

---

**Ilkka Mellin**  
**Todennäköisyyslaskenta**

**Liite 2: Verkot ja todennäköisyyslaskenta**  
**Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit**

# Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

---

>> Puutodennäköisyydet

Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Puudiagrammien käyttö todennäköisyyslaskennassa

---

- Periaatteessa jokainen *alkeistodennäköisyyslaskennan* tehtävä voidaan ratkaista käyttämällä apuna ns. **puudiagrammeja**.
- Tällöin tehtävään liittyvä *satunnaisilmiö on ensin osattava kuvata puudiagrammilla*.
- Jos tehtävän satunnaisilmiötä osataan kuvata puudiagrammilla, tehtävän ratkaisemisessa tarvittavat **puutodennäköisyydet** saadaan määrätyksi käyttämällä kahta yksinkertaista laskusääntöä, **tulosääntöä** ja **yhteenlaskusääntöä**.

## Puudiagrammin konstruointi 1/2

---

- Satunnaisilmiötä voidaan kuvata **puudiagrammilla**, jos ilmiö osataan esittää seuraavassa muodossa:
  - (i) Ilmiöllä on yksi **alkutila** ja yksi tai useampia **lopputiloja**.
  - (ii) Ilmiö koostuu *vaihtoehtoisista* **tapahtumajonoista**.
  - (iii) Tapahtumajonoissa edetään **vaiheittain** *tapahtumasta toiseen* lähtien ilmiön alkutilasta ja päätyen johonkin ilmiön lopputiloista.
  - (iv) Jokaisessa **vaiheessa** kohdataan yksi tai useampia **tapahtumavaihtoehtoja**, joista yksi *realisoituu* ja johtaa *uusin* tapahtumavaihtoehtoihin.

## Puudiagrammin konstruointi 2/2

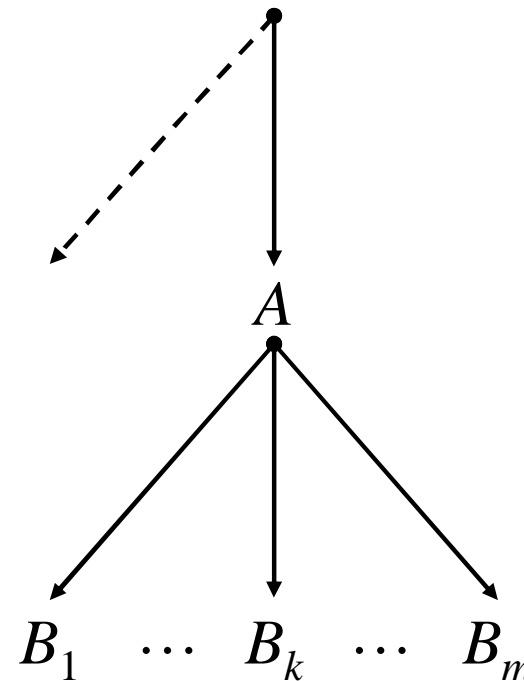
---

- Satunnaisilmiötä vastaavan **puudiagrammin konstruointi**:
    - (i) Asetetaan puun **juuri** vastaamaan ilmiön *alkutilaa*.
    - (ii) Asetetaan puun **loppupisteet** ("oksien kärjet") vastaamaan ilmiön *lopputiloja*.
    - (iii) Asetetaan puun **pisteet** ("oksien haarautumiskohdat") vastaamaan ilmiön *tapahtumia*.
    - (iv) Viedään puun jokaisesta pisteestä **särmä** ("oksa") kaikkiin sellaisiin pisteisiin, joita vastaavat *tapahtumavaihtoehdot* ovat ilmiön *siinä vaiheessa mahdollisia*.
    - (v) Liitetään jokaiseen pisteestä *lähtevään* särmään *siinä vaiheessa* mahdollisten **tapahtumavaihtoehtojen todennäköisyydet**.
-

## Puudiagrammin konstruointi: Esimerkki 1/3

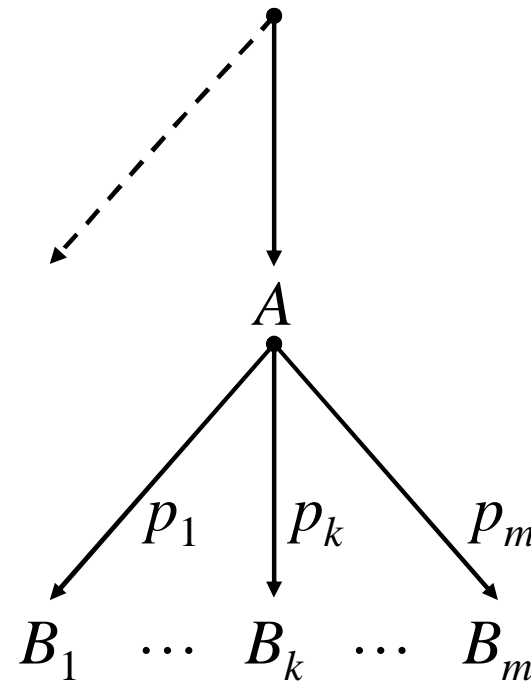
---

- Puudiagrammin konstruointia voidaan havainnollistaa viereisellä kaaviolla.
- Tarkastellaan satunnaisilmiötä *vaiheessa*, jossa tapahtuma  $A$  on sattunut.
- Olkoot  $A$ :n sattumisen jälkeen *mahdolliset tapahtumavaihtoehdot*  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$



## Puudiagrammin konstruointi: Esimerkki 2/3

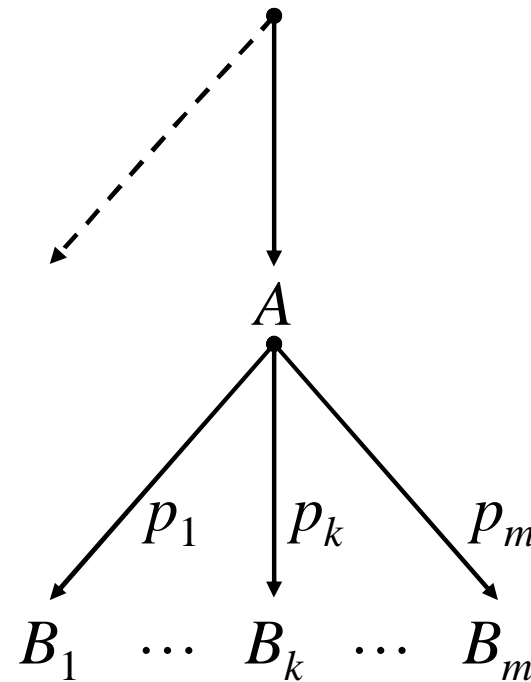
- Viedään pisteestä  $A$  *särmä* jokaiseen pisteistä  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$
- Liitetään jokaiseen särmään  $(A, B_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  *ehdollinen todennäköisyys*  $p_i = \Pr(B_i | \overset{\cdot}{A})$  jossa  $\overset{\cdot}{A}$  on tapahtumajono, joka on tuonut pisteeseen  $A$ .



## Puudiagrammin konstruointi: Esimerkki 3/3

- Koska  $A$ :n sattumisen jälkeen *ei ole muita mahdollisia tapahtumavaihtoehtoja* kuin  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , pitää todennäköisyyksien  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  toteuttaa ehto

$$\sum_{i=1}^m p_i = \sum_{i=1}^m \Pr(B_i | A) = 1$$





## Puudiagrammin konstruointi: Kommentteja

---

- Puudiagrammi *piirretään* tavallisesti *joko* niin, että sen alkupiste on ylhäällä ja loppupisteet ovat alhaalla *tai* niin, että sen alkupiste on vasemmalla ja loppupisteet ovat oikealla.
- Useat puun pisteet voivat vastata *samaa* tapahtumaa.
- Mistä tahansa puun pisteestä *lähtevien särmien* todennäköisyyksien summa on 1.

## Puutodennäköisyydet

---

- **Puutodennäköisyydellä** tarkoitetaan todennäköisyyttä päästä *puun alkupisteestä yhden tai useamman muun puun pisteen määräämään yhdistettyyn tapahtumaan*.
- *Pisteen todennäköisyys* saadaan määrämällä alkupisteestä ko. pisteeseen vievän *reitin todennäköisyys*.
- *Reitin todennäköisyys* saadaan soveltamalla reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksiin **tulosääntöä**.
- *Usean pisteen määräämän yhdistetyn tapahtuman todennäköisyys* saadaan soveltamalla ko. pisteisiin vievien reittien todennäköisyyksiin **yhteenlaskusääntöä**.

- *Reitin todennäköisyys* saadaan määrämällä reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksien *tulo*.
- Sääntöä kutsutaan **puutodennäköisyyksien tulosäännöksi**.
- Tulosäännön perustelu:
  - (1) Reitti on *tapahtumajono*, jonka muodostavat reitin pisteet.
  - (2) Reitin muodostava tapahtumajono sattuu, jos *jokainen jonon tapahtumista sattuu*.
  - (3) Todennäköisyyslaskennan *yleisen tulosäännön mukaan* reitin todennäköisyys saadaan määrämällä reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksien *tulo*.

- Olkoon

$$L, A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$$

yksi niistä vaihtoehtoisista *tapahtumajonoista*, joista satunnaisilmiö muodostuu.

- Tällöin parit

$$(L, A_1), (A_1, A_2), (A_2, A_3), \dots, (A_{k-1}, A_k)$$

muodostavat satunnaisilmiön *alkutilasta L* satunnaisilmiön (*loppu-*) tilaan  $A_k$  vievän reitin särmät.

