Johdatus todennäköisyyslaskentaan

Verkot

Verkot: Mitä opimme?

- **Verkkoteoria** on hyödyllinen sovelletun matematiikan osa-alue, jolla on sovelluksia esimerkiksi *logiikassa*, *operaatiotutkimuksessa*, *peli*- ja *päätösteoriassa* sekä **todennäköisyyslaskennassa**.
- Tarkastelemme tässä liitteessä verkkoteorian peruskäsitteitä ja erityisesti ns. **puumaisten verkkojen** määrittelemistä.

Verkot

Avainsanat

Alkupiste
Epäyhtenäisyys
Insidenssikuvaus
Juuri
Loppupiste
Piste
Puu
Puudiagrammi
Reitti
Silmukka
Särmä
Verkko
Verkkodiagrammi
Yhtenäisyys

Verkko eli graafi: Määritelmä 1/2

- **Verkko** eli **graafi** muodostuu **pisteiden joukosta** *V*, **särmien joukosta** *A* ja **insidenssikuvauksesta**

$$\Delta : A \to V \times V$$

jossa

$$V \neq \emptyset\,,\ A \neq \emptyset\,,\ A \cap V = \emptyset$$

- Insidenssikuvaus Δ kertoo mitkä verkon pisteistä ovat särmien *yhdistämiä*.

Verkko eli graafi: Määritelmä 2/2

- Olkoon

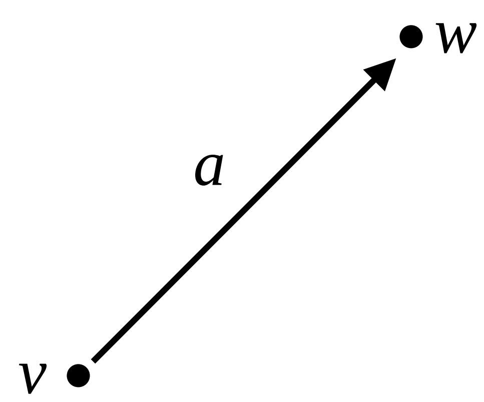
$$a \in A$$

ja

$$\Delta(a) = (v, w)$$

jossa siis

$$v, w \in V$$



- Tällöin:

v = *särmän* $a = (v, w)$ **alkupiste**

w = *särmän* $a = (v, w)$ **loppupiste**

Verkon määritelmä: Kommentti

- Verkkoja tarkastellaan tässä esityksessä *suunnattuina verkkoina*, millä tarkoitetaan sitä, että verkon jokaisella särmällä on *suunta*, joka osoittaa särmän *alkupisteestä* särmän *loppupisteeseen*.

Verkkodiagrammi

- **Verkkodiagrammi** on verkon *graafinen esitys*.
- Verkkodiagrammi voidaan konstruoida seuraavalla tavalla:

(i) Merkitään verkon pisteet tasoon.

(ii) Piirretään jokaisen särmän $a = (v, w)$ alkupisteestä v *nuoli* särmän loppupisteeseen w.

