

Mat-1.2620 Sovellettu todennäköisyyslaskenta B**10. harjoitukset / Ratkaisut****Aiheet: Tilastolliset testit****Avainsanat:**

Aritmeettinen keskiarvo, Bernoulli-jakauma, F -jakauma, F -testi, Frekvenssi, Keskihajonta, Normaalijakauma, Odotusarvo, Odotusarvojen vertailutesti, Otos, Otoskoko, Otosvarianssi, Parivertailutesti, Riippumattomat otokset, Riippumattomuus, Riippuvat otokset, Standardoitu normaalijakauma, Suhteellinen frekvenssi, Suhteellinen osuus, Suhteellisten osuuksien vertailutesti, Testit odotusarvolle, Testi suhteelliselle osuudelle, Testit varianssille, t -jakauma, t -testi, Todennäköisyys, Varianssi, Varianssien vertailutesti, Yksinkertainen satunnaisotos, z -testi

Tilastolliset testit**Yhden otoksen t -testi****Testausasetelma yhden otoksen t -testissä odotusarvolle**

Olkoon

$$X_i, i = 1, 2, \dots, n$$

yksinkertainen satunnaisotos normaalijakaumasta $N(\mu, \sigma^2)$. Tällöin satunnaismuuttujat $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ ovat riippumattomia ja noudattavat samaa normaalijakaumaa $N(\mu, \sigma^2)$:

$$\begin{aligned} X_1, X_2, \dots, X_n &\perp \\ X_i &\sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Asetetaan normaalijakauman $N(\mu, \sigma^2)$ odotusarvo- eli paikkaparametrille μ nollahypoteesi

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

Testausongelma: Ovatko havainnot *sopuossuudessa* nollahypoteesin H_0 kanssa?

Ongelman ratkaisuna on *yhden otoksen t -testi odotusarvolle*.

Hypoteesit yhden otoksen t -testissä odotusarvolle

Yleinen hypoteesi H :

$$\begin{aligned} X_1, X_2, \dots, X_n &\perp \\ X_i &\sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Nollahypoteesi:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

Vaihtoehtoiset hypoteesit:

$$\left. \begin{aligned} H_1 : \mu > \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{aligned} \right\} \text{ 1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi yhden otoksen t -testissä odotusarvolle

Olkoot

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

ja

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

tavanomaiset *harhattomat estimaattorit* normaalijakauman parametreille μ ja σ^2 .

Tunnusluku $\bar{X}$ on havaintojen X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ *aritmeettinen keskiarvo* ja s^2 on havaintojen X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ *otosvarianssi*.

Testisuure yhden otoksen t -testissä odotusarvolle

Määritellään t -testisuure

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

Jos *nollahypoteesi*

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

pätee, niin testisuure t noudattaa *Studentin t -jakaumaa* vapausastein $(n - 1)$:

$$t \sim t(n-1)$$

Testisuureen t *normaaliarvo* $= 0$, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$E(t) = 0$$

Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen t arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.

Hylkäysalueen määrittäminen yhden otoksen t -testissä odotusarvolle

Valitaan testin *merkitsevyystasoksi* α .

(i) Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

niin *kriittinen raja* $+t_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(t \geq +t_\alpha) = \alpha$$

jossa $t \sim t(n-1)$. Testin *hylkäysalue* on tällöin muotoa

$$(+t_\alpha, +\infty)$$

(ii) Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

niin kriittinen raja $-t_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(t \leq -t_\alpha) = \alpha$$

jossa $t \sim t(n-1)$. Testin hylkäysalue on tällöin muotoa

$$(-\infty, -t_\alpha)$$

(iii) Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

niin kriittiset rajat $-t_{\alpha/2}$ ja $+t_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$\Pr(t \leq -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

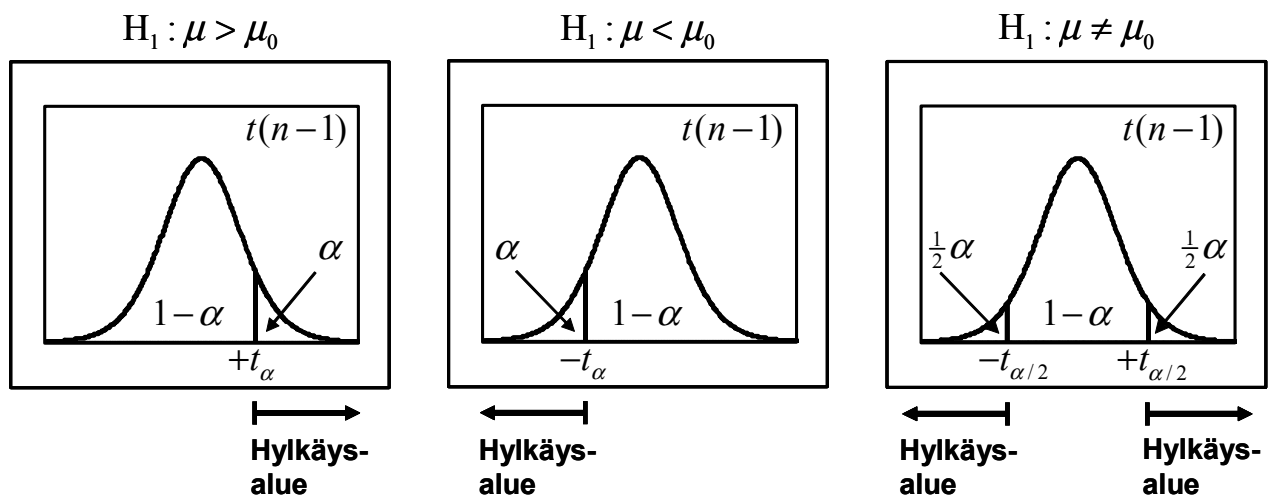
$$\Pr(t \geq +t_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

jossa $t \sim t(n-1)$. Testin hylkäysalue on tällöin muotoa

$$(-\infty, -t_{\alpha/2}) \cup (+t_{\alpha/2}, +\infty)$$

Nollahypoteesi hylätään, jos testisuureen arvo osuu hylkäysalueelle.

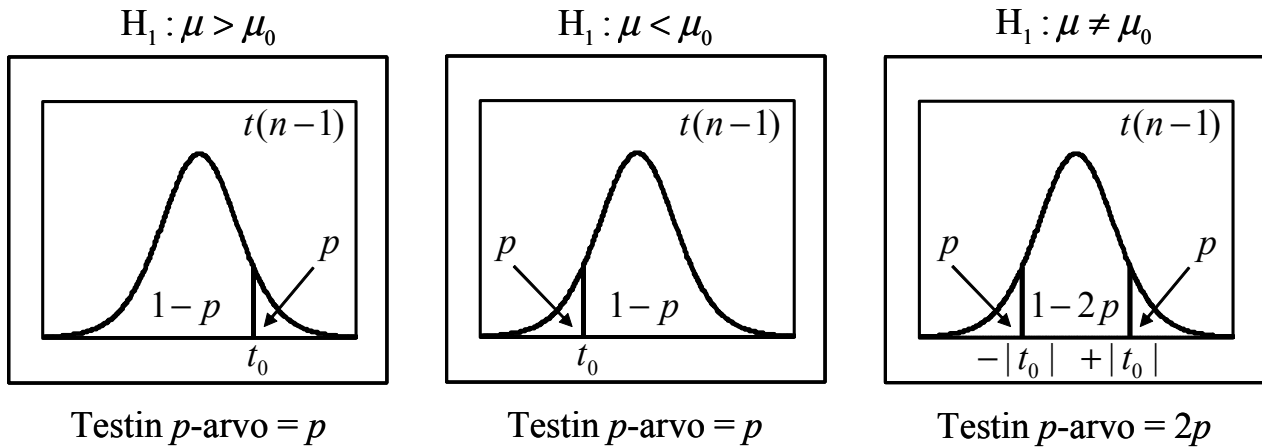
Alla olevat kuviot havainnollistavat testin hylkäysalueen määrittämistä:



p -arvon määrittäminen yhden otoksen t -testissä odotusarvolle

Olkoon t -testisuureen havaittu arvo t_0 .

Alla olevat kuviot havainnollistavat testin p -arvon määrittämistä:



Nollahypoteesi hylätään, jos testin p -arvo on kyllin pieni.

Yhden otoksen testi varianssille

Olkoon

$$X_i, i = 1, 2, \dots, n$$

yksinkertainen satunnaisotos normaalijakaumasta $N(\mu, \sigma^2)$. Tällöin satunnaismuuttujat $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ ovat riippumattomia ja noudattavat samaa normaalijakaumaa $N(\mu, \sigma^2)$:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n$$

Asetetaan normaalijakauman $N(\mu, \sigma^2)$ varianssiparametrille σ^2 nollahypoteesi

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

Testausongelma: Ovatko havainnot *sopu*soinnussa nollahypoteesin H_0 kanssa?

Ongelman ratkaisuna on yhden otoksen χ^2 -testi varianssille.

Hypoteesit yhden otoksen testissä varianssille

Yleinen hypoteesi H :

$$X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n$$

Nollahypoteesi:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

Vaihtoehtoiset hypoteesit:

$$\left. \begin{array}{l} H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{array} \right\} \text{1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi yhden testissä varianssille

Olkoot

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

ja

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

tavanomaiset *harhattomat* estimaattorit normaalijakauman parametreille μ ja σ^2 .

Tunnusluku $\bar{X}$ on havaintojen $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ aritmeettinen keskiarvo ja s^2 on havaintojen $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ otosvarianssi.

Testisuure yhden otoksen testissä varianssille

Määritellään χ^2 -testisuure

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Jos *nollahypoteesi*

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

pätee, niin testisuure χ^2 noudattaa χ^2 -jakaumaa vapausastein $(n-1)$:

$$\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$$

Testisuureen χ^2 normaaliarvo $= (n-1)$, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$E(\chi^2) = n-1$$

Siten sekä *pienet* että *suuret* testisuureen χ^2 arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.

Hylkäysalueen määrittäminen yhden otoksen testissä varianssille

Valitaan testin *merkitsevyystasoksi* α .

(i) Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

niin *kriittinen raja* χ_α^2 saadaan ehdosta

$$\Pr(\chi^2 \geq \chi_\alpha^2) = \alpha$$

jossa $\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$. Testin *hylkäysalue* on tällöin muotoa

$$(\chi_\alpha^2, +\infty)$$

(ii) Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

niin *kriittinen raja* $\chi_{1-\alpha}^2$ saadaan ehdosta

$$\Pr(\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2) = \alpha$$

jossa $\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$. Testin *hylkäysalue* on tällöin muotoa

$$(0, \chi_{1-\alpha}^2)$$

(iii) Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

niin kriittiset rajat $\chi_{1-\alpha/2}^2$ ja $\chi_{\alpha/2}^2$ saadaan ehdoista

$$\Pr(\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2) = \alpha/2$$

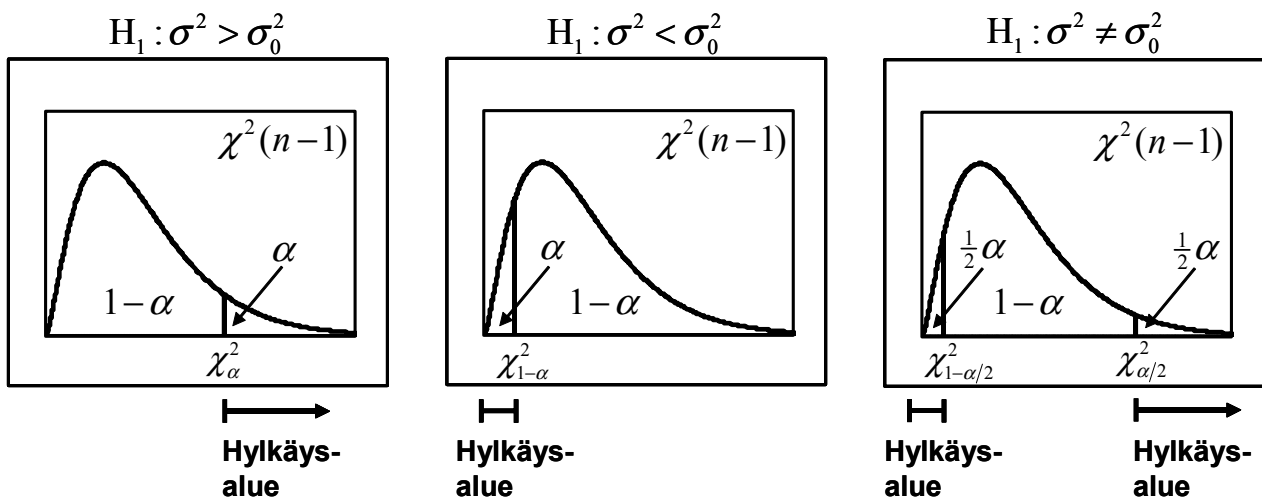
$$\Pr(\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2) = \alpha/2$$

jossa $\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$. Testin hylkäysalue on tällöin muotoa

$$(0, \chi_{1-\alpha/2}^2) \cup (\chi_{\alpha/2}^2, +\infty)$$

Nollahypoteesi hylätään, jos testisuureen arvo osuu hylkäysalueelle.

