Olkoon

$$A = \{1, 2, 3\}$$

- Tällöin joukon A potenssijoukko on

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

- Joukon A potenssijoukko 2^A on joukkoperhe, jonka alkioina ovat
 - tyhjä joukko
 - kaikki joukon A yhden alkion osajoukot
 - kaikki joukon A kahden alkion osajoukot
 - joukko A itse

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Indeksoidut joukkoperheet

- Olkoon \mathcal{A} jokin *joukkoperhe* eli joukkojen kokoelma.
- Olkoon I joukko.
- **Indeksoitu joukkoperhe** $\{A_i\}_{i \in I}$ on funktio

$$f : I \rightarrow \mathcal{A}$$

jossa joukkoa I kutsutaan *indeksijoukoksi*, joukon I alkiota i *indeksiksi* ja joukkoa $A_i \in \mathcal{A}$ *indeksoiduksi joukoksi*.

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Indeksoidut joukkoperheet:

Esimerkkejä

- Jos indeksijoukkona I on *luonnollisten lukujen joukko* \mathbb{N} , on indeksoitu joukkoperhe muotoa

$$\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$$

- Jos indeksijoukkona I on äärellinen joukko $\{1, 2, \dots, n\}$ (n ensimmäistä positiivista kokonaislukua), on indeksoitu joukkoperhe muotoa

$$\{A_i\}_{i \in I} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Yleistetyt joukko-operaatiot

- Olkoon $\{A_i\}_{i \in I}$ *indeksoitu joukkoperhe*.
- Joukkojen $A_i, i \in I$ **yhdiste**

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

on niiden alkioiden x joukko, jotka kuuluvat *ainakin yhteen* joukoista $A_i, i \in I$:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{On olemassa } i \in I \text{ siten, että } x \in A_i\}$$

- Joukkojen $A_i, i \in I$ **leikkaus**

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

on niiden alkioiden x joukko, jotka kuuluvat *jokaiseen* joukoista $A_i, i \in I$:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ kaikille } i \in I\}$$

Yleistetyt joukko-operaatiot:

Erikoistapauksia 1

- Olkoon $\{A_i\}_{i \in I}$ *indeksoitu joukkoperhe*, jossa indeksi-joukkona I on luonnollisten lukujen joukko \mathbb{N} .
- Joukkojen A_i , $i \in \mathbb{N}$ *yhdiste* voidaan määritellä muodossa

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \left\{ x \mid \begin{array}{l} \text{On olemassa } A_i, i = 1, 2, 3, \dots \\ \text{sitte, että } x \in A_i \end{array} \right\}$$

- Joukkojen A_i , $i \in \mathbb{N}$ *leikkaus* voidaan määritellä muodossa

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left\{ x \mid x \in A_i \text{ kaikille } i = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

Yleistetyt joukko-operaatiot: Erikoistapauksia 2

- Olkoon $\{A_i\}_{i \in I}$ *indeksoitu joukkoperhe*, jossa indeksijoukkona I on äärellinen joukko $\{1, 2, \dots, n\}$.
- Joukkojen A_i , $i \in I$ *yhdiste* voidaan määritellä muodossa

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \left\{ x \mid \begin{array}{l} \text{On olemassa } A_i, i = 1, 2, \dots, n \\ \text{sitte, että } x \in A_i \end{array} \right\}$$

- Joukkojen A_i , $i \in I$ *leikkaus* voidaan määritellä muodossa

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \left\{ x \mid x \in A_i \text{ kaikille } i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

Yleistetyt joukko-operaatiot ja distribuutiolait

- Olkoon $\{A_i\}_{i \in I}$ *indeksoitu joukkoperhe* ja B mielivaltainen joukko.
- Tällöin

$$B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$$

ja

$$B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$$

Yleistetyt joukko-operaatiot ja De Morganin lait

- Olkoon $\{A_i\}_{i \in I}$ *indeksoitu joukkoperhe*.
- Tällöin

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$$

ja

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Ositus

- Olkoon A perusjoukon S osajoukko.
- Olkoot $B_i, i \in I$ joukon A epätyhjiä osajoukkoja:
$$B_i \neq \emptyset, i \in I.$$
- Joukot $B_i, i \in I$ muodostavat joukon A **osituksen**, jos seuraavat kaksi ehtoa pätevät:

$$(i) \quad \bigcup_{i \in I} B_i = A$$

$$(ii) \quad B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ jos } i \neq j$$

