Johdatus todennäköisyyslaskentaan

Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

Puutodennäköisyydet

Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit: Mitä opimme?

- **Verkkoteoria** on hyödyllinen sovelletun matematiikan osa-alue, jolla on sovelluksia esimerkiksi *logiikassa*, *operaatiotutkimuksessa*, *peli*- ja *päätösteoriassa* sekä **todennäköisyyslaskennassa**.
- Tässä liitteessä tarkastelemme miten **puumaisia verkkoja** voidaan käyttää **todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen** havainnollistamiseen.

Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit: Esitiedot

- Esitiedot: ks. seuraavia lukuja:

  Todennäköisyys ja sen määritteleminen

  Todennäköisyyden peruslaskusäännöt

  Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava

  Liite: Verkot

Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

>> Puutodennäköisyydet

Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

Puutodennäköisyydet

Avainsanat

Alkutila
Juuri
Loppupiste
Lopputila
Piste
Puu
Puudiagrammi
Puutodennäköisyys
Reitti

Särmä
Tapahtumajono
Tapahtumavaihtoehto
Tulosääntö puutodennäköisyyksille
Verkko
Verkkodiagrammi
Yhteenlaskusääntö puutodennäköisyyksille

Puudiagrammien käyttö todennäköisyyslaskennassa

- Periaatteessa jokainen *alkeistodennäköisyyslaskennan* tehtävä voidaan ratkaista käyttämällä apuna ns. **puudiagrammeja**.
- Tällöin tehtävään liittyvä *satunnaisilmiö on ensin osattava kuvata puudiagrammilla*.
- Jos tehtävän satunnaisilmiötä osataan kuvata puudiagrammilla, tehtävän ratkaisemisessa tarvittavat **puutodennäköisyydet** saadaan määrätyksi käyttämällä kahta yksinkertaista laskusääntöä, **tulosääntöä** ja **yhteenlaskusääntöä**.

Puudiagrammin konstruointi 1/2

- Satunnaisilmiötä voidaan kuvata **puudiagrammilla**, jos ilmiö osataan esittää seuraavassa muodossa:
  (i) Ilmiöllä on yksi **alkutila** ja yksi tai useampia **loppu-tiloja**.
  (ii) Ilmiö koostuu *vaihtoehtoisista* **tapahtumajonoista**.
  (iii) Tapahtumajonoissa edetään **vaiheittain** *tapahtumasta toiseen* lähtien ilmiön alkutilasta ja päätyen johonkin ilmiön lopputiloista.
  (iv) Jokaisessa **vaiheessa** kohdataan yksi tai useampia **tapahtumavaihtoehtoja**, joista yksi *realisoituu* ja johtaa *uusin* tapahtumavaihtoehtoihin.

Puudiagrammin konstruointi 2/2

- Satunnaisilmiötä vastaavan **puudiagrammin konstruointi**:

(i) Asetetaan puun **juuri** vastaamaan ilmiön *alkutilaa*.

(ii) Asetetaan puun **loppupisteet** (”oksien kärjet”) vastaamaan ilmiön *lopputiloja*.

(iii) Asetetaan puun **pisteet** (”oksien haarautumiskohdat”) vastaamaan ilmiön *tapahtumia*.

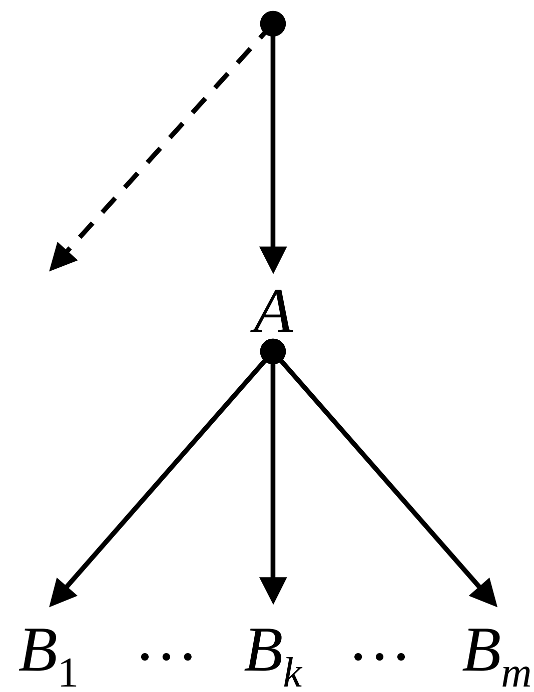
(iv) Viedään puun jokaisesta pisteestä **särmä** (”oksa”) kaikkiin sellaisiin pisteisiin, joita vastaavat *tapahtuma-vaihtoehdot* ovat ilmiön *siinä vaiheessa mahdollisia*.

(v) Liitetään jokaiseen pisteestä *lähtevään* särmään *siinä vaiheessa* mahdollisten **tapahtumavaihtoehtojen todennäköisyydet**.

Puudiagrammin konstruointi: Esimerkki 1/3

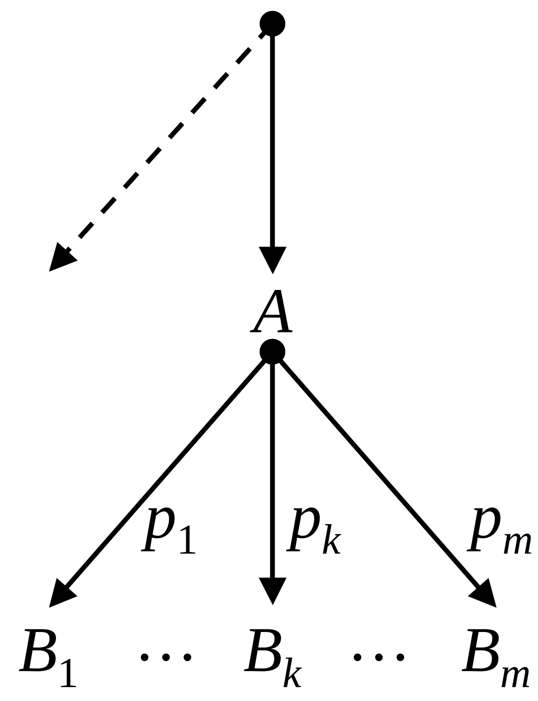
- Puudiagrammin konstruointia voidaan havainnollistaa viereisellä kaaviolla.
- Tarkastellaan satunnais-ilmiötä *vaiheessa*, jossa tapahtuma A on sattunut.
- Olkoot A:n sattumisen jälkeen *mahdolliset tapahtumavaihtoehdot*

  B_i , $i = 1, 2, \dots , m$



Puudiagrammin konstruointi: Esimerkki 2/3

- Viedään pisteestä A *särmä* jokaiseen pisteistä
  B_i , $i = 1, 2, \dots , m$
- Liitetään jokaiseen särmään
  (A, B_i) , $i = 1, 2, \dots , m$
  ehdollinen todennäköisyys
  $p_i = \Pr(B_i \mid \vec{A})$
  jossa $\vec{A}$ on tapahtumajono, joka on tuonut pisteeseen A.



Puudiagrammin konstruointi: Esimerkki 3/3

- Koska A:n sattumisen jälkeen *ei ole muita mahdollisia tapahtuma-vaihtoehtoja* kuin

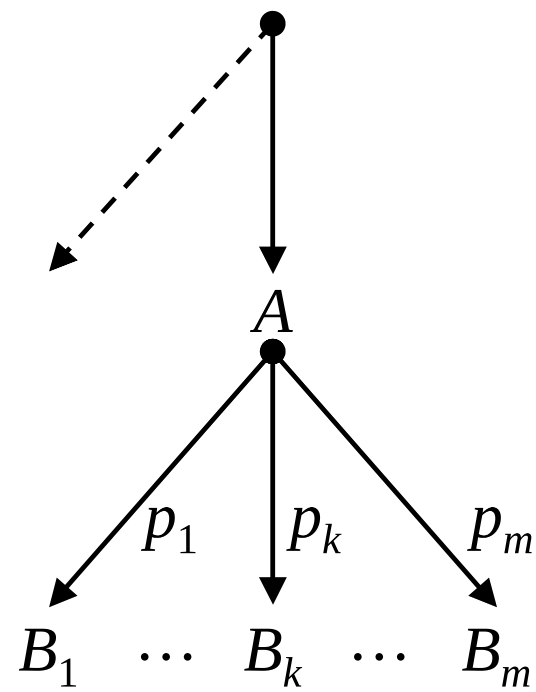
  B_i , $i = 1, 2, \ldots , m$,

  pitää todennäköisyyksien

  p_i , $i = 1, 2, \ldots , m$

  toteuttaa ehto

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m} \Pr(B_i \mid \vec{A}) = 1$$



Puudiagrammin konstruointi: Kommentteja

- Puudiagrammi *piirretään* tavallisesti *joko* niin, että sen alkupiste on ylhäällä ja loppupisteet ovat alhaalla *tai* niin, että sen alkupiste on vasemmalla ja loppupisteet ovat oikealla.
- Useat puun pisteet voivat vastata *samaa* tapahtumaa.
- Mistä tahansa puun pisteestä *lähtevien särmien* todennäköisyyksien summa on 1.

Puutodennäköisyydet

- **Puutodennäköisyydellä** tarkoitetaan todennäköisyyttä päästä *puun alkupisteestä yhden tai useamman muun puun pisteen määräämään yhdistettyyn tapahtumaan*.
- *Pisteen todennäköisyys* saadaan määräämällä alkupisteestä ko. pisteeseen vievän *reitin todennäköisyys*.
- *Reitin todennäköisyys* saadaan soveltamalla reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksiin **tulosääntöä**.
- *Usean pisteen määräämän yhdistetyn tapahtuman todennäköisyys* saadaan soveltamalla ko. pisteisiin vievien reittien todennäköisyyksiin **yhteenlaskusääntöä**.

Puutodennäköisyydet: Tulosääntö 1/4

- *Reitin todennäköisyys* saadaan määräämällä reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksien *tulo*.
- Sääntöä kutsutaan **puutodennäköisyyksien tulosäännöksi**.
- Tulosäännön perustelu:
  (1) Reitti on *tapahtumajono*, jonka muodostavat reitin pisteet.
  (2) Reitin muodostava tapahtumajono sattuu, jos *jokainen jonon tapahtumista sattuu*.
  (3) Todennäköisyyslaskennan *yleisen tulosäännön mukaan* reitin todennäköisyys saadaan määräämällä reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksien *tulo*.