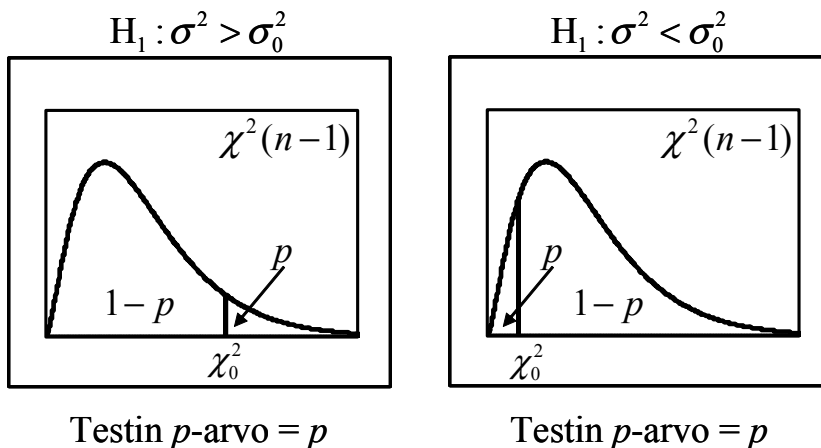
Alla olevat kuviot havainnollistavat testin hylkäysalueen määrittämistä:



***p*-arvon määrittäminen yhden otoksen testissä varianssille**

Olkoon χ^2 -testisuureen havaittu arvo χ_0^2 .

Alla olevat kuviot havainnollistavat testin *p*-arvon määrittämistä, kun vaihtoehtoinen hypoteesi on yksisuuntainen:



Kaksisuuntaisen vaihtoehtoisen hypoteesin

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

tapauksessa testin p -arvo on

$$p = 2 \times \min \{ \Pr(\chi^2 \geq \chi_0^2), \Pr(\chi^2 \leq \chi_0^2) \}$$

jossa

$$\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$$

Nollahypoteesi *hylätään, jos testin p -arvo on kyllin pieni.*

Kahden riippumattoman otoksen t -testi

Testausasetelma kahden riippumattoman otoksen t -testissä odotusarvoille

Olkoon

$$X_{i1}, i = 1, 2, \dots, n_1$$

yksinkertainen satunnaisotos normaalijakaumasta $N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Tällöin satunnaismuuttujat $X_{i1}, i = 1, 2, \dots, n_1$ ovat riippumattomia ja noudattavat samaa normaalijakaumaa $N(\mu_1, \sigma_1^2)$:

$$\begin{aligned} X_{11}, X_{21}, \dots, X_{n_1 1} &\perp \\ X_{i1} &\sim N(\mu_1, \sigma_1^2), i = 1, 2, \dots, n_1 \end{aligned}$$

Olkoon

$$X_{j2}, j = 1, 2, \dots, n_2$$

yksinkertainen satunnaisotos normaalijakaumasta $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Tällöin satunnaismuuttujat $X_{j2}, j = 1, 2, \dots, n_2$ ovat riippumattomia ja noudattavat samaa normaalijakaumaa $N(\mu_2, \sigma_2^2)$:

$$\begin{aligned} X_{12}, X_{22}, \dots, X_{n_2 2} &\perp \\ X_{j2} &\sim N(\mu_2, \sigma_2^2), j = 1, 2, \dots, n_2 \end{aligned}$$

Oletetaan lisäksi, että otokset

$$X_{i1}, i = 1, 2, \dots, n_1$$

ja

$$X_{j2}, j = 1, 2, \dots, n_2$$

ovat toisistaan riippumattomia.

Asetetaan normaalijakaumien $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ja $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ odotusarvo- eli paikkaparametreille μ_1 ja μ_2 nollahypoteesi

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

Testausongelma: Ovatko havainnot *sopu*soinnussa nollahypoteesin H_0 kanssa?

Ongelman ratkaisuna on kahden riippumattoman otoksen t -testi odotusarvoille.

Hypoteesit kahden riippumattoman otoksen t -testissä odotusarvoille

Yleinen hypoteesi H :

- (i) $X_{i1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), i = 1, 2, \dots, n_1$
- (i) $X_{j2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), j = 1, 2, \dots, n_2$
- (iii) Havainnot X_{i1} ja X_{j2} ovat riippumattomia kaikille i ja j

Nollahypoteesi:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

Vaihtoehtoiset hypoteesit:

$$\left. \begin{array}{l} H_1 : \mu_1 > \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{array} \right\} \text{ 1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi kahden riippumattoman otoksen t -testissä odotusarvoille

Olkoot

$$\bar{X}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} X_{ik}, \quad k=1,2$$

ja

$$s_k^2 = \frac{1}{n_k - 1} \sum_{i=1}^{n_k} (X_{ik} - \bar{X}_k)^2, \quad k=1,2$$

tavanomaiset *harhattomat estimaattorit* normaalijakauman parametreille μ_k ja σ_k^2 .

Tunnusluku $\bar{X}_k$ on havaintojen X_{ik} , $i = 1, 2, \dots, n_k$, $k = 1, 2$ *aritmeettinen keskiarvo* ja s_k^2 on havaintojen X_{ik} , $i = 1, 2, \dots, n_k$, $k = 1, 2$ *otosvarianssi*.

Testisuure yleisessä tapauksessa kahden riippumattoman otoksen t -testissä odotusarvoille

Määritellään t -testisuure

$$t_A = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Jos *nollahypoteesi*

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

pätee, niin testisuure t_A noudattaa suurissa otoksissa *approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa* $N(0,1)$:

$$t_A \sim_a N(0,1)$$

Testisuureen t_A *normaaliarvo* $= 0$, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$E(t_A) = 0$$

Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen t_A arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.

Pienissä otoksissa testisuureen t_A jakaumalle saadaan parempi approksimaatio käyttämällä approksimoivana jakaumana *t-jakaumaa* vapausastein (ns. *Satterthwaiten approksimaatio*)

$$v = \frac{\left[\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right]^2}{\frac{1}{n_1 - 1} \left[\frac{s_1^2}{n_1} \right]^2 + \frac{1}{n_2 - 1} \left[\frac{s_2^2}{n_2} \right]^2}$$

Jos *vei ole kokonaisluku*, v :n arvo pyöristetään *alaspäin* lähimpään kokonaislukuun.

Hylkäysalueen määrittäminen kahden riippumattoman otoksen t -testissä odotusarvoille

Valitaan testin *merkitsevyystasoksi* α .

Käsitlemme tässä kriittisten rajojen määrittämisestä vain, kun testisuuretta t_A approksimoidaan *normaalijakaumalla*. Kriittisten rajojen määrittäminen, kun testisuuretta t_A approksimoidaan t -jakaumalla, tapahtuu täsmälleen samalla tavalla kuin yhden otoksen t -testin tapauksessa.

(i) Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

niin *kriittinen raja* $+t_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(t \geq +t_\alpha) = \alpha$$

jossa $t \sim N(0,1)$. Testin *hylkäysalue* on tällöin muotoa

$$(+t_\alpha, +\infty)$$

(ii) Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

niin *kriittinen raja* $-t_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(t \leq -t_\alpha) = \alpha$$

jossa $t \sim N(0,1)$. Testin *hylkäysalue* on tällöin muotoa

$$(-\infty, -t_\alpha)$$

(iii) Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

niin *kriittiset rajat* $-t_{\alpha/2}$ ja $+t_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$\Pr(t \leq -t_{\alpha/2}) = \alpha / 2$$

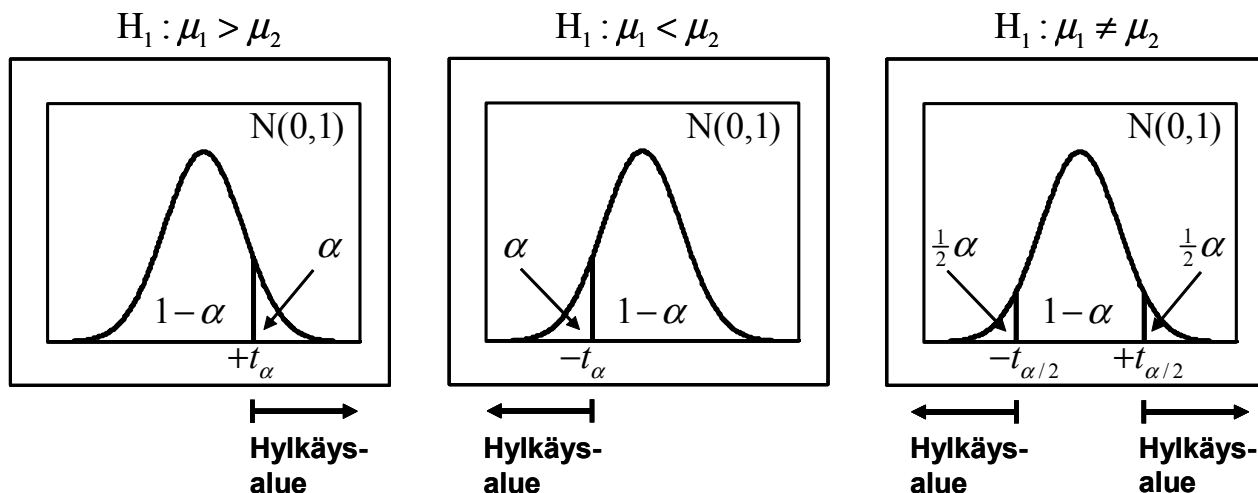
$$\Pr(t \geq +t_{\alpha/2}) = \alpha / 2$$

jossa $t \sim N(0,1)$. Testin *hylkäysalue* on tällöin muotoa

$$(-\infty, -t_{\alpha/2}) \cup (+t_{\alpha/2}, +\infty)$$

Nollahypoteesi *hylätään*, jos testisuureen arvo osuu hylkäysalueelle.

Alla olevat kuviot havainnollistavat testin *hylkäysalueen* valintaa:

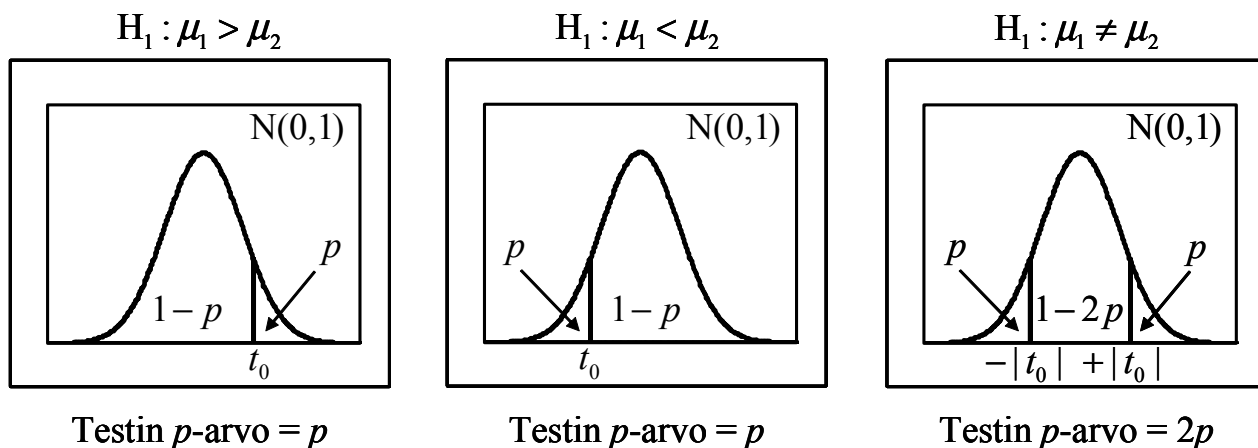


***p*-arvon määrittäminen kahden riippumattoman otoksen *t*-testissä odotusarvoille**

Olkoon *t*-testisuureen t_A havaittu arvo t_0 .