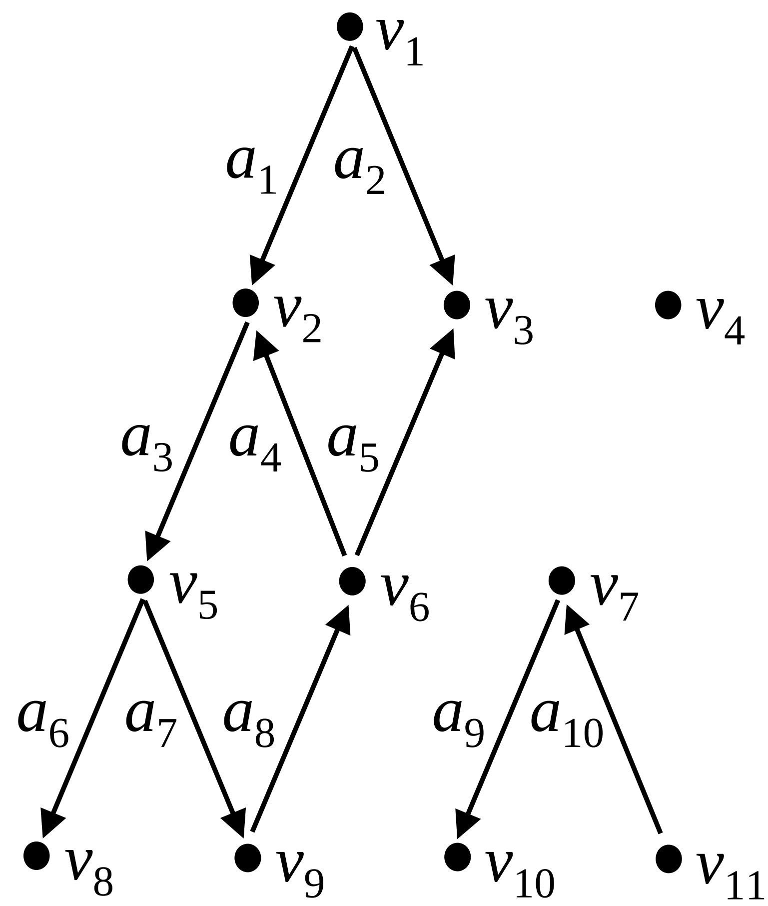
Verkkodiagrammi: Esimerkki 1/3

- Tarkastellaan viereistä *verkko-diagrammia*.
- *Pisteiden* joukko:

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{11}\}$$

- *Särmien* joukko:

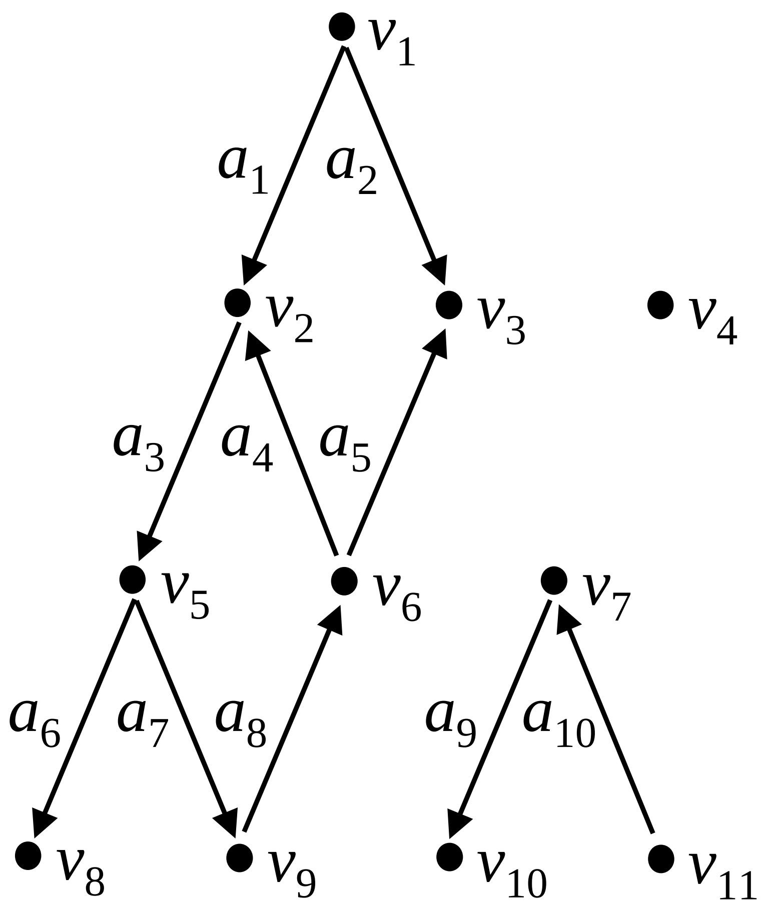
$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$$



Verkkodiagrammi: Esimerkki 2/3

- *Insidenssikuvaus* Δ:

$$\begin{aligned}
\Delta(a_1) &= (v_1, v_2) \\
\Delta(a_2) &= (v_1, v_3) \\
\Delta(a_3) &= (v_2, v_5) \\
\Delta(a_4) &= (v_6, v_2) \\
\Delta(a_5) &= (v_6, v_3) \\
\Delta(a_6) &= (v_5, v_8) \\
\Delta(a_7) &= (v_5, v_9) \\
\Delta(a_8) &= (v_9, v_6) \\
\Delta(a_9) &= (v_7, v_{10}) \\
\Delta(a_{10}) &= (v_{11}, v_7)
\end{aligned}$$