Puutodennäköisyydet: Tulosääntö 2/4

- Olkoon

$$L, A_1 , A_2 , A_3 , \ldots , A_k$$

yksi niistä vaihtoehtoisista *tapahtumajonoista*, joista satunnaisilmiö muodostuu.

- Tällöin parit

$$(L , A_1), (A_1 , A_2), (A_2 , A_3), \ldots , (A_{k-1} , A_k)$$

muodostavat satunnaisilmiön *alkutilasta* L satunnaisilmiön (*loppu*-) *tilaan* A_k *vievän reitin särmät*.

Puutodennäköisyydet: Tulosääntö 3/4

- Liitetään reitin

$$(L\ , A_1), (A_1\ , A_2), (A_2\ , A_3),\ \ldots\ , (A_{k-1}\ , A_k)$$

särmiin *todennäköisyydet* seuraavalla tavalla:

$$(L\ , A_1) \quad \rightarrow \Pr(A_1) = p_1$$

$$(A_1\ , A_2) \quad \rightarrow \Pr(A_2 | A_1) = p_2$$

$$(A_2\ , A_3) \quad \rightarrow \Pr(A_3 | A_1 \cap A_2) = p_3$$

$$\ldots$$

$$(A_{k-1}\ , A_k) \quad \rightarrow \Pr(A_k | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k-1}) = p_k$$

Puutodennäköisyydet: Tulosääntö 4/4

- Reitin

$$(L\ , A_1), (A_1\ , A_2), (A_2\ , A_3), \ldots , (A_{k-1}\ , A_k)$$

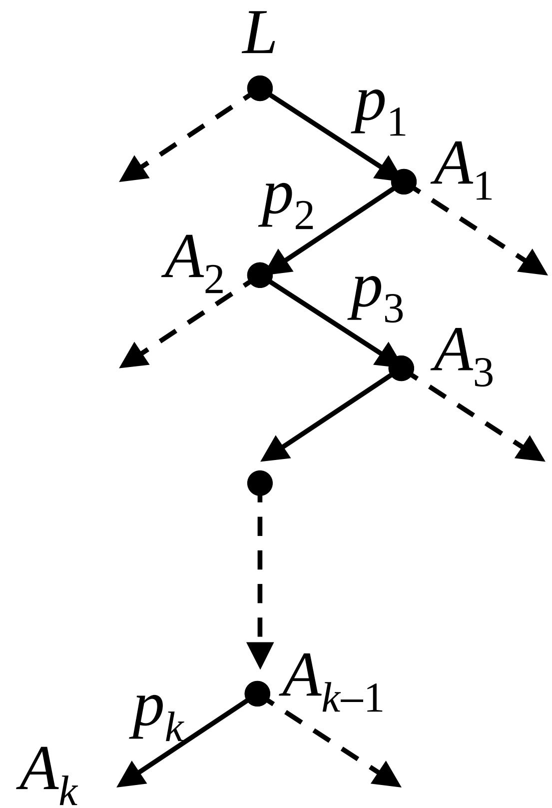
todennäköisyys on **yleisen tulosäännön** nojalla:

$$\begin{aligned}
&\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k) \\
&\quad = \Pr(A_1) \times \Pr(A_2 | A_1) \times \Pr(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \\
&\qquad \cdots \times \Pr(A_k | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \\
&\quad = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_k
\end{aligned}$$

Puutodennäköisyydet: Tulosäännön havainnollistus

- *Puutodennäköisyyksien tulosääntöä* voidaan havainnollistaa viereisellä *puudiagrammilla*.
- Reitin k todennäköisyys on puutodennäköisyyksien tulosäännön mukaan

  $$\Pr(\text{Reitti } k) = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k$$



Reitti k

Puutodennäköisyydet: Yhteenlaskusääntö 1/2

- Jos useita (loppu-) tiloja yhdistetään yhdeksi tapahtumaksi, näin saadun *yhdistetyn tapahtuman* todennäköisyys saadaan määräämällä ko. tiloihin vievien reittien todennäköisyyksien *summa*.
- Sääntöä kutsutaan **puutodennäköisyyksien yhteenlaskusäännöksi**.
- Yhteenlaskusäännön perustelu:
  (1) Puun eri pisteisiin vievät reitit ovat *toisensa poissulkevia*.
  (2) *Toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan* useista (loppu-) pisteistä yhdistämällä saatavan tapahtuman todennäköisyys saadaan määräämällä ko. pisteisiin vievien reittien todennäköisyyksien *summa*.

Puutodennäköisyydet: Yhteenlaskusääntö 2/2

- Yhdistetään satunnaisilmiön (*loppu*-) *tilat* B_1 , B_2 , … , B_k *yhdeksi tapahtumaksi*

$$C = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$$

- Olkoot *tiloja* B_1 , B_2 , … , B_k vastaavat *reitit*

Reitti 1, Reitti 2, … , Reitti k

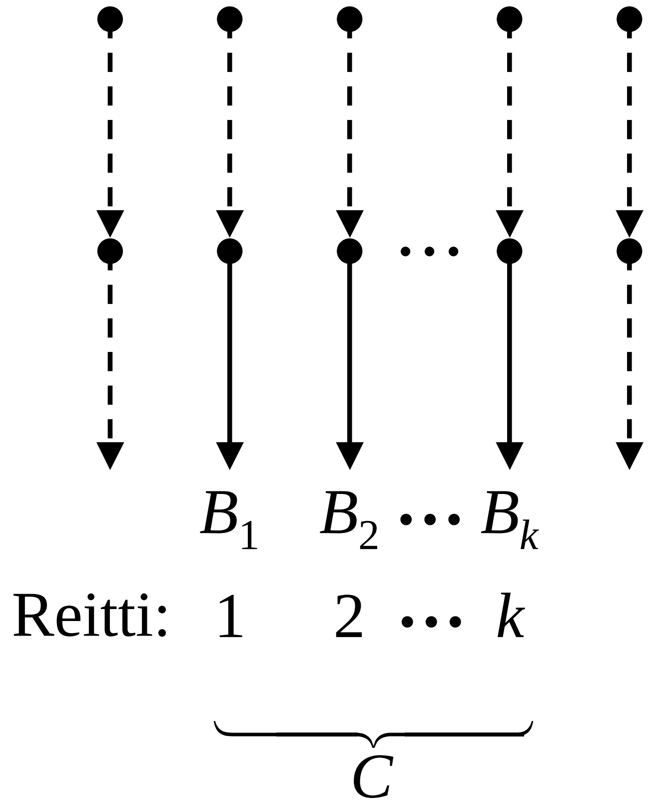
- Koska puun eri pisteisiin vievät reitit ovat *toisensa poissulkevia*, tapahtuman C todennäköisyys on **toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön** nojalla:

$$\begin{aligned}\Pr(C) &= \Pr(\text{Reitti 1 } \textit{tai} \text{ Reitti 2 } \textit{tai} \ldots \textit{tai} \text{ Reitti } k) \\ &= \Pr(\text{Reitti 1}) + \Pr(\text{Reitti 2}) + \cdots + \Pr(\text{Reitti } k)\end{aligned}$$

Puutodennäköisyydet: Yhteenlaskusäännön havainnollistus

- *Puutodennäköisyyksien yhteenlaskusääntöä* voidaan havainnollistaa viereisellä *puu-diagrammilla*:

$$\begin{aligned}\Pr(C) = {} & \Pr(\text{Reitti } 1) \\ & + \Pr(\text{Reitti } 2) \\ & \cdots \\ & + \Pr(\text{Reitti } k)\end{aligned}$$



Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

Puutodennäköisyydet

>> Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen

Avainsanat

Puudiagrammi

Puutodennäköisyyksien tulosääntö

Puutodennäköisyyksien yhteenlaskusääntö

Todennäköisyyslaskennan laskusäännöt:

- **erotustapahtuman todennäköisyys**
- **kokonaistodennäköisyyden kaava**
- **komplementtitapahtuman todennäköisyys**
- **tulosääntö riippumattomille tapahtumille**
- **yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille**
- **yleinen tulosääntö**
- **yleinen yhteenlaskusääntö**

Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen puudiagrammilla

- Tarkastellaan seuraavien *todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistamista* **puudiagrammilla**:
  - (i) **Komplementtitapahtuman** todennäköisyys.
  - (ii) **Yleinen tulosääntö** ja **tulosääntö riippumattomille tapahtumille**.
  - (iii) **Yleinen yhteenlaskusääntö** ja **yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille**.
  - (iv) **Erotustapahtuman todennäköisyys**.
  - (v) **Kokonaistodennäköisyyden kaava**.
- Puun *juurta* eli *alkupistettä* on merkitty diagrammeissa kirjaimella *L* (*L* ~ satunnaisilmiön *<u>l</u>ähtötila*).

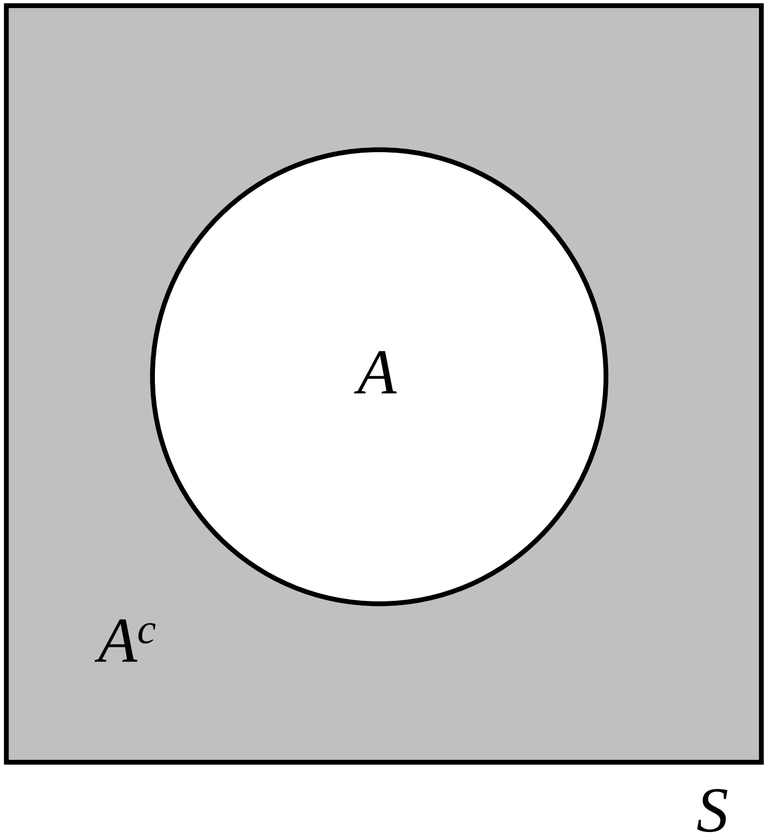
Komplementtitapahtuman todennäköisyys 1/2

- Olkoon $A \subset S$ jokin otos-avaruuden S tapahtuma.
- Olkoon tapahtuman A *komplementtitapahtuma*

  A^c = ”A *ei* satu”
- Tällöin

  $A \cup A^c = S$, $A \cap A^c = \emptyset$

  $\Pr(A) + \Pr(A^c) = \Pr(S) = 1$
- Sääntöä voidaan havain-nollistaa viereisellä *Venn-diagrammilla*.