Joukko-oppi

Joukko-opin peruskäsitteet

Joukko-opin perusoperaatiot

Joukko-opin laskusäännöt

Funktiot

Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

>> Boolean algebrat

σ -algebrat

Boolean algebra: Määritelmä 1/2

- Olkoon S joukko.
- Olkoon \mathfrak{F} jokin joukon S osajoukkojen muodostama joukkoperhe.
- Jos siis joukko A on joukkoperheen \mathfrak{F} alkio, niin A on joukon S osajoukko:

$$A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \subset S$$

Boolean algebrat

Boolean algebra:

Määritelmä 2/2

- Joukkoperhe \mathfrak{F} on **Boolean algebra**, jos

(i) $\emptyset \in \mathfrak{F}$

(ii) $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}$

(iii) $A \in \mathfrak{F}, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{F}$

Boolean algebra ja joukko-opin operaatiot 1/2

- Olkoon \mathfrak{F} joukossa S määritelty *Boolean algebra*.

- Olkoot

$$A \in \mathfrak{F} \text{ ja } B \in \mathfrak{F}$$

- Boolean algebran aksioomien mukaan

$$\emptyset, A^c, B^c, A \cup B \in \mathfrak{F}$$

- Lisäksi voidaan osoittaa, että

$$S, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A \in \mathfrak{F}$$

Boolean algebra ja joukko-opin operaatiot 2/2

- Boolean algebra on siis **suljettu** äärellisen monen tavanomaisen joukko-opin operaation suhteen.
- Tällä tarkoitetaan siitä, että tavanomaiset joukko-opin operaatiot *eivät vie Boolean algebran ulkopuolelle*:
Jos Boolean algebran \mathfrak{F} joukkoihin sovelletaan *korkeintaan äärellinen määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita komplementti, yhdiste, leikkaus ja erotus, niin tuloksena saatavat joukot kuuluvat edelleen Boolean algebraan \mathfrak{F} .

Joukko-opin operaatiot

- Olkoon \mathfrak{F} joukossa S määritelty Boolean algebra.
- *Todistetaan* seuraavat joukko-opin tulokset:
 - (i) Joukko $S \in \mathfrak{F}$
 - (ii) Jos $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, niin $A \cap B \in \mathfrak{F}$
 - (iii) Jos $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, niin $A \setminus B \in \mathfrak{F}$

Boolean algebrat

Joukko-opin operaatiot: Perusjoukko 1/2

- Olkoon \mathfrak{F} joukossa S määritelty Boolean algebra.
- Tällöin *perusjoukko* S kuuluu joukkoperheeseen \mathfrak{F} :