- Liitetään reitin

$$(L, A_1), (A_1, A_2), (A_2, A_3), \dots, (A_{k-1}, A_k)$$

särmiin *todennäköisyydet* seuraavalla tavalla:

$$(L, A_1) \rightarrow \Pr(A_1) = p_1$$

$$(A_1, A_2) \rightarrow \Pr(A_2 | A_1) = p_2$$

$$(A_2, A_3) \rightarrow \Pr(A_3 | A_1 \cap A_2) = p_3$$

...

$$(A_{k-1}, A_k) \rightarrow \Pr(A_k | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{k-1}) = p_k$$

- Reitin

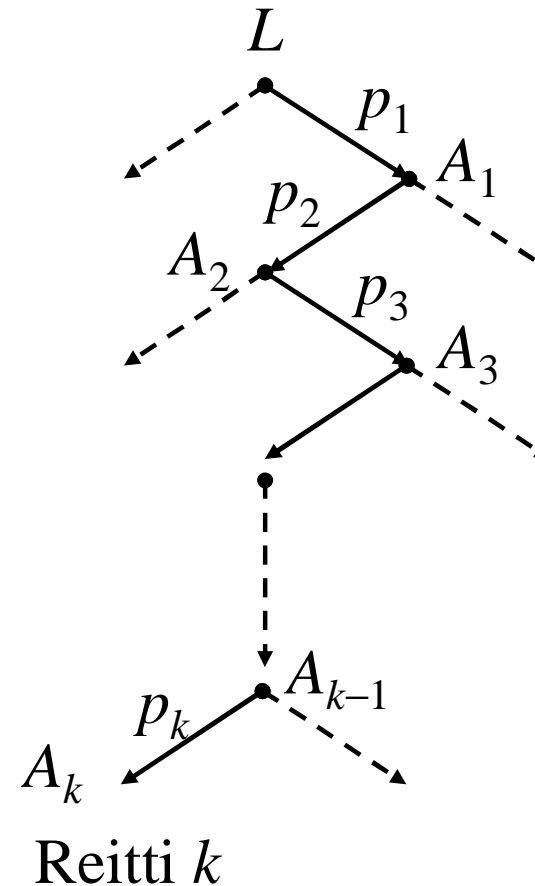
$$(L, A_1), (A_1, A_2), (A_2, A_3), \dots, (A_{k-1}, A_k)$$

todennäköisyys on **yleisen tulosäännön** nojalla:

$$\begin{aligned} & \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_k) \\ &= \Pr(A_1) \times \Pr(A_2 | A_1) \times \Pr(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \\ & \quad \dots \times \Pr(A_k | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{k-1}) \\ &= p_1 \times p_2 \times p_3 \times \dots \times p_k \end{aligned}$$

## Puutodennäköisyydet: Tulosäännön havainnollistus

- *Puutodennäköisyyksien tulosääntöä* voidaan havainnollistaa viereisellä *puudiagrammilla*.
- Reitin  $k$  todennäköisyys on puutodennäköisyyksien tulosäännön mukaan
$$\Pr(\text{Reitti } k) = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k$$



## Puutodennäköisyydet: Yhteenlaskusääntö 1/2

---

- Jos useita (loppu-) tiloja yhdistetään yhdeksi tapahtumaksi, näin saadun *yhdistetyn tapahtuman* todennäköisyys saadaan määräämällä ko. tiloihin vievien reittien todennäköisyyksien *summa*.
- Sääntöä kutsutaan **puutodennäköisyyksien yhteenlaskusäännöksi**.
- Yhteenlaskusäännön perustelu:
  - (1) Puun eri pisteisiin vievät reitit ovat *toisensa poissulkevia*.
  - (2) *Toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan* useista (loppu-) pisteistä yhdistämällä saatavan tapahtuman todennäköisyys saadaan määräämällä ko. pisteisiin vievien reittien todennäköisyyksien *summa*.



## Puutodennäköisyydet: Yhteenlaskusääntö 2/2

---

- Yhdistetään satunnaisilmiön (*loppu-*) tilat  $B_1, B_2, \dots, B_k$  yhdeksi tapahtumaksi

$$C = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$$

- Olkoot tiloja  $B_1, B_2, \dots, B_k$  vastaavat reitit

Reitti 1, Reitti 2, ..., Reitti  $k$

- Koska puun eri pisteisiin vievät reitit ovat *toisensa poissulkevia*, tapahtuman  $C$  todennäköisyys on **toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön** nojalla:

$$\begin{aligned} \Pr(C) &= \Pr(\text{Reitti 1 tai Reitti 2 tai } \dots \text{ tai Reitti } k) \\ &= \Pr(\text{Reitti 1}) + \Pr(\text{Reitti 2}) + \dots + \Pr(\text{Reitti } k) \end{aligned}$$

## Puutodennäköisyydet

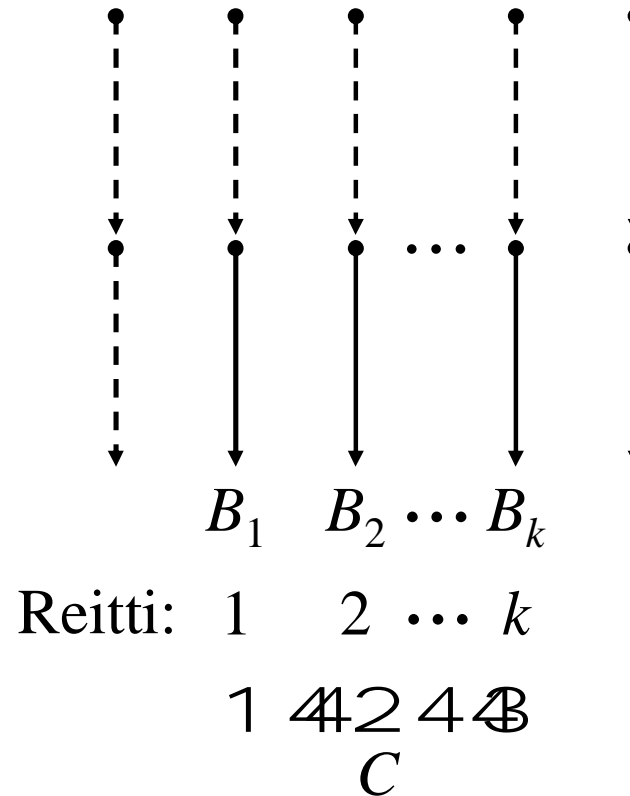
# Puutodennäköisyydet:

## Yhteenlaskusäännön havainnollistus

---

- *Puutodennäköisyyksien yhteenlaskusääntöä voidaan havainnollistaa viereisellä puu-diagrammilla:*

$$\begin{aligned} \Pr(C) = & \Pr(\text{Reitti 1}) \\ & + \Pr(\text{Reitti 2}) \\ & \dots \\ & + \Pr(\text{Reitti } k) \end{aligned}$$



# Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

---

**Puutodennäköisyydet**

**>> Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen**

## Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

# Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen puudiagrammilla

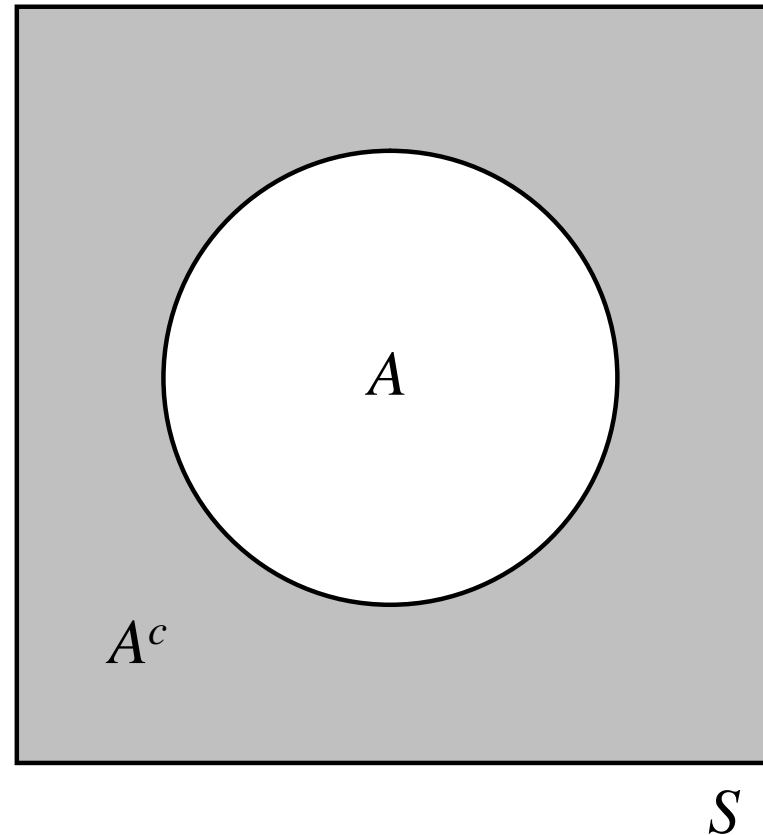
---

- Tarkastellaan seuraavien *todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistamista puudiagrammilla*:
  - (i) **Komplementtitapahtuman todennäköisyys.**
  - (ii) **Yleinen tulosääntö ja tulosääntö riippumattomille tapahtumille.**
  - (iii) **Yleinen yhteenlaskusääntö ja yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille.**
  - (iv) **Erotustapahtuman todennäköisyys.**
  - (v) **Kokonaistodennäköisyyden kaava.**
- Puun *juurta* eli *alkupistettä* on merkitty diagrammeissa kirjaimella  $L$  ( $L \sim$  satunnaisilmiön *lähtötila*).

## Todennäköisyytlaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

# Komplementtitapahtuman todennäköisyys 1/2

- Olkoon  $A \subset S$  jokin otosavaruuden  $S$  tapahtuma.
- Olkoon tapahtuman  $A$  *komplementtitapahtuma*  
 $A^c = \text{”}A \text{ ei satu”}$
- Tällöin  
 $A \cup A^c = S$ ,  $A \cap A^c = \emptyset$   
 $\Pr(A) + \Pr(A^c) = \Pr(S) = 1$
- Sääntöä voidaan havainnollistaa viereisellä *Venn-diagrammilla*.

