

---

Johdatus todennäköisyyslaskentaan

# Todennäköisyyden peruslaskusäännöt

# Todennäköisyyden peruslaskusäännöt

---

**Tapahtumat**

**Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle**

**Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus**

# Todennäköisyyden peruslaskusäännöt: Mitä opimme?

---

- Tarkastelemme tässä luvussa **satunnaisilmiöiden tapahtumista joukko-opin säännöillä johdettujen uusien tapahtumien todennäköisyyksien määräämistä**.
- Säännöt tehdään ilmeisiksi ns. **Venn-diagrammien** ja esimerkkien avulla.
- Tarkastelemme lisäksi **ehdollisen todennäköisyyden** määrittelemistä.

# Todennäköisyyden peruslaskusäännöt: Esitiedot

---

- Esitiedot: ks. seuraavaa lukua:

**Todennäköisyys ja sen määrittely**

# Todennäköisyyden peruslaskusäännöt: Lisätiedot

---

- **Todennäköisyyslaskentaa aksiomaattisena matemaattisena järjestelmänä ja todennäköisyyslaskennan peruslaskusääntöjen todistamista** tarkastellaan luvussa

**Todennäköisyyden aksioomat**

- **Todennäköisyyslaskennan peruslaskusääntöjen havainnollistamista puumaisten verkkojen avulla** tarkastellaan liitteessä

**Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit**

# Todennäköisyyden peruslaskusäännöt

---

## >> Tapahtumat

**Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle**

**Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus**

# Tapahtumat

---

## *Avainsanat*

**Alkeistapahtuma**

**Alkio**

**Ehdollinen todennäköisyys**

**Erotustapahtuma**

**Joukko**

**Joukko-opin operaatiot**

- erotus
- komplementti
- leikkaus
- yhdiste eli unioni

**Joukko-opin relaatiot**

- kuulua joukkoon
- osajoukko

**Joukko-oppi**

**Komplementtitapahtuma**

**Osajoukko**

**Perusjoukko**

**Tapahtuma**

**Tyhjä joukko**

**Uusien tapahtumien muodostaminen**

**Venn-diagrammi**

**Yhdistetyt tapahtumat**

# Todennäköisyyslaskennan peruslaskutoimitukset ja -säännöt

---

- *Todennäköisyyslaskennalla tarkoitetaan* usein sