Johdatus todennäköisyyslaskentaan

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat: Mitä opimme? – 1/3

- Tässä luvussa tarkastellaan seuraavia ongelmia:
  (i) *Jos satunnaismuuttujan jakauma tunnetaan*, mitä voidaan sanoa sen jonkin **muunnoksen jakaumasta**?
  (ii) *Jos satunnaismuuttujien jakaumat tunnetaan*, mitä voidaan sanoa niiden **summan jakaumasta**?
  (iii) *Jos satunnaismuuttujien jakaumat tunnetaan*, mitä voidaan sanoa niiden **minimin** ja **maksimin jakaumasta**?
- Ei ole mahdollista löytää yleistä tulosta, joka antaa satunnaismuuttujan mielivaltaisen muunnoksen jakauman (ongelma (i)), mutta ongelma (i) *voidaan ratkaista monissa erikoistilanteissa esittämällä lisäehtoja*, jotka rajoittavat sallittujen muunnosten luokkaa.

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat: Mitä opimme? – 2/3

- Ongelmalle (i) löytyy ratkaisu, jos rajoitutaan **muunnoksiin**, **joilla on käänteismuunnos**.
- **Kahden riippumattoman satunnaismuuttujan summan** ja **osamäärän jakaumat** saadaan erikoistapauksena ongelman (i) ratkaisusta kaksiulotteisten satunnaismuuttujien tapauksessa.
- **Useamman satunnaismuuttujan summan jakauma** (ongelma (ii)) voidaan löytää käyttämällä apuna **momenttiemäfunktiota**; lisätietoja momenttiemäfunktiosta: ks. lukua **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio.**
- Ongelma (iii) voidaan ratkaista käyttämällä pelkästään *kertymä*- ja *tiheysfunktion määritelmiä*.

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat: Mitä opimme? – 3/3

- Sovelluksina esitettävälle teorialle tässä luvussa johdetaan mm. χ^2**-**, ***F*****-** ja ***t*****-jakaumien tiheysfunktioiden lausekkeet** (jakaumien määrittely: ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**).
- Lisäksi tarkastellaan mm. seuraavia esimerkkejä:
  - **satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen jakauma** erikois-tapauksenaan **normaalijakautuneen satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen jakauma** (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**)
  - **Bernoulli- ja binomijakautuneiden satunnaismuuttujien summan jakauma** (ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**)
  - **Poisson-jakautuneiden satunnaismuuttujien summan jakauma** (ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**)
  - **normaalijakautuneiden satunnaismuuttujien summan jakauma** (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**)

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat: Esitiedot

- Esitiedot: ks. seuraavia lukuja:

  Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

  Jakaumien tunnusluvut

  Diskreettejä jakaumia

  Jatkuvia jakaumia

  Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia

  Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

  Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat: Lisätiedot

- Esitettyä teoriaa sovelletaan mm. satunnaismuuttujien **lineaarimuunnoksien** ja *riippumattomien* satunnaismuuttujien **summien** jakaumia koskevissa tarkasteluissa seuraavissa luvuissa:

  Diskreettejä jakaumia

  Jatkuvia jakaumia

  Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

>> Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Avainsanat

Aidosti monotoninen muunnos
Cauchyn jakauma
Ei-monotoninen muunnos
Kertymäfunktio
$\chi^2(1)$-jakauma
Käänteismuunnos
Lineaarimuunnos
Muunnos
Satunnaismuuttuja
Studentin *t*-jakauma
Tiheysfunktio
Todennäköisyysjakauma

Lineaarimuunnoksen jakauma

- Olkoon X *jatkuva satunnaismuuttuja*, jonka *tiheysfunktio* on

$$f_X(x)$$

- Muodostetaan satunnaismuuttujan X *lineaarimuunnos*

$$Y = a + bX$$

jossa a ja $b \neq 0$ ovat *vakioita*.

- Satunnaismuuttujan Y **tiheysfunktio** on

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Lineaarimuunnoksen jakauma: Kommentti

- Satunnaismuuttujan X *lineaarimuunnoksen*

  $$Y = a + bX \quad (a \text{ ja } b \neq 0 \textit{ vakioita})$$

  jakauma on siis aina *samaa tyyppiä* kuin satunnais-muuttujan X jakauma.

Lineaarimuunnoksen jakauma: Todistus 1/4

- Olkoon *jatkuvan satunnaismuuttujan* X *tiheysfunktio* $f_X(x)$.
- Olkoon

$$Y = a + bX$$

jossa a ja $b \neq 0$ ovat *vakioita*.
- Muodostetaan ensin satunnaismuuttujan Y *kertymäfunktio*, josta satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktio* saadaan derivoimalla.
- Jaetaan tarkastelu *kahteen osaan*:

(i) $b > 0$

(ii) $b < 0$

Lineaarimuunnoksen jakauma: Todistus 2/4

- Jos $b > 0$, satunnaismuuttujan $Y = a + bX$ *kertymäfunktio* on

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) = \Pr(a + bX \leq y) \\ &= \Pr\left(X \leq \frac{y-a}{b} \right) \\ &= F_X\left(\frac{y-a}{b} \right) \end{aligned}$$

- Derivoimalla satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktioksi* saadaan

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-a}{b} \right) \\ &= \frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-a}{b} \right) \end{aligned}$$

Lineaarimuunnoksen jakauma: Todistus 3/4

- Jos $b < 0$, satunnaismuuttujan $Y = a + bX$ *kertymäfunktio* on

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \Pr(Y \le y) &= \Pr(a + bX \le y) \\ &= \Pr\left(X \ge \frac{y-a}{b} \right) \\ &= 1 - \Pr\left(X \le \frac{y-a}{b} \right) \\ &= 1 - F_X\left(\frac{y-a}{b} \right) \end{aligned}$$

- Derivoimalla satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktioksi* saadaan

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) &= -\frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-a}{b} \right) \\ &= -\frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-a}{b} \right) \end{aligned}$$

Lineaarimuunnoksen jakauma: Todistus 4/4

- Kalvoilla 2/4 ja 3/4 johdetut kaavat satunnaismuuttujan Y tiheys-funktiolle $f_Y(y)$ voidaan yhdistää yhdeksi kaavaksi:

  Satunnaismuuttujan $Y = a + bX$ *tiheysfunktio* on kaikille $b \neq 0$:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Välillä (0,1) jatkuvaa tasaista jakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *jatkuvaa tasaista jakaumaa* (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) välillä (0,1):

$$X \sim \text{Uniform}(0,1)$$

- Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f_X(x) = 1 \,,\; 0 \le x \le 1$$

- Olkoon

$Y = a + bX$ (a ja $b > 0$ *vakioita*)

- Satunnaismuuttujan Y tiheysfunktioksi saadaan

$$f_Y(y) = \frac{1}{b} \,,\; a \le y \le a + b$$

- Siten Y noudattaa **jatkuvaa tasaista jakaumaa** välillä (a, $a + b$):

$$Y \sim \text{Uniform}(a, a + b)$$

Standardoitua normaalijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *standardoitua normaalijakaumaa* (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**):

$$X \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

- Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}$$

- Olkoon

$Y = a + bX$ (a ja $b \neq 0$ *vakioita*)

- Satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktioksi* saadaan

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-a}{b}\right)^2\right\}$$

- Siten Y noudattaa **normaalijakaumaa** parametrein a ja b^2 :

$$Y \sim \mathrm{N}(a, b^2)$$

Normaalijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *normaalijakaumaa* parametrein μ ja σ^2 (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**):

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

- Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right\}$$

- Olkoon

$$Y = a + bX \quad (a \text{ ja } b \neq 0 \textit{ vakioita})$$

- Satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktioksi* saadaan

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{y-a-b\mu}{b\sigma}\right)^2 \right\}$$

- Siten Y noudattaa **normaalijakaumaa** parametrein $a + b\mu$ ja $b^2\sigma^2$:

$$Y \sim \mathrm{N}(a + b\mu, b^2\sigma^2)$$

Monotonisten muunnosten jakaumat

- Olkoon X *jatkuva satunnaismuuttuja*, jonka *tiheysfunktio* on

$$f_X(x)$$

- Muodostetaan satunnaismuuttujan X *muunnos*

$$Y = h(X)$$

jossa funktio h on *aidosti monotoninen* ja *jatkuvasti derivoituva*.

- Satunnaismuuttujan Y **tiheysfunktio** on

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$$

Monotonisten muunnosten jakaumat: Todistus 1/4

- Olkoon *jatkuva satunnaismuuttujan* X *tiheysfunktio* $f_X(x)$.
- Olkoon

$$Y = h(X)$$

jossa h on *aidosti monotoninen* ja *jatkuvasti derivoituva* funktio.
- Tällöin satunnaismuuttujan Y *kertymäfunktio* on

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(h(X) \leq y)$$

- Jaetaan tarkastelu *kahteen osaan*:

(i) Funktio h on *aidosti vähenevä*.

(ii) Funktio h on *aidosti kasvava*.

Monotonisten muunnosten jakaumat: Todistus 2/4

- Oletetaan ensin, että funktio h on *aidosti vähenevä*.
- Koska funktio h oletettiin aidosti väheneväksi, sillä on *käänteisfunktio* h^{-1}, joka myös on aidosti vähenevä.
- Siten satunnaismuuttujan Y *kertymäfunktio* on

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \Pr(Y \le y) &= \Pr(h(X) \le y) \\ &= \Pr(h^{-1}(h(X)) \ge h^{-1}(y)) \\ &= \Pr(X \ge h^{-1}(y)) \\ &= 1 - \Pr(X \le h^{-1}(y)) \\ &= 1 - F_X(h^{-1}(y)) \end{aligned}$$

Monotonisten muunnosten jakaumat: Todistus 3/4

- Derivoimalla satunnaismuuttujan Y kertymäfunktion lauseke saadaan satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktioksi*

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = -\frac{d}{dy} F_X(h^{-1}(y))$$
$$= -f_X(h^{-1}(y)) \left(\frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right)$$

- Koska funktion h käänteisfunktio h^{-1} oletettiin aidosti väheneväksi, niin

$$\frac{dh^{-1}(y)}{dy} < 0$$

- Voimme siis kirjoittaa:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Monotonisten muunnosten jakaumat: Todistus 4/4

- Jos funktio *h* on *aidosti kasvava*, myös käänteisfunktio h^{-1} on aidosti kasvava, jolloin

$$\frac{dh^{-1}(y)}{dy} > 0$$

- Siten myös tässä tapauksessa pätee

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$$

Lineaarimuunnos monotonisena muunnoksena

- Olkoon X *jatkuva satunnaismuuttuja*, jonka *tiheysfunktio* on

  $$f_X(x)$$

- Muodostetaan satunnaismuuttujan X *lineaarimuunnos*

  $$Y = a + bX$$

  jossa a ja $b \neq 0$ ovat *vakioita*.

- Satunnaismuuttujan Y **tiheysfunktio** on

  $$f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Lineaarimuunnos monotonisena muunnoksena: Todistus

- Olkoon *jatkuvan satunnaismuuttujan* X *tiheysfunktio* $f_X(x)$.
- Olkoon

$$Y = a + bX \ (a \text{ ja } b \neq 0 \ \textit{vakioita})$$

- Tällöin

$$y = h(x) = a + bx \ , b \neq 0$$

$$x = h^{-1}(y) = \frac{y-a}{b}$$

$$\frac{dh(x)}{dx} = b$$

joten

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Cauchyn jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *jatkuvaa tasaista jakaumaa* (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) välillä $(-\pi/2, +\pi/2)$:

$$X \sim \mathrm{Uniform}(-\pi/2, +\pi/2)$$

- Muodostetaan satunnaismuuttujan X *muunnos*

$$Y = \tan(X)$$

- Satunnaismuuttujan Y **tiheysfunktio** on

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}$$

- Satunnaismuuttujan Y jakaumaa kutsutaan **Cauchyn jakaumaksi**.

Cauchyn jakauma: Tiheysfunktion johto 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *jatkuvaa tasaista jakaumaa* välillä $(-\pi/2, +\pi/2)$, jolloin sen *tiheysfunktio* on

$$f_X(x) = 1/\pi\,,\ -\pi/2 \le x \le +\pi/2$$

- Olkoon

$$Y = h(X) = \tan(X)$$

- Muunnos

$$y = h(x) = \tan(x)$$

on *aidosti kasvava* ja sen käänteismuunnoksen

$$x = h^{-1}(y) = \arctan(y)$$

derivaatta on

$$\frac{dh^{-1}(y)}{dy} = \frac{d\arctan(y)}{dy} = \frac{1}{1+y^2}$$

Cauchyn jakauma: Tiheysfunktion johto 2/2

- Siten satunnaismuuttujan $Y = \tan(X)$ *tiheysfunktioksi* saadaan

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}$$

- Satunnaismuuttujan Y jakaumaa kutsutaan *Cauchyn jakaumaksi*.

Cauchyn jakauma ja Studentin *t*-jakauma

- Voidaan osoittaa, että Cauchyn jakauma on sama kuin **Studentin *t*-jakauma yhdellä vapausasteella** (ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**) eli, jos

  $$X \sim \mathrm{Uniform}(-\pi/2, +\pi/2)$$

  ja

  $$Y = \tan(X)$$

  niin

  $$Y \sim t(1)$$

- Huomautus:

  Cauchyn jakaumalla *ei ole momentteja* eli sillä *ei ole edes odotusarvoa*.

Ei-monotonisten muunnosten jakaumat

- Jos satunnaismuuttujaan sovelletaan ei-monotonista muunnosta, *ei ole mahdollista löytää yleistä muunnoksen jakaumaa ja sen tiheysfunktiota koskevaa tulosta*.
- Ei-monotonisten muunnosten tapauksessa joudutaan tarkastelu tekemään tapauskohtaisesti.
- Seuraavassa tarkastellaan esimerkkinä **χ^2(1)-jakauman** (ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**) *tiheysfunktion johtoa*.