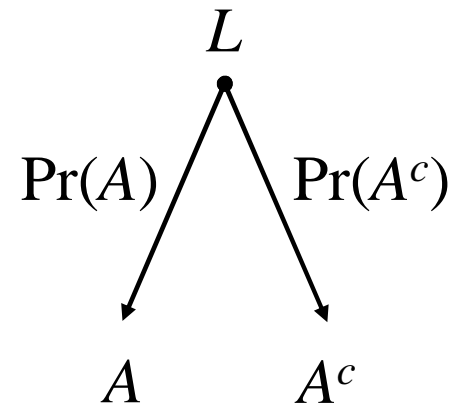


# Todennäköyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Komplementtitapahtuman todennäköisyys 2/2

---

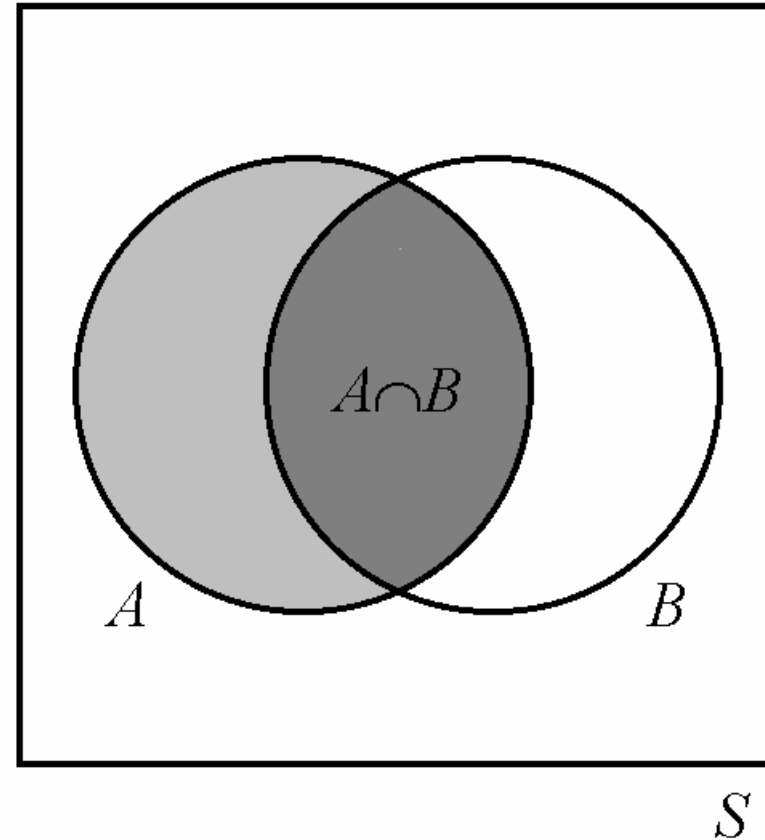
- Sääntöä voidaan havainnollistaa myös viereisellä *puudiagrammilla*.
- Yhdistetyn tapahtuman  $A \cup A^c = S$  todennäköisyys on *puu-todennäköisyyksien yhteenlaskusäännön* nojalla
$$\Pr(S) = \Pr(A) + \Pr(A^c) = 1$$



## Todennäköisyytlaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

### Yleinen tulosääntö 1/2

- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  tapahtumia.
- *Yleisen tulosäännön* mukaan
$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B|A)$$
- Sääntöä voidaan havainnollistaa viereisellä *Venn-diagrammilla*.

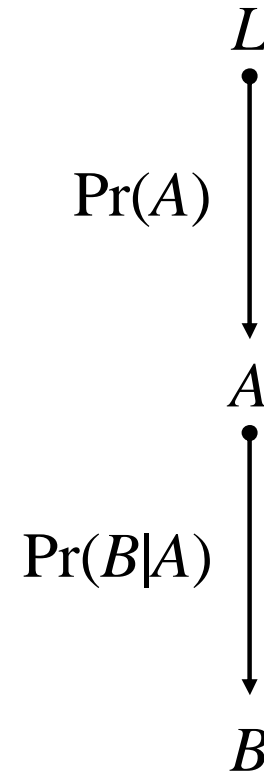


## Todennäköyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

### Yleinen tulosääntö 2/2

---

- Sääntöä voidaan havainnollistaa myös viereisellä *puudiagrammilla*.
- Yhdistetyn tapahtuman  $A \cap B =$  ” $A$  ja  $B$  sattuu” todennäköisyys on *puu-todennäköisyyksien tulosäännön* nojalla
$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B|A)$$



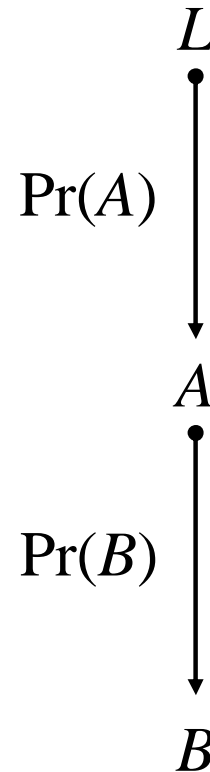


# Todennäköyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Tulosääntö riippumattomille tapahtumille

---

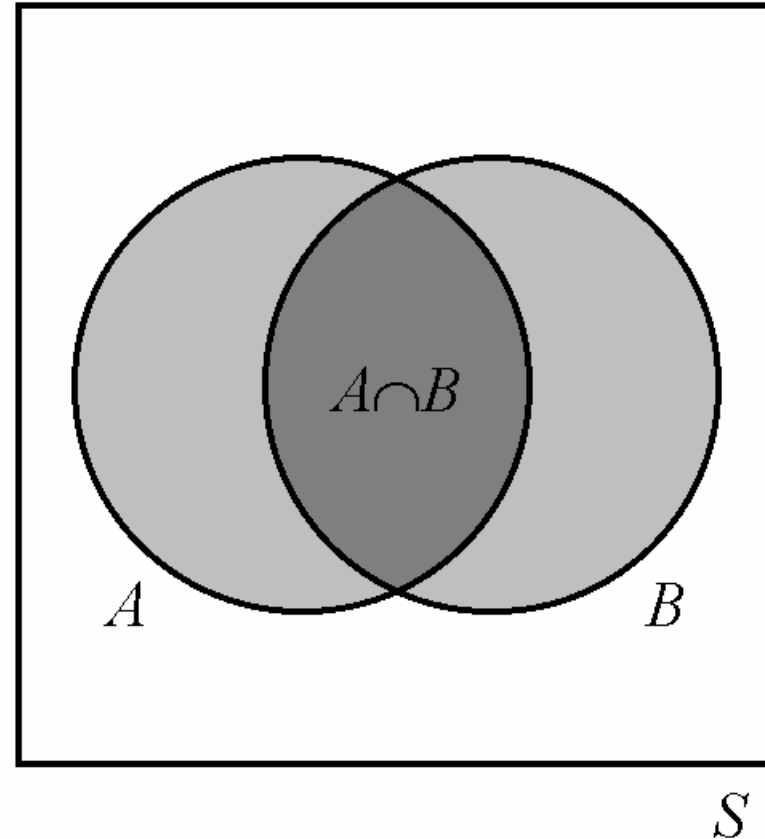
- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  riippumattomia tapahtumia.
- Koska tällöin
$$\Pr(B|A) = \Pr(B)$$
yhdistetyn tapahtuman  $A \cap B = \text{”}A \text{ ja } B \text{ sattuu”}$  todennäköisyys on *puutodennäköisyyksien tulosäännön* nojalla
$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$



# Todennäköyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Yleinen yhteenlaskusääntö 1/8

- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  tapahtumia.
- *Yleisen yhteenlaskusäännön* mukaan
$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$
- Sääntöä voidaan havainnollistaa viereisellä *Venn-diagrammilla*.



# Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Yleinen yhteenlaskusääntö 2/8

- Yleisen yhteenlaskusäännön todistus voidaan perustaa siihen, että joukot

$$A \cap B$$

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

$$B \setminus A = B \cap A^c$$

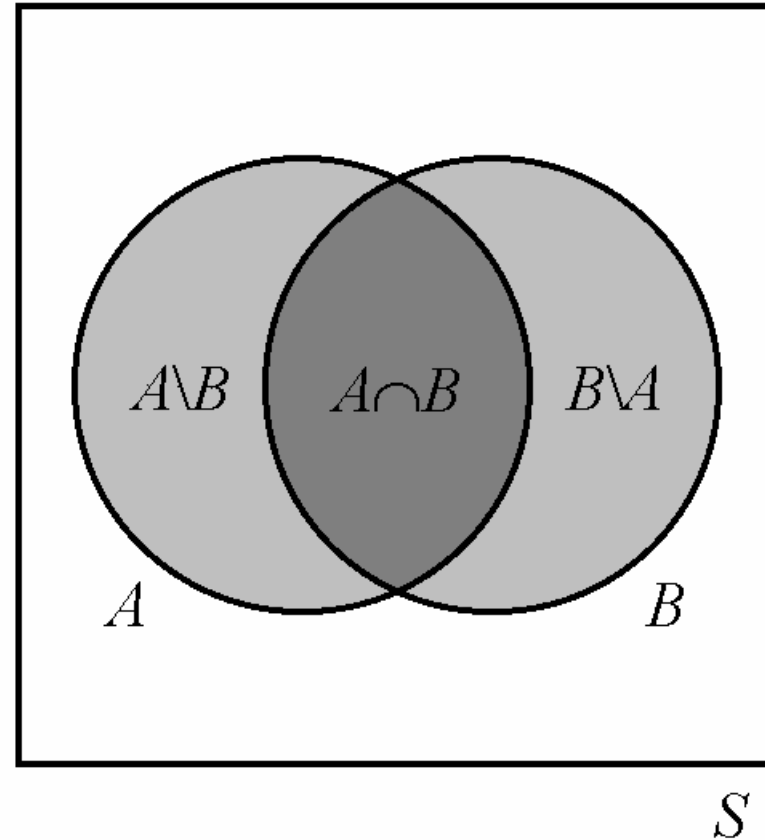
muodostavat joukon  $A \cup B$  osituksen, sekä yhtälöihin

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$$

$$(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

$$(B \setminus A) \cup (A \cap B) = B$$

$$(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$$



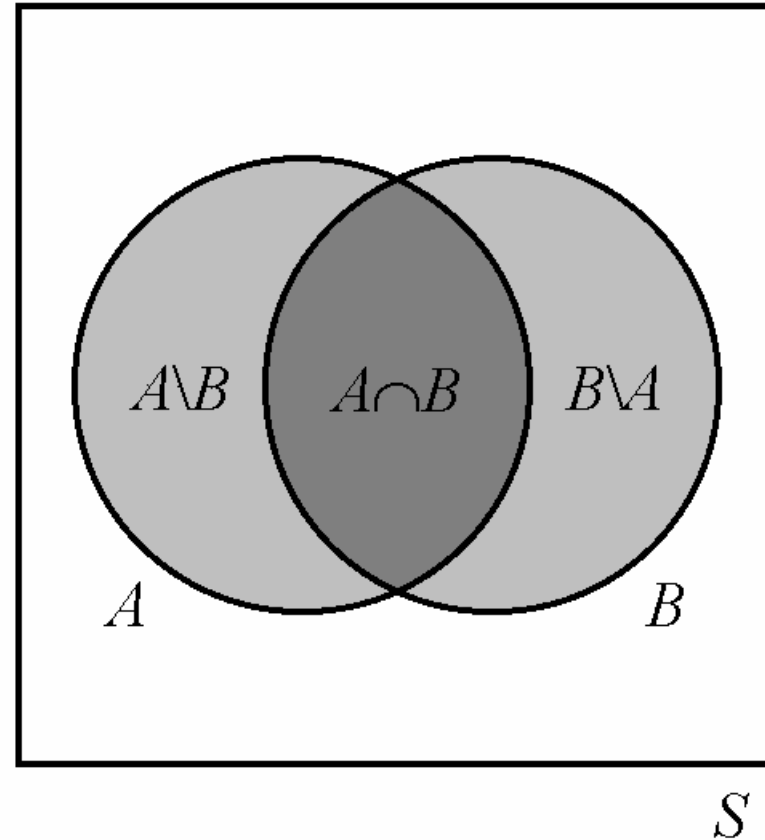
# Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Yleinen yhteenlaskusääntö 3/8

- *Toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön nojalla*

$$\Pr(A) = \Pr(A \setminus B) + \Pr(A \cap B)$$

$$\Pr(B) = \Pr(B \setminus A) + \Pr(A \cap B)$$

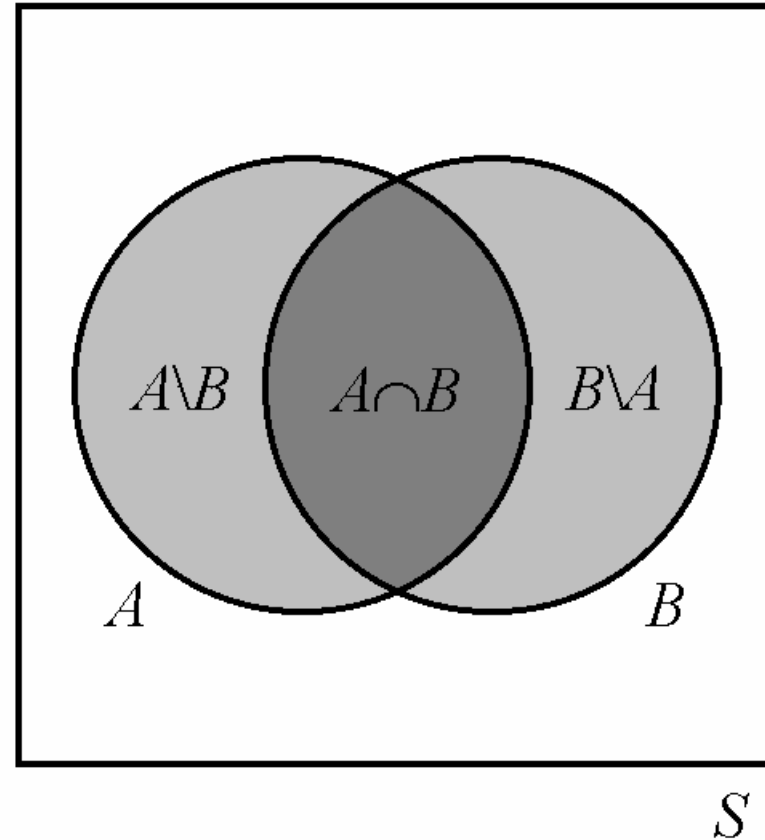


# Todennäköisyytlaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Yleinen yhteenlaskusääntö 4/8

- Edellisen kalvon yhtälöiden ja *toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön* nojalla

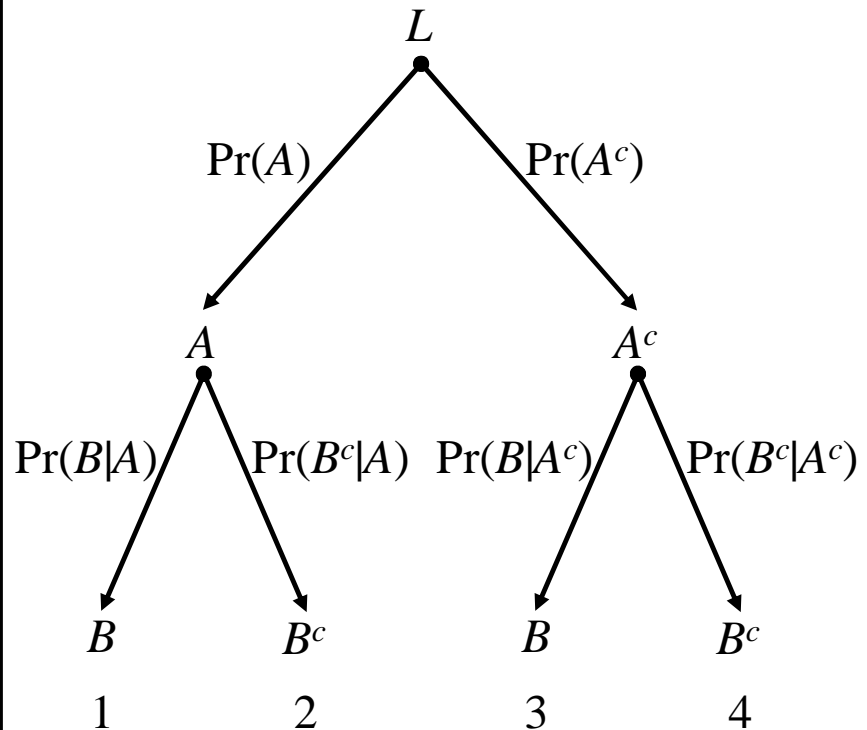
$$\begin{aligned} & \Pr(A \cup B) \\ &= \Pr(A \setminus B) + \Pr(B \setminus A) \\ & \quad + \Pr(A \cap B) \\ &= \Pr(A \setminus B) + \Pr(A \cap B) \\ & \quad + \Pr(B \setminus A) + \Pr(A \cap B) \\ & \quad - \Pr(A \cap B) \\ &= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \end{aligned}$$



# Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Yleinen yhteenlaskusääntö 5/8

- Yleistä yhteenlaskusääntöä voidaan havainnollistaa myös viereisellä *puu-diagrammilla*.
- Yhdistettyä tapahtumaa  $A \cup B =$  ”*A tai B* sattuu” vastaa reitit 1, 2 ja 3 yhdistämällä saatava tapahtuma, koska niissä *A* sattuu *tai B* sattuu *tai molemmat* sattuvat.



# Todennäköyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Yleinen yhteenlaskusääntö 6/8

- Reittien 1, 2 ja 3 todennäköisyyksiksi saadaan *puutodennäköisyyksien tulosääntöä* soveltamalla:

$$\Pr(\text{Reitti 1})$$

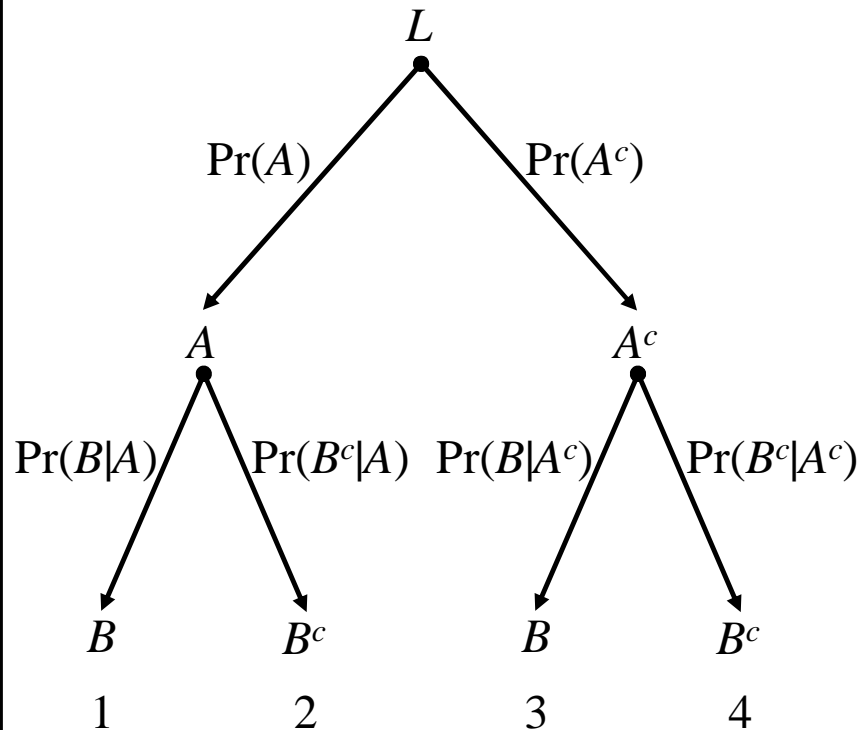
$$= \Pr(A)\Pr(B|A)$$

$$\Pr(\text{Reitti 2})$$

$$= \Pr(A)\Pr(B^c|A)$$

$$\Pr(\text{Reitti 3})$$

$$= \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$$



# Todennäköyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

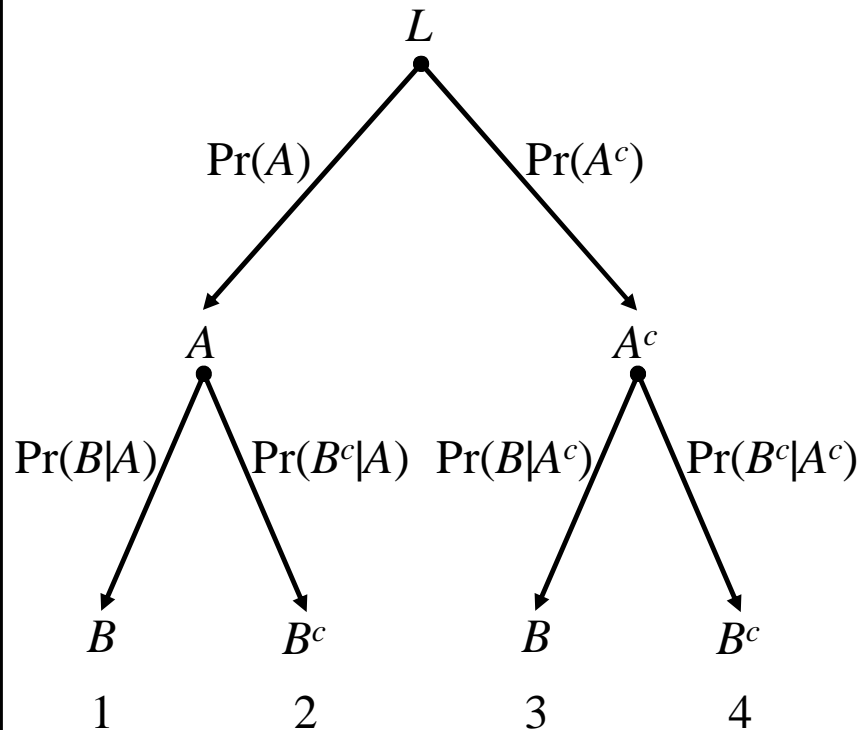
## Yleinen yhteenlaskusääntö 7/8

- Soveltamalla puutodennäköisyyksien yhteenlaskusääntöä saadaan:

$$\Pr(A \cup B)$$

$$= \Pr(\text{Reitti 1 tai Reitti 2 tai Reitti 3})$$

$$= \Pr(A)\Pr(B|A) + \Pr(A)\Pr(B^c|A) + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$$





# Todennäköisyyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Yleinen yhteenlaskusääntö 8/8

- *Ehdollisen todennäköisyyden* määritelmästä ja kalvon 3/8 kaavoista seuraa:

$$\Pr(A \cup B)$$

$$= \Pr(A)\Pr(B|A)$$

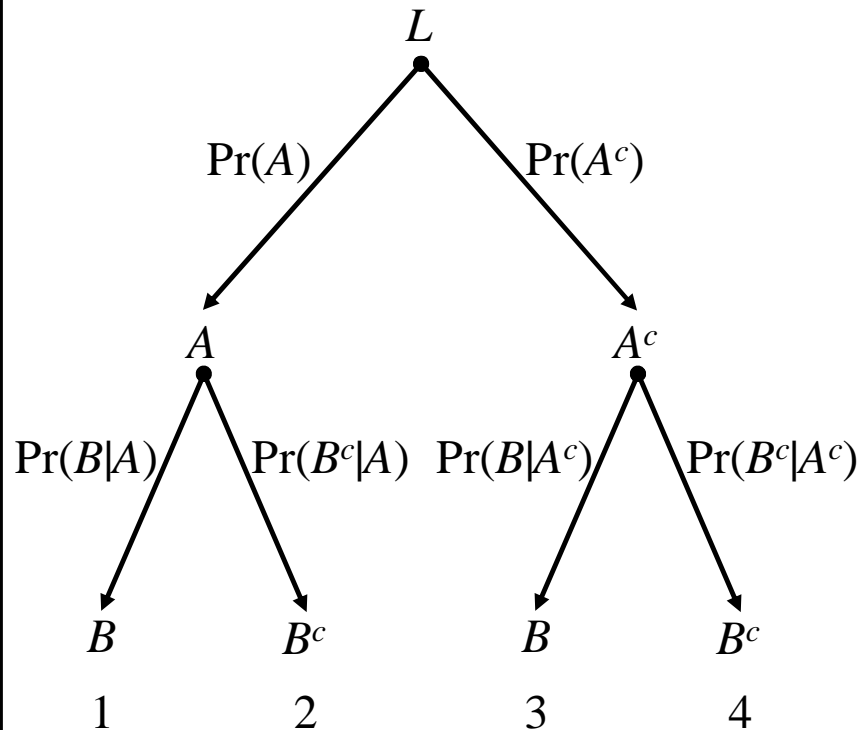
$$+ \Pr(A)\Pr(B^c|A)$$

$$+ \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$$

$$= \Pr(A \cap B)$$

$$+ \Pr(A \cap B^c) + \Pr(A^c \cap B)$$

$$= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

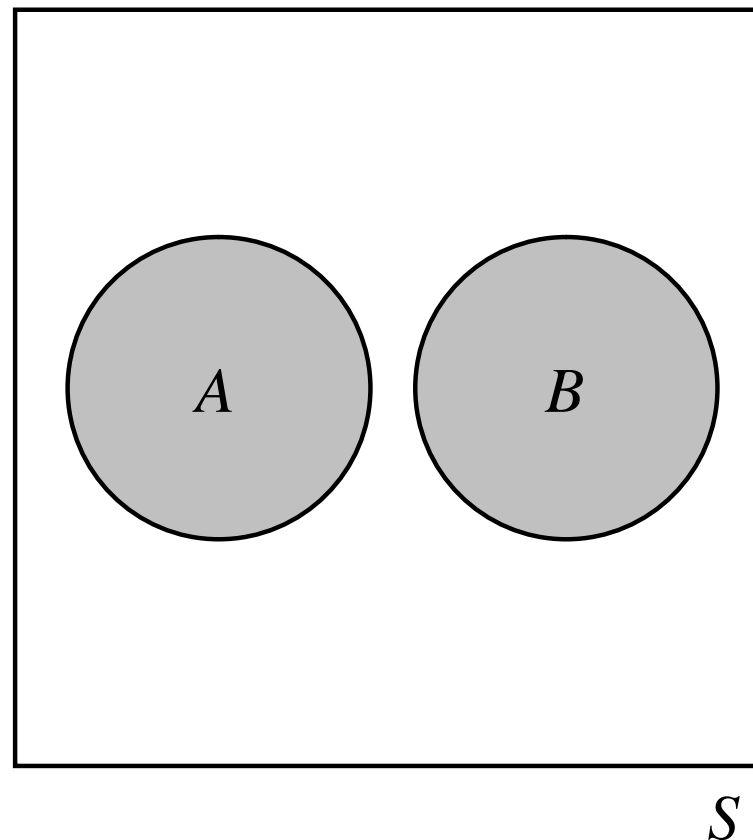


## Todennäköyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

# Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille 1/6

---

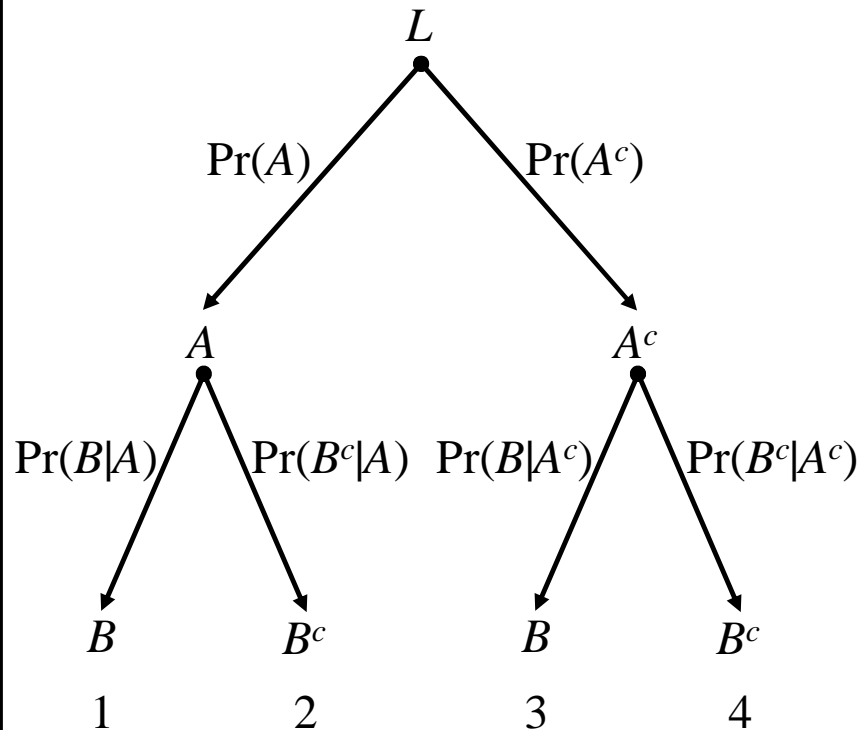
- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  toisensa poissulkevia tapahtumia.
- Tällöin  
 $A \cap B = \emptyset$  ja  $\Pr(A \cap B) = 0$
- Siten  
 $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$
- Sääntöä voidaan havainnollistaa viereisellä Venn-diagrammilla.



## Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

# Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille 2/6

- Toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusääntöä voidaan havainnollistaa myös viereisellä *puu-diagrammilla*.
- Yhdistettyä tapahtumaa  $A \cup B =$  ”*A tai B* sattuu” vastaa reitit 2 ja 3 yhdistämällä saatava tapahtuma, koska niissä *A* sattuu *tai B* sattuu, *mutta eivät molemmat*.