Käsitlemme tässä testin *p*-arvon määrittämisestä vain, kun testisuuretta t_A approksimoidaan *normaalijakaumalla*. *p*-arvon määrittäminen, kun testisuuretta t_A approksimoidaan *t*-jakaumalla, tapahtuu täsmälleen samalla tavalla kuin yhden otoksen *t*-testin tapauksessa.

Alla olevat kuviot havainnollistavat testin *p*-arvon määrittämisestä:



Nollahypoteesi *hylätään*, jos testin *p*-arvo on *kyllin pieni*.

Testisuure kahden riippumattoman otoksen t -testissä odotusarvoille, jos varianssit voidaan olettaa yhtä suuriksi

Oletetaan, että edellä esitettyjen oletusten lisäksi hypoteesi

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

pätee.

Määritellään t -testisuure

$$t_B = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

jossa

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

on ns. *yhdistetty* (engl. *pooled*) *varianssi*.

Jos *nollahypoteesi*

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

pätee, niin *testisuure* t_B *noudattaa* t -*jakaumaa* vapausastein $(n_1 + n_2 - 2)$:

$$t_B \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

Testisuureen t_B *normaaliarvo* $= 0$, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$E(t_B) = 0$$

Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen t_B arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.

Hylkäysalueen määrittäminen kahden riippumattoman otoksen t -testissä odotusarvoille, jos varianssit voidaan olettaa yhtä suuriksi

Kriittisten rajojen määrittäminen tapahtuu täsmälleen samalla tavalla kuin yhden otoksen t -testin tapauksessa.

p -arvon määrittäminen kahden riippumattoman otoksen t -testissä odotusarvoille, jos varianssit voidaan olettaa yhtä suuriksi

Testin p -arvon määrittäminen tapahtuu täsmälleen samalla tavalla kuin yhden otoksen t -testin tapauksessa.

Kahden riippumattoman otoksen testi variansseille

Testausasetelma kahden riippumattoman otoksen testissä variansseille

Olkoon

$$X_{i1}, i = 1, 2, \dots, n_1$$

yksinkertainen satunnaisotos normaalijakaumasta $N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Tällöin satunnaismuuttujat $X_{i1}, i = 1, 2, \dots, n_1$ ovat riippumattomia ja noudattavat samaa normaalijakaumaa $N(\mu_1, \sigma_1^2)$:

$$\begin{aligned} X_{11}, X_{21}, \dots, X_{n_1 1} &\perp \\ X_{i1} &\sim N(\mu_1, \sigma_1^2), i = 1, 2, \dots, n_1 \end{aligned}$$

Olkoon

$$X_{j2}, j = 1, 2, \dots, n_2$$

yksinkertainen satunnaisotos normaalijakaumasta $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Tällöin satunnaismuuttujat $X_{j2}, j = 1, 2, \dots, n_2$ ovat riippumattomia ja noudattavat samaa normaalijakaumaa $N(\mu_2, \sigma_2^2)$:

$$\begin{aligned} X_{12}, X_{22}, \dots, X_{n_2 2} &\perp \\ X_{j2} &\sim N(\mu_2, \sigma_2^2), j = 1, 2, \dots, n_2 \end{aligned}$$

Oletetaan lisäksi, että otokset

$$X_{i1}, i = 1, 2, \dots, n_1$$

ja

$$X_{j2}, j = 1, 2, \dots, n_2$$

ovat toisistaan riippumattomia.

Asetetaan normaalijakaumien $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ja $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ varianssiparametreille σ_1^2 ja σ_2^2 nollahypoteesi

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

Testausongelma: Ovatko havainnot *sopuossuinnussa* nollahypoteesin H_0 kanssa?

Ongelman ratkaisuna on kahden riippumattoman otoksen *F-testi variansseille*.

Hypoteesit kahden riippumattoman otoksen testissä variansseille

Yleinen hypoteesi H :

- (i) $X_{i1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), i = 1, 2, \dots, n_1$
- (i) $X_{j2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), j = 1, 2, \dots, n_2$
- (iii) Havainnot X_{i1} ja X_{j2} ovat riippumattomia kaikille i ja j

Nollahypoteesi:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

Vaihtoehtoiset hypoteesit:

$$\left. \begin{array}{l} H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{array} \right\} \text{1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi kahden riippumattoman otoksen testissä variansseille

Olkoot

$$\bar{X}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} X_{ik}, \quad k=1,2$$

ja

$$s_k^2 = \frac{1}{n_k - 1} \sum_{i=1}^{n_k} (X_{ik} - \bar{X}_k)^2, \quad k=1,2$$

tavanomaiset *harhattomat estimaattorit* normaali jakauman parametreille μ_k ja σ_k^2 .

Tunnusluku $\bar{X}_k$ on havaintojen X_{ik} , $i = 1, 2, \dots, n_k$, $k = 1, 2$ *aritmeettinen keskiarvo* ja s_k^2 on havaintojen X_{ik} , $i = 1, 2, \dots, n_k$, $k = 1, 2$ *otosvarianssi*.

Testisuure yleisessä tapauksessa kahden riippumattoman otoksen testissä variansseille

Määritellään F -testisuure

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Jos *nollahypoteesi*

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

pätee, niin *testisuure* F *noudattaa* F -*jakaumaa* vapausastein $(n_1 - 1)$ ja $(n_2 - 1)$:

$$F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

Suurille n_2 testisuureen on F *normaaliarvo* ≈ 1 , koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$E(F) = \frac{n_2 - 1}{n_2 - 3}$$

Siten sekä *pienet* että *suuret* testisuureen F arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.

Hylkäysalueen määrittäminen kahden riippumattoman otoksen t -testissä odotusarvoille

Valitaan testin *merkitsevyystasoksi* α .

- (i) Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

niin *kriittinen raja* F_α saadaan ehdosta

$$\Pr(F \geq F_\alpha) = \alpha$$

jossa $F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$. Testin *hylkäysalue* on tällöin muotoa

$$(F_\alpha, +\infty)$$

- (ii) Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

niin *kriittinen raja* $F_{1-\alpha}$ saadaan ehdosta

$$\Pr(F \leq F_{1-\alpha}) = \alpha$$

jossa $F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$. Testin *hylkäysalue* on tällöin muotoa

$$(0, F_{1-\alpha})$$

- (iii) Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

niin *kriittiset rajat* $F_{1-\alpha/2}$ ja $F_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$\Pr(F \leq F_{1-\alpha/2}) = \alpha/2$$

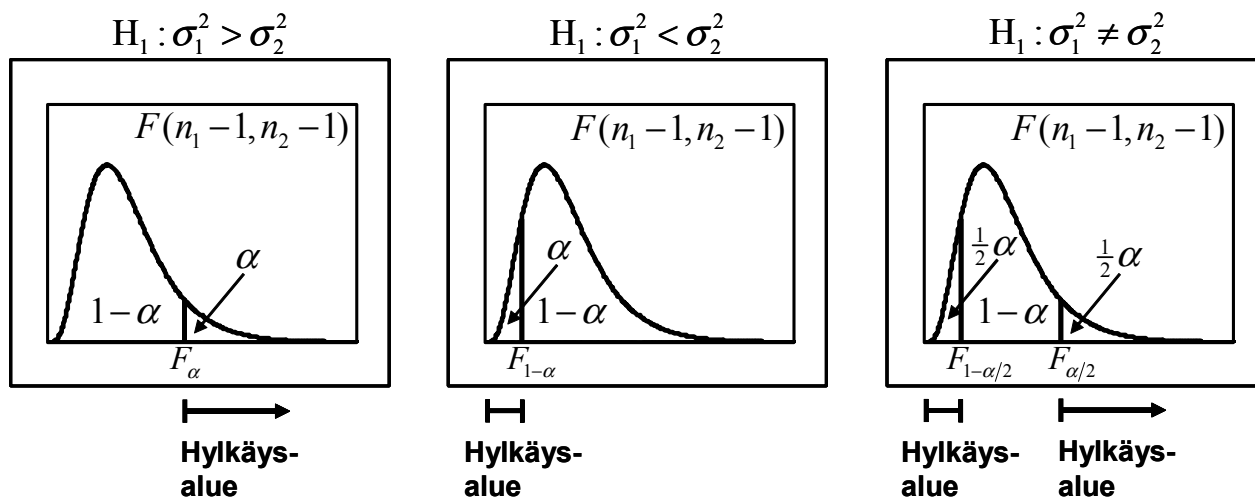
$$\Pr(F \geq F_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

jossa $F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$. Testin *hylkäysalue* on tällöin muotoa

$$(0, F_{1-\alpha/2}) \cup (F_{\alpha/2}, +\infty)$$

Nollahypoteesi *hylätään*, jos testisuureen arvo osuu hylkäysalueelle.

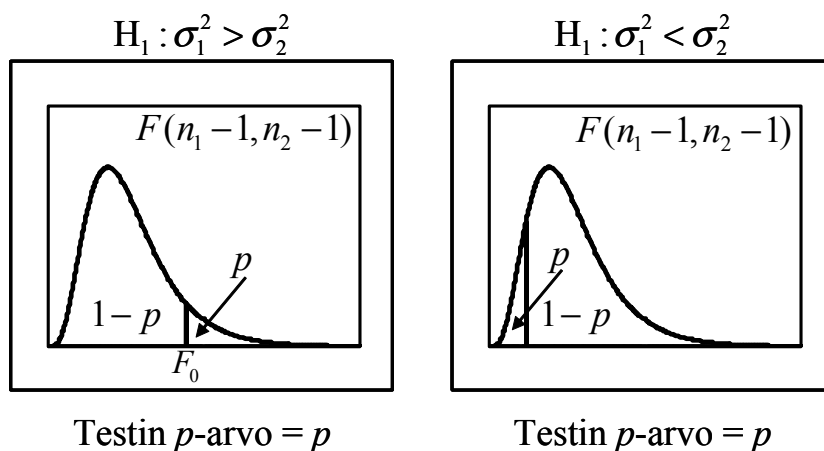
Alla olevat kuviot havainnollistavat testin *hylkäysalueen* valintaa:



***p*-arvon määrittäminen kahden riippumattoman otoksen testissä variansseille**

Olkoon *F*-testisuureen *F* havaittu arvo F_0 .

Alla olevat kuviot havainnollistavat testin *p*-arvon määrittämisestä, kun vaihtoehtoinen hypoteesi on yksisuuntainen:



Kaksisuuntaisen vaihtoehtoisen hypoteesin

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

tapauksessa testin *p*-arvo on

$$p = 2 \times \min\{\Pr(F \geq F_0), \Pr(F \leq F_0)\}$$

jossa

$$F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

Nollahypoteesi hylätään, jos testin *p*-arvo on kyllin pieni.

t-testi parivertailuille

Testausasetelma t -testissä parivertailuille

Oletetaan, että havainnot muodostuvat muuttujaa X koskevista mittaustuloksien *pareista*

$$(X_{i1}, X_{i2}), i = 1, 2, \dots, n$$

jotka ovat toisistaan *riippumattomia*.

Tavoitteena on *verrata mittauksia toisiinsa*: Antavatko mittaukset *keskimäärin saman tuloksen*?

Muodostetaan mittaustuloksien X_{i1} ja X_{i2} erotukset

$$D_i = X_{i1} - X_{i2}, i = 1, 2, \dots, n$$

Mittaukset 1 ja 2 antavat *keskimäärin saman tuloksen*, jos erotukset D_i saavat *keskimäärin arvon nolla*.

Testausongelman ratkaisuna on tavanomainen *yhden otoksen t -testi mittaustuloksien X_{i1} ja X_{i2} erotuksien D_i odotusarvolle*.