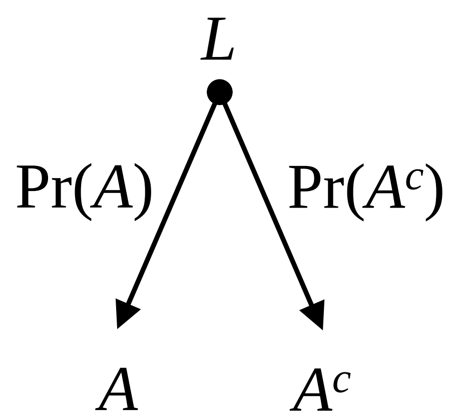
Komplementtitapahtuman todennäköisyys 2/2

- Sääntöä voidaan havainnollistaa myös viereisellä *puudiagrammilla*.
- Yhdistetyn tapahtuman

  $A \cup A^c = S$

  todennäköisyys on *puutodennäköisyyksien yhteenlaskusäännön* nojalla

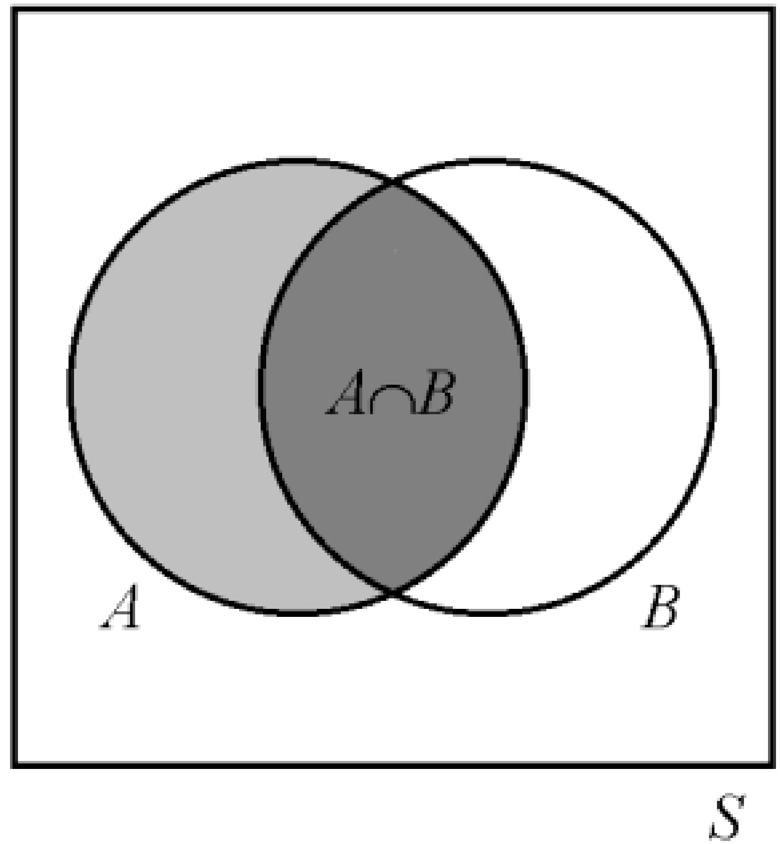
  $\Pr(S) = \Pr(A) + \Pr(A^c) = 1$



Yleinen tulosääntö 1/2

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otosavaruuden S tapahtumia.
- *Yleisen tulosäännön* mukaan

  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B|A)$
- Sääntöä voidaan havainnollistaa viereisellä *Venn-diagrammilla*.



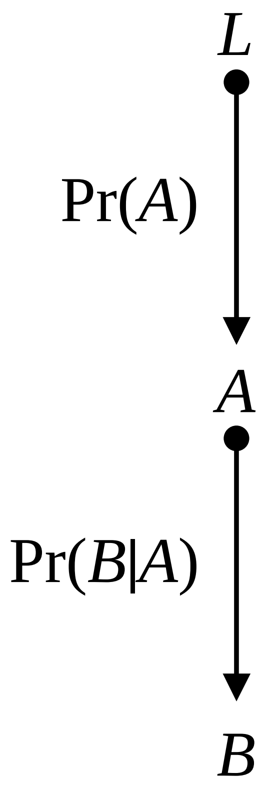
Yleinen tulosääntö 2/2

- Sääntöä voidaan havainnollistaa myös viereisellä *puudiagrammilla*.
- Yhdistetyn tapahtuman

  $A \cap B$ = ”*A ja B* sattuu”

  todennäköisyys on *puutodennäköisyyksien tulosäännön* nojalla

  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B|A)$



Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistaminen
Tulosääntö riippumattomille tapahtumille

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otosavaruuden S *riippumattomia* tapahtumia.
- Koska tällöin

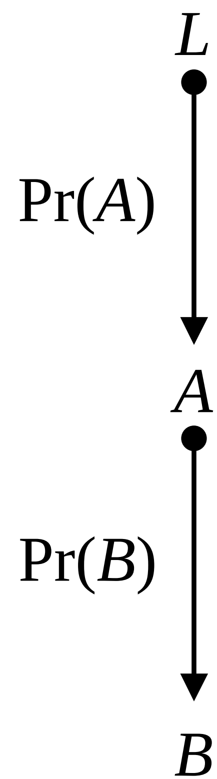
  $\Pr(B|A) = \Pr(B)$

  yhdistetyn tapahtuman

  $A \cap B$ = ”*A ja B* sattuu”

  todennäköisyys on *puutodennäköisyyksien tulosäännön* nojalla

  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$

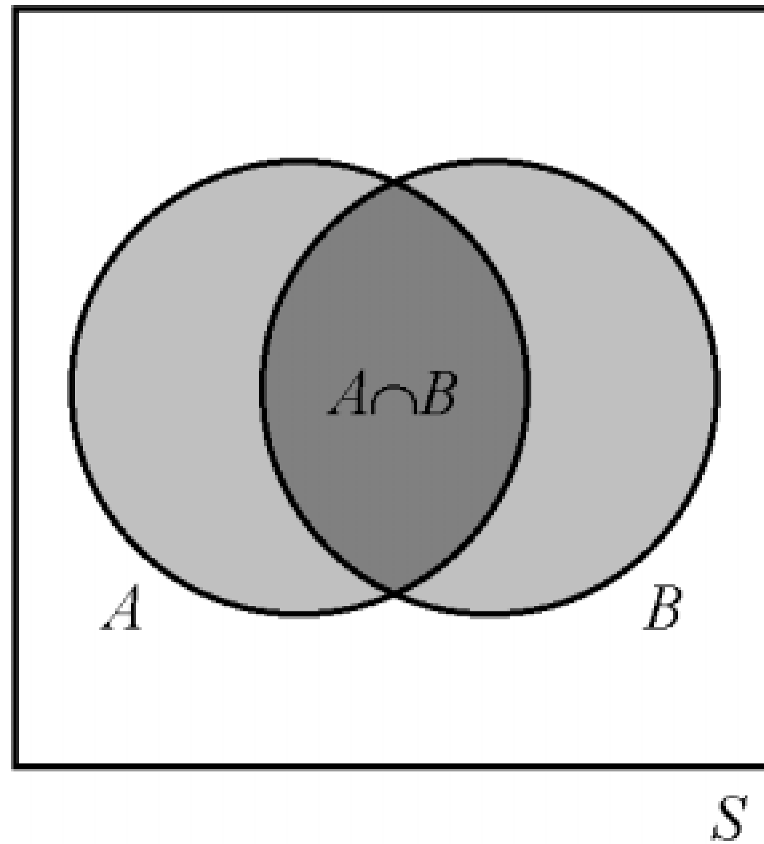


Yleinen yhteenlaskusääntö 1/8

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otos-avaruuden S tapahtumia.
- *Yleisen yhteenlasku-säännön* mukaan

  $\Pr(A \cup B)$

  $= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$
- Sääntöä voidaan havain-nollistaa viereisellä *Venn-diagrammilla*.