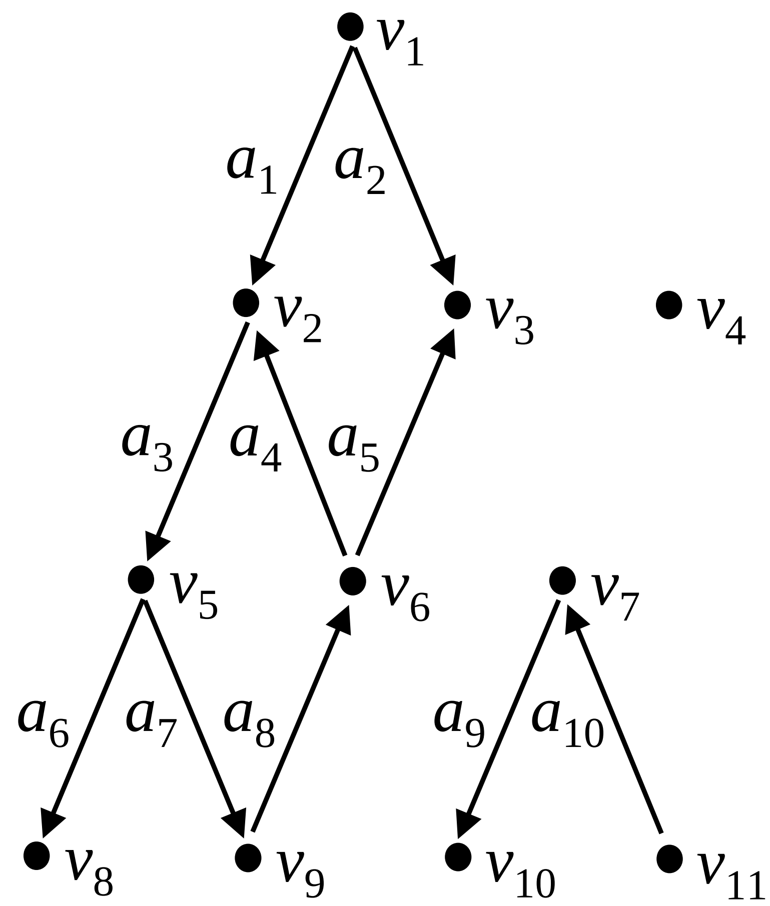
Verkkodiagrammi: Esimerkki 3/3

- Esimerkiksi:

  Piste v_6 on särmien a_4 ja a_5 *alkupiste* ja särmän a_8 *loppupiste*.

  Särmän a_7 *alkupiste* on v_5 ja *loppupiste* on v_9 .

- Piste v_4 on *eristetty*, koska se ei ole yhdenkään särmän alku- tai loppupiste.



Reitti

- Särmät

  $$\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$$

  muodostavat **reitin** pisteestä v_1 pisteeseen v_k , jos on olemassa pisteet v_1 , v_2 , … , v_k siten, että