$$S \in \mathfrak{F}$$

Joukko-opin operaatiot: Perusjoukko 2/2

- Väite seuraa, siitä että

$$S = \emptyset^c$$

- Todistetaan siis, että

$$\emptyset^c \in \mathfrak{F}$$

- Aksioman (i) mukaan

$$\emptyset \in \mathfrak{F}$$

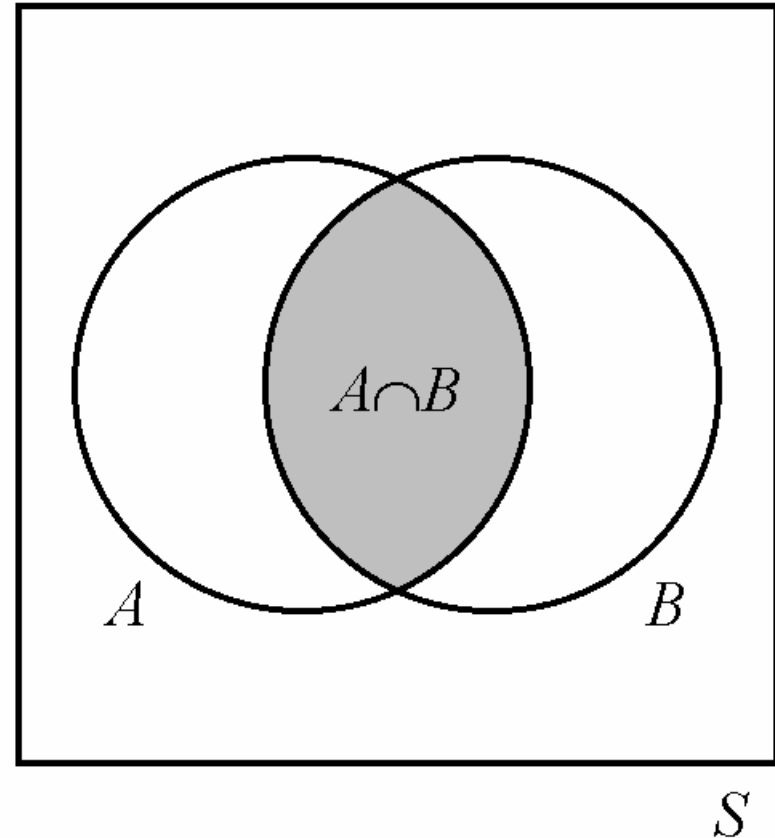
- Aksioman (ii) mukaan

$$\emptyset^c = S \in \mathfrak{F}$$

Boolean algebrat

Joukko-opin operaatiot: Leikkausjoukko 1/2

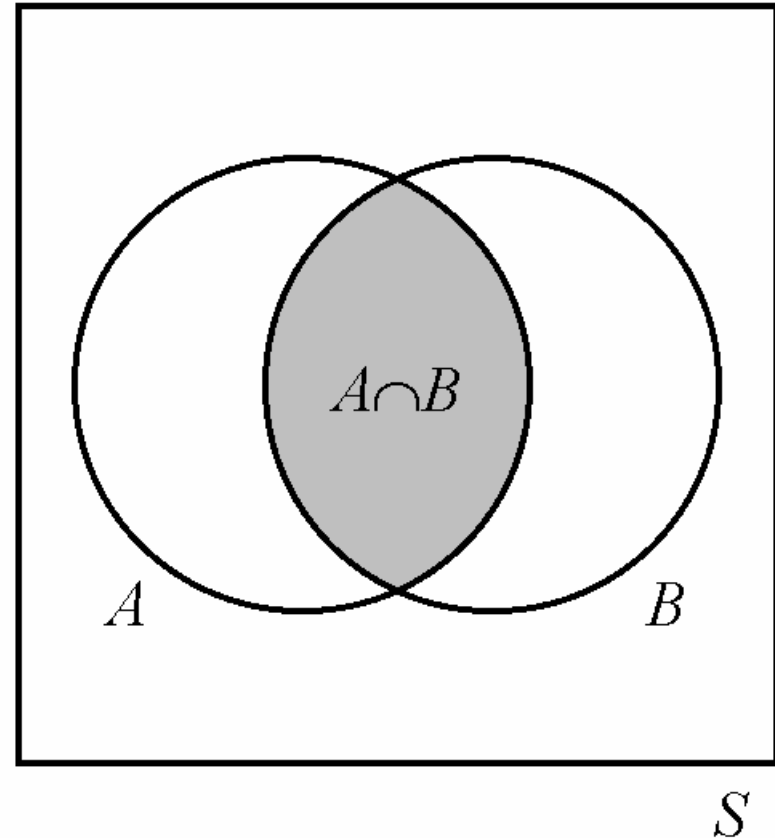
- Olkoon \mathfrak{F} joukossa S määritelty Boolean algebra.
- Olkoot
 $A \in \mathfrak{F}, B \in \mathfrak{F}$
- Tällöin joukkojen A ja B leikkaukselle pätee:
 $A \cap B \in \mathfrak{F}$