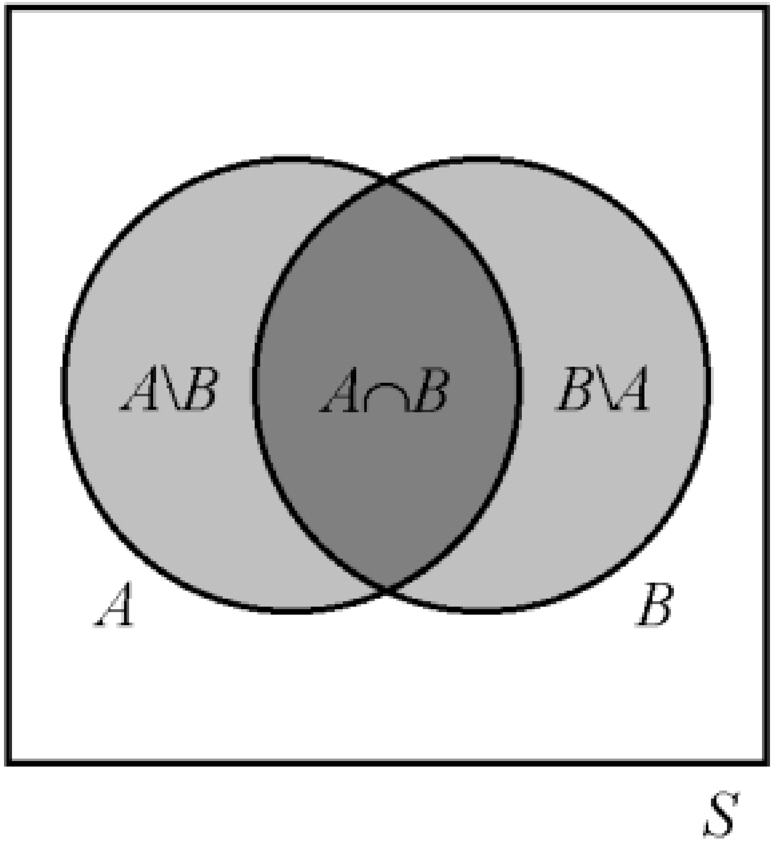
Yleinen yhteenlaskusääntö 2/8

- Yleisen yhteenlaskusäännön todistus voidaan perustaa siihen, että joukot

  $A \cap B$
  $A \setminus B = A \cap B^c$
  $B \setminus A = B \cap A^c$

  muodostavat joukon $A \cup B$ *osituksen*, sekä yhtälöihin

  $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$
  $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \varnothing$
  $(B \setminus A) \cup (A \cap B) = B$
  $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \varnothing$

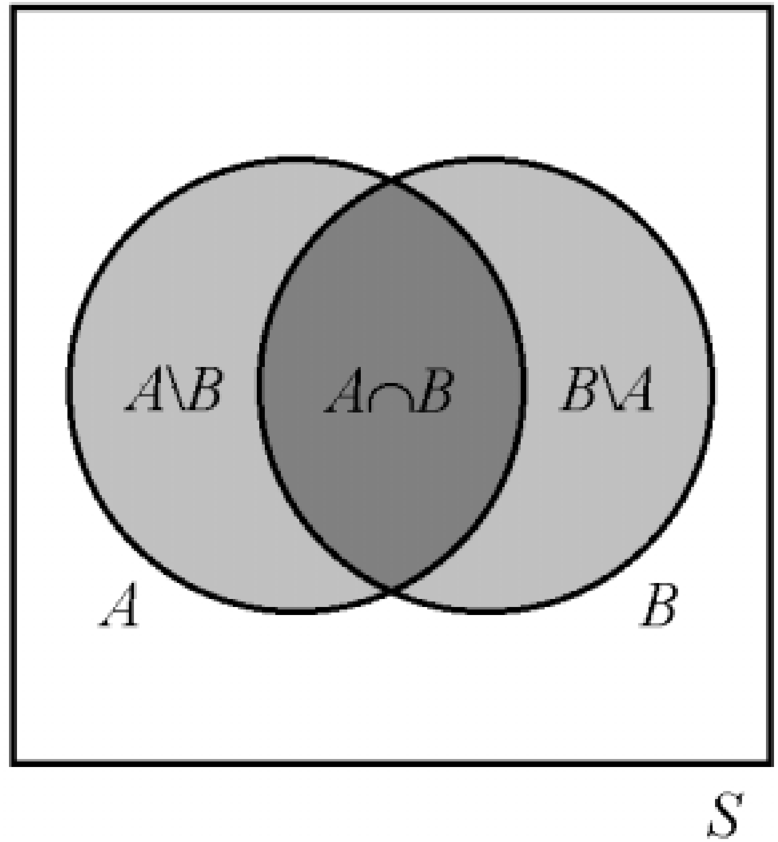


Yleinen yhteenlaskusääntö 3/8

- *Toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön* nojalla

  $\Pr(A) = \Pr(A\backslash B) + \Pr(A\cap B)$

  $\Pr(B) = \Pr(B\backslash A) + \Pr(A\cap B)$



Yleinen yhteenlaskusääntö 4/8

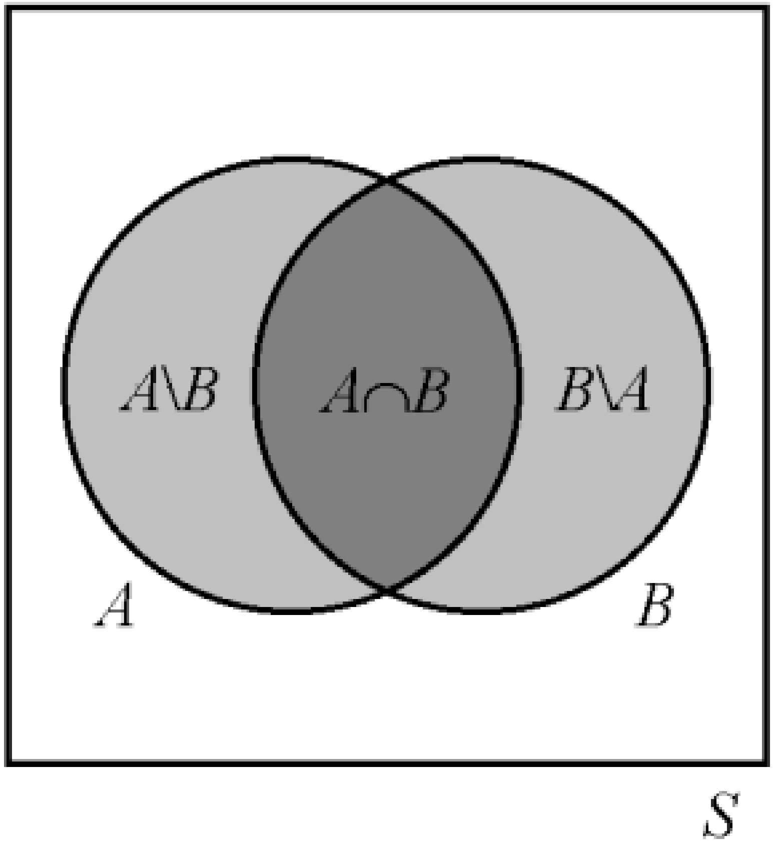
- Edellisen kalvon yhtälöiden ja *toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön* nojalla

$\Pr(A \cup B)$

$= \Pr(A \setminus B) + \Pr(B \setminus A)$
$\quad + \Pr(A \cap B)$

$= \Pr(A \setminus B) + \Pr(A \cap B)$
$\quad + \Pr(B \setminus A) + \Pr(A \cap B)$
$\quad - \Pr(A \cap B)$

$= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$

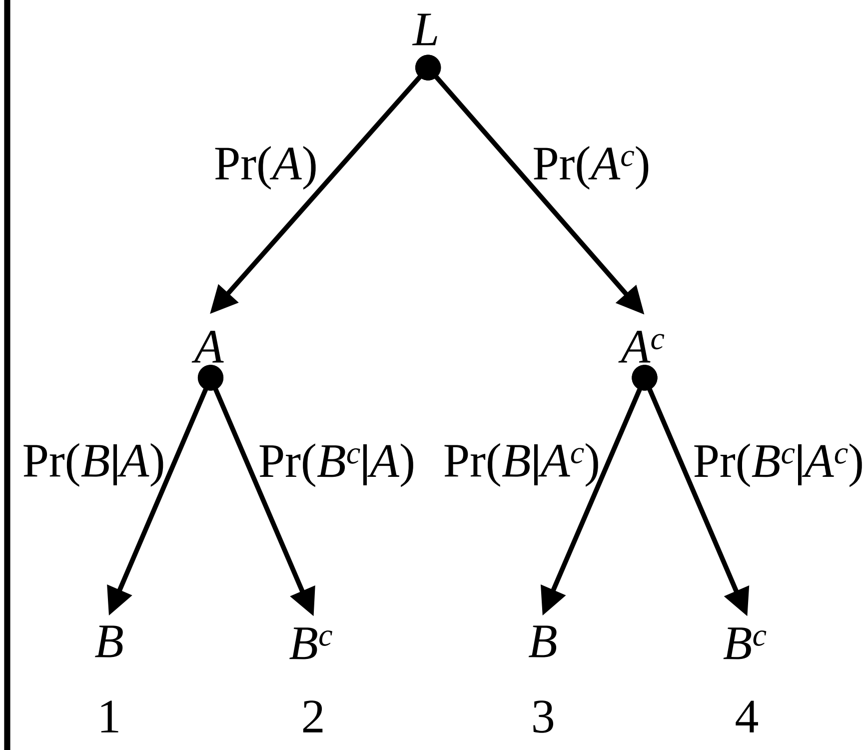


Yleinen yhteenlaskusääntö 5/8

- Yleistä yhteenlaskusääntöä voidaan havainnollistaa myös viereisellä *puu-diagrammilla*.
- Yhdistettyä tapahtumaa

  $A \cup B$ = ”*A tai B* sattuu”

  vastaa reitit 1, 2 ja 3 yhdistämällä saatava tapahtuma, koska niissä *A* sattuu *tai B* sattuu *tai molemmat* sattuvat.