$\chi^2(1)$-jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$X \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$Y = X^2$$

- Satunnaismuuttuja Y noudattaa χ^2-jakauman määritelmän mukaan **χ^2-jakaumaa yhdellä vapausasteella**:

$$Y \sim \chi^2(1)$$

- Satunnaismuuttujan Y **tiheysfunktio** on

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}$$

χ^2(1)-jakauma: Tiheysfunktion johto 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$X \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

- Tällöin

$$Y = X^2 \sim \chi^2(1)$$

- Olkoon $\Phi(\cdot)$ standardoidun normaalijakauman N(0, 1) *kertymäfunktio*.
- Satunnaismuuttujan $Y = X^2$ *kertymäfunktio* on

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \Pr(Y \le y) &= \Pr(X^2 \le y) \\ &= \Pr(|X| \le \sqrt{y}) \\ &= \Pr(-\sqrt{y} \le X \le +\sqrt{y}) \\ &= \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) \\ &= 2\Phi(\sqrt{y}) - 1 \end{aligned}$$

χ^2(1)-jakauma: Tiheysfunktion johto 2/2

- Standardoidun normaalijakauman N(0, 1) tiheysfunktio on

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

jossa $\Phi(\cdot)$ on standardoidun normaalijakauman N(0, 1) kertymäfunktio.

- Siten satunnaismuuttujan $Y = X^2 \sim \chi^2(1)$ *tiheysfunktioksi* saadaan

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}\left[2\Phi(\sqrt{y}) - 1\right]$$

$$= \Phi'(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}$$

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

>> Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Avainsanat

Boxin ja Müllerin muunnos
Jacobin determinantti
Käänteismuunnos
Muunnos
Normaalijakauma
Satunnaisluvut
Satunnaismuuttuja
Tasainen jakauma
Tiheysfunktio
Todennäköisyysjakauma

Bijektiivisten muunnosten jakaumat 1/3

- Olkoot X ja Y *jatkuvia* satunnaismuuttuja, joiden *yhteisjakauman tiheysfunktio* on

$$f_{XY}(x, y)$$

- Määritellään satunnaismuuttujat

$$U = g(X, Y)$$

$$V = h(X, Y)$$

- Tehdään muunnoksesta

$$(*) \quad \begin{cases} u = g(x, y) \\ v = h(x, y) \end{cases}$$

seuraavalla kalvolla esitettävät oletukset.

Bijektiivisten muunnosten jakaumat 2/3

- Oletukset muunnoksesta (∗):

(i) Muuttujat *x* ja *y* voidaan ratkaista yhtälöryhmästä (∗) *yksikäsitteisesti* muuttujien *u* ja *v* funktioina.

(ii) Funktioilla *g* ja *h* on *jatkuvat osittaisderivaatat* muuttujien *x* ja *y* suhteen.

(iii) Muunnoksen (∗) *Jacobin determinantti* on *nollasta poikkeava* alueella, jossa tiheysfunktio $f_{XY}(x, y)$ on positiivinen:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$$

kaikille *x* ja *y*, joille $f_{XY}(x, y) > 0$.

Bijektiivisten muunnosten jakaumat 3/3

- Jos oletukset (i)-(iii) pätevät, satunnaismuuttujien *U* ja *V* yhteisjakauman **tiheysfunktio** on

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(x,y)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}$$

jossa *x* ja *y* ratkaistaan kalvon 1/3 yhtälöryhmästä (∗).

Normaalijakauman generointi jatkuvasta tasaisesta jakaumasta 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia* ja noudattavat *jatkuvaa tasaista jakaumaa* (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) välillä (0, 1):

$$X \sim \mathrm{Uniform}(0, 1)$$

$$Y \sim \mathrm{Uniform}(0, 1)$$

$$X \perp Y$$

- Määritellään satunnaismuuttujat

$$U = \cos(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$

$$V = \sin(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$

Normaalijakauman generointi jatkuvasta tasaisesta jakaumasta 2/2

- Satunnaismuuttujat U ja V ovat *riippumattomia* ja noudattavat **standardoitua normaalijakaumaa** (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**):

$$U \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

$$V \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

$$U \perp V$$

Normaalijakauman generointi jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Todistus 1/5

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia* ja noudattavat *jatkuvaa tasaista jakaumaa* välillä (0, 1):

$$X \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

$$Y \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

$$X \perp Y$$

- Olkoot

$$U = \cos(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$

$$V = \sin(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$

- Tarkastellaan *yhtälöryhmää*

$$(*) \qquad \begin{cases} u = \cos(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \\ v = \sin(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \end{cases}$$

Normaalijakauman generointi jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Todistus 2/5

- Yhtälöryhmän

$$(*)\qquad \begin{cases} u = \cos(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \\ v = \sin(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \end{cases}$$

ratkaisut muuttujien x ja y suhteen saadaan yhtälöistä

$$\begin{cases} \cos(2\pi x) = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ \sin(2\pi x) = \dfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ y = \exp\left\{-\dfrac{1}{2}(u^2+v^2)\right\} \end{cases}$$

Normaalijakauman generointi jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Todistus 3/5

- Muunnoksen (∗) *Jacobin determinantti* on

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \left[-2\pi\sin(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)}\right]\cdot\left[\frac{-\sin(2\pi x)}{y\sqrt{-2\log(y)}}\right]$$

$$-\left[2\pi\cos(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)}\right]\cdot\left[\frac{-\cos(2\pi x)}{y\sqrt{-2\log(y)}}\right]$$

$$= \frac{2\pi}{y}$$

- Koska $y > 0$, niin

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$$

Normaalijakauman generointi jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Todistus 4/5

- Satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio* on

$$f_{XY}(x, y) = 1,\ 0 < x < 1\ ,\ 0 < y < 1$$

- Siten satunnaismuuttujien U ja V *yhteisjakauman tiheysfunktio* on

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(x,y)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \frac{y}{2\pi}\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ 0 < y < 1$$

- Sijoittamalla tähän x ja y lausuttuna muuttujien u ja v funktiona saadaan

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right\}$$

Normaalijakauman generointi jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Todistus 5/5

- Nyt

$$
\begin{aligned}
(**)\quad f_{UV}(u,v) &= \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\} \\
&= f_U(u)\,f_V(v)
\end{aligned}
$$

  jossa $f_U(u)$ ja $f_V(v)$ ovat standardoidun normaalijakauman N(0, 1) tiheysfunktioita.
- Koska satunnaismuuttujien U ja V yhteisjakauman tiheysfunktio voidaan esittää satunnaismuuttujien U ja V reunajakaumien tiheysfunktioiden tulona, satunnaismuuttujat U ja V ovat *riippumattomia*.
- Yhtälöstä (∗∗) nähdään lisäksi se, että satunnaismuuttujat U ja V noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa* N(0, 1).

Normaalijakauman generointi jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Kommentteja

- Muunnosta

$$(*)\quad \begin{cases} u = \cos(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \\ v = \sin(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \end{cases}$$

kutsutaan tavallisesti **Boxin ja Müllerin muunnokseksi**.

- Boxin ja Müllerin muunnos tarjoaa erään keinon *generoida normaalijakautuneita satunnaislukuja* tasaista jakaumaa välillä (0, 1) noudattavista satunnaisluvuista.