Hypoteesit t -testissä parivertailuille

Yleinen hypoteesi H :

$$D_1, D_2, \dots, D_n \perp$$

$$D_i \sim N(\mu_D, \sigma_D^2), i = 1, 2, \dots, n$$

Nollahypoteesi:

$$H_0 : \mu_D = 0$$

Vaihtoehtoiset hypoteesit:

$$\left. \begin{array}{l} H_1 : \mu_D > 0 \\ H_1 : \mu_D < 0 \end{array} \right\} \quad \text{1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$H_1 : \mu_D \neq 0 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi t -testissä parivertailuille

Olkoot

$$\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i$$

ja

$$s_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2$$

tavanomaiset *harhattomat estimaattorit* normaalijakauman parametreille μ_D ja σ_D^2 .

Tunnusluku $\bar{D}$ on erotusten $D_i = X_{i1} - X_{i2}, i = 1, 2, \dots, n$ *aritmeettinen keskiarvo* ja s_D^2 on erotusten $D_i = X_{i1} - X_{i2}, i = 1, 2, \dots, n$ *otosvarianssi*.

Testisuure t -testissä parivertailuille

Määritellään t -testisuure

$$t = \frac{\bar{D}}{s_D / \sqrt{n}}$$

Jos *nollahypoteesi*

$$H_0 : \mu_D = 0$$

pätee, niin testisuure t noudattaa Studentin t -jakaumaa vapausastein $(n - 1)$:

$$t \sim t(n - 1)$$

Testisuureen t normaaliarvo $= 0$, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$E(t) = 0$$

Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen t arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.

Hylkäysalueen määrittäminen t -testissä parivertailuille

Kriittisten rajojen määrittäminen tapahtuu täsmälleen samalla tavalla kuin yhden otoksen t -testin tapauksessa.

 p -arvon määrittäminen t -testissä parivertailuille

Testin p -arvon määrittäminen tapahtuu täsmälleen samalla tavalla kuin yhden otoksen t -testin tapauksessa.

Testi suhteelliselle osuudelle**Testausasetelma testissä suhteelliselle osuudelle**

Olkoon A perusjoukon S *tapahtuma* ja olkoon

$$\Pr(A) = p$$

$$\Pr(A^c) = 1 - p = q$$

Määritellään satunnaismuuttuja

$$X = \begin{cases} 1, & \text{jos tapahtuma } A \text{ sattuu} \\ 0, & \text{jos tapahtuma } A \text{ ei satu} \end{cases}$$

Tällöin satunnaismuuttuja X noudattaa *Bernoulli-jakaumaa* parametrinaan p :

$$X \sim \text{Ber}(p)$$

ja

$$E(X) = p$$

$$\text{Var}(X) = D^2(X) = pq$$

Oletetaan, että tapahtuma A on muotoa

$$A = \text{”Perusjoukon } S \text{ alkiolla on ominaisuus } P\text{”}$$

Tällöin

$$p = \Pr(A)$$

on todennäköisyys poimia perusjoukosta S satunnaisesti alkio, jolla on ominaisuus P . Jos perusjoukko S on *äärellinen*, niin todennäköisyys p kuvaa niiden perusjoukon S alkioiden *suhteellista osuutta*, joilla on ominaisuus P .

Olkoon $X_1, X_2, \dots, X_n$ *yksinkertainen satunnaisotos* perusjoukosta S , joka noudattaa *Bernoulli-jakaumaa* Bernoulli(p). Tällöin

$$X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p), i = 1, 2, \dots, n$$

Asetetaan Bernoulli-jakauman *odotusarvoparametrille* p *nollahypoteesi*

$$H_0 : p = p_0$$

Testausongelma: Ovatko havainnot *sopu*soinnussa nollahypoteesin H_0 kanssa?

Ongelman ratkaisuna on *testi suhteelliselle osuudelle*.

Hypoteesit testissä suhteelliselle osuudelle

Yleinen hypoteesi:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p), i = 1, 2, \dots, n$$

Nollahypoteesi:

$$H_0 : p = p_0$$

Vaihtoehtoiset hypoteesit:

$$\left. \begin{array}{l} H_1 : p > p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{array} \right\} \text{ 1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$H_1 : p \neq p_0 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi testissä suhteelliselle osuudelle

Olkoon

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

tavanomainen *harhaton estimaattori* Bernoulli-jakauman parametrille p .

Huomaa, että

$$\sum_{i=1}^n X_i = f$$

on tapahtuman A *frekvenssi* siinä n -kertaistessa riippumattomien Bernoulli-kokeiden sarjassa, jota yksinkertaisen satunnaisotoksen poiminta Bernoulli-jakaumasta Bernoulli(p) merkitsee.

Siten

$$\hat{p} = \frac{f}{n}$$

on tapahtuman A *suhteellinen frekvenssi* ja

$$f = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, p)$$

Testisuure testissä suhteelliselle osuudelle

Määritellään z -testisuure

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Jos *nollahypoteesi*

$$H_0 : p = p_0$$

pätee, niin testisuure z noudattaa suurissa otoksissa *approksimatiivisesti* standardoitua normaalijakaumaa $N(0,1)$:

$$z \sim_a N(0,1)$$

Testisuureen z *normaaliarvo* $= 0$, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$E(z) = 0$$

Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen z arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.

Hylkäysalueen määrittäminen testissä suhteelliselle osuudelle

Valitaan testin *merkitsevyystasoksi* α .

- (i) Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$H_1 : p > p_0$$

niin *kriittinen raja* $+z_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(z \geq +z_\alpha) = \alpha$$

jossa $z \sim N(0,1)$. Testin *hylkäysalue* on tällöin muotoa

$$(+z_\alpha, +\infty)$$

- (ii) Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$H_1 : p < p_0$$

niin *kriittinen raja* $-z_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(z \leq -z_\alpha) = \alpha$$

jossa $z \sim N(0,1)$. Testin *hylkäysalue* on tällöin muotoa

$$(-\infty, -z_\alpha)$$

- (iii) Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$H_1 : p \neq p_0$$

niin *kriittiset rajat* $-z_{\alpha/2}$ ja $+z_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$\Pr(z \leq -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

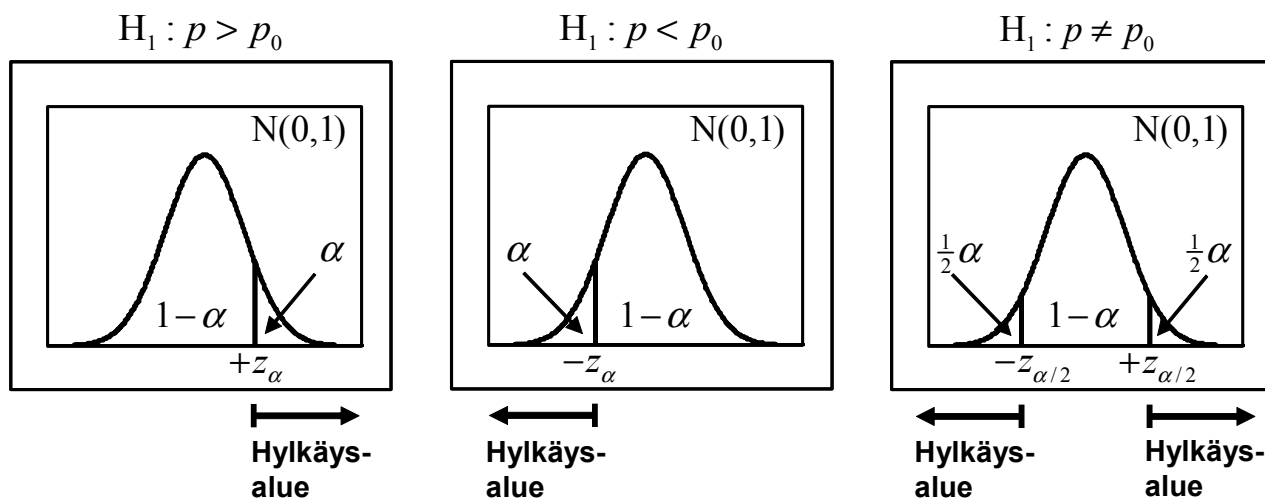
$$\Pr(z \geq +z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

jossa $z \sim N(0,1)$. Testin *hylkäysalue* on tällöin muotoa

$$(-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (+z_{\alpha/2}, +\infty)$$

Nollahypoteesi *hylätään, jos testisuureen arvo osuu hylkäysalueelle*.

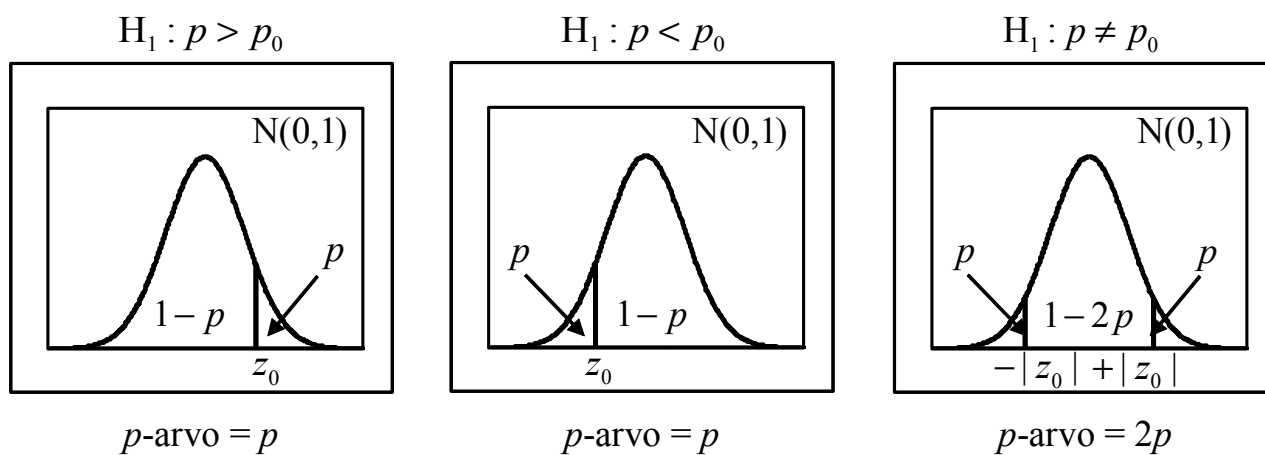
Alla olevat kuviot havainnollistavat testin *hylkäysalueen* valintaa:



***p*-arvon määrittäminen testissä suhteelliselle osuudelle**

Olkoon *z*-testisuureen *z* havaittu arvo z_0 .

Alla olevat kuviot havainnollistavat testin *p*-arvon määrittämistä:



Nollahypoteesi *hylätään*, jos testin *p*-arvo on kyllin pieni.

Suhteellisten osuuksien vertailutesti

Testausasetelma suhteellisten osuuksien vertailutestissä

Olkoon A perusjoukon S_k , $k = 1, 2$ *tapahtuma* ja olkoot

$$\Pr(A) = p_k$$

$$\Pr(A^c) = 1 - p_k = q_k$$

Määritellään satunnaismuuttujat X_k , $k = 1, 2$:

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{jos } A \text{ tapahtuu perusjoukossa } S_k \\ 0, & \text{jos } A \text{ ei tapahdu perusjoukossa } S_k \end{cases}$$

Tällöin

$$X_k \sim \text{Bernoulli}(p_k), k = 1, 2$$

ja

$$E(X_k) = p_k$$

$$\text{Var}(X_k) = D^2(X_k) = p_k q_k$$

Oletetaan, että tapahtuma A on muotoa

$$A = \text{''Perusjoukon alkiolla on ominaisuus } P\text{''}$$

Tällöin

$$p_k = \Pr(A)$$

on todennäköisyys poimia perusjoukosta S_k , $k = 1, 2$ satunnaisesti alkio, jolla on ominaisuus P . Jos perusjoukko S_k , $k = 1, 2$ on *äärellinen*, niin todennäköisyys p_k kuvaa niiden perusjoukon S_k alkioiden *suhteellista osuutta*, joilla on ominaisuus P .