Boolean algebrat

Joukko-opin operaatiot: Leikkausjoukko 2/2

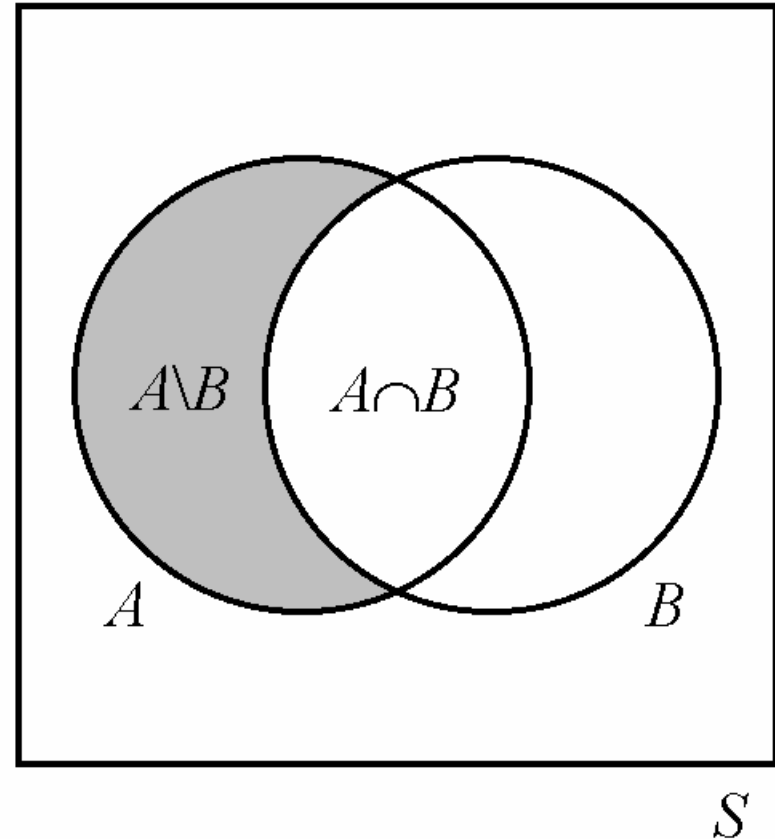
- Väite seuraa siitä, että
DeMorganin lain mukaan
 $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$
- Todistetaan siis, että
 $A \in \mathfrak{F}, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c \in \mathfrak{F}$
- Aksioman (ii) mukaan
 $A \in \mathfrak{F}, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}, B^c \in \mathfrak{F}$
- Aksioman (iii) mukaan
 $A^c \in \mathfrak{F}, B^c \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \cup B^c \in \mathfrak{F}$
- Vihdoin aksioman (ii) mukaan
 $A^c \cup B^c \in \mathfrak{F} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c \in \mathfrak{F}$



Boolean algebrat

Joukko-opin operaatiot: Erotusjoukko 1/2

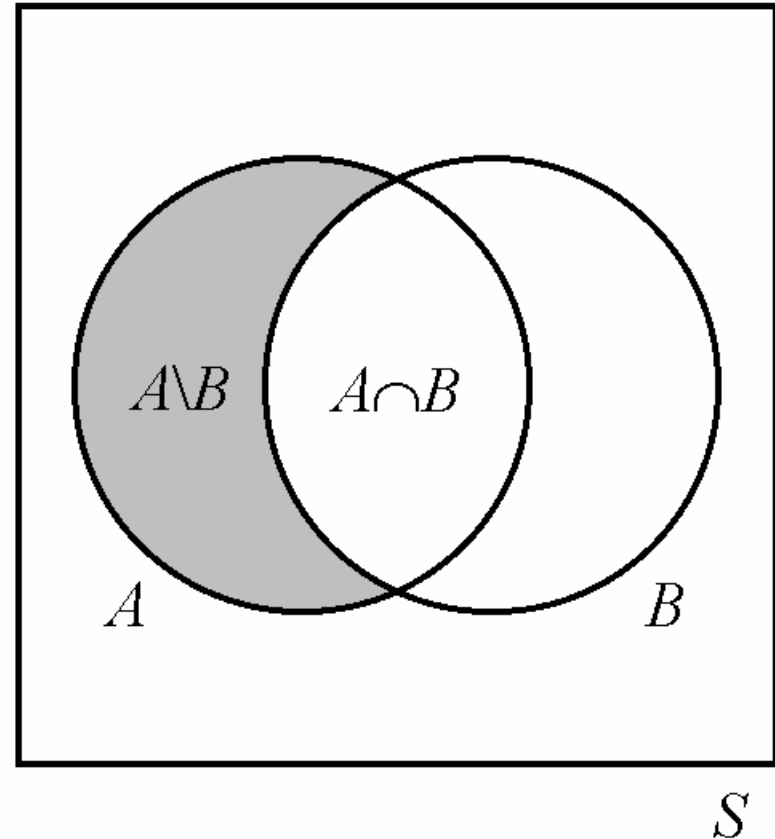
- Olkoon \mathfrak{F} joukossa S määritelty Boolean algebra.
- Olkoot $A \in \mathfrak{F}, B \in \mathfrak{F}$
- Tällöin joukkojen A ja B erotukselle pätee:
 $A \setminus B \in \mathfrak{F}$