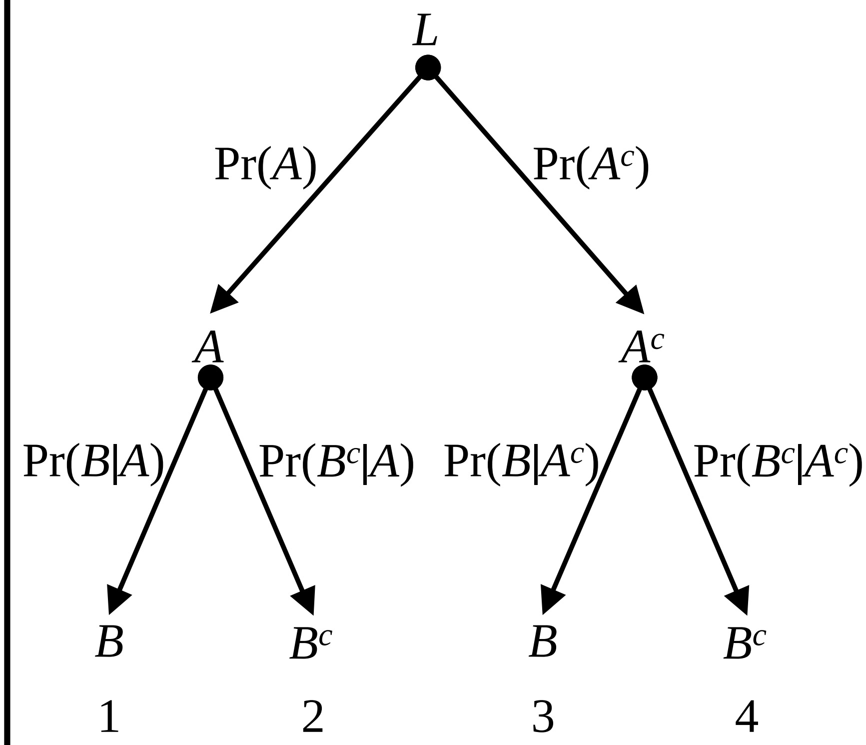
Yleinen yhteenlaskusääntö 6/8

- Reittien 1, 2 ja 3 todennäköisyyksiksi saadaan *puutodennäköisyyksien tulosääntöä* soveltamalla:

  Pr(Reitti 1)
  $= \Pr(A)\Pr(B|A)$

  Pr(Reitti 2)
  $= \Pr(A)\Pr(B^c|A)$

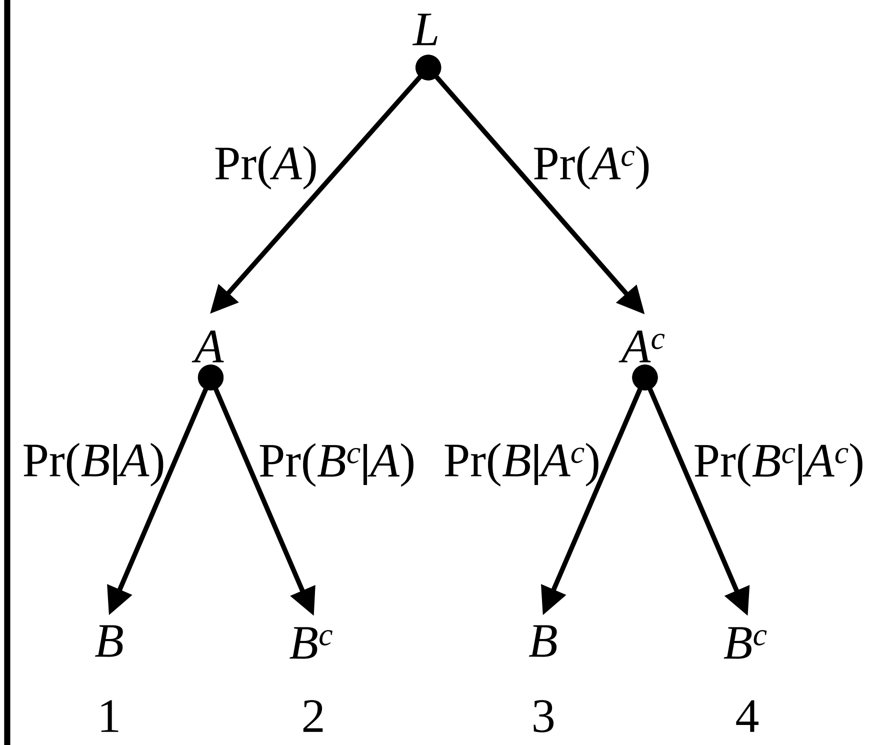
  Pr(Reitti 3)
  $= \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$



Yleinen yhteenlaskusääntö 7/8

- Soveltamalla *puutodennäköisyyksien yhteenlaskusääntöä* saadaan:

$$\Pr(A \cup B)$$
$$= \Pr(\text{Reitti 1 } \textit{tai} \text{ Reitti 2 } \textit{tai} \text{ Reitti 3})$$
$$= \Pr(A)\Pr(B|A) + \Pr(A)\Pr(B^c|A) + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$$



Yleinen yhteenlaskusääntö 8/8

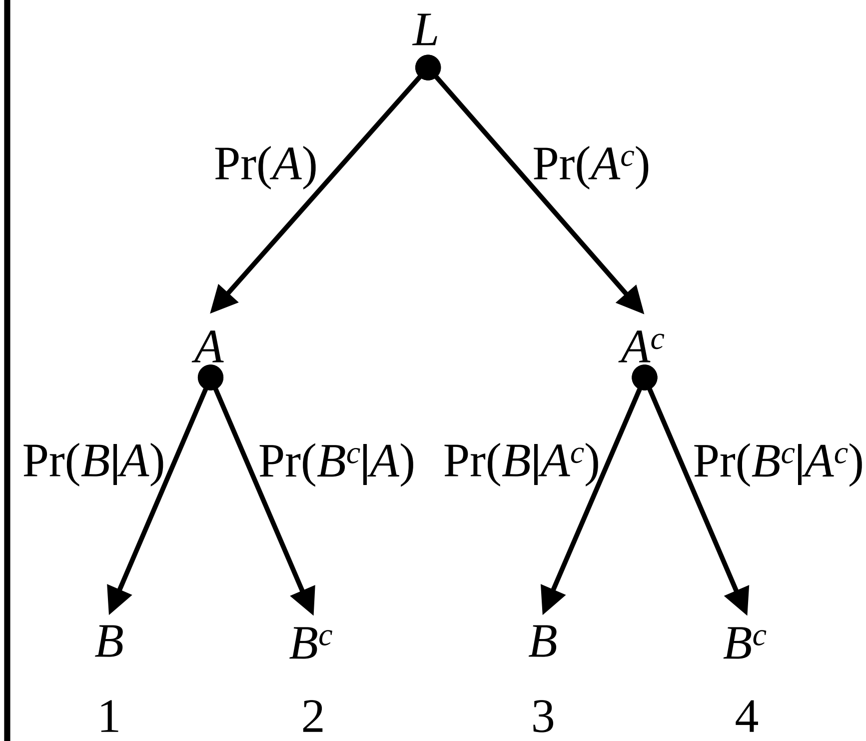
- *Ehdollisen todennäköisyyden* määritelmästä ja kalvon 3/8 kaavoista seuraa:

$$\Pr(A \cup B)$$

$$= \Pr(A)\Pr(B|A) + \Pr(A)\Pr(B^c|A) + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$$

$$= \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap B^c) + \Pr(A^c \cap B)$$

$$= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

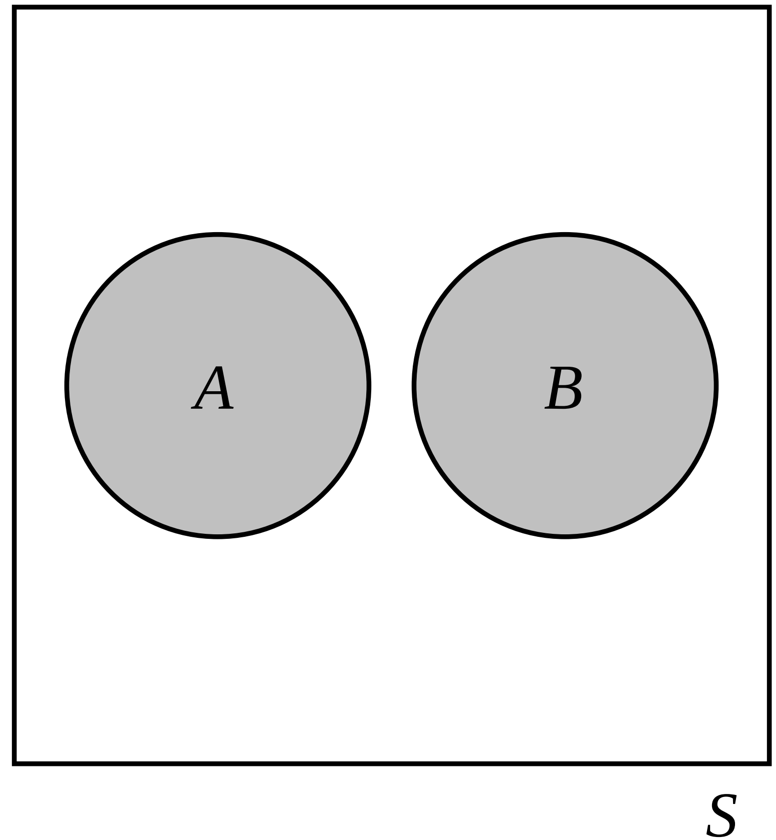


Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille 1/6

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otosavaruuden S *toisensa poissulkevia* tapahtumia.
- Tällöin

  $A \cap B = \varnothing$ ja $\Pr(A \cap B) = 0$
- Siten

  $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$
- Sääntöä voidaan havainnollistaa viereisellä *Venn-diagrammilla*.

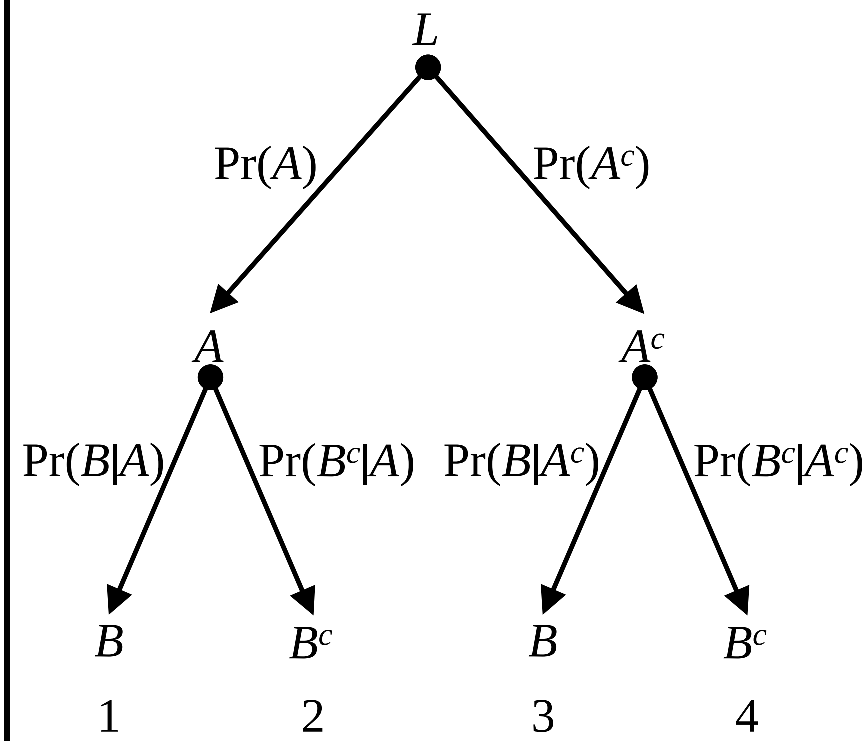


Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille 2/6

- Toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusääntöä voidaan havainnollistaa myös viereisellä *puudiagrammilla*.
- Yhdistettyä tapahtumaa

  $A \cup B$ = "*A tai B* sattuu"

  vastaa reitit 2 ja 3 yhdistämällä saatava tapahtuma, koska niissä *A* sattuu *tai B* sattuu, *mutta eivät molemmat*.