Olkoon

$$X_{11}, X_{21}, \dots, X_{n_1 1}$$

yksinkertainen satunnaisotos perusjoukosta S_1 , joka noudattaa *Bernoulli-jakaumaa* $\text{Bernoulli}(p_1)$.

Tällöin

$$X_{11}, X_{21}, \dots, X_{n_1 1} \perp$$

$$X_{i1} \sim \text{Bernoulli}(p_1), i = 1, 2, \dots, n_1$$

Olkoon

$$X_{12}, X_{22}, \dots, X_{n_2 2}$$

yksinkertainen satunnaisotos perusjoukosta S_2 , joka noudattaa *Bernoulli-jakaumaa* $\text{Bernoulli}(p_2)$.

Tällöin

$$X_{12}, X_{22}, \dots, X_{n_2 2} \perp$$

$$X_{i2} \sim \text{Bernoulli}(p_2), i = 1, 2, \dots, n_2$$

Olkoot otokset lisäksi toisistaan *riippumattomia*.

Asetetaan Bernoulli-jakaumien *parametreille* p_1 ja p_2 *nollahypoteesi*

$$H_0 : p_1 = p_2 = p$$

Testausongelma: Ovatko havainnot *sopuinnussa* nollahypoteesin H_0 kanssa?

Ongelman ratkaisuna on *suhteellisten osuuksien vertailutesti*.

Hypoteesit suhteellisten osuuksien vertailutestissä

Yleinen hypoteesi:

- (i) $X_{11}, X_{21}, \dots, X_{n_1} \perp$
 $X_{i1} \sim \text{Bernoulli}(p_1), i = 1, 2, \dots, n_1$
- (ii) $X_{12}, X_{22}, \dots, X_{n_2} \perp$
 $X_{i2} \sim \text{Bernoulli}(p_2), i = 1, 2, \dots, n_2$
- (iii) $X_{11}, X_{21}, \dots, X_{n_1}, X_{12}, X_{22}, \dots, X_{n_2} \perp$

Nollahypoteesi:

$$H_0 : p_1 = p_2 = p$$

Vaihtoehtoiset hypoteesit:

$$\left. \begin{array}{l} H_1 : p_1 > p_2 \\ H_1 : p_1 < p_2 \end{array} \right\} \text{1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi suhteellisten osuuksien vertailutestissä

Olkoon

$$\hat{p}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} X_{ik}, k = 1, 2$$

tavanomainen *harhaton estimaattori* Bernoulli-jakauman parametrille $p_k, k = 1, 2$.

Huomaa, että

$$\sum_{i=1}^{n_k} X_{ik} = f_k, k = 1, 2$$

on tapahtuman A *frekvenssi* siinä n -kertaisessa riippumattomien Bernoulli-kokeiden sarjassa, jota yksinkertaisen satunnaistoksen poiminta Bernoulli-jakaumasta Bernoulli(p_k), $k = 1, 2$ merkitsee. Siten

$$\hat{p}_k = \frac{f_k}{n_k}, k = 1, 2$$

on tapahtuman A *suhteellinen frekvenssi* otoksessa $k = 1, 2$ ja

$$f_k = \sum_{i=1}^{n_k} X_{ik} \sim \text{Bin}(n_k, p_k)$$

Jos *nollahypoteesi*

$$H_0 : p_1 = p_2 = p$$

pätee, voidaan otokset *yhdistää* ja parametrin p *harhaton estimaattori* on tapahtuman A suhteellinen frekvenssi yhdistetyssä otoksessa:

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{f_1 + f_2}{n_1 + n_2}$$

Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*, niin

$$\text{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \frac{p(1-p)}{n_1} + \frac{p(1-p)}{n_2} = p(1-p) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$$

Testisuure suhteellisten osuuksien vertailutestissä

Määritellään *testisuure*

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

Jos *nollahypoteesi*

$$H_0 : p_1 = p_2 = p$$

pätee, niin *testisuure* z *noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa*:

$$z \sim_a N(0,1)$$

Testisuureen z *normaaliarvo* $= 0$, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$E(z) = 0$$

Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen z arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.

Hylkäysalueen määrittäminen suhteellisten osuuksien vertailutestissä

Valitaan testin *merkitsevyystasoksi* α .

(i) Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$H_1 : p_1 > p_2$$

niin *kriittinen raja* $+z_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(z \geq +z_\alpha) = \alpha$$

jossa $z \sim N(0,1)$. Testin *hylkäysalue* on tällöin muotoa

$$(+z_\alpha, +\infty)$$

(ii) Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa

$$H_1 : p_1 < p_2$$

niin kriittinen raja $-z_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(z \leq -z_\alpha) = \alpha$$

jossa $z \sim N(0,1)$. Testin hylkäysalue on tällöin muotoa

$$(-\infty, -z_\alpha)$$

(iii) Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa

$$H_1 : p_1 \neq p_2$$

niin kriittiset rajat $-z_{\alpha/2}$ ja $+z_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$\Pr(z \leq -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

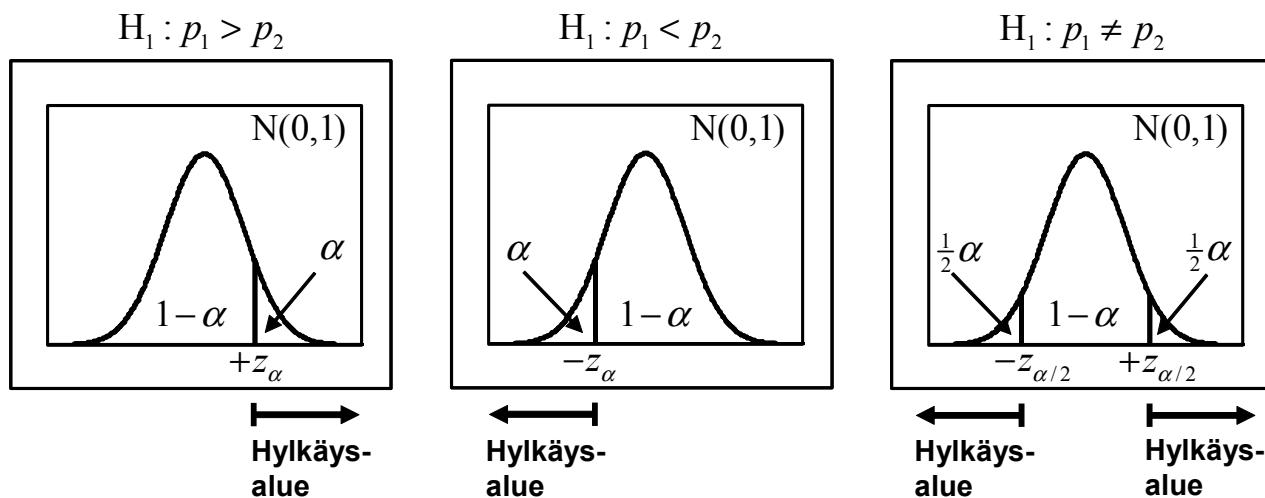
$$\Pr(z \geq +z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

jossa $z \sim N(0,1)$. Testin hylkäysalue on tällöin muotoa

$$(-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (+z_{\alpha/2}, +\infty)$$

Nollahypoteesi hylätään, jos testisuureen arvo osuu hylkäysalueelle.

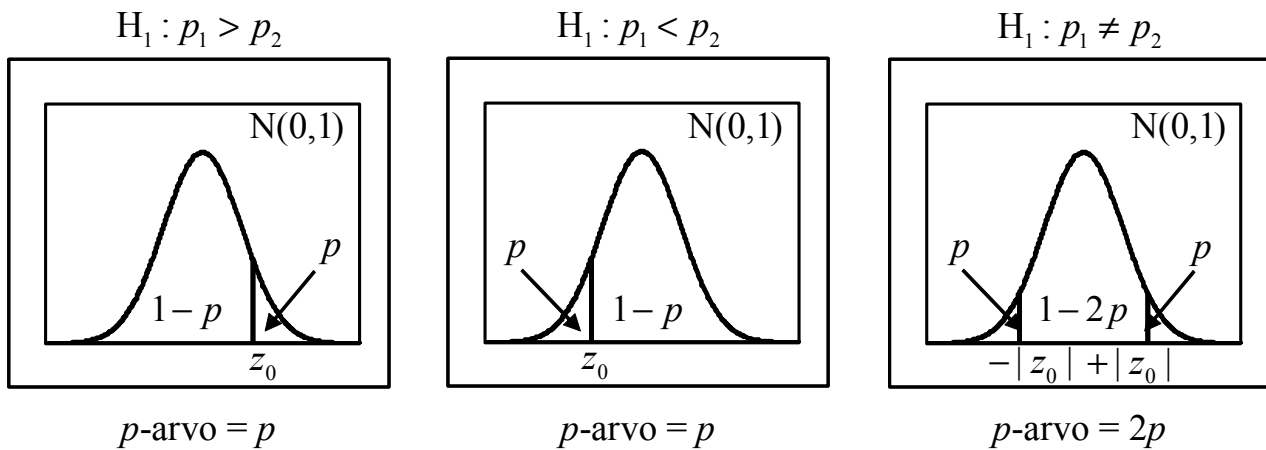
Alla olevat kuviot havainnollistavat testin hylkäysalueen valintaa:



p -arvon määrittäminen suhteellisten osuuksien vertailutestissä

Olkoon z -testisuureen z havaittu arvo z_0 .

Alla olevat kuviot havainnollistavat testin p -arvon määrittämistä:



Nollahypoteesi hylätään, jos testin p -arvo on kyllin pieni.

Tehtävä 10.1.

Kone valmistaa nauloja, joiden tavoitepituus on 10 cm. Naulojen pituus vaihtelee kuitenkin satunnaisesti noudattaen normaalijakaumaa.

Naulojen laatua tutkitaan poimimalla tasatunnein edellisen tunnin aikana valmistettujen naulojen joukosta yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko on 30 ja vertaamalla otokseen poimittujen naulojen keskipituutta pituuden tavoitearvoon. Erään kerran otokseen poimittujen naulojen pituuksien aritmeettiseksi keskiarvoksi saatiin 9.95 cm ja otosvarianssiksi saatiin 0.01 cm.

Testaa nollahypoteesia, että ko. tunnin aikana valmistettujen naulojen todellinen keskipituus on tavoitearvon mukainen, kun vaihtoehtoisena hypoteesina on, että keskipituus on tavoitearvoa pienempi.

Käytä testissä 1 %:n merkitsevyystasoa.

Tehtävä 10.1. – Mitä opimme?

Tehtävässä tarkastellaan *yhden otoksen t-testiä*.

Tehtävä 10.1. – Ratkaisu:

Kone valmistaa nauloja. Koneen valmistamien naulojen joukosta poimitaan yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko $n = 30$.

Määritellään satunnaismuuttujat

$$X_i = \text{naulan } i \text{ pituus otoksessa, } i = 1, 2, \dots, 30$$

Yleinen hypoteesi H on muotoa:

$$X_1, X_2, \dots, X_{30} \perp$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, 30$$

Nollahypoteesi H_0 on muotoa:

$$H_0 : \mu_0 = 10$$

Vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 on muotoa.

$$H_1 : \mu_0 < 10$$

Sovelletaan *yhden otoksen t-testiä*. Testisuureena on

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

jossa

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Jos nollahypoteesi H_0 pätee, testisuure t noudattaa Studentin t -jakaumaa vapausastein $(n - 1)$:

$$t \sim t(n - 1) = t(29)$$

Itseisarvoltaan suuret testisuureen t arvot johtavat nollahypoteesin hylkäämiseen.