Boolean algebrat

Joukko-opin operaatiot: Erotusjoukko 2/2

- Väite seuraa siitä, että
 $A \setminus B = A \cap B^c$
- Todistetaan siis, että
 $A \in \mathfrak{F}, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathfrak{F}$
- Aksiooman (ii) mukaan
 $B \in \mathfrak{F} \Rightarrow B^c \in \mathfrak{F}$
- Leikkausjoukkoa koskevan tuloksen mukaan
 $A \in \mathfrak{F}, B^c \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathfrak{F}$



Boolean algebrat

Boolean algebra: Esimerkki

- Olkoon S mielivaltainen joukko.
- Olkoon

$$A \subset S$$

mielivaltainen joukon S osajoukko.

- Tällöin joukkoperhe

$$\mathfrak{F} = \{\emptyset, A, A^c, S\}$$

muodostaa Boolean algebran joukossa S , koska

(i) $\emptyset \in \mathfrak{F}$

(ii) $B \in \mathfrak{F} \Rightarrow B^c \in \mathfrak{F}$

(iii) $B \in \mathfrak{F}, C \in \mathfrak{F} \Rightarrow B \cup C \in \mathfrak{F}$

Kohdissa (ii) ja (iii) joukot B ja C voivat olla mitkä tahansa joukoista \emptyset, A, A^c, S .

Joukko-oppi

Joukko-opin peruskäsitteet

Joukko-opin perusoperaatiot

Joukko-opin laskusäännöt

Funktiot

Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Boolean algebrat

>> σ -algebrat

σ -algebrat

σ -algebran määritelmä 1/2

- Olkoon S joukko.
- Olkoon \mathfrak{F} jokin joukon S osajoukkojen muodostama joukkoperhe.
- Jos siis joukko A on joukkoperheen \mathfrak{F} alkio, niin A on joukon S osajoukko:

$$A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \subset S$$

σ -algebrat

σ -algebran määritelmä 2/2

- Joukkoperhe \mathfrak{F} on σ -algebra, jos

(i) $\emptyset \in \mathfrak{F}$

(ii) $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}$

(iii) $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$

σ -algebrat ja joukko-opin operaatiot 1/2

- Olkoon \mathfrak{F} joukossa S määritelty σ -algebra.
- Olkoot

$$A_i \in \mathfrak{F}, i = 1, 2, 3, \dots$$

- σ -algebran aksioomien mukaan

$$A_i^c \in \mathfrak{F}, i = 1, 2, 3, \dots \quad \text{ja} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$$

- Lisäksi voidaan osoittaa, että

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$$

σ -algebrat ja joukko-opin operaatiot 2/2

- σ -algebra on siis **suljettu** numeroituvan monen tavanomaisen joukko-opin operaation suhteen.
- Tällä tarkoitetaan siitä, että *numeroituva* määrä tavanomaisia joukko-opin operaatioita *ei vie* σ -algebran *ulkopuolelle*:

Jos σ -algebran \mathfrak{F} joukkoihin sovelletaan *korkeintaan numeroituva määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita komplementti, yhdiste, leikkaus ja erotus, niin tuloksena saatavat joukot kuuluvat edelleen σ -algebraan \mathfrak{F} .

σ -algebrat

σ -algebrat vs Boolean algebrat

- Jos joukon S osajoukkojen perhe \mathfrak{F} toteuttaa σ -algebran aksioomat, niin se toteuttaa myös *Boolean algebran* aksioomat.
- Siten *jokainen* Boolean algebran aksioomista johdettu *joukko-opin sääntö* pätee myös σ -algebroidille, mutta ei kääntäen.