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

>> Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Avainsanat

Binomijakauma

Jacobin determinantti

Kertymäfunktio

χ^2-jakauma

Momenttiemäfunktio

Normaalijakauma

Poisson-jakauma

Satunnaismuuttuja

Satunnaismuuttujien summan jakauma

Tiheysfunktio

Todennäköisyysjakauma

Satunnaismuuttujien riippumattomuus

- Olkoot X ja Y *riippumattomia* ja *jatkuvia satunnais-muuttujia*.
- Tällöin niiden *yhteisjakauman tiheysfunktio*

$$f_{XY}(x, y)$$

voidaan esittää satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumien tiheysfunktioiden* $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$ tulona:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

- Olkoot X ja Y *riippumattomia* ja *jatkuvia satunnaismuuttujia*, joiden *tiheysfunktiot* ovat $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.
- Muodostetaan satunnaismuuttujien X ja Y *summa*

$$U = X + Y$$

- Satunnaismuuttujan U **tiheysfunktio** on

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(u-x) f_X(x) dx$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma: Todistus 1/3

- Olkoot X ja Y *riippumattomia* ja *jatkuvia satunnaismuuttujia*, joiden *tiheysfunktiot* ovat $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.
- Koska satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia,

$$f_{XY}(x, y) = f_Y(y)f_X(x)$$

- Olkoot

$$U = X + Y$$

$$V = X$$

- Satunnaismuuttujien X ja Y summan jakauma saadaan määräämällä satunnaismuuttujan U *reunajakauma* satunnaismuuttujien U ja V yhteisjakaumasta.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma: Todistus 2/3

- Tarkastellaan muunnosta

$$(*) \qquad \begin{cases} u = x + y \\ v = x \end{cases}$$

- Muunnoksen $(*)$ *käänteismuunnos*:

$$\begin{cases} y = u - v \\ x = v \end{cases}$$

- Muunnoksen $(*)$ *Jacobin determinantti*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ &= -1 \neq 0 \end{aligned}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma: Todistus 3/3

- Siten satunnaismuuttujien $U = X + Y$ ja $V = X$ *yhteisjakauman tiheysfunktio* on

$$\begin{aligned} f_{UV}(u,v) &= f_{XY}(x,y)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} \\ &= f_X(x)f_Y(y)\,|-1| \\ &= f_X(v)f_Y(u-v) \end{aligned}$$

- *Summan* $U = X + Y$ *tiheysfunktio* saadaan tästä satunnaismuuttujan U *reunajakauman tiheysfunktiona*:

$$\begin{aligned} f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{UV}(u,v)dv &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(v)f_Y(u-v)dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(u-x)dx \end{aligned}$$

χ^2-jakauma 1/3

- Tarkastellaan riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakaumaa koskevan yleisen tuloksen sovelluksena **χ^2-jakauman** (ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**) *tiheysfunktion lausekkeen johtoa*.

χ^2-jakauma 2/3

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

ovat *riippumattomia* ja noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n \perp$$

$$X_i \sim \mathrm{N}(0, 1) , \; i = 1, 2, \ldots , n$$

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

- Satunnaismuuttuja Y_n noudattaa χ^2-jakauman määritelmän mukaan **χ^2-jakaumaa *n*:llä vapausasteella**:

$$Y_n \sim \chi^2(n)$$

χ^2-jakauma 3/3

- Satunnaismuuttujan

  $$Y_n \sim \chi^2(n)$$

  tiheysfunktio on

  $$f_n(y) = C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

- *Normeerausvakio* C_n saadaan kaavasta

  $$C_n = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

  jossa $\Gamma(\cdot)$ on *Eulerin gammafunktio*:

  $$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 1/10

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

ovat *riippumattomia* ja noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n \perp$$

$$X_i \sim \mathrm{N}(0, 1) , i = 1, 2, \ldots , n$$

- Tällöin

$$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

- Käytetään satunnaismuuttujan Y_n tiheysfunktion lausekkeen

$$f_n(y) = C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

perustelemiseen *täydellistä induktiota* ja yleistä tulosta riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakaumalle.

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 2/10

- Olkoon $n = 1$.
- Tässä luvussa on jo todettu (ks. kappaletta **Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat**), että

$$Y_1 = X_1^2 \sim \chi^2(1)$$

ja satunnaismuuttujan Y_1 *tiheysfunktio* on

$$f_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y}$$

- Koska

$$C_1 = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

satunnaismuuttujan

$$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

tiheysfunktion lauseke pätee, kun $n = 1$.

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 3/10

- Tarkastellaan seuraavaksi erikseen tapausta $n = 2$.
- Koska satunnaismuuttujat X_1 ja X_2 on oletettu riippumattomiksi, myös satunnaismuuttujat X_1^2 ja X_2^2 ovat riippumattomia.
- Siten voimme soveltaa satunnaismuuttujaan

$$Y_2 = X_1^2 + X_2^2 \sim \chi^2(2)$$

riippumattomien satunnaismuuttujien summan tiheysfunktion kaavaa:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y-z)\, f_1(z)dz = C_2' \int_0^{\infty} (y-z)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(y-z)} z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z} dz$$

$$= C_2' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (y-z)^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dz$$

jossa C_2' on muuttujan y suhteen vakio.

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 4/10

- Tapaus $n = 2$ jatkuu ...
- Sijoituksella $z = yt$ integraali

$$f_2(y) = C_2' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^\infty (y-z)^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dz$$

saadaan muokatuksi muotoon

$$\begin{aligned} f_2(y) &= C_2' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^\infty (y-yt)^{-\frac{1}{2}} (yt)^{-\frac{1}{2}} y dt \\ &= C_2' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^\infty (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= C_2 e^{-\frac{1}{2}y} \end{aligned}$$

jossa $C_2 = C_2' \int_0^\infty (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt$ on muuttujan y suhteen vakio.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 5/10

- Tapaus n = 2 jatkuu ...
- Siten satunnaismuuttujan

$$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

tiheysfunktion lauseke

$$f_n(y) = C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

pätee, kun n = 2:

$$f_2(y) = C_2 e^{-\frac{1}{2}y}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 6/10

- Yleinen induktio-askel $n - 1 \to n$.
- Induktio-oletus:

  Satunnaismuuttujan

$$Y_{n-1} = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{n-1}^2 \sim \chi^2(n-1)$$

  tiheysfunktio on

$$f_{n-1}(y) = C_{n-1} y^{\frac{1}{2}(n-1)-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma
χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 7/10

- Induktio-askel $n - 1 \rightarrow n$ jatkuu …
- Koska satunnaismuuttujat $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ on oletettu riippumattomiksi, myös satunnaismuuttujat $Y_{n-1} = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{n-1}^2$ ja X_n^2 ovat riippumattomia.
- Siten voimme soveltaa satunnaismuuttujaan

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{n-1}^2 + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

riippumattomien satunnaismuuttujien summan tiheysfunktion kaavaa:

$$f_n(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y-z)\, f_{n-1}(z)dz = C_n' \int_0^{\infty} (y-z)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(y-z)} z^{\frac{1}{2}(n-1)-1} e^{-\frac{1}{2}z} dz$$

$$= C_n' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (y-z)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}} dz$$

jossa C_n' on muuttujan y suhteen vakio.

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 8/10

- Induktio-askel $n-1 \to n$ jatkuu …
- Sijoituksella $z = yt$ integraali

$$f_n(y) = C_n' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^\infty (y-z)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}} dz$$

saadaan muokatuksi muotoon

$$f_n(y) = C_n' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^\infty (y-yt)^{-\frac{1}{2}} (yt)^{\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}} y dz$$

$$= C_n' y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^\infty (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}} dt$$

$$= C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

jossa $C_n = C_n' \int_0^\infty (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}} dt$ on muuttujan y suhteen vakio.

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 9/10

- Induktiopäättely jatkuu ...
- Yhdistämällä kalvojen 2/10-8/10 tulokset nähdään, että satunnais-muuttujan

$$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

tiheysfunktion lauseke

$$f_n(y) = C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

pätee kaikille n = 1, 2, 3, …

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 10/10

- Määrätään vielä *normeerausvakio* C_n .
- Todetaan ensin, että tiheysfunktio f_n toteuttaa seuraavan ehdon:

$$\int_0^\infty f_n(y)dy = C_n \int_0^\infty y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y} dy = 1$$

- Sijoituksella $y = 2t$ tämä integraali saadaan muokatuksi muotoon

$$2^{\frac{1}{2}n} C_n \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}n-1} e^{-t} dt = 1$$

- Siten normeerausvakion C_n arvoksi saadaan

$$C_n = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

jossa $\Gamma(\cdot)$ on *Eulerin gammafunktio*:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Momenttiemäfunktio

- Olkoon X *satunnaismuuttuja*.
- Oletetaan, että *odotusarvo*

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

on olemassa kaikille

$$t \in (-h, +h)$$

jossa $h > 0$ on vakio.

- Tällöin funktiota $m_X(t)$ kutsutaan satunnaismuuttujan X ja sen jakauman **momenttiemäfunktioksi** eli **momentit generoivaksi funktioksi**.
- Lisätietoja: ks. lukua **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio.**

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktio

- Olkoot

$$X_1, X_2, \dots , X_n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden *momentti-emäfunktiot* ovat

$$m_1(t), m_2(t), \dots , m_n(t)$$

- Tällöin **summan**

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

momenttiemäfunktio on satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots , X_n$ momenttiemäfunktioiden *tulo*:

$$m_X(t) = m_1(t)m_2(t) \cdots m_n(t)$$

Bernoulli-jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma

- Olkoot

$$X_1, X_2, \ldots , X_n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat *samaa Bernoulli-jakaumaa* parametrilla p:

$$X_1, X_2, \ldots , X_n \perp$$

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p) \text{ , } i = 1, 2, \ldots , n$$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots , X_n$ **summa**

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

noudattaa binomijakaumaa (ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**) parametrein (n , p):

$$Y \sim \text{Bin}(n , p)$$

Bernoulli-jakaumaa noudattavien satunnais-muuttujien summan jakauma: Perustelu 1/2

- Oletetaan, että

$$X_1, X_2, \dots , X_n \perp$$

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p) \text{ , } i = 1, 2, \dots , n$$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots , X_n$ *momenttiemäfunktio* on muotoa

$$m_i(t) = q + pe^t \text{ , } i = 1, 2, \dots, n$$

- Lisätietoja: ks. lukua **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio.**
- Muodostetaan satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots , X_n$ *summa*:

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Bernoulli-jakaumaa noudattavien satunnais-muuttujien summan jakauma: Perustelu 2/2

- *Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktiota koskevan tuloksen mukaan* satunnaismuuttujan

  $$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

  momenttiemäfunktio on

  $$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_1(t)m_2(t)\cdots m_n(t) \\ &= (q+pe^t)(q+pe^t)\cdots(q+pe^t) \\ &= (q+pe^t)^n \end{aligned}$$

- Koska $m_Y(t)$ on *binomijakauman* Bin(n, p) momenttiemäfunktio, niin

  $$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim \mathrm{Bin}(n\,,\, p)$$

Binomijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma

- Olkoot

$$X_1, X_2, \ldots , X_k$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat *binomijakaumia* parametrein $(n_1 , p), (n_2 , p), \ldots , (n_k , p)$:

$$X_1, X_2, \ldots , X_k \perp$$

$$X_i \sim \mathrm{Bin}(n_i , p) , i = 1, 2, \ldots , k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots , X_k$ **summa**

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

noudattaa binomijakaumaa (ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**) parametrein $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k , p)$:

$$Y \sim \mathrm{Bin}(n_1 + n_2 + \cdots + n_k , p)$$

Binomijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma: Perustelu 1/2

- Oletetaan, että

$$X_1, X_2, \ldots , X_k \perp$$

$$X_i \sim \mathrm{Bin}(n_i , p) , i = 1, 2, \ldots , k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots , X_k$ *momenttiemäfunktiot* ovat muotoa

$$m_i(t) = (q + pe^t)^{n_i} \ , i = 1, 2, \ldots, k$$

- Lisätietoja: ks. lukua **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio.**
- Muodostetaan satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots , X_k$ *summa*:

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

Binomijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma: Perustelu 2/2

- *Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktiota koskevan tuloksen mukaan* satunnaismuuttujan

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

momenttiemäfunktio on

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_1(t)m_2(t)\cdots m_k(t) \\ &= (q+pe^t)^{n_1}(q+pe^t)^{n_2}\cdots(q+pe^t)^{n_k} \\ &= (q+pe^t)^{n_1+n_2+\cdots+n_k} \end{aligned}$$

- Koska $m_Y(t)$ on *binomijakauman* $\mathrm{Bin}(n_1 + n_2 + \cdots + n_k , p)$ momentti-emäfunktio, niin

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim \mathrm{Bin}(n_1 + n_2 + \cdots + n_k , p)$$

Poisson-jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma

- Olkoot

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat *Poisson-jakaumia* parametrein $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$:

$$X_1, X_2, \dots, X_k \perp$$

$$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i),\ i = 1, 2, \dots, k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots, X_k$ **summa**

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

noudattaa Poisson-jakaumaa (ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**) parametrilla $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$:

$$Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Poisson-jakaumaa noudattavien satunnais-muuttujien summan jakauma: Perustelu 1/2

- Oletetaan, että

$$X_1, X_2, \dots, X_k \perp$$

$$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)\ ,\ i = 1, 2, \dots, k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots, X_k$ *momenttiemäfunktiot* ovat muotoa

$$m_i(t) = e^{\lambda_i(e^t - 1)}\ ,\ i = 1, 2, \dots, k$$

- Lisätietoja: ks. lukua **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio.**
- Muodostetaan satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots, X_k$ *summa*:

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

Poisson-jakaumaa noudattavien satunnais-muuttujien summan jakauma: Perustelu 2/2

- *Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktiota koskevan tuloksen mukaan* satunnaismuuttujan

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

momenttiemäfunktio on

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_1(t)m_2(t)\cdots m_k(t) \\ &= e^{\lambda_1(e^t-1)}e^{\lambda_2(e^t-1)}\cdots e^{\lambda_k(e^t-1)} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_1)(e^t-1)} \end{aligned}$$

- Koska $m_Y(t)$ on *Poisson-jakauman* Poisson($\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$) momenttiemäfunktio, niin

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)$$

Normaalijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma

- Olkoot

$$X_1, X_2, \ldots , X_k$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat *normaalijakaumia* parametrein $(\mu_1,\sigma_1^2),(\mu_2,\sigma_2^2),\ldots,(\mu_k,\sigma_k^2)$:

$$X_1, X_2, \ldots , X_k \perp$$

$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i,\sigma_i^2)\,,\ i = 1, 2, \ldots , k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots , X_k$ **summa**

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

noudattaa normaalijakaumaa (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) parametrein $(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k\ ,\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_k^2)$:

$$Y \sim \mathrm{N}(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k\ ,\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_k^2)$$

Normaalijakaumaa noudattavien satunnais-muuttujien summan jakauma: Perustelu 1/2

- Oletetaan, että

$$X_1, X_2, \dots, X_k \perp$$
$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2), \ i = 1, 2, \dots, k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots, X_k$ *momenttiemäfunktiot* ovat muotoa

$$m_i(t) = \exp(\mu_i t + \tfrac{1}{2}\sigma_i^2 t^2), \ i = 1, 2, \dots, k$$

- Lisätietoja: ks. lukua **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio.**
- Muodostetaan satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots, X_k$ *summa*:

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

Normaalijakaumaa noudattavien satunnais-muuttujien summan jakauma: Perustelu 2/2

- *Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktiota koskevan tuloksen mukaan* satunnaismuuttujan

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

momenttiemäfunktio on

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_1(t)m_2(t)\cdots m_k(t) \\ &= \exp(\mu_1 t + \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 t^2)\exp(\mu_2 t + \tfrac{1}{2}\sigma_2^2 t^2)\cdots\exp(\mu_k t + \tfrac{1}{2}\sigma_k^2 t^2) \\ &= \exp((\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k)t + \tfrac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2)t^2) \end{aligned}$$

- Koska $m_Y(t)$ on *normaalijakauman* $\mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k\ , \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2)$ momenttiemäfunktio, niin

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k\ , \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2)$$

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

>> Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Avainsanat

- ***F*-jakauma**
- **Jacobin determinantti**
- **Kertymäfunktio**
- **Normaalijakauma**
- **Satunnaismuuttuja**
- **Satunnaismuuttujien osamäärän jakauma**
- **Studentin *t*-jakauma**
- **Tiheysfunktio**
- **Todennäköisyysjakauma**

Satunnaismuuttujien riippumattomuus

- Olkoot X ja Y *riippumattomia* ja *jatkuvia satunnais-muuttujia*.
- Tällöin niiden *yhteisjakauman tiheysfunktio*

  $$f_{XY}(x, y)$$

  voidaan esittää satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumien tiheysfunktioiden* $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$ tulona:

  $$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

- Olkoot X ja $Y > 0$ *riippumattomia* ja *jatkuvia satunnaismuuttujia*, joiden *tiheysfunktiot* ovat $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.
- Määritellään satunnaismuuttuja

$$U = X / Y$$

- **Osamäärän** $U = X / Y$ **tiheysfunktio** on

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(uy) f_Y(y) dy$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma: Todistus 1/3

- Olkoot X ja $Y > 0$ *riippumattomia* ja *jatkuvia satunnaismuuttujia*, joiden *tiheysfunktiot* ovat $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.
- Koska satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia,

$$f_{XY}(x, y) = f_Y(y)f_X(x)$$

- Olkoot

$$U = X / Y$$

$$V = Y$$

- Satunnaismuuttujien X ja Y osamäärän jakauma saadaan määräämällä satunnaismuuttujan U *reunajakauma* satunnaismuuttujien U ja V yhteisjakaumasta.

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma: Todistus 2/3

- Tarkastellaan muunnosta

$$(*)\qquad \begin{cases} u = x/y \\ v = y \end{cases}$$

- Muunnoksen $(*)$ *käänteismuunnos*:

$$\begin{cases} x = uv \\ y = v \end{cases}$$

- Muunnoksen $(*)$ *Jacobin determinantti*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{1}{y}\cdot 1 - \left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot 0 \\ &= 1/y \neq 0 \end{aligned}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma: Todistus 3/3

- Siten satunnaismuuttujien $U = X / Y$ ja $V = Y$ *yhteisjakauman tiheysfunktio* on

$$
\begin{aligned}
f_{UV}(u,v) &= f_{XY}(x,y)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} \\
&= f_X(x)f_Y(y)y \\
&= vf_X(uv)f_Y(v)
\end{aligned}
$$

- *Osamäärän* $U = X / Y$ *tiheysfunktio* saadaan tästä satunnaismuuttujan U *reunajakauman tiheysfunktiona*:

$$
\begin{aligned}
f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{UV}(u,v)dv &= \int_{-\infty}^{+\infty} vf_X(uv)f_Y(v)dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} yf_X(uy)f_Y(y)dy
\end{aligned}
$$

F-jakauma 1/4

- Tarkastellaan riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakaumaa koskevan yleisen tuloksen sovelluksena ***F*-jakauman** (ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**) *tiheysfunktion lausekkeen johtoa*.
- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

$$X_1\,,X_2\,,\ldots\,,X_m\,,Y_1\,,Y_2\,,\ldots\,,Y_n$$

ovat *riippumattomia* ja noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$X_1\,,X_2\,,\ldots\,,X_m\,,Y_1\,,Y_2\,,\ldots\,,Y_n\perp$$

$$X_i\sim \mathrm{N}(0,1)\,,\ i=1,2,\ldots\,,m$$

$$Y_i\sim \mathrm{N}(0,1)\,,\ i=1,2,\ldots\,,n$$

F-jakauma 2/4

- Määritellään satunnaismuuttujat

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_m^2$$

$$Y = Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2$$

- Satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia* ja χ^2-jakauman määritelmän mukaan X noudattaa χ^2*-jakaumaa* m:llä vapausasteella ja Y noudattaa χ^2*-jakaumaa* n:llä vapausasteella:

$$X \sim \chi^2(m)$$

$$Y \sim \chi^2(n)$$

$$X \perp Y$$

F-jakauma 3/4

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$F = \frac{X/m}{Y/n} = \frac{n}{m} \cdot \frac{X}{Y}$$

jossa siis

$$X \sim \chi^2(m)$$

$$Y \sim \chi^2(n)$$

$$X \perp Y$$

- Satunnaismuuttuja F noudattaa F-jakauman määritelmän mukaan ***F*-jakaumaa vapausastein *m* ja *n***:

$$F \sim F(m, n)$$

F-jakauma 4/4

- Satunnaismuuttujan

  $F \sim F(m, n)$

  tiheysfunktio on

$$f_F(y) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

  jossa $\Gamma(\cdot)$ on *Eulerin gammafunktio*:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

F-jakauma: Tiheysfunktion johto 1/6

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$F = \frac{n}{m} \cdot \frac{X}{Y}$$

jossa

$$X \sim \chi^2(m)\,,\, Y \sim \chi^2(n)\,,\, X \perp Y$$

- Tällöin

$$F \sim F(m, n)$$

- Käytetään satunnaismuuttujan F tiheysfunktion lausekkeen

$$f_F(y) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n} y\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

perustelemiseen yleistä tulosta riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakaumalle.