  $$\Delta(a_i) = (v_i, v_{i+1}) \ , i = 1, 2, \ldots, k-1$$

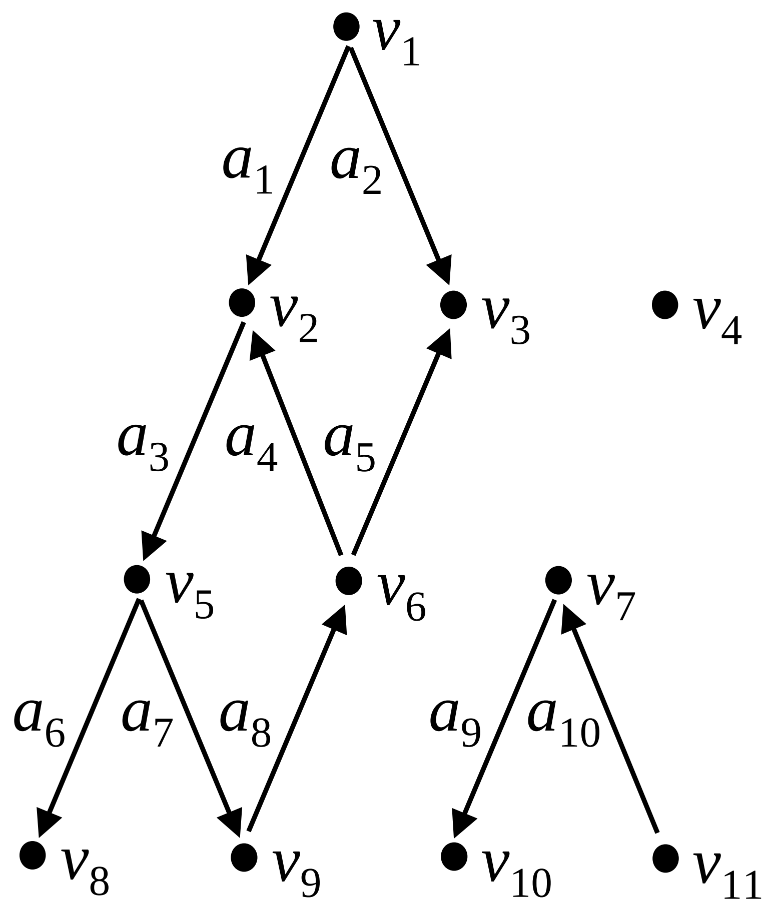
- Jos pisteestä v_1 pisteeseen v_k on reitti, sanotaan, että reitti *vie* pisteestä v_1 pisteeseen v_k tai, että pisteestä v_1 *pääsee* pisteeseen v_k .

Reitti: Esimerkki

- Viereisen diagrammin verkosta voidaan löytää useita *reittejä*.
- Pisteestä v_1 *pääsee* pisteisiin v_2,v_3,v_5,v_6,v_8,v_9 vähintään yhtä reittiä pitkin.
- Pisteestä v_1 pisteeseen v_3 *vie* kaksi reittiä:

  Reitti 1: $\{a_2\}$

  Reitti 2: $\{a_1,a_3,a_7,a_8,a_5\}$
- Pisteestä v_6 *ei pääse* pisteeseen v_1 ja pisteestä v_1 *ei pääse* pisteisiin v_4,v_7,v_{10},v_{11}.



Silmukka

- Reittі

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$$

muodostaa **silmukan**, jos on olemassa pisteet v_1 , v_2 , … , v_k siten, että

$$\Delta(a_i) = (v_i, v_{i+1}) \ , i = 1, 2, \ldots, k-1$$

ja $v_1 = v_k$.

Silmukka: Esimerkki

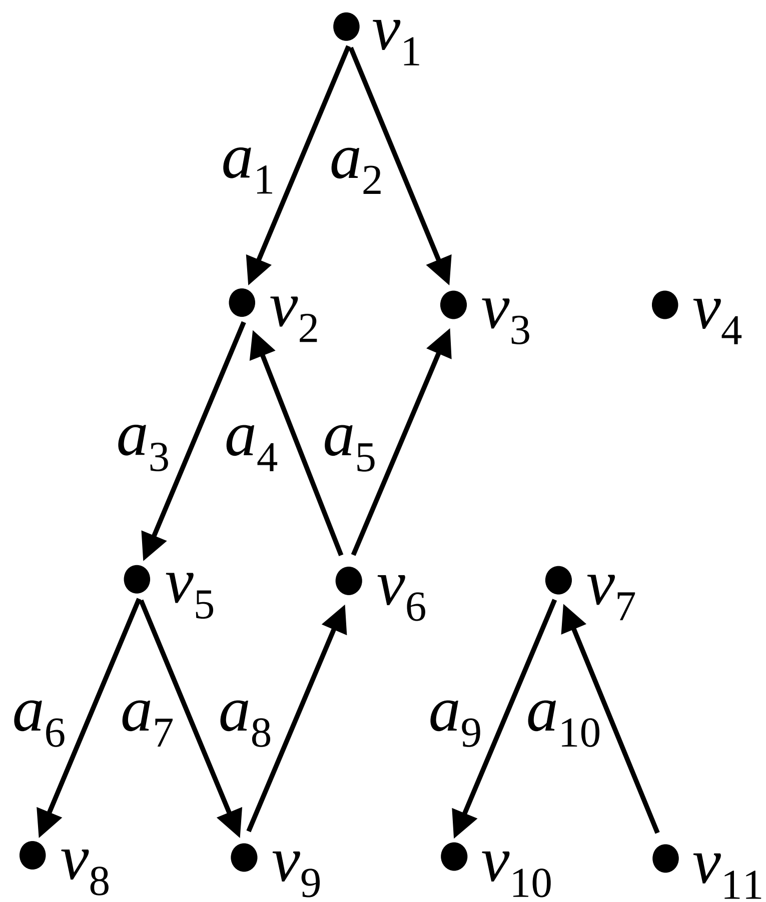
- Viereisen diagrammin verkossa on yksi *silmukka*:

  $$\{a_3, a_7, a_8, a_4\}$$

- Huomaa, että esimerkiksi särmät

  $$\{a_1, a_4, a_5, a_2\}$$

  eivät muodosta silmukkaa.



Verkon yhtenäisyys 1/2

- Verkko on **yhtenäinen**, jos sen pisteiden joukkoa V *ei voida* osittaa kahdeksi *epätyhjäksi* osajoukoksi siten, että verkon *jokaisen* särmän alkupiste ja loppupiste kuuluvat *samaan* osajoukkoon.
- Siten yhtenäisen verkon pisteiden joukkoa V *ei voida* osittaa kahteen *epätyhjään* osajoukkoon V_1 ja V_2 seuraavalla tavalla:

  Jos $a = (v, w)$ on verkon mielivaltainen särmä, niin *täsmälleen toinen ehdoista* (i) tai (ii) *pätee*:

  (i) $v \in V_1$ ja $w \in V_1$

  (ii) $v \in V_2$ ja $w \in V_2$

Verkon yhtenäisyys 2/2

- Verkko on **epäyhtenäinen**, jos se *ei ole yhtenäinen*.
- Epäyhtenäisen verkon pisteet *voidaan* osittaa kahdeksi (tai useammaksi) *epätyhjäksi* osajoukoksi siten, että verkon *jokaisen* särmän alkupiste ja loppupiste kuuluvat *täsmälleen yhteen* osajoukoista.

Yhtenäisyys: Esimerkki 1/2

- Viereisen diagrammin verkko on *epäyhtenäinen*, mutta se koostuu kolmesta *yhtenäisestä aliverkosta*:

  Aliverkko 1:

  $$V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_8, v_9\}$$

  $$A_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$$

  Aliverkko 2:

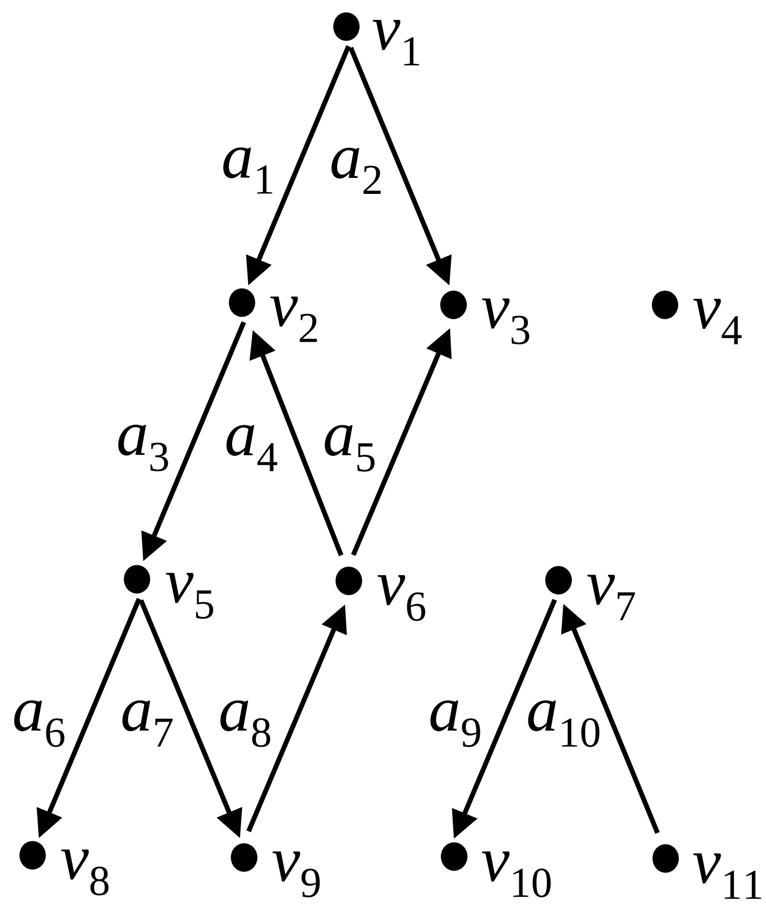
  $$V_2 = \{v_4\}$$

  $$A_2 = \varnothing$$

  Aliverkko 3:

  $$V_3 = \{v_7, v_{10}, v_{11}\}$$

  $$A_3 = \{a_9, a_{10}\}$$



Puu

- Verkko on **puu**, jonka *juuri* on piste v_1 , jos seuraavat ehdot pätevät:

  (i) Verkko on *yhtenäinen*.

  (ii) Verkossa ei ole *silmukoita*.

  (iii) Jos $w \neq v_1$ on mielivaltainen verkon piste, pisteestä v_1 pisteeseen w pääsee *täsmälleen yhtä reittiä* pitkin.

Puun määritelmä: Kommentteja

- Puulla on täsmälleen yksi *alkupiste*, sen juuri v_1 .
- Puun alkupisteestä v_1 vie *täsmälleen yksi reitti* puun jokaiseen muuhun pisteeseen.
- Puun alkupisteeseen v_1 *ei tule* yhtään särmää.
- Puulla on yksi tai useampia *loppupisteitä*.
- Puun loppupisteestä *ei lähde* yhtään särmää.
- Jokaisen särmän loppupiste (ellei se ole samalla koko puun loppupiste) on *yhden tai useamman* särmän alkupiste.

Puudiagrammi

- **Puudiagrammi** on puun *graafinen esitys*.
- Puudiagrammi voidaan konstruoida seuraavalla tavalla:

(i) Merkitään puun pisteet tasoon.

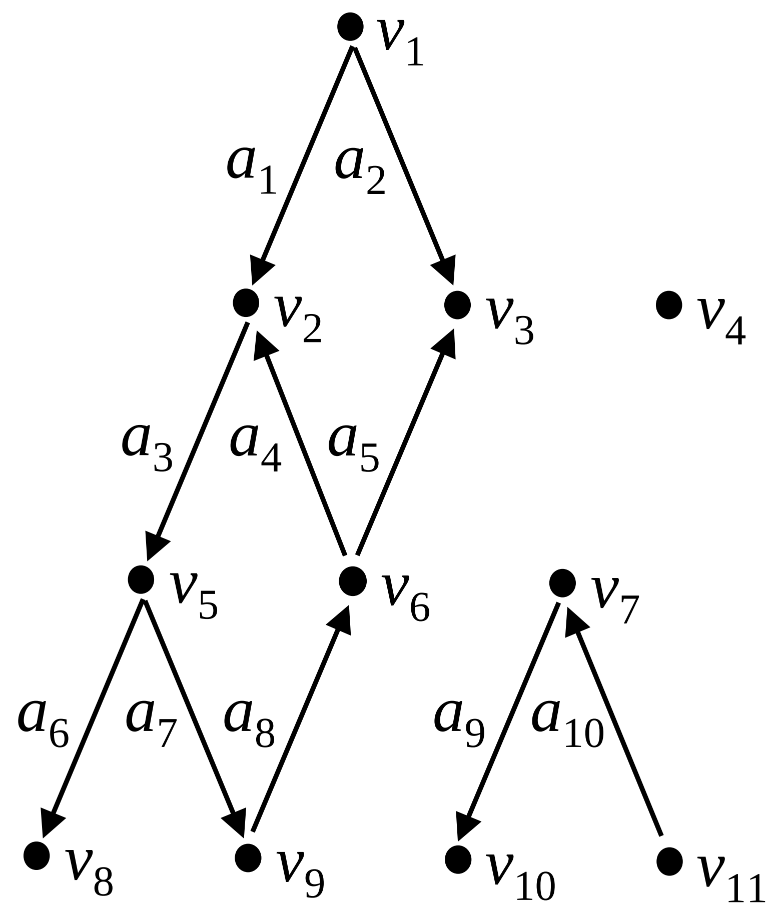
(ii) Piirretään jokaisen särmän $a = (v, w)$ alkupisteestä v *nuoli* särmän loppupisteeseen w.