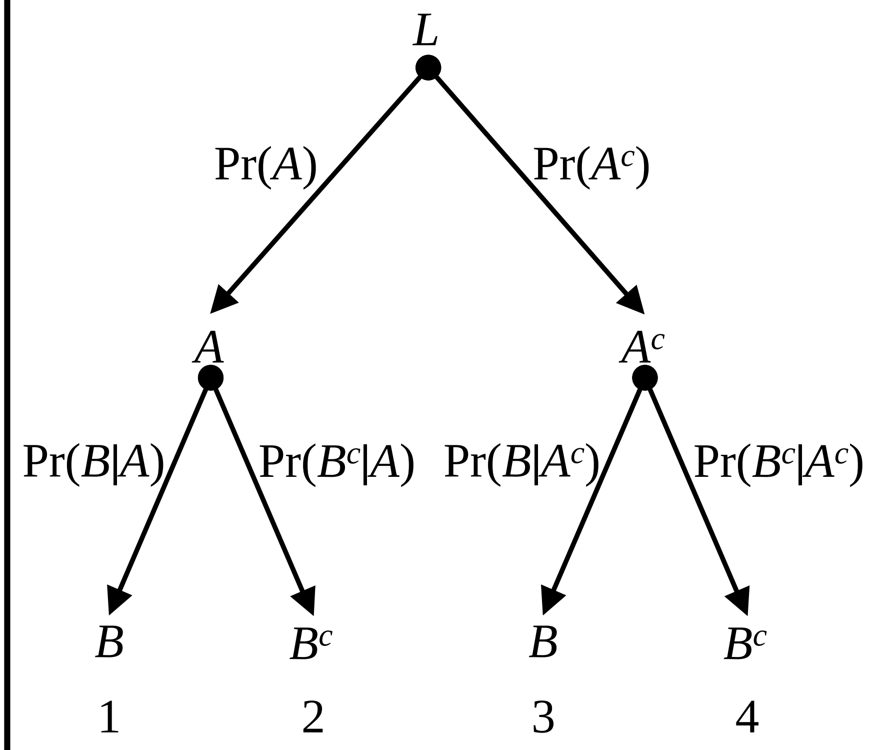


Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille 3/6

- Reittien 2 ja 3 todennäköisyyksiksi saadaan *puutodennäköisyyksien tulosääntöä* soveltamalla:

  Pr(Reitti 2)
  $= \Pr(A)\Pr(B^c|A)$

  Pr(Reitti 3)
  $= \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$



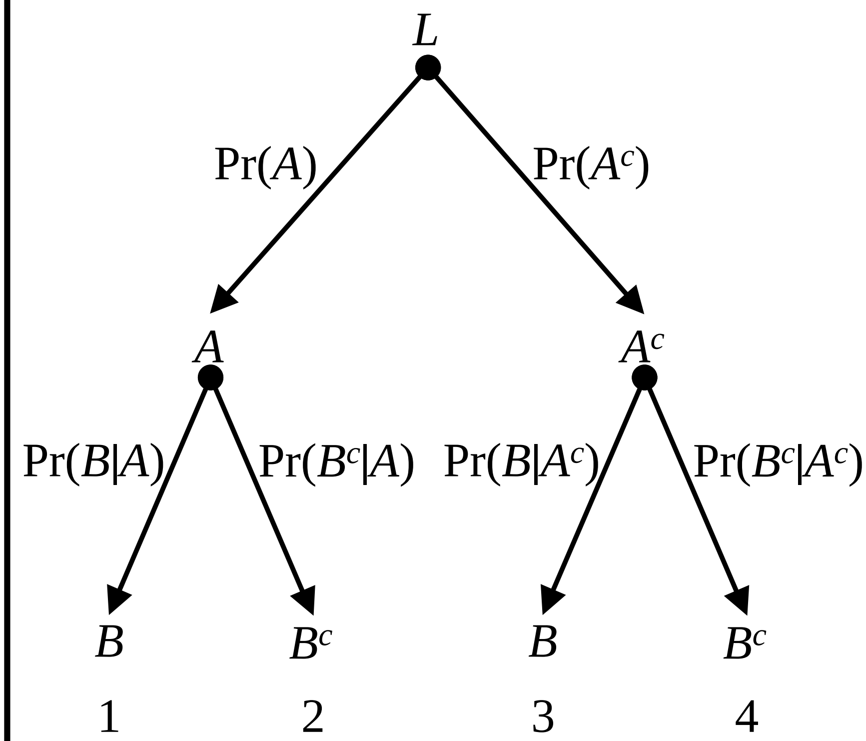
Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille 4/6

- Soveltamalla *puutodennäköisyyksien yhteenlaskusääntöä* saadaan:

  $\Pr(A \cup B)$

  $= \Pr(\text{Reitti 2 } \textit{tai} \text{ Reitti 3})$

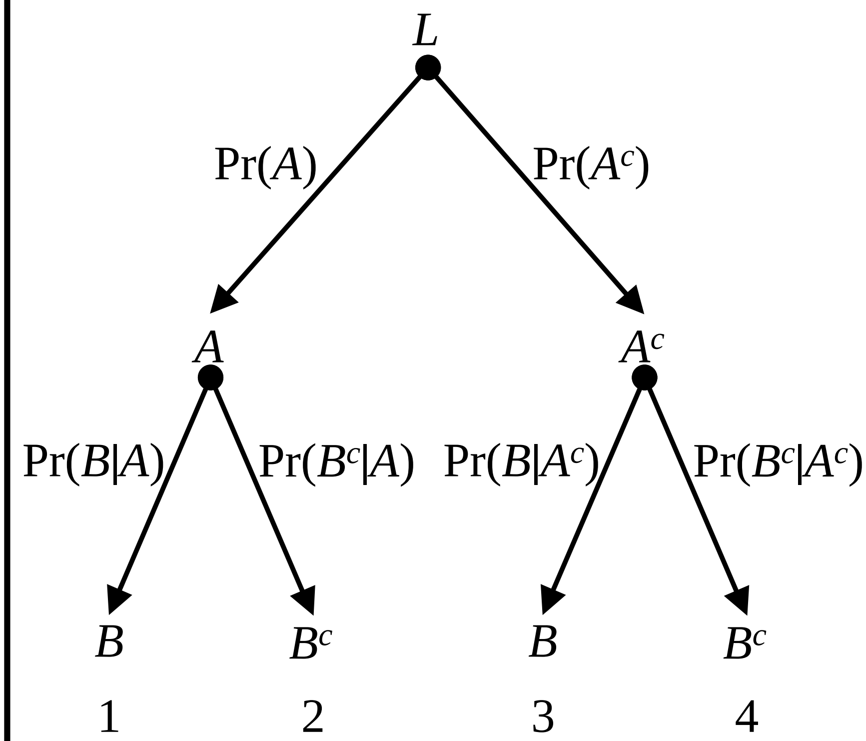
  $= \Pr(A)\Pr(B^c|A) + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$



Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille 5/6

- Koska A ja B ovat *toisensa poissulkevia* tapahtumia, *ehdollisen todennäköisyyden* määritelmästä ja aikaisemmin esitetyistä kaavoista seuraa:

$$\begin{aligned}
&\Pr(A\cup B)\\
&= \Pr(A)\Pr(B^c|A) \\
&\qquad + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)\\
&= \Pr(A\cap B^c) + \Pr(A^c\cap B)\\
&= \Pr(A) + \Pr(B)
\end{aligned}$$



Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille 6/6

- Koska A ja B ovat toisensa poissulkevia,

  $\Pr(A \cap B) = 0$

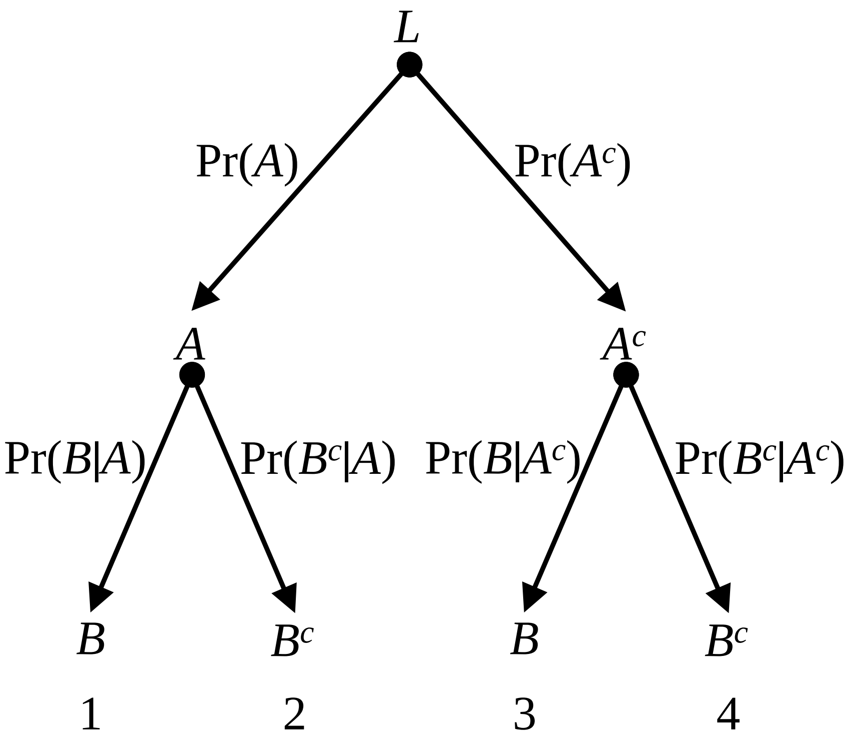
- Siten

  $\Pr(B|A)$
  $= \Pr(A \cap B)/\Pr(A) = 0$

- Reitin 1 todennäköisyydeksi saadaan siis

  $\Pr(\text{Reitti } 1)$
  $= \Pr(A)\Pr(B|A) = 0$

  kuten pitääkin.