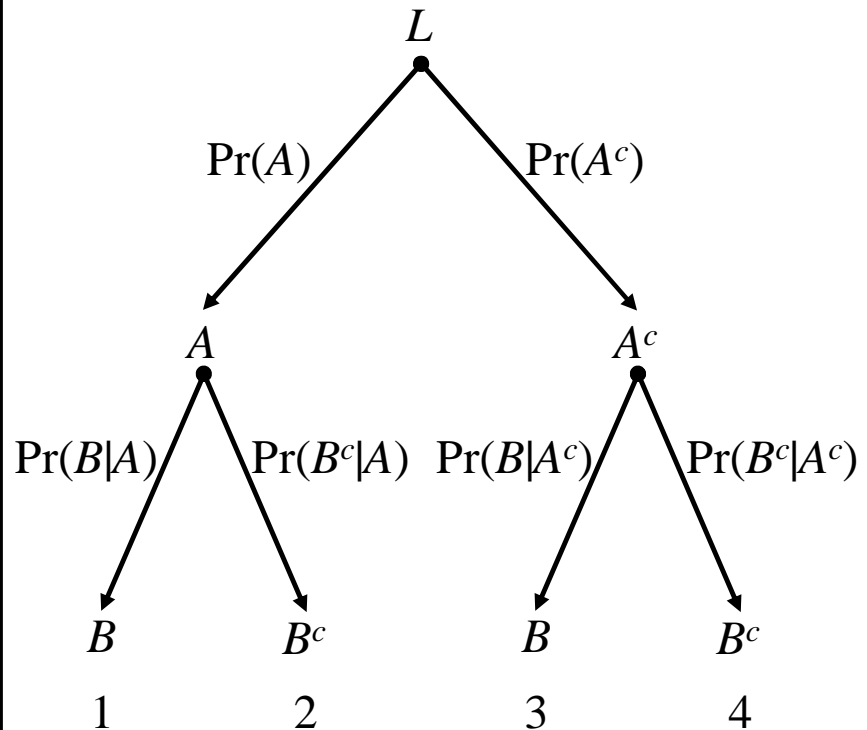
# Todennäköyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille 3/6

- Reittien 2 ja 3 todennäköisyyksiksi saadaan *puutodennäköisyyksien tulosääntöä* soveltamalla:

$$\begin{aligned} \Pr(\text{Reitti 2}) \\ &= \Pr(A)\Pr(B^c|A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(\text{Reitti 3}) \\ &= \Pr(A^c)\Pr(B|A^c) \end{aligned}$$

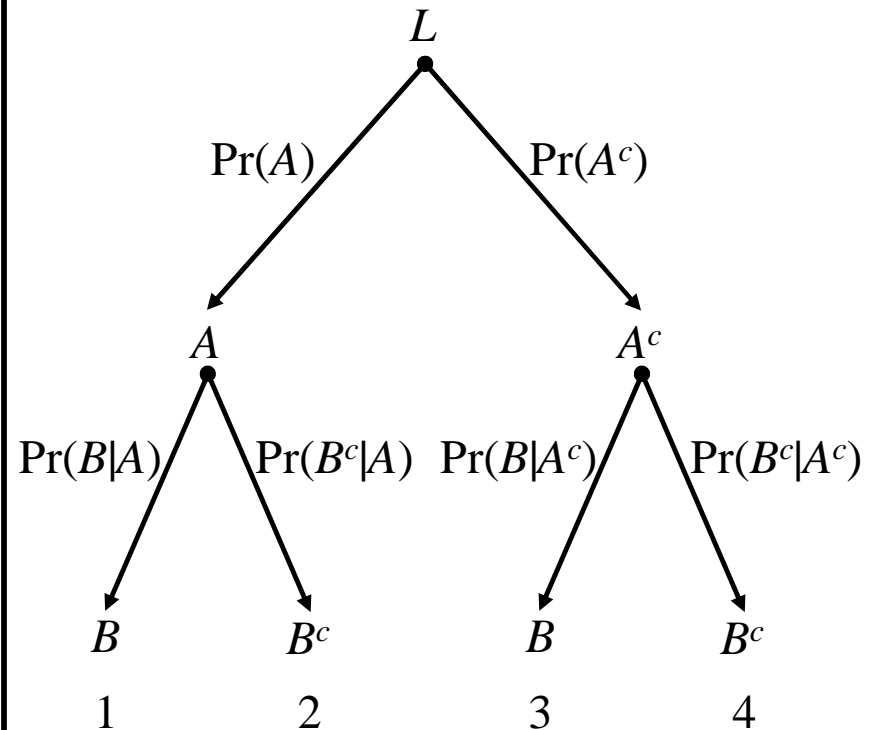


# Todennäköyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille 4/6

- Soveltamalla puutodennäköisyyksien yhteenlaskusääntöä saadaan:

$$\begin{aligned} & \Pr(A \cup B) \\ &= \Pr(\text{Reitti 2 tai Reitti 3}) \\ &= \Pr(A)\Pr(B^c|A) \\ & \quad + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c) \end{aligned}$$

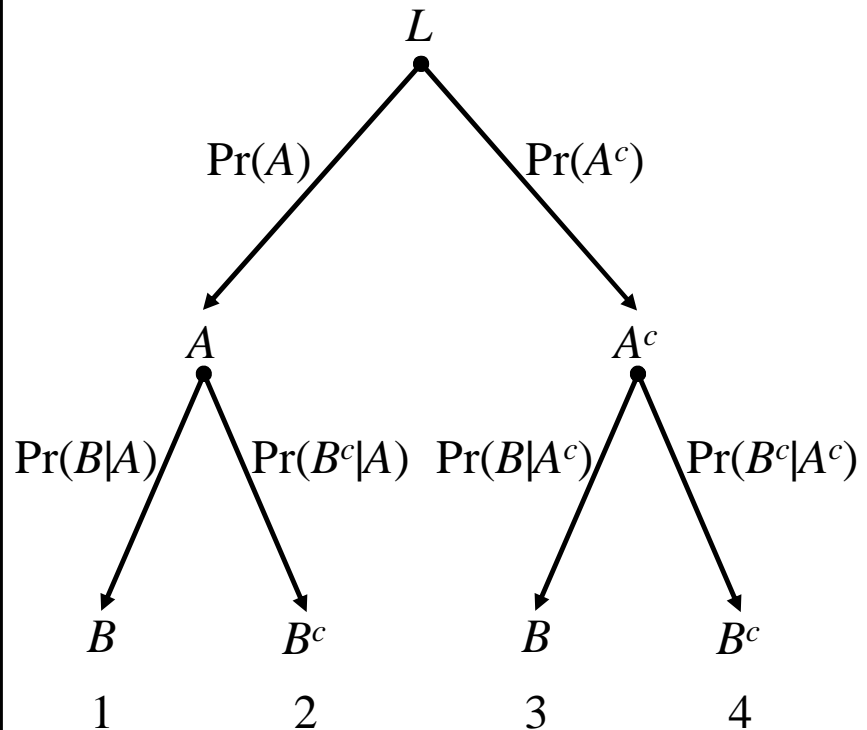


# Todennäköyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille 5/6

- Koska  $A$  ja  $B$  ovat *toisensa poissulkevia* tapahtumia, *ehdollisen todennäköisyyden* määritelmästä ja aikaisemmin esitetyistä kaavoista seuraa:

$$\begin{aligned}\Pr(A \cup B) &= \Pr(A)\Pr(B^c|A) \\ &\quad + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c) \\ &= \Pr(A \cap B^c) + \Pr(A^c \cap B) \\ &= \Pr(A) + \Pr(B)\end{aligned}$$



# Todennäköisyyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille 6/6

- Koska  $A$  ja  $B$  ovat toisensa poissulkevia,

$$\Pr(A \cap B) = 0$$

- Siten

$$\Pr(B|A)$$

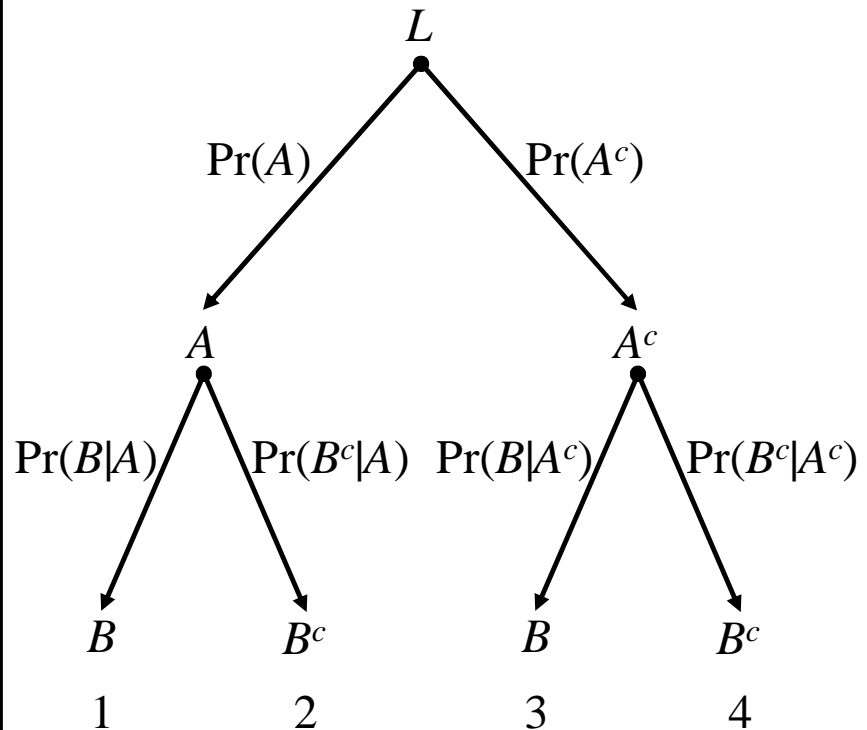
$$= \Pr(A \cap B) / \Pr(A) = 0$$

- Reitin 1 todennäköisyydeksi saadaan siis

$$\Pr(\text{Reitti 1})$$

$$= \Pr(A)\Pr(B|A) = 0$$

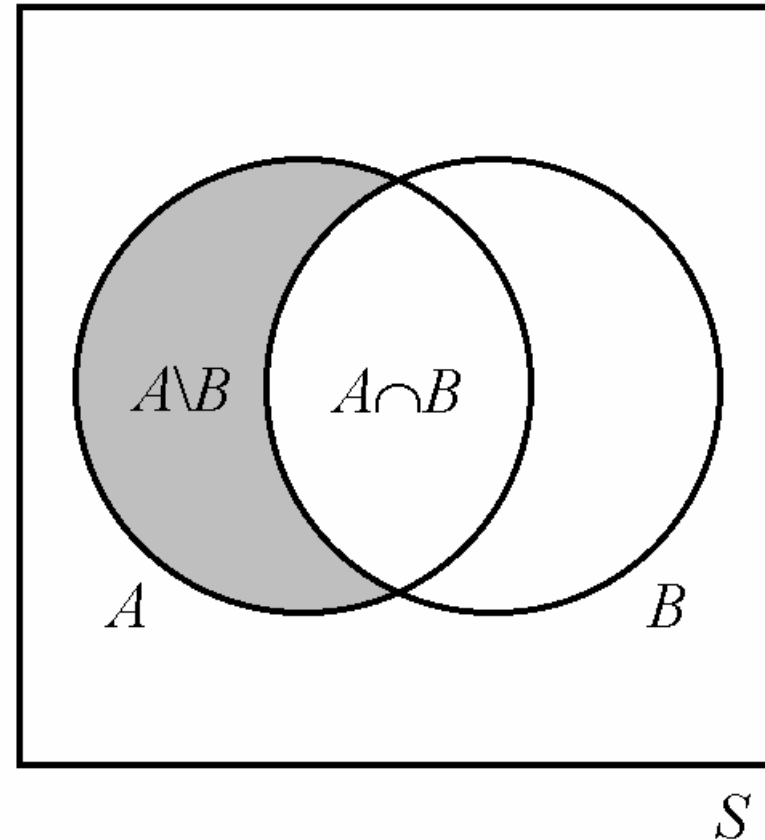
kuten pitääkin.



## Todennäköyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

# Erotustapahtuman todennäköisyys 1/4

- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  tapahtumia.
- Erotustapahtuman  $A \setminus B = A \cap B^c$  todennäköisyys on
$$\begin{aligned} \Pr(A \setminus B) &= \Pr(A \cap B^c) \\ &= \Pr(A) - \Pr(A \cap B) \end{aligned}$$
- Sääntöä voidaan havainnollistaa viereisellä Venn-diagrammilla.

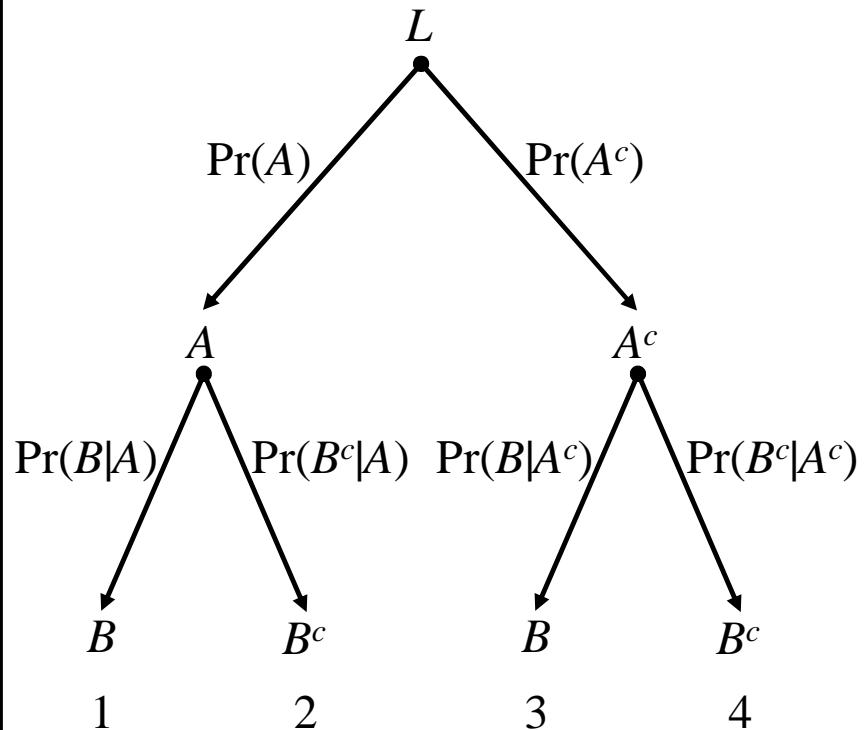




## Todennäköisyyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

### Erotustapahtuman todennäköisyys 2/4

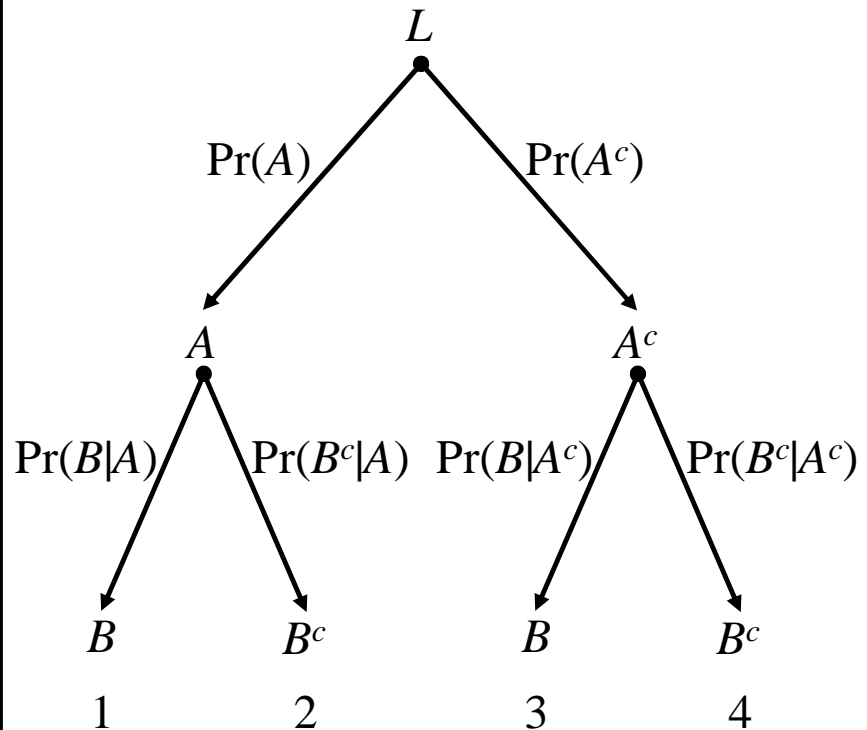
- Sääntöä voidaan havainnollistaa myös viereisellä puudiagrammilla.
- Erotustapahtumaa  $A \setminus B =$ ” $A$  sattuu, mutta  $B$  ei” vastaa reitti 2.



# Todennäköyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Erotustapahtuman todennäköisyys 3/4

- Reitin 2 todennäköisyys on *puutodennäköisyyksien tulosäännön ja ehdollisen todennäköisyyden määrittelyn* perusteella
$$\Pr(A)\Pr(B^c|A) = \Pr(A \cap B^c)$$



# Todennäköisyyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Erotustapahtuman todennäköisyys 4/4

- Koska

$$(A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A$$

$$(A \cap B^c) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

saadaan

$$\Pr(A)$$

$$= \Pr(A \cap B^c) + \Pr(A \cap B)$$

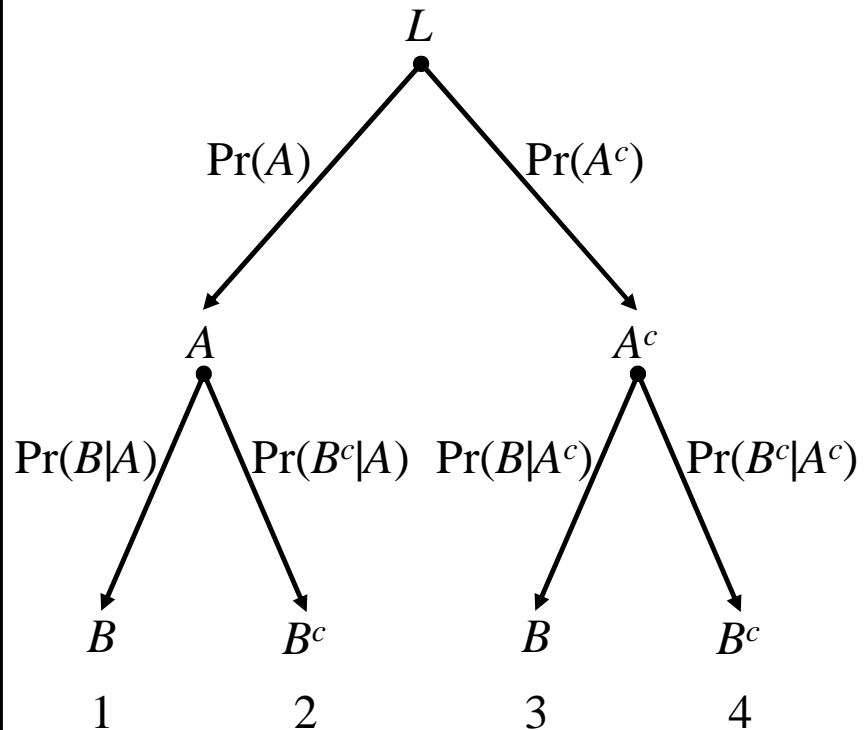
- Siten

$$\Pr(A \setminus B)$$

$$= \Pr(A \cap B^c)$$

$$= \Pr(A) \Pr(B^c | A)$$

$$= \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$$



## Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

# Kokonaistodennäköisyyden kaava 1/7

---

- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  tapahtumia.
- Olkoot lisäksi joukko  $A$  ja sen komplementti  $A^c$  *epätyhjiä*.
- *Kokonaistodennäköisyyden kaavan* mukaan:

$$\Pr(B) = \Pr(A)\Pr(B|A) + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$$

- Kaava on hyödyllinen tilanteessa, jossa todennäköisyys  $\Pr(A)$  ja ehdolliset todennäköisyydet  $\Pr(B|A)$  ja  $\Pr(B|A^c)$  *tunnetaan*.

## Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

# Kokonaistodennäköisyyden kaava 2/7

---

- Kokonaistodennäköisyyden kaavan todistus perustuu siihen, että tapahtuma  $A$  ja sen komplementtitapahtuma  $A^c$  muodostavat *otosavaruuden*  $S$  osituksen:
  - (i)  $A \neq \emptyset$  ja  $A^c \neq \emptyset$
  - (ii)  $A \cap A^c = \emptyset$
  - (iii)  $S = A \cup A^c$
- Otosavaruuden  $S$  ositus  $\{A, A^c\}$  *indusoi* osituksen  $\{B \cap A, B \cap A^c\}$  tapahtumaan  $B$ :
  - (i)  $B \cap A \neq \emptyset$  tai  $B \cap A^c \neq \emptyset$
  - (ii)  $(B \cap A) \cap (B \cap A^c) = \emptyset$
  - (iii)  $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

## Todennäköyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

# Kokonaistodennäköisyyden kaava 3/7

---

- Toisensa poissulkevien tapahtumien *yhteenlaskusäännön* mukaan:

$$\Pr(B) = \Pr(B \cap A) + \Pr(B \cap A^c) \quad (1)$$

- *Yleisen tulosäännön* mukaan:

$$\Pr(B \cap A) = \Pr(A)\Pr(B|A) \quad (2)$$

$$\Pr(B \cap A^c) = \Pr(A^c)\Pr(B|A^c) \quad (3)$$

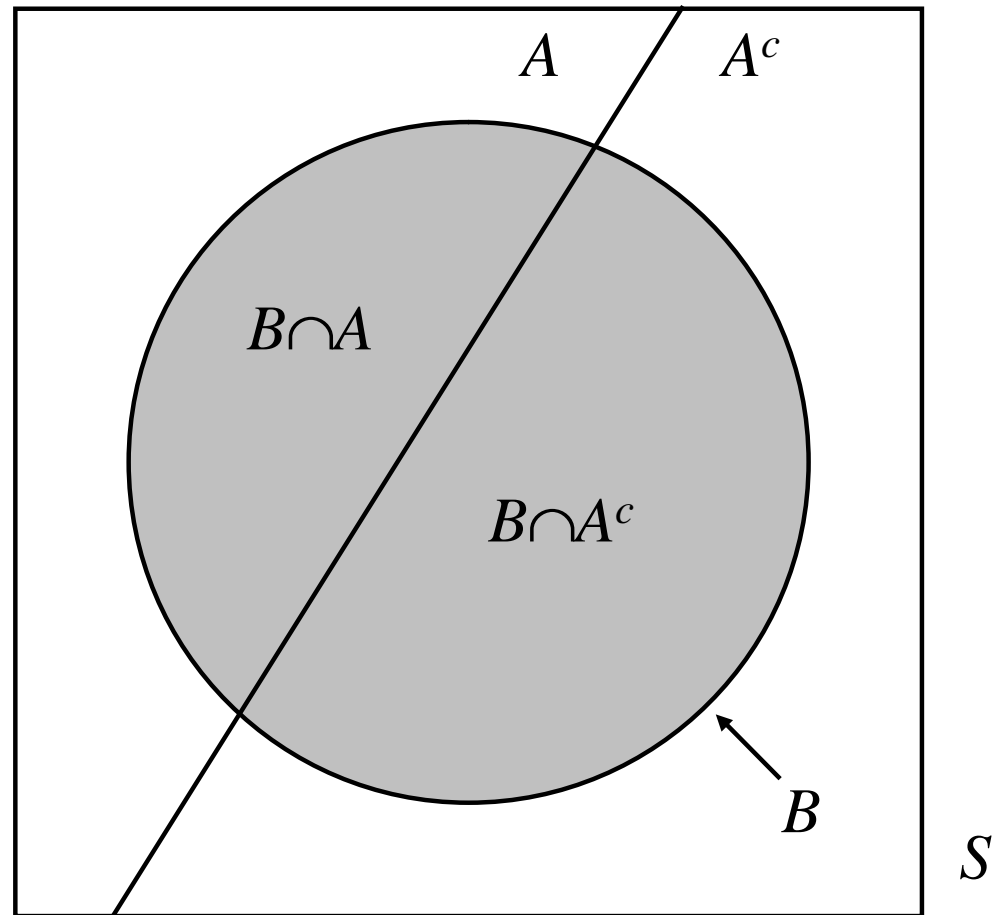
- Sijoittamalla lausekkeet (2) ja (3) kaavaan (1) saadaan *kokonaistodennäköisyyden kaava*

$$\Pr(B) = \Pr(A)\Pr(B|A) + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$$

- Kaavaa voidaan havainnollistaa seuraavan kalvon *Venn-diagrammilla*.

Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen  
**Kokonaistodennäköisyyden kaava 4/7**

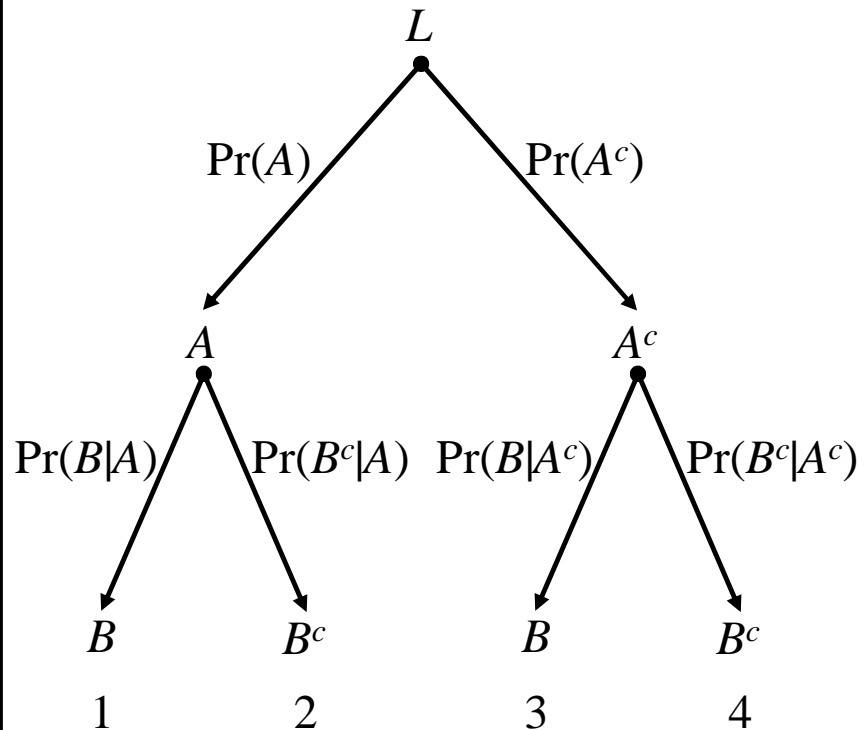
---



# Todennäköyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Kokonaistodennäköisyyden kaava 5/7

- Kokonaistodennäköisyyden kaavaa voidaan havainnollistaa myös viereisellä puudiagrammilla.
- Tapahtumaa  $B = \text{”}B \text{ sattuu”}$  vastaa reitit 1 ja 3 yhdistämällä saatava tapahtuma.





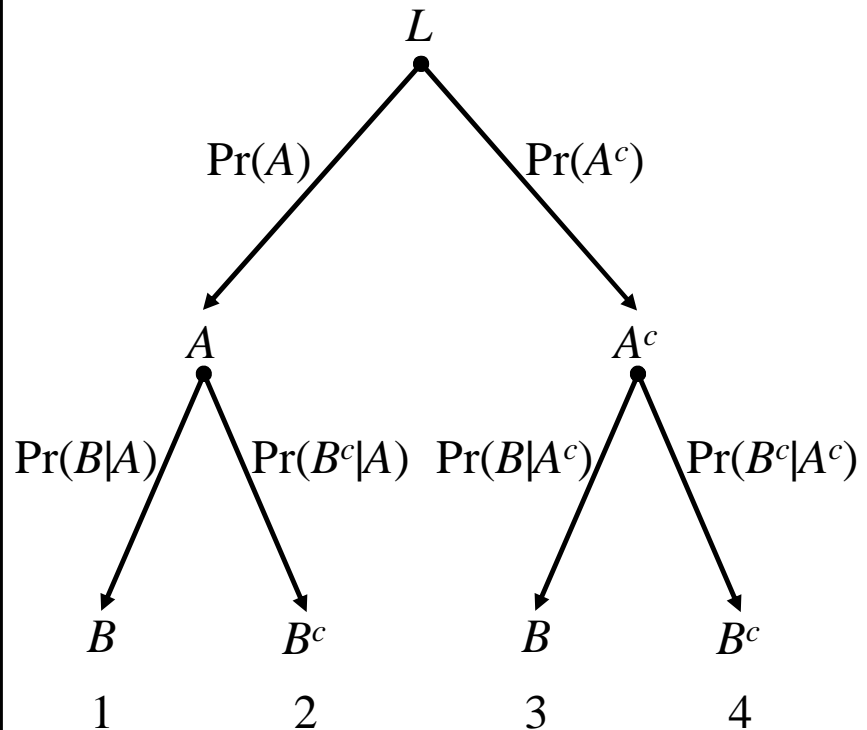
# Todennäköyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Kokonaistodennäköisyyden kaava 6/7

- Reittien 1 ja 3 todennäköisyyksiksi saadaan *puutodennäköisyyksien tulosääntöä* soveltamalla:

$$\begin{aligned} \Pr(\text{Reitti 1}) \\ &= \Pr(A)\Pr(B|A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(\text{Reitti 3}) \\ &= \Pr(A^c)\Pr(B|A^c) \end{aligned}$$



# Todennäköyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

## Kokonaistodennäköisyyden kaava 7/7

- Soveltamalla puutodennäköisyyksien yhteenlaskusääntöä saadaan:

$$\begin{aligned}\Pr(B) &= \Pr(\text{Reitti 1 tai Reitti 3}) \\ &= \Pr(A)\Pr(B|A) \\ &\quad + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)\end{aligned}$$