F-jakauma: Tiheysfunktion johto 2/6

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$Z = \frac{X}{Y}$$

jossa

$$X \sim \chi^2(m)\,,\, Y \sim \chi^2(n)\,,\, X \perp Y$$

- $\chi^2(n)$-jakauman tiheysfunktio on muotoa (ks. kappaletta **Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma**):

$$f_n(y) = C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

$$C_n = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt$$

F-jakauma: Tiheysfunktion johto 3/6

- *Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän tiheysfunktion kaavan* mukaan satunnaismuuttujan $Z = X/Y$ tiheysfunktio on

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(zy) f_Y(y) dy = C_m C_n \int_0^{\infty} y (zy)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}zy} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} dy$$

$$= C_m C_n \int_0^{\infty} y (zy)^{\frac{m}{2}-1} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(1+z)y} dy$$

- Kun integraalissa tehdään sijoitus $(1 + y)z = t$, saadaan

$$f_Z(z) = C_m C_n \int_0^{\infty} \frac{t}{1+z} \left(z \frac{t}{1+z} \right)^{\frac{m}{2}-1} \left(\frac{t}{1+z} \right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}t} \frac{1}{1+z} dt$$

$$= C_m C_n z^{\frac{m}{2}-1} (1+z)^{-\frac{m+n}{2}} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}(m+m)-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

F-jakauma: Tiheysfunktion johto 4/6

- Satunnaismuuttujan $Z = X/Y$ tiheysfunktion lausekkeen

$$f_Z(z) = C_m C_n z^{\frac{m}{2}-1}(1+z)^{-\frac{m+n}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}(m+m)-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

integraalin

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}(m+m)-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

integroitava on $\chi^2(m + n)$-jakauman tiheysfunktion *ydin*.

- Siten

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}(m+m)-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt = \frac{1}{C_{m+n}}$$

F-jakauma: Tiheysfunktion johto 5/6

- Sijoittamalla vakioiden C_m , C_n ja C_{m+n} lausekkeet paikoilleen saadaan satunnaismuuttujan $Z = X/Y$ tiheysfunktioksi

$$f_Z(z) = \frac{C_m C_n}{C_{m+n}} z^{\frac{m}{2}-1}(1+z)^{-\frac{m+n}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} z^{\frac{m}{2}-1}(1+z)^{-\frac{m+n}{2}}$$

- Satunnaismuuttujan

$$F = \frac{n}{m}\cdot\frac{X}{Y} \sim F(m,n)$$

saadaan satunnaismuuttujan $Z = X/Y$ tiheysfunktiosta *lineaari-muunnoksella*

$$F = \frac{n}{m}Z$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

F-jakauma: Tiheysfunktion johto 6/6

- Soveltamalla satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen tiheysfunktion kaavaa (ks. kappaletta **Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat**) saadaan $F(m, n)$-jakauman tiheysfunktioksi

$$f_F(y) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

t-jakauma 1/4

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

  $$X \,,\, Y_1 \,,\, Y_2 \,,\, \ldots \,,\, Y_n$$

  ovat *riippumattomia* ja noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa*:

  $$X \,,\, Y_1 \,,\, Y_2 \,,\, \ldots \,,\, Y_n \perp$$

  $$X \sim \mathrm{N}(0,\, 1)$$

  $$Y_i \sim \mathrm{N}(0,\, 1) \,,\, i = 1, 2, \ldots \,,\, n$$

t-jakauma 2/4

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$Y = Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2$$

- Satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, X noudattaa *standardoitua normaalijakaumaa* N(0, 1) ja Y noudattaa χ^2-jakauman määritelmän mukaan χ^2-*jakaumaa* n:llä vapausasteella:

$$X \sim \mathrm{N}(0,1)$$

$$Y \sim \chi^2(n)$$

$$X \perp Y$$

t-jakauma 3/4

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} = \sqrt{n} \cdot \frac{X}{\sqrt{Y}}$$

jossa siis

$$X \sim \mathrm{N}(0,1)$$

$$Y \sim \chi^2(n)$$

$$X \perp Y$$

- Satunnaismuuttuja t noudattaa t-jakauman määritelmän mukaan **Studentin *t*-jakaumaa vapausastein *n*** (ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**):

$$t \sim t(n)$$

t-jakauma 4/4

- Satunnaismuuttujan

  $$t \sim t(n)$$

  tiheysfunktio on

  $$f_t(y) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{n} y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

  jossa $\Gamma(\cdot)$ on *Eulerin gammafunktio*:

  $$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

t-jakauma: Tiheysfunktion johto 1/4

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$t = \sqrt{n}\,\frac{X}{\sqrt{Y}}$$

jossa

$$X \sim \mathrm{N}(0,1)\,,\ Y \sim \chi^2(n)\,,\ X \perp Y$$

- Tällöin

$$t \sim t(n)$$

- Käytetään satunnaismuuttujan t tiheysfunktion lausekkeen

$$f_t(y) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{1}{n}y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

perustelemisessa hyväksi sitä, että

$$t^2 \sim F(1, n)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

t-jakauma:
Tiheysfunktion johto 2/4

- Jakauman $F(1, n)$ tiheysfunktio on

$$f_F(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}-1}\left(1+\frac{1}{n}z\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{z}}\left(1+\frac{1}{n}z\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

t-jakauma: Tiheysfunktion johto 3/4

- Koska

$$t = \sqrt{z}$$

jossa

$$z \sim F(1, n)$$

pätee seuraava tulos, kun $y > 0$:

$$\begin{aligned}\Pr(0 \le t \le y) &= \tfrac{1}{2}\Pr(0 \le |t| \le y) \\ &= \tfrac{1}{2}\Pr(0 \le t^2 \le y^2) \\ &= \tfrac{1}{2}\Pr(0 \le z \le y^2) \\ &= \tfrac{1}{2}F_F(y^2)\end{aligned}$$

jossa F_F on jakauman $F(1, n)$ *kertymäfunktio*.

t-jakauma: Tiheysfunktion johto 4/4

- Derivoimalla yhtälö

$$\Pr(0 \le t \le y) = \tfrac{1}{2} F_F(y^2)$$

saadaan satunnaismuuttujan t tiheysfunktioksi, kun $y > 0$:

$$f_t(y) = y f_F(y^2)$$

- Siten jakauman $t(n)$ tiheysfunktioksi saadaan lopulta

$$f_t(y) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{n} y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

>> Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Avainsanat

Eksponenttijakauma
Kertymäfunktio
Maksimi
Minimi
Satunnaismuuttuja
Tiheysfunktio
Todennäköisyysjakauma

Satunnaismuuttujien minimin jakauma 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  ovat *riippumattomia* ja noudattavat *samaa jakaumaa*, jonka *kertymäfunktio* on $F(x)$:

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n \perp$$

  $$X_i \sim F(x) , i = 1, 2, \ldots , n$$

- Olkoon satunnaismuuttuja $X_{(1)}$ satunnaismuuttujien $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ **minimi**:

  $$X_{(1)} = \min\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

Satunnaismuuttujien minimin jakauma 2/2

- Satunnaismuuttujan

  $$X_{(1)} = \min\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

  kertymäfunktio on

  $$F_{(1)} = 1 - [1 - F(x)]^n$$

- Jos satunnaismuuttujat $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ ovat lisäksi *jatkuvia* ja niiden *tiheysfunktio* on

  $$f(x) = F'(x)$$

  niin satunnaismuuttujan

  $$X_{(1)} = \min\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

  tiheysfunktio on

  $$f_{(1)} = n[1 - F(x)]^{n-1}f(x)$$

Satunnaismuuttujien minimin jakauma: Perustelu 1/3

- Oletetaan, että

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n \perp$$

$$X_i \sim F(x) , i = 1, 2, \ldots , n$$

- Olkoon

$$X_{(1)} = \min\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

Satunnaismuuttujien minimin jakauma: Perustelu 2/3

- Soveltamalla *kertymäfunktion määritelmää*, *komplementtitodennäköisyyden kaavaa* ja satunnaismuuttujien $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *riippumattomuutta* satunnaismuuttujan

  $$X_{(1)} = \min\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

  kertymäfunktioksi saadaan:

  $$\begin{aligned} F_{(1)}(x) &= \Pr(X_{(1)} \le x) \\ &= 1 - \Pr(X_{(1)} > x) \\ &= 1 - \Pr(X_1 > x \;\, ja \;\, X_2 > x \;\, ja \ldots ja \;\, X_n > x) \\ &= 1 - \Pr(X_1 > x)\Pr(X_2 > x)\cdots\Pr(X_n > x) \\ &= 1 - [1 - \Pr(X_1 \le x)][1 - \Pr(X_2 \le x)]\cdots[1 - \Pr(X_n \le x)] \\ &= 1 - [1 - F(x)][1 - F(x)]\cdots[1 - F(x)] \\ &= 1 - [1 - F(x)]^n \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien minimin jakauma: Perustelu 3/3

- Oletetaan lisäksi, että satunnaismuuttujat $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ ovat *jatkuvia* ja niiden tiheysfunktio on

$$f(x) = F'(x)$$

- Tällöin satunnaismuuttujan

$$X_{(1)} = \min\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

tiheysfunktio saadaan derivoimalla satunnaismuuttujan $X_{(1)}$ kertymäfunktion lauseke:

$$\begin{aligned} f_{(1)}(x) = F_{(1)}'(x) &= \frac{d}{dx}\{1-[1-F(x)]^n\} \\ &= -n[1-F(x)]^{n-1}[-F'(x)] \\ &= n[1-F(x)]^{n-1} f(x) \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien minimin jakauma: Eksponenttijakauma 1/2

- Oletetaan, että riippumattomat satunnaismuuttujat $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ noudattavat *samaa* **eksponenttijakaumaa** (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) parametrinaan λ :

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n \perp$$

$$X_i \sim \text{Exp}(\lambda) \text{ , } i = 1, 2, \ldots , n$$

- Satunnaismuuttujien $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *kertymäfunktio*:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Satunnaismuuttujien $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *tiheysfunktio*:

$$f(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Satunnaismuuttujien minimin jakauma: Eksponenttijakauma 2/2

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$X_{(1)} = \min\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

- Satunnaismuuttujan $X_{(1)}$ *kertymäfunktio*:

$$F_{(1)}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n = 1 - [1 - (1 - e^{-\lambda x})]^n$$
$$= 1 - e^{-n\lambda x}$$

- Satunnaismuuttujan $X_{(1)}$ *tiheysfunktio*:

$$f_{(1)}(x) = F'_{(1)}(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{-n\lambda x})$$
$$= n\lambda e^{-n\lambda x}$$

- Siten *samaa* eksponenttijakaumaa Exp(λ) noudattavien satunnais-muuttujien $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *minimi* $X_{(1)}$ *noudattaa* **eksponentti-jakaumaa** parametrinaan $n\lambda$:

$$X_{(1)} \sim \mathrm{Exp}(n\lambda)$$

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  ovat *riippumattomia* ja noudattavat *samaa jakaumaa*, jonka *kertymäfunktio* on $F(x)$:

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n \perp$$

  $$X_i \sim F(x) , i = 1, 2, \ldots , n$$

- Olkoon satunnaismuuttuja $X_{(n)}$ satunnaismuuttujien $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ **maksimi**:

  $$X_{(n)} = \max\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma 2/2

- Satunnaismuuttujan

  $$X_{(n)} = \max\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

  kertymäfunktio on

  $$F_{(n)} = [F(x)]^n$$

- Jos satunnaismuuttujat $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ ovat lisäksi *jatkuvia* ja niiden *tiheysfunktio* on

  $$f(x) = F'(x)$$

  niin satunnaismuuttujan

  $$X_{(n)} = \max\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

  tiheysfunktio on

  $$f_{(n)} = n[F(x)]^{n-1}f(x)$$

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma: Perustelu 1/3

- Oletetaan, että

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n \perp$$
$$X_i \sim F(x) , i = 1, 2, \ldots , n$$

- Olkoon

$$X_{(n)} = \max\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma: Perustelu 2/3

- Soveltamalla *kertymäfunktion määritelmää* ja satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *riippumattomuutta* satunnaismuuttujan

  $$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

  kertymäfunktioksi saadaan:

  $$\begin{aligned} F_{(n)}(x) &= \Pr(X_{(n)} \le x) \\ &= \Pr(X_1 \le x \ ja \ X_2 \le x \ ja \ldots ja \ X_n \le x) \\ &= \Pr(X_1 \le x)\Pr(X_2 \le x)\cdots\Pr(X_n \le x) \\ &= F(x)F(x)\cdots F(x) \\ &= [F(x)]^n \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma: Perustelu 3/3

- Oletetaan lisäksi, että satunnaismuuttujat $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ovat *jatkuvia* ja niiden tiheysfunktio on

$$f(x) = F'(x)$$

- Tällöin satunnaismuuttujan

$$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

tiheysfunktio saadaan derivoimalla satunnaismuuttujan $X_{(n)}$ kertymäfunktion lauseke:

$$\begin{aligned} f_{(n)}(x) = F'_{(n)}(x) &= \frac{d}{dx}[F(x)]^n \\ &= n[F(x)]^{n-1}F'(x) \\ &= n[F(x)]^{n-1} f(x) \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma: Eksponenttijakauma 1/2

- Oletetaan, että riippumattomat satunnaismuuttujat $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ noudattavat *samaa* **eksponenttijakaumaa** (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) parametrinaan λ :

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n \perp$$

$$X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \text{ , } i = 1, 2, \ldots , n$$

- Satunnaismuuttujien $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *kertymäfunktio*:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Satunnaismuuttujien $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *tiheysfunktio*:

$$f(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma: Eksponenttijakauma 2/2

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$X_{(n)} = \max\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

- Satunnaismuuttujan $X_{(n)}$ *kertymäfunktio*:

$$F_{(n)}(x) = [F(x)]^n = (1 - e^{-\lambda x})^n$$

- Satunnaismuuttujan $X_{(n)}$ *tiheysfunktio*:

$$f_{(n)}(x) = F'_{(n)}(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{-\lambda x})^n$$

$$= n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}$$

- Siten *samaa* eksponenttijakaumaan Exp(λ) noudattavien satunnaismuuttujien $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *maksimi* $X_{(n)}$ *ei noudata mitään tavanomaista jakaumaa* toisin kuin niiden *minimi* $X_{(1)}$, joka *noudattaa eksponenttijakaumaa* parametrinaan $n\lambda$.