Tehtävän tapauksessa

$$n = 30$$

$$\bar{X} = 9.95$$

$$s^2 = 0.01$$

$$\mu_0 = 10$$

joten

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{9.95 - 10}{0.1 / \sqrt{30}} = -2.739$$

Koska vaihtoehtoisena hypoteesina on 1-suuntainen vaihtoehto $H_1 : \mu_0 < 10$, testisuureen t arvoa -2.739 vastaavaksi p -arvoksi saadaan esim. Microsoft Excel -ohjelmalla

$$\Pr(t \leq -2.739) = 0.0051$$

jossa $t \sim t(29)$. Siten nollahypoteesi H_0 voidaan hylätä 1 %:n merkitsevyystasolla, koska

$$p = 0.0051 < 0.01$$

Koska vaihtoehtoisena hypoteesina on 1-suuntainen vaihtoehto $H_1 : \mu_0 < 10$, merkitsevyystasoa 0.01 vastaava kriittinen raja on

$$-t_{0.01} = -2.462$$

sillä t -jakauman taulukoiden mukaan

$$\Pr(t \leq -2.462) = 0.01$$

kun $t \sim t(29)$. Koska

$$t = -2.739 < -2.462 = -t_{0.01}$$

testisuureen t arvo -2.462 on osunut hylkäysalueelle ja nollahypoteesi H_0 voidaan hylätä 1 %:n merkitsevyystasolla ja vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 voidaan hyväksyä.

Johtopäätös:

Kone tekee nauvoja, joiden keskimääräinen pituus on tilastollisesti merkitsevästi tavoitearvoa 10 cm pienempi.

Tehtävä 10.2.

Kuulalaakeritehtaassa on kaksi samanlaisia kuulalaakerin kuulia valmistavaa konetta, K_1 ja K_2 . Koneiden valmistamien kuulien painot vaihtelevat satunnaisesti (ja toisistaan riippumatta) noudattaen normaalijakaumaa.

Kummankin koneen valmistamien kuulien joukosta poimitaan toisistaan riippumattomat yksinkertaiset satunnaisotokset ja otoksista lasketaan otokseen poimittujen kuulien painojen aritmeettiset keskiarvot ja keskihajonnat. Otoksista saadut tiedot on annettu alla olevassa taulukossa.

Testaa nollahypoteesia, että koneet K_1 ja K_2 valmistavat keskimäärin samanpainoisia kuulia, kun vaihtoehtoisena hypoteesina on, että koneiden K_1 ja K_2 valmistamien kuulien keskipainot eroavat toisistaan.

Käytä testissä 1 %:n merkitsevyystasoa.

Kone	Aritmeettinen keskiarvo (g)	Keskihajonta (g)	Otoskoko
K_1	10.2	0.2	31
K_2	10.1	0.1	20

Tehtävä 10.2. – Mitä opimme?

Tehtävässä tarkastellaan *kahden riippumattoman otoksen t-testiä*.

Tehtävä 10.2. – Ratkaisu:

Tehtaalla valmistetaan kuulalaakerin kuulia kahdella koneella K_1 ja K_2 . Koneen K_1 valmistamien naulojen joukosta poimitaan yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko $n_1 = 31$. Koneen K_2 valmistamien naulojen joukosta poimitaan (edellisestä riippumaton) yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko $n_2 = 20$.

Määritellään satunnaismuuttujat

$$X_{i1} = \text{koneen } K_1 \text{ tekemän kuulun paino otoksessa, } i = 1, 2, \dots, 31$$

$$X_{j2} = \text{koneen } K_2 \text{ tekemän kuulun paino otoksessa, } j = 1, 2, \dots, 20$$

Yleinen hypoteesi H on muotoa:

$$(1) \quad X_{i1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), i = 1, 2, \dots, 31$$

$$(2) \quad X_{j2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), j = 1, 2, \dots, 20$$

$$(3) \quad \text{Havainnot } X_{i1} \text{ ja } X_{j2} \text{ ovat riippumattomia kaikille } i \text{ ja } j$$

Nollahypoteesi H_0 on muotoa:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

Vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 on muotoa:

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Määritellään seuraavat otossuureet:

$$\begin{aligned}\bar{X}_k &= \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} X_{ik}, k=1,2 \\ s_k^2 &= \frac{1}{n_k-1} \sum_{i=1}^{n_k} (X_{ik} - \bar{X}_k)^2, k=1,2 \\ s_p^2 &= \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}\end{aligned}$$

Kahden riippumattoman otoksen odotusarvojen vertailuun on tarjolla kaksi erilaista testisuuretta.

Testisuuretta

$$t_A = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

voidaan käyttää kaikissa tilanteissa, joissa yleinen hypoteesi H pätee.

Jos nollahypoteesi

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

pätee, niin testisuure t_A noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa:

$$t_A \sim_a N(0,1)$$

Pienissä otoksissa testisuureen t_A jakaumalle saadaan parempi approksimaatio käyttämällä approksimaationa Studentin t -jakaumaa, jossa vapausasteiden lukumääränä käytetään lukua

$$v = \frac{\left[\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right]^2}{\frac{1}{n_1-1} \left[\frac{s_1^2}{n_1} \right]^2 + \frac{1}{n_2-1} \left[\frac{s_2^2}{n_2} \right]^2}$$

Itseisarvoltaan suuret testisuureen t_A arvot sotivat nollahypoteesia $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$ vastaan.

Jos nollahypoteesi

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

pätee, voidaan käyttää testisuuretta

$$t_B = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Jos hypoteesin $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ lisäksi nollahypoteesi

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

pätee, testisuure t_B noudattaa Studentin t -jakaumaa vapausastein $(n_1 + n_2 - 2)$:

$$t_B \sim t(n_1 + n_2 - 2) = t(49)$$

Itseisarvoltaan suuret testisuureen t_B arvot sotivat nollahypoteesia $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$ vastaan.

Huomautus:

Tehtyjen oletuksien pätiessä t_A noudattaa suurissa otoksissa *approksimatiivisesti* normaalijakaumaa (tai t -jakaumaa), kun taas testisuureen t_B jakauma on *tarkka*.

Jotta testisuuretta t_B voitaisiin käyttää, on siis ensin testattava hypoteesia

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

Tähän käytetään F -testisuuretta

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Jos hypoteesi

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

pätee, niin testisuure F noudattaa Fisherin F -jakaumaa vapausastein $(n_1 - 1)$ ja $(n_2 - 1)$:

$$F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1) = F(30, 19)$$

Sekä *suuret* että *pienet* testisuureen F arvot sotivat hypoteesia $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ vastaan.

Huomautus:

Käytettäessä F -jakauman taulukoita kannattaa toimia niin, että *suurempi* otosvariansseista asetetaan testisuureen *osoittajaan*.

Testataan siis ensin hypoteesia

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

Tehtävän tapauksessa

$$\begin{array}{ll} s_1^2 = 0.04 & s_2^2 = 0.01 \\ n_1 = 31 & n_2 = 20 \end{array}$$

joten

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0.04}{0.01} = 4$$

Jos vaihtoehtoiseksi hypoteesiksi valitaan 1-suuntainen vaihtoehto $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, testisuureen F arvoa 4 vastaavaksi p -arvoksi saadaan esim. Microsoft Excel -ohjelmalla

$$\Pr(F > 4) = 0.00126$$

jossa $F \sim F(30, 19)$. Siten hypoteesi $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ varianssien yhtäsuuruudesta voidaan hylätä 1 %:n merkitsevyystasolla, koska

$$p = 0.00126 < 0.01$$

Koska vaihtoehtoiseksi hypoteesiksi valittiin 1-suuntainen vaihtoehto $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, merkitsevyystasoa 0.01 vastaava kriittinen raja on

$$F_{0.01} = 2.844$$

sillä F -jakauman taulukoiden mukaan

$$\Pr(F \geq 2.844) = 0.01$$

kun $F \sim F(30, 19)$. Koska

$$F = 4 > 2.844$$

testisuureen F arvo 4 on osunut hylkäysalueelle ja hypoteesi $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ varianssien yhtäsuuruudesta voidaan hylätä 1 %:n merkitsevyystasolla ja vaihtoehtoinen hypoteesi $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ voidaan hyväksyä.

Koska varianssien yhtä suuruutta koskeva hypoteesi $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ hylättiin, käytämme testisuuretta t_A nollahypoteesin

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

testaamiseen.

Tehtävän tapauksessa

$$\begin{array}{ll} \bar{X}_1 = 10.2 & \bar{X}_2 = 10.1 \\ s_1^2 = 0.04 & s_2^2 = 0.01 \\ n_1 = 31 & n_2 = 20 \end{array}$$

joten

$$t_A = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{10.2 - 10.1}{\sqrt{\frac{0.04}{31} + \frac{0.01}{20}}} = 2.363$$

Koska vaihtoehtoisena hypoteesina on 2-suuntainen vaihtoehto $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, testisuureen t_A arvoa 2.363 vastaavaksi p -arvoksi saadaan normaalijakauma-approksimaatiota käyttäen

$$2 \times \Pr(z > 2.363) = 2 \times (1 - 0.9909) = 0.0182$$

kun $z \sim N(0,1)$. Siten nollahypoteesi H_0 jää voimaan 1 %:n merkitsevyystasolla, koska

$$p = 0.0182 > 0.01$$

Jos käytämme *t-jakauma-approksimaatiota*, vapausasteiden lukumääräksi tulee

$$\nu = \frac{\left[\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right]^2}{\frac{1}{n_1 - 1} \left[\frac{s_1^2}{n_1} \right]^2 + \frac{1}{n_2 - 1} \left[\frac{s_2^2}{n_2} \right]^2} = 46.69$$

joten käytämme vapausasteiden lukumääränä *alaspäin* pyöristettyä lukua 46.

Koska vaihtoehtoisena hypoteesina on 2-suuntainen vaihtoehto $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, testisuureen t_A arvoa 2.363 vastaavaksi *p*-arvoksi saadaan *t-jakauma-approksimaatiota* käyttäen esim. Microsoft Excel -ohjelmalla

$$2 \times \Pr(t > 2.363) = 2 \times 0.011 = 0.022$$

kun $t \sim t(46)$. Siten *nollahypoteesi* H_0 jää voimaan 1 %:n merkitsevyystasolla, koska

$$p = 0.022 > 0.01$$

Koska vaihtoehtoisena hypoteesina on 2-suuntainen vaihtoehto $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, *t-jakauman* taulukoista saadaan 1 %:n merkitsevyystasoa vastaaville kriittisille rajoille $-t_{0.005}$ ja $+t_{0.005}$ saadaan arviot

$$-t_{0.005} \in (-2.704, -2.678)$$

$$+t_{0.005} \in (+2.678, +2.704)$$

Koska

$$-2.678 < t_A = 2.363 < +2.678$$

testisuureen t_A arvo 2.363 on osunut hyväksymisalueelle ja *nollahypoteesi* H_0 jää voimaan 1 %:n merkitsevyystasolla.

Johtopäätös:

Koneiden tekemien kuulien keskimääräiset painot eivät poikkea tilastollisesti merkitsevästi toisistaan.

Huomaa kuitenkin, että johtopäätös vaihtuisi päinvastaiseksi, jos testin merkitsevyystasoksi olisi valittu 5 %.

Tehtävä 10.3.

Eräässä kokeessa verrattiin kahta sademäärän mittaukseen käytettävää laitetta. Kummallakin laitteella mitattiin sademäärät 10 sadepäivän aikana. Mittaustulokset (sademäärät mm:nä) on annettu alla olevassa taulukossa.

Testaa hypoteesia, että mittarit tuottavat keskimäärin samoja mittaustuloksia, kun vaihtoehtoisena hypoteesina on, että mittarit tuottavat keskimäärin eri mittaustuloksia.

Käytä testissä 1 %:n merkitsevyystasoa.

Laite	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1.38	9.69	0.39	1.42	0.54	5.94	0.59	2.63	2.44	0.56
B	1.42	10.37	0.39	1.46	0.55	6.15	0.61	2.69	2.68	0.53

Tehtävä 10.3. – Mitä opimme?

Tehtävässä tarkastellaan *t*-testiä parivertailuille.

Huomaa, että tehtävässä 10.2. sovellettu riippumattomien otoksien *t*-testi ei ole nyt luvallinen, koska *mittaustuloksia samasta sateesta ei voida pitää riippumattomina*.

Jos laitteet toimivat edes jossakin määrin luotettavasti, laitteen A ja laitteen B pitää antaa *samalle sateelle* toisiaan lähellä olevia mittaustuloksia, ts. mittaustuloksilla on oltava positiivinen korrelaatio; ks. myös tehtävää 10.4.

Tehtävä 10.3. – Ratkaisu:

Koska mittaustulokset riippuvat pareittain toisistaan, tällaisessa *parivertailuasetelmassa* toimitaan seuraavasti: Määrätään havaintoarvojen parikohtaiset *erotukset* ja testataan nollahypoteesia, jonka mukaan *erotukset ovat keskimäärin nollia*.