Puudiagrammin piirtäminen

- Puudiagrammin *piirtämisessä* käytetään tavallisesti toista seuraavista tavoista:
  - (i) Puu piirretään *ylösalaisin* niin, että sen juuri eli alkupiste on ylhäällä ja loppupisteet ovat alhaalla.
  - (ii) Puu piirretään *makaavaan asentoon* niin, että sen juuri eli alkupiste on vasemmalla ja loppupisteet ovat oikealla.

Puut ja puudiagrammit: Esimerkki 1

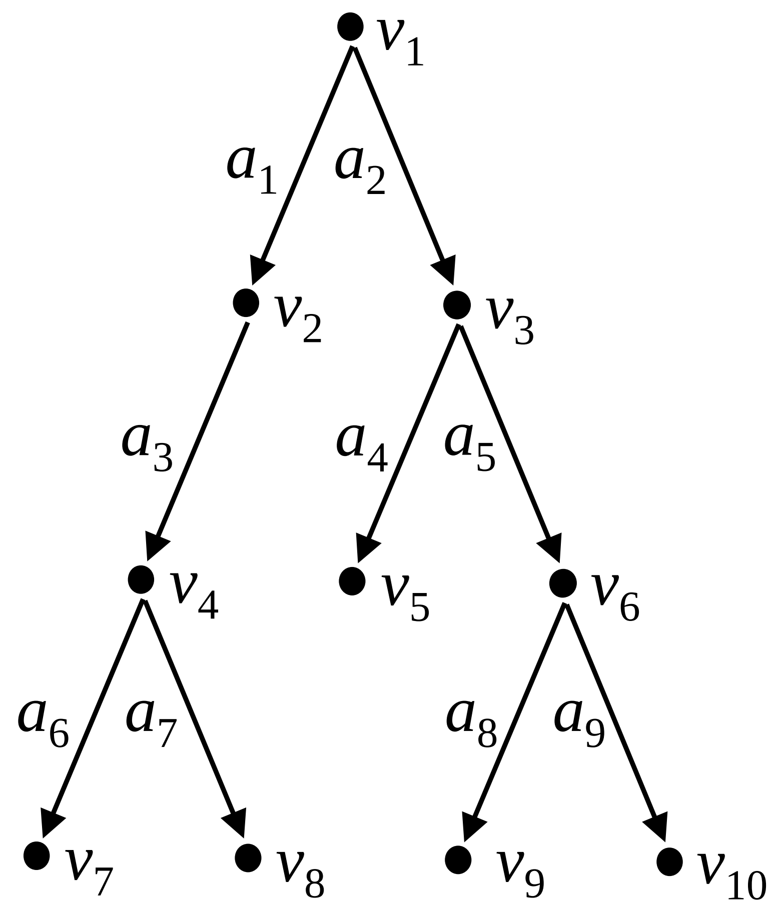
- Viereisen diagrammin verkko *ei ole* puu.
- Perustelut:
  - (i) Verkko ei ole *yhtenäinen*, koska se koostuu kolmesta *aliverkosta*, joiden välillä ei ole yhtään särmää.
  - (ii) Verkossa on *silmukka*.



Puut ja puudiagrammit: Esimerkki 2 – 1/2

- Viereisen diagrammin verkko *on* puu.
- Perustelut:
  - (i) Verkko on *yhtenäinen*.
  - (ii) Verkossa ei ole *silmukoita*.
  - (iii) Verkon *alkupisteestä* eli *juuresta* v_1 vie reitti verkon jokaiseen muuhun pisteeseen.
- Puun *loppupisteiden* joukko:

  $\{v_5, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$



Puut ja puudiagrammit: Esimerkki 2 – 2/2

- Viereisen puudiagrammin alkupisteestä v_1 loppupisteisiin v_5,v_7,v_8,v_9,v_{10} vievät *reitit*:
  1. Loppupisteeseen v_5 vie reitti $\{a_2,a_4\}$
  2. Loppupisteeseen v_7 vie reitti $\{a_1,a_3,a_6\}$
  3. Loppupisteeseen v_8 vie reitti $\{a_1,a_3,a_7\}$
  4. Loppupisteeseen v_9 vie reitti $\{a_2,a_5,a_8\}$
  5. Loppupisteeseen v_7 vie reitti $\{a_2,a_5,a_9\}$