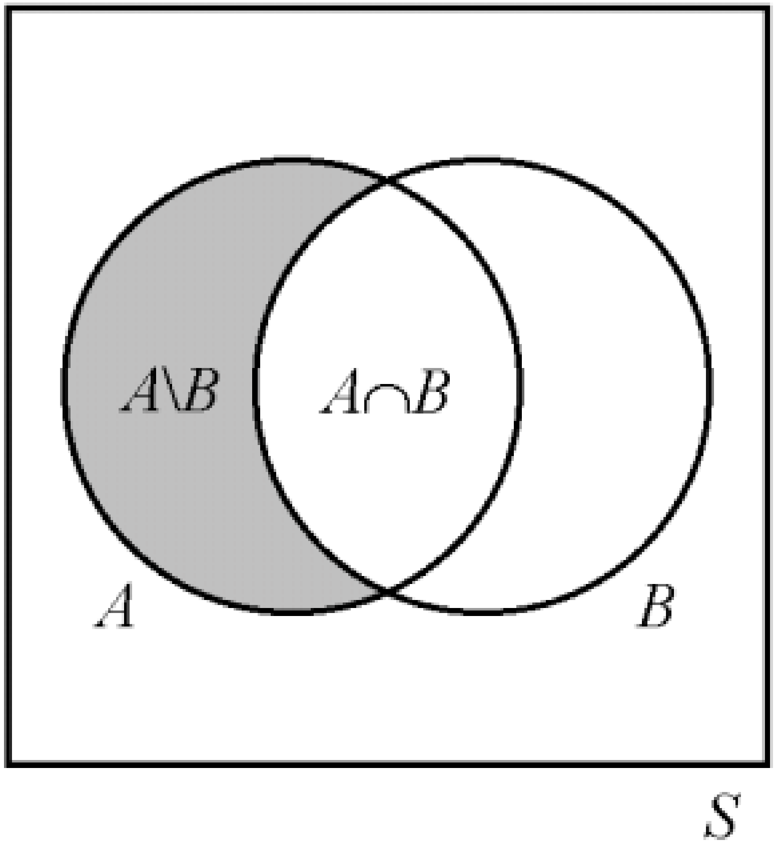
Erotustapahtuman todennäköisyys 1/4

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otos-avaruuden S tapahtumia.
- Erotustapahtuman

  $A \setminus B = A \cap B^c$

  todennäköisyys on

  $\Pr(A \setminus B)$
  $= \Pr(A \cap B^c)$
  $= \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$
- Sääntöä voidaan havain-nollistaa viereisellä *Venn-diagrammilla*.

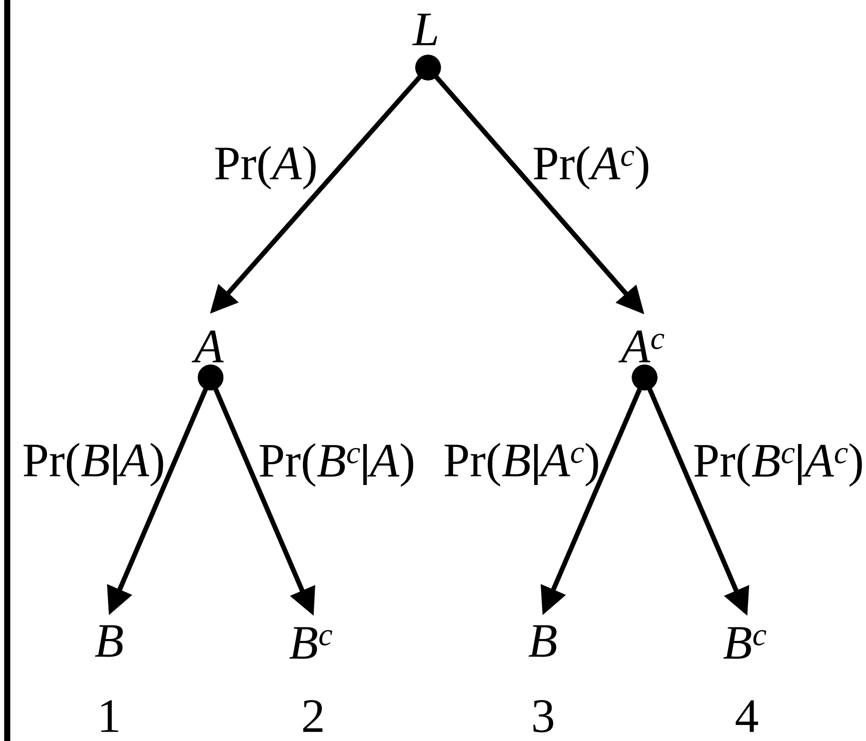


Erotustapahtuman todennäköisyys 2/4

- Sääntöä voidaan havainnollistaa myös viereisellä *puudiagrammilla*.
- Erotustapahtumaa

  $A \backslash B$ = ”A sattuu, *mutta B ei*”

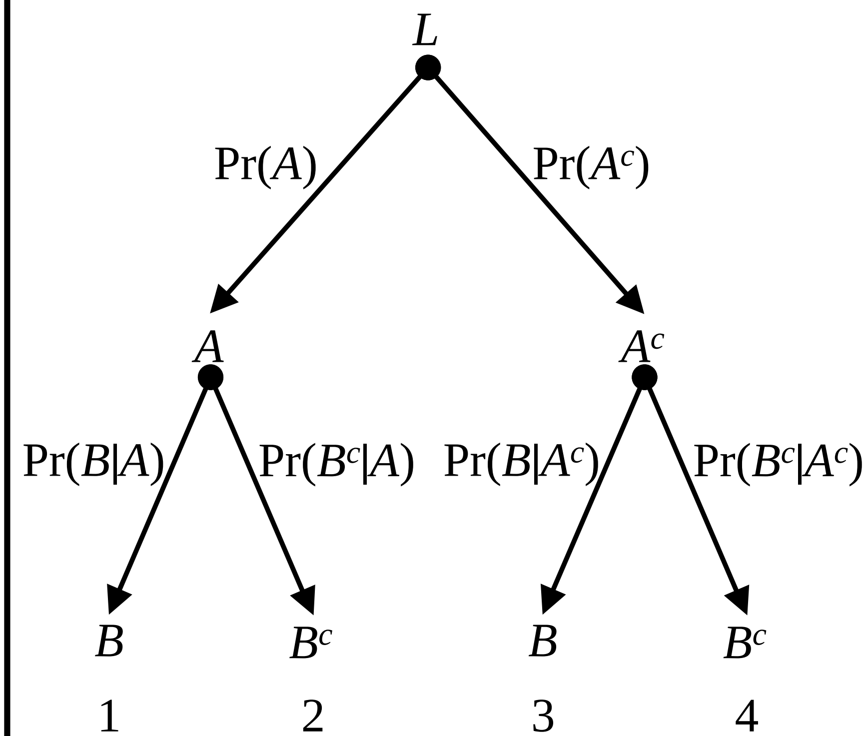
  vastaa reitti 2.



Erotustapahtuman todennäköisyys 3/4

- Reitin 2 todennäköisyys on *puutodennäköisyyksien tulosäännön* ja *ehdollisen todennäköisyyden määritelmän* perusteella

  $\Pr(A)\Pr(B^c|A) = \Pr(A\cap B^c)$



Erotustapahtuman todennäköisyys 4/4

- Koska

  $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A$

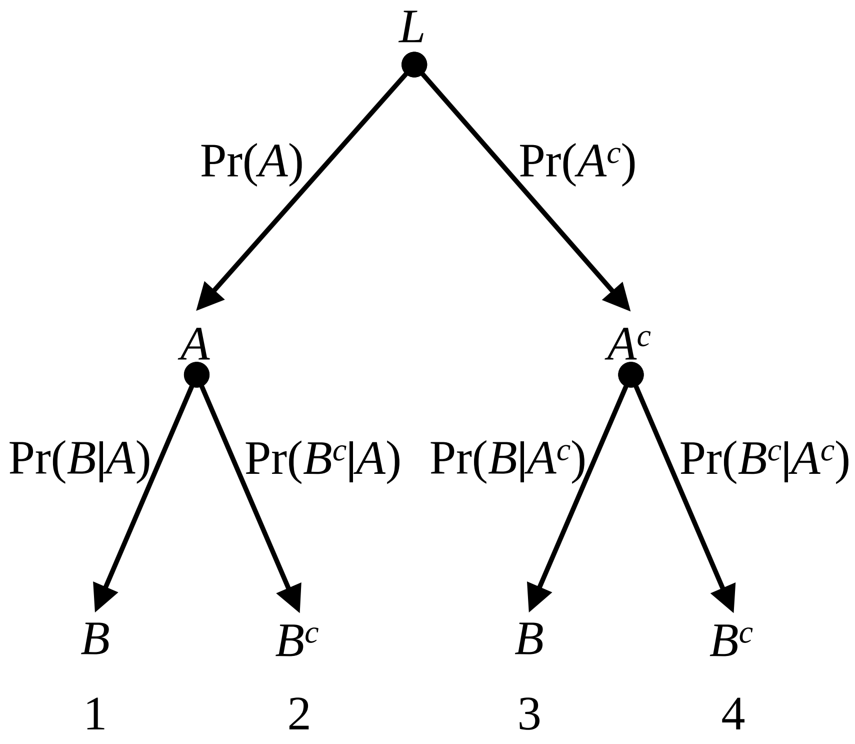
  $(A \cap B^c) \cap (A \cap B) = \varnothing$

  saadaan

  $\Pr(A)$
  $= \Pr(A \cap B^c) + \Pr(A \cap B)$

- Siten

  $\Pr(A \setminus B)$
  $= \Pr(A \cap B^c)$
  $= \Pr(A)\Pr(B^c | A)$
  $= \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$



Kokonaistodennäköisyyden kaava 1/7

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otosavaruuden S tapahtumia.
- Olkoot lisäksi joukko A ja sen komplementti A^c *epätyhjiä*.
- *Kokonaistodennäköisyyden kaavan* mukaan:

$$\Pr(B) = \Pr(A)\Pr(B|A) + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$$

- Kaava on hyödyllinen tilanteessa, jossa todennäköisyys $\Pr(A)$ ja ehdolliset todennäköisyydet $\Pr(B|A)$ ja $\Pr(B|A^c)$ *tunnetaan*.