Olkoot

$$X_{Ai} = \text{sateen } i \text{ sademäärä mittarilla A, } i = 1, 2, \dots, 10$$

$$X_{Bi} = \text{sateen } i \text{ sademäärä mittarilla B, } i = 1, 2, \dots, 10$$

$$D_i = X_{Ai} - X_{Bi}, i = 1, 2, \dots, 10$$

Yleinen hypoteesi H on muotoa:

$$(i) \quad D_i \sim N(\mu_D, \sigma_D^2), i = 1, 2, \dots, 10$$

$$(ii) \quad \text{Erotukset } D_1, D_2, \dots, D_{10} \text{ ovat riippumattomia}$$

Nollahypoteesi H_0 on muotoa:

$$E(D_i) = 0, i = 1, 2, \dots, 10$$

Sovelletaan yhden otoksen t -testiä mittaustulosten erotuksille. *Testisuurena* on

$$t = \frac{\bar{D}}{s_D / \sqrt{n}}$$

jossa

$$\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i$$

$$s_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2$$

Jos nollahypoteesi H_0 pätee, testisuure t noudattaa Studentin t -jakaumaa vapausastein $(n-1)$:

$$t \sim t(n-1) = t(9)$$

Itseisarvoltaan suuret testisuureen t arvot johtavat nollahypoteesin hylkäämiseen.

Tehtävän tapauksessa

$$n = 10$$

$$\bar{D} = -0.127$$

$$s_D^2 = 0.046$$

Siten

$$t = \frac{\bar{D}}{s_D / \sqrt{n}} = \frac{-0.127}{0.214 / \sqrt{10}} = -1.88$$

Koska vaihtoehtoisena hypoteesina on 2-suuntainen vaihtoehto $H_1 : \mu_D \neq 0$, testisuureen t arvoa -1.88 vastaavaksi p -arvoksi saadaan esim. Microsoft Excel -ohjelmalla

$$2 \times \Pr(t < -1.88) = 0.186$$

jossa $t \sim t(9)$. Siten nollahypoteesi H_0 jää voimaan merkitsevyystasolla 0.01, koska

$$p = 0.186 > 0.01$$

Huomaa, että nollahypoteesi H_0 jää voimaan jopa merkitsevyystasolla 0.1.

Koska vaihtoehtoisena hypoteesina on 2-suuntainen vaihtoehto $H_1 : \mu_D \neq 0$, merkitsevyystasoa 0.01 vastaavat kriittiset rajat ovat

$$-t_{0.005} = -3.250$$

$$+t_{0.005} = +3.250$$

sillä t -jakauman taulukoiden mukaan

$$\Pr(t \geq 3.250) = 0.005$$

kun $t \sim t(9)$. Koska

$$-3.250 < t = -1.88 < +3.250$$

testisuureen t arvo -1.88 on osunut hyväksymisalueelle ja nollahypoteesi H_0 jää voimaan 1 %:n merkitsevyystasolla.

Johtopäätös:

Mittarit A ja B näyttävät keskimäärin samoja arvoja.

Huomautus:

Voidaan osoittaa, että

$$\text{Cor}(A\text{-mittaus}, B\text{-mittaus}) = 0.9997$$

mikä selvästi osoittaa otosten riippuvuuden toisistaan.

Tehtävä 10.4.

Testattaessa erästä verenpainelääkettä samojen potilaiden (8 kpl) verenpaine mitattiin ennen ja jälkeen lääkkeen nauttimisen. Koetulokset (verenpaineet mm/Hg) on esitetty alla olevassa taulukossa.

Testaa hypoteesia, että lääke ei keskimäärin alenna verenpainetta, kun vaihtoehtoisena hypoteesina on, että lääke keskimäärin alentaa verenpainetta.

Käytä testissä 1 %:n merkitsevyystasoa.

	1	2	3	4	5	6	7	8
Jälkeen	128	176	110	149	183	136	118	158
Ennen	134	174	118	152	187	136	125	168

Tehtävä 10.4. – Mitä opimme?

Tehtävässä tarkastellaan *t*-testiä parivertailuille.

Huomaa, että tehtävässä 10.2. sovellettu riippumattomien otoksien *t*-testi ei ole nyt luvallinen, koska *verenpainemittauksia ennen ja jälkeen lääkkeen antamisen ei voida pitää riippumattomina*.

On luultavaa, että potilailla, joilla on keskimääräistä korkeampi (matalampi) verenpaine ennen lääkkeen antoa on keskimääräistä korkeampi (matalampi) verenpaine myös lääkkeen annon jälkeen; ts. mittauksilla ennen ja jälkeen lääkkeen antamisen on luultavasti positiivinen korrelaatio; ks. myös tehtävää 10.3.

Tehtävä 10.4. – Ratkaisu:

Koska verenpainemittaukset ennen ja jälkeen lääkkeen antamisen riippuvat toisistaan, tällaisessa *parivertailuasetelmassa* toimitaan seuraavasti: Määrätään havaintoarvojen parikohtaiset *erotukset* ja testataan nollahypoteesia, jonka mukaan *erotukset ovat keskimäärin nollia*.

Olkoot

$$X_{Ei} = \text{potilaan } i \text{ verenpaine ennen lääkkeen antamista, } i = 1, 2, \dots, 8$$

$$X_{Ji} = \text{potilaan } i \text{ verenpaine ennen lääkkeen antamista, } i = 1, 2, \dots, 8$$

$$D_i = X_{Ei} - X_{Ji}, i = 1, 2, \dots, 8$$

Yleinen hypoteesi H on muotoa:

$$(i) \quad D_i \sim N(\mu_D, \sigma_D^2), i = 1, 2, \dots, 8$$

$$(ii) \quad \text{Erotukset } D_1, D_2, \dots, D_8 \text{ ovat riippumattomia}$$

Nollahypoteesi H_0 on muotoa:

$$E(D_i) = 0, i = 1, 2, \dots, 8$$

Sovelletaan yhden otoksen t -testiä mittaustulosten erotuksille. Testisuurena on

$$t = \frac{\bar{D}}{s_D / \sqrt{n}}$$

jossa

$$\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i$$

$$s_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2$$

Jos nollahypoteesi H_0 pätee, testisuure t noudattaa Studentin t -jakaumaa vapausastein $(n-1)$:

$$t \sim t(n-1) = t(7)$$

Itseisarvoltaan suuret testisuureen t arvot johtavat nollahypoteesin hylkäämiseen.

Tehtävän tapauksessa

$$n = 8$$

$$\bar{D} = 4.5$$

$$s_D^2 = 16.6$$

Siten

$$t = \frac{\bar{D}}{s_D / \sqrt{n}} = \frac{4.5}{4.07 / \sqrt{8}} = 3.13$$

Koska vaihtoehtoisena hypoteesina on 1-suuntainen vaihtoehto $H_1 : \mu_D > 0$, testisuureen t arvoa 3.13 vastaavaksi p -arvoksi saadaan esim. Microsoft Excel -ohjelmalla

$$\Pr(t > 3.13) = 0.0083$$

jossa $t \sim t(7)$. Siten nollahypoteesi H_0 voidaan hylätä merkitsevyystasolla 0.01, koska

$$p = 0.0083 < 0.01$$

Koska vaihtoehtoisena hypoteesina on 1-suuntainen vaihtoehto $H_1 : \mu_D > 0$, merkitsevyystasoa 0.01 vastaava kriittinen raja on

$$+t_{0.01} = 2.998$$

sillä t -jakauman taulukoiden mukaan

$$\Pr(t \geq 2.998) = 0.01$$

kun $t \sim t(7)$. Koska

$$t = 3.13 > 2.998$$

nollahypoteesi H_0 voidaan hylätä 1 %:n merkitsevyystasolla ja vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 hyväksyä.

Johtopäätös:

Lääkkeellä on tilastollisesti merkitsevästi keskimääräistä verenpainetta alentava vaikutus.

Tehtävä 10.5.

Tuotteen valmistaja väittää, että sen tuotteista korkeintaan 5 % on viallisia. Asiakas poimii sille toimitettujen tuotteiden joukosta otoksen, jonka koko on 200 ja löytää 19 viallista tuotetta. Onko valmistajan väite oikeutettu?

Testaa nollahypoteesia, että valmistajan väite on oikeutettu, kun vaihtoehtoisena hypoteesina on, että viallisten suhteellinen osuus on suurempi kuin valmistajan väittämä 5 %.

Käytä testissä 1 %:n merkitsevyystasoa.

Tehtävä 10.5. – Mitä opimme?

Tehtävässä tarkastellaan *testiä suhteelliselle osuudelle*.

Tehtävä 10.5. – Ratkaisu:

Tuotteen valmistaja väittää, että sen tuotteista korkeintaan 5 % on viallisia. Asiakas poimii sille toimitettujen tuotteiden joukosta otoksen, jonka koko on 200 ja löytää 19 viallista tuotetta. Onko valmistajan väite oikeutettu?

Olkoon

$$A = \text{”Tuote on viallinen”}$$

Tuotteen valmistajan mukaan

$$\Pr(A) = p = 0.05$$

Määritellään riippumattomat satunnaismuuttujat

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jos } i. \text{ tarkastettu tuote on viallinen} \\ 0, & \text{jos } i. \text{ tarkastettu tuote ei ole viallinen} \end{cases}$$

Tällöin

$$X_i \sim \text{Ber}(p)$$

Asetetaan *nollahypoteesi*

$$H_0 : p = p_0 = 0.05$$

Määritellään *testisuure*

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

jossa

n = Tarkastettavaksi poimitujen tuotteiden lukumäärä

$\hat{p}$ = Viallisten tuotteiden *suhteellinen osuus* tarkastettujen joukossa

Jos nollahypoteesi H_0 pätee, testisuure z noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa:

$$z \sim_a N(0,1)$$

Tehtävässä

$$n = 200$$

$$\hat{p} = 19 / 200 = 0.095$$

joten

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.095 - 0.05}{\sqrt{\frac{0.05(1-0.05)}{200}}} = 2.91$$

Koska vaihtoehtoisena hypoteesina on 1-suuntainen vaihtoehto $H_1 : p > 0.05$, *testisuureen arvoa z arvoa 2.91 vastaavaksi p -arvoksi* saadaan normaalijakauman taulukoista

$$\Pr(z > 2.91) = 0.0018$$

Siten havainnot sisältävät voimakasta evidenssiä nollahypoteesia H_0 vastaan; *nollahypoteesi H_0 voidaan hylätä 1 %:n merkitsevyystasolla.*

Koska vaihtoehtoisena hypoteesina on 1-suuntainen vaihtoehto $H_1 : p > 0.05$, *merkitsevyystasoa 0.01 vastaava kriittinen raja on*

$$+z_{0.01} = +2.33$$

sillä normaalijakauman taulukoiden mukaan

$$\Pr(z \geq 2.33) = 0.01$$

Koska

$$z = 2.91 > 2.33$$

testisuureen z arvo 2.91 on osunut hylkäysalueelle ja nollahypoteesi H_0 *voidaan hylätä 1 %:n merkitsevyystasolla ja vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 voidaan hyväksyä.*

Johtopäätös:

Viallisten suhteellinen osuus on tilastollisesti merkitsevästi valmistajan ilmoittamaa arvoa suurempi.

Tehtävä 10.6.

600 erääseen vakavaan tautiin sairastunutta potilasta jaettiin satunnaisesti kahteen ryhmään A ja B, joissa kummassakin oli 300 potilasta. Ryhmälle A annettiin tautiin kehitettyä uutta lääkettä ja ryhmälle B paljon käytettyä vanhaa lääkettä.

- (a) Ryhmässä A taudista parani 195 potilasta ja ryhmässä B 225 potilasta. Suositteletko uuden lääkkeen ottamista käyttöön koetuloksen perusteella?
- (b) Ryhmässä A taudista parani 225 potilasta ja ryhmässä B 195 potilasta. Suositteletko uuden lääkkeen ottamista käyttöön koetuloksen perusteella?

Tehtävä 10.6. – Mitä opimme?

Tehtävässä tarkastellaan *suhteellisten osuuksien vertailutestiä* riippumattomille otoksille.

