

Mat-1.2620 Sovellettu todennäköisyyslaskenta B**8. harjoitukset / Tehtävät**

Demo-tehtävät: 1, 3, 4, 5, 8
Pistetehtävät: 2, 6, 7, 9

Aiheet: Otos ja otosjakaumat

Avainsanat:

Aritmeettinen keskiarvo, Bernoulli-jakauma, Bernoulli-koe, χ^2 -jakauma, Frekvenssi, Frekvenssijakauma, Keskeinen raja-arvolause, Normaalijakauma, Odotusarvo, Otos, Otoshajonta, Otosjakauma, Otoskoko, Otosvarianssi, Riippumattomuus, Standardoitu normaalijakauma, Suhteellinen frekvenssi, Suhteellinen osuus, Todennäköisyys, Yksinkertainen satunnaisotos, Varianssi

Tehtävä 8.1.

- (a) Kone valmistaa kuulalaakerin kuulia, joiden halkaisijat vaihtelevat satunnaisesti noudattaen normaalijakaumaa parametrein

$$\mu = 10 \text{ mm}, \sigma = 0.01 \text{ mm}$$

Poimitaan kuulien joukosta yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko $n = 10$.

Olkoot $\bar{X}$ ja s^2 kuulien halkaisijoiden aritmeettinen keskiarvo ja otosvarianssi otoksessa.

Mitkä ovat aritmeettisen keskiarvon $\bar{X}$ ja otosvarianssin s^2 muunnoksen $(n-1)s^2/\sigma^2$ jakaumat otoksessa?

- (b) Äänestäjistä 25 % kannattaa puoluetta ABC. Poimitaan äänestäjien joukosta yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko $n = 1000$.

Mikä on puolueen ABC kannattajien suhteellisen osuuden f/n approksimatiivinen jakauma otoksessa?

Tehtävä 8.2.

- (a) Miesten pituus eräässä maassa vaihtelee satunnaisesti noudattaen normaalijakaumaa parametrein

$$\mu = 180 \text{ cm}, \sigma = 5 \text{ cm}$$

Poimitaan miesten joukosta yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko $n = 100$.

Olkoot $\bar{X}$ ja s^2 pituuksien aritmeettinen keskiarvo ja otosvarianssi otoksessa.

Mitkä ovat aritmeettisen keskiarvon $\bar{X}$ ja otosvarianssin s^2 muunnoksen $(n-1)s^2/\sigma^2$ jakaumat otoksessa?

- (b) Koneen valmistamista muttereista 5 % on viallisia. Poimitaan muttereiden joukosta yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko $n = 100$.

Mikä on viallisten muttereiden suhteellisen osuuden f/n approksimatiivinen jakauma otoksessa?

Tehtävä 8.3.

Olko

$$X_i, i = 1, 2, \dots, n$$

riippumattomia normaalijakautuneita satunnaismuuttujia, joiden odotusarvo $E(X_i) = \mu$ ja varianssi $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$.

Tarkastellaan seuraavia todennäköisyyksiä:

- (1) $\Pr(X_i > \mu + \sigma)$
- (2) $\Pr(X_1 + X_2 + \dots + X_n > n(\mu + \sigma))$
- (3) $\Pr(\bar{X} > \mu + \sigma)$

Tehtävät:

- (a) Määää todennäköisyys (1).
- (b) Todista, että todennäköisyys (2) on pienempi kuin todennäköisyys (1), jos $n > 1$.
- (c) Todista, että todennäköisyys (2) pienenee, kun $n \rightarrow +\infty$.
- (d) Todista, että todennäköisyys (3) on sama kuin todennäköisyys (2).
- (e) Määää todennäköisyys (2), kun $n = 10$.

Tehtävä 8.4.

Oletetaan, että havainnot $X_i, i = 1, 2, \dots, 100$ muodostavat yksinkertaisen satunnaisotoksen normaalijakaumasta $N(1,4)$. Määää todennäköisyys, että havaintojen aritmeettinen keskiarvo $\bar{X}$ saa suurempia arvoja kuin 1.1.

Tehtävä 8.5.

Oletetaan, että suomalaisten miesten pituus on normaalijakautunut parametrein $\mu = 175$ cm ja $\sigma = 5$ cm. Poimitaan miesten joukosta yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko on 100. Määää lukuarvo, jota suurempia arvoja havaintojen aritmeettinen keskiarvo saa todennäköisyydellä 0.01.

Tehtävä 8.6.

Oletetaan, että havainnot $X_i, i = 1, 2, \dots, 101$ muodostavat yksinkertaisen satunnaisotoksen normaalijakaumasta $N(1,4)$. Määää lukuarvo, jota pienempiä arvoja havaintojen otosvariassi saa todennäköisyydellä 0.01.

Tehtävä 8.7.

Oletetaan, että suomalaisten miesten pituus on normaalijakautunut parametrein $\mu = 175$ cm ja $\sigma = 5$ cm. Poimitaan miesten joukosta yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko on 101. Määää lukuarvo, jota suurempia arvoja otosvariassi saa todennäköisyydellä 0.01.

Tehtävä 8.8.

Oletetaan, että teemme 100 toisistaan riippumatonta Bernoulli-koetta, jossa kiinnostuksen kohteena olevan tapahtuman A todennäköisyys on 0.2. Määrittää todennäköisyys, että tapahtuman A suhteellinen frekvenssi toistojen joukossa on suurempi kuin 10.

Tehtävä 8.9.

Oletetaan, että 30 % suomalaisista kannattaa NATO:on liittymistä. Poimitaan suomalaisten joukosta yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko on 100. Määrittää todennäköisyys, että NATO:n kannattajien suhteellinen osuus otoksessa on pienempi kuin 20 %.