Kokonaistodennäköisyyden kaava 2/7

- Kokonaistodennäköisyyden kaavan todistus perustuu siihen, että tapahtuma A ja sen komplementtitapahtuma A^c muodostavat *otosavaruuden S osituksen*:

  (i) $A \neq \varnothing$ ja $A^c \neq \varnothing$

  (ii) $A \cap A^c = \varnothing$

  (iii) $S = A \cup A^c$

- Otosavaruuden S ositus $\{A , A^c\}$ *indusoi* osituksen $\{B \cap A , B \cap A^c\}$ tapahtumaan B:

  (i) $B \cap A \neq \varnothing$ tai $B \cap A^c \neq \varnothing$

  (ii) $(B \cap A) \cap (B \cap A^c) = \varnothing$

  (iii) $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

Kokonaistodennäköisyyden kaava 3/7

- Toisensa poissulkevien tapahtumien *yhteenlaskusäännön* mukaan:

$$\Pr(B) = \Pr(B \cap A) + \Pr(B \cap A^c) \qquad (1)$$

- *Yleisen tulosäännön* mukaan:

$$\Pr(B \cap A) = \Pr(A)\Pr(B|A) \qquad (2)$$

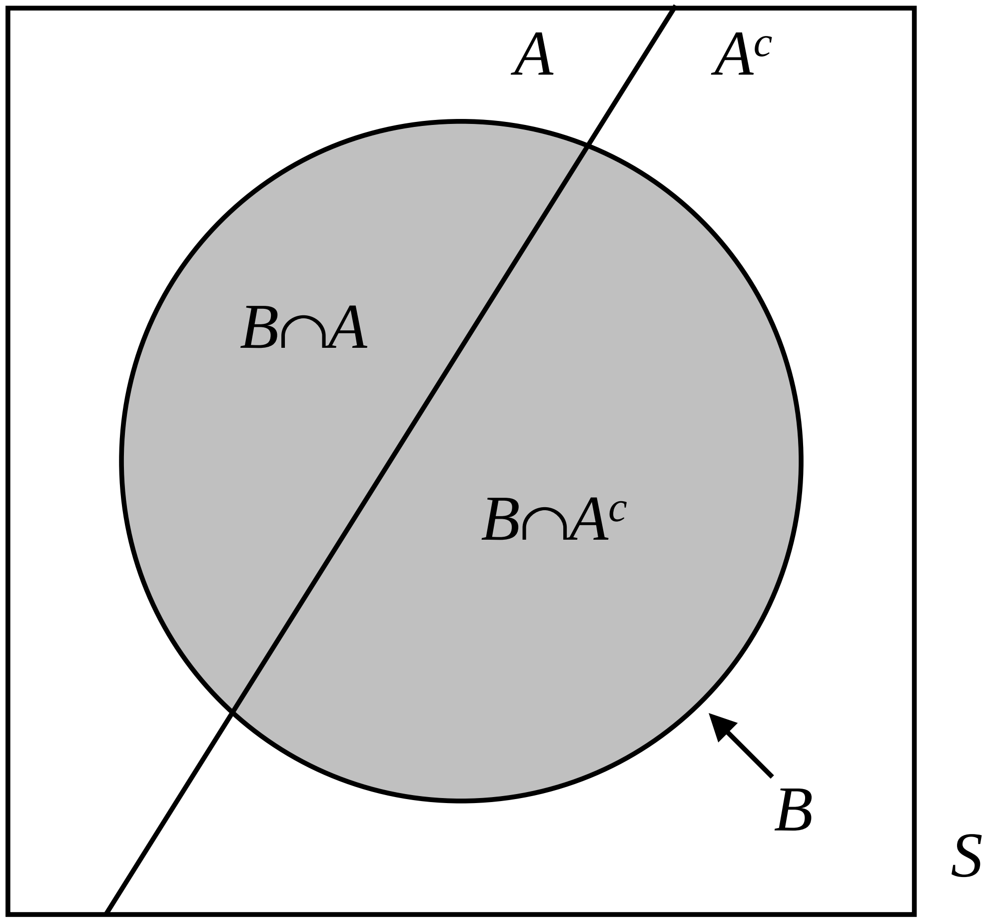
$$\Pr(B \cap A^c) = \Pr(A^c)\Pr(B|A^c) \qquad (3)$$

- Sijoittamalla lausekkeet (2) ja (3) kaavaan (1) saadaan *kokonaistodennäköisyyden kaava*

$$\Pr(B) = \Pr(A)\Pr(B|A) + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$$

- Kaavaa voidaan havainnollistaa seuraavan kalvon *Venn-diagrammilla*.

Kokonaistodennäköisyyden kaava 4/7

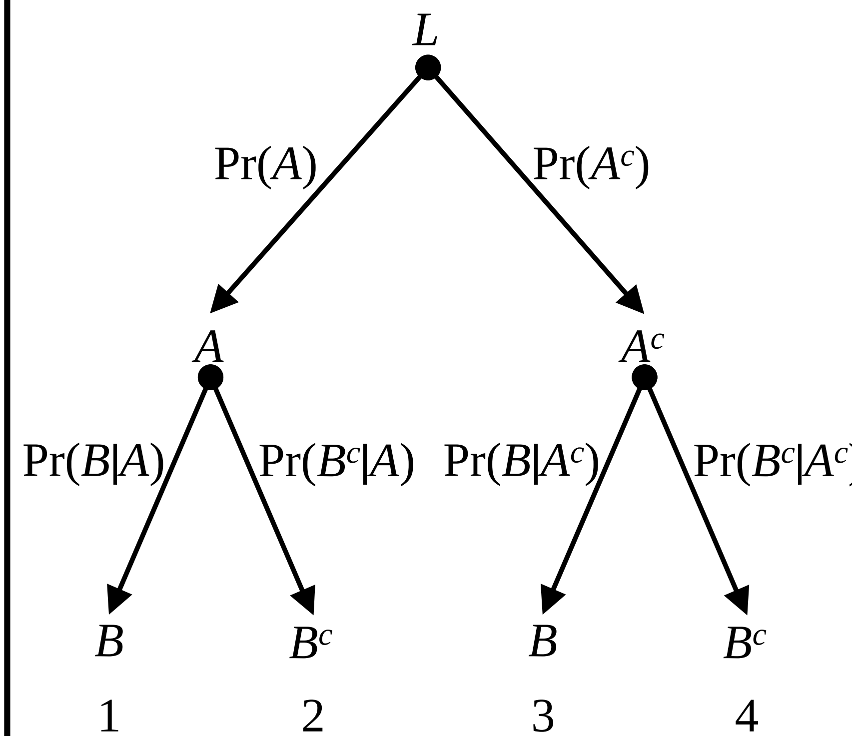


Kokonaistodennäköisyyden kaava 5/7

- Kokonaistodennäköisyyden kaavaa voidaan havainnollistaa myös viereisellä *puudiagrammilla*.
- Tapahtumaa

  B = "B sattuu"

  vastaa reitit 1 ja 3 yhdistämällä saatava tapahtuma.

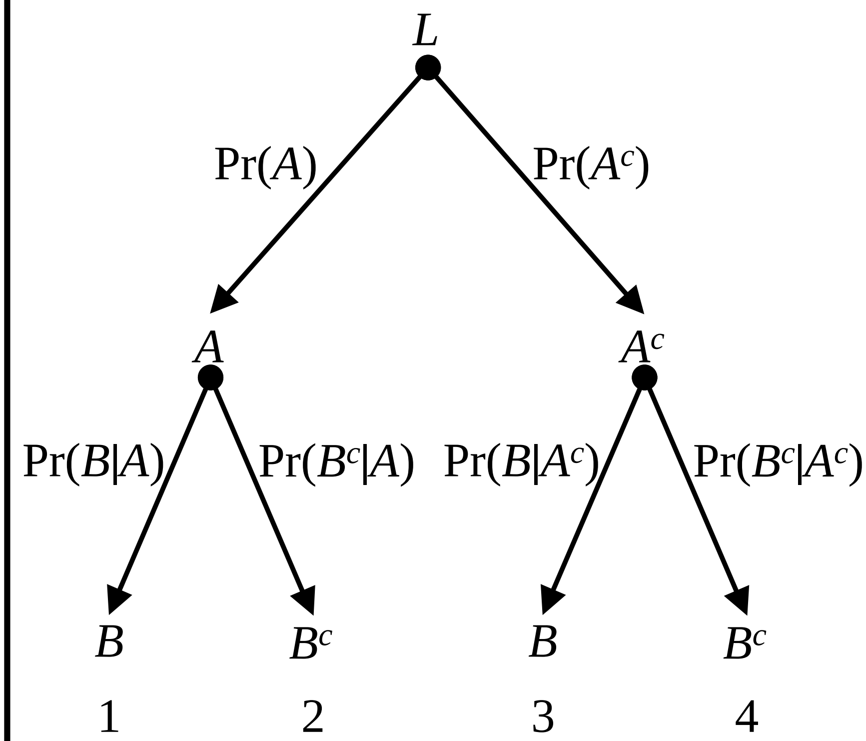


Kokonaistodennäköisyyden kaava 6/7

- Reittien 1 ja 3 todennäköisyyksiksi saadaan *puutodennäköisyyksien tulosääntöä* soveltamalla:

  Pr(Reitti 1)
  $$= \Pr(A)\Pr(B|A)$$

  Pr(Reitti 3)
  $$= \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$$



Kokonaistodennäköisyyden kaava 7/7

- Soveltamalla *puutodennäköisyyksien yhteenlaskusääntöä* saadaan:

  $\Pr(B)$

  $= \Pr(\text{Reitti 1 } \textit{tai} \text{ Reitti 3})$

  $= \Pr(A)\Pr(B|A) + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)$