Tehtävä 10.6. – Ratkaisu:

600 erääseen vakavaan tautiin sairastunutta potilasta jaettiin satunnaisesti kahteen ryhmään A ja B, joissa kummassakin oli 300 potilasta. Ryhmälle A annettiin tautiin kehitettyä uutta lääkettä ja ryhmälle B paljon käytettyä vanhaa lääkettä.

- (a) Ryhmässä A taudista parani 195 potilasta ja ryhmässä B 225 potilasta.
Jos uusi lääke parantaa *vähemmän* potilaita kuin vanha lääke, *ei tilastollista testausta tarvita* sen johtopäätöksen tekemiseksi, että uutta lääkettä ei kannata ottaa käyttöön ainakaan tämän kokeen perusteella.
Sen sijaan, jos uusi lääke parantaa *enemmän* potilaita kuin vanha lääke, on testaus tarpeen, jotta saadaan selville onko parantuneiden määrän lisääntymistä pidettävä sattumanvaraisena eli otosvaihtelusta johtuvana vai ei.
- (b) Ryhmässä A taudista parani 300:sta potilaasta 225 ja ryhmässä B parani 300:sta potilaasta 195.

Olkoon

$A = \text{"Potilas paranee"}$

ja

$\Pr(A) = p_1$, jos potilas kuuluu ryhmään A

$\Pr(A) = p_2$, jos potilas kuuluu ryhmään B

Määritellään riippumattomat satunnaismuuttujat

$$X_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{jos } i. \text{ potilas paranee ryhmässä } k \\ 0, & \text{jos } i. \text{ potilas ei parane ryhmässä } k \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n_k, k = 1, 2$$

jossa

$$k = 1 \leftrightarrow \text{ryhmä A}$$

$$k = 2 \leftrightarrow \text{ryhmä B}$$

Tällöin

$$X_{ik} \sim \text{Ber}(p_k), k = 1, 2$$

Asetetaan *nollahypoteesi*

$$H_0 : p_1 = p_2$$

Määritellään *testisuure*

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Testisuureen lausekkeessa

$$n_1 = \text{Potilaiden lukumäärä ryhmässä A}$$

$$\hat{p}_1 = \text{Parantuneiden suhteellinen osuus ryhmässä A}$$

$$n_2 = \text{Potilaiden lukumäärä ryhmässä B}$$

$$\hat{p}_2 = \text{Parantuneiden suhteellinen osuus ryhmässä B}$$

ja

$$\hat{p} = \text{Parantuneiden suhteellinen osuus kaikkien potilaiden joukossa}$$

Huomaa, että

$$\hat{p}_1 = f_1 / n_1$$

$$\hat{p}_2 = f_2 / n_2$$

jossa

$$f_1 = \text{Parantuneiden lukumäärä ryhmässä A}$$

$$f_2 = \text{Parantuneiden lukumäärä ryhmässä B}$$

ja

$$\hat{p} = \frac{f_1 + f_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

Jos nollahypoteesi H_0 pätee, testisuure z noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa:

$$z \sim_a N(0,1)$$

Tehtävässä

$$n_1 = 300$$

$$\hat{p}_1 = 225/300 = 0.75$$

$$n_2 = 300$$

$$\hat{p}_2 = 195/300 = 0.65$$

joten

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{225 + 195}{300 + 300} = 0.7$$

Siten

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.75 - 0.65}{\sqrt{0.7(1-0.7)\left(\frac{1}{300} + \frac{1}{300}\right)}} = 2.67$$

Jos vaihtoehtoisena hypoteesina on 1-suuntainen vaihtoehto $H_1 : p_1 > p_2$, testisuureen z arvoa 2.67 vastaavaksi p -arvoksi saadaan normaalijakauman taulukoista

$$\Pr(z > 2.67) = 0.0038$$

Siten aineisto sisältää voimakasta evidenssiä nollahypoteesia H_0 vastaan; nollahypoteesi H_0 voidaan hylätä 1 %:n merkitsevyystasolla.

Jos vaihtoehtoisena hypoteesina on 1-suuntainen vaihtoehto $H_1 : p_1 > p_2$, merkitsevyystasoa 0.01 vastaava kriittinen raja on

$$+z_{0.01} = +2.32$$

sillä normaalijakauman taulukoiden mukaan

$$\Pr(z \geq 2.33) = 0.01$$

Koska

$$z = 2.67 > 2.33$$

testisuureen z arvo on osunut hylkäysalueelle ja nollahypoteesi H_0 voidaan hylätä 1 %:n merkitsevyystasolla ja vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 voidaan hyväksyä.

Johtopäätös:

Uuden lääkkeen käyttöönotto on perusteltua, koska parantuneiden suhteellinen osuus on uutta lääkettä saaneiden joukossa tilastollisesti merkitsevästi vanhaa lääkettä saaneiden osuutta suurempi.

Tehtävä 10.7.

Alueella A 300:sta satunnaisotokseen poimituista äänioikeutetuista 56 % kannatti ehdokasta X, kun taas alueella B 200:sta satunnaisotokseen poimituista äänioikeutetuista 48 % kannatti ehdokasta X.

Muodosta testi nollahypoteesille, että kannatukset eivät alueilla A ja B eroa toisistaan.

Testaa nollahypoteesia 5 %:n merkitsevyystasolla, kun vaihtoehtoisena hypoteesina on

(a) X:n kannatus on alueella A suurempaa kuin alueella B.

(b) X:n kannatus eroaa alueilla A ja B.

Tehtävä 10.7. – Mitä opimme?

Tehtävässä tarkastellaan *suhteellisten osuuksien vertailutestiä* riippumattomille otoksille.

Tehtävä 10.7. – Ratkaisu:

Alueella A ehdokasta X kannatti 300:sta äänioikeutetusta 56 % ja alueella B ehdokasta X kannatti 200:sta äänioikeutetusta 48 %.

Olkoon

$A = \text{”Äänioikeutettu kannattaa ehdokasta X”}$

ja

$\Pr(A) = p_1$, jos äänioikeutettu kuuluu alueeseen A

$\Pr(A) = p_2$, jos äänioikeutettu kuuluu alueeseen B

Määritellään riippumattomat satunnaismuuttujat

$$X_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{jos } i. \text{ äänioikeutettu otoksessa kannattaa ehdokasta X alueella } k \\ 0, & \text{jos } i. \text{ äänioikeutettu otoksessa ei kannata ehdokasta X alueella } k \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n_k, k = 1, 2$$

jossa

$k = 1 \leftrightarrow \text{alue A}$

$k = 2 \leftrightarrow \text{alue B}$

Tällöin

$$X_{ik} \sim \text{Ber}(p_k), k = 1, 2$$

Asetetaan *nollahypoteesi*

$$H_0 : p_1 = p_2$$

Määritellään *testisuure*

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Testisuureen lausekkeessa

$$n_1 = \text{Otoskoko alueella A}$$

$$\hat{p}_1 = \text{Ehdokas X:n kannattajien suhteellinen osuus otoksessa alueelta A}$$

$$n_2 = \text{Otoskoko alueella B}$$

$$\hat{p}_2 = \text{Ehdokas X:n kannattajien suhteellinen osuus otoksessa alueelta B}$$

ja

$$\hat{p} = \text{Ehdokas X:n kannattajien suhteellinen osuus otoksessa, joka saadaan yhdistämällä otokset alueilta A ja B}$$

Huomaa, että

$$\hat{p}_1 = f_1 / n_1$$

$$\hat{p}_2 = f_2 / n_2$$

jossa

$$f_1 = \text{Ehdokas X:n kannattajien lukumäärä otoksessa alueelta A}$$

$$f_2 = \text{Ehdokas X:n kannattajien lukumäärä otoksessa alueelta B}$$

ja

$$\hat{p} = \frac{f_1 + f_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

Jos nollahypoteesi H_0 pätee, testisuure z noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa:

$$z \sim_a N(0,1)$$

Tehtävässä

$$n_A = 300$$

$$\hat{p}_A = 0.56$$

$$n_B = 200$$

$$\hat{p}_B = 0.48$$

joten

$$\hat{p} = \frac{n_A \hat{p}_A + n_B \hat{p}_B}{n_A + n_B} = \frac{300 \times 0.56 + 200 \times 0.48}{300 + 200} = 0.53$$

Siten

$$z = \frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}} = \frac{0.56 - 0.48}{\sqrt{0.53(1-0.53)\left(\frac{1}{300} + \frac{1}{200}\right)}} = 1.76$$

- (a) Jos vaihtoehtoisena hypoteesina on *yksisuuntainen* vaihtoehto $H_1 : p_1 > p_2$, *testisuureen* z arvoa 1.76 vastaavaksi p -arvoksi saadaan normaalijakauman taulukoista

$$\Pr(z > 1.76) = 0.0392 < 0.05$$

joten *nollahypoteesi* H_0 voidaan hylätä 5 %:n *merkitsevyystasolla*.

Jos vaihtoehtoisena hypoteesina on *yksisuuntainen* hypoteesi vaihtoehto $H_1 : p_1 > p_2$, *merkitsevyystasoa* 0.05 vastaavaksi *kriittiseksi rajaksi* saadaan

$$+z_{0.05} = 1.65$$

sillä normaalijakauman taulukoiden mukaan

$$\Pr(z \geq 1.65) = 0.05$$

Koska

$$z = 1.76 > 1.65$$

testisuureen z arvo 1.76 on osunut hylkäysalueelle ja *nollahypoteesi* H_0 voidaan hylätä 5 %:n *merkitsevyystasolla* ja *vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 voidaan hyväksyä.

Johtopäätös:

X :n kannatus on testin mukaan suurempaa alueella A kuin alueella B.

- (b) Jos vaihtoehtoisena hypoteesina on *kaksisuuntainen* vaihtoehto $H_1 : p_1 \neq p_2$, *testisuureen* z arvoa 1.76 vastaavaksi p -arvoksi saadaan normaalijakauman taulukoista

$$2 \times \Pr(z > 1.76) = 2 \times 0.0392 = 0.0784 > 0.05$$

joten *nollahypoteesi* H_0 jää voimaan 5 %:n *merkitsevyystasolla*.

Jos vaihtoehtoisena hypoteesina on *kaksisuuntainen* vaihtoehto $H_1 : p_1 \neq p_2$, *merkitsevyystasoa* 0.05 vastaavaksi *kriittiseksi rajaksi* saadaan

$$+z_{0.025} = 1.96$$

sillä normaalijakauman taulukoiden mukaan

$$\Pr(z \geq 1.96) = 0.025$$

Koska

$$z = 1.76 < 1.96$$

testisuureen z arvo on osunut hyväksymisalueelle ja *nollahypoteesia* H_0 ei voida hylätä 5 %:n *merkitsevyystasolla*.

Johtopäätös:

Nollahypoteesia siitä, että X :n kannatus on alueilla A ja B yhtä suurta ei voida hylätä.

Huomautus:

Vaihtoehtoisen hypoteesin muoto on *tässä tapauksessa* vaikuttanut testin tulokseen.

Huomautuksia tilastollisesta testauksesta:

- (1) Testin tulos eli se, hylätäänkö testin nollahypoteesi vai jätetäänkö se voimaan, riippuu sekä valitusta merkitsevyystasosta että vaihtoehtoisen hypoteesin muodosta.
- (2) Käytännön tutkimuksessa apunasi ei ole luennoitsijaa, joka antaisi sinulle nollahypoteesin tai vaihtoehtoisen hypoteesin muodon ja testissä käytettävän merkitsevyystason.
- (3) Tilasto-ohjelmistot tulostavat nykyään tavallisesti testisuureen arvon ja sitä vastaavan p -arvon (tai testisuureen arvoa vastaavan *hänätodennäköisyyden*). Tällöin tutkija joutuu päättämään suoraan testin p -arvon perusteella hylkääkö hän nollahypoteesin vai ei.
- (4) Merkitsevyystason valinta tai nollahypoteesin hylkäämiseen johtavan kynnysarvon valinta p -arvolle ovat valintoja, joihin on annettava vaikuttaa myös sen, mitä seurauksia on nollahypoteesin hylkäämisestä tai nollahypoteesin jäämisestä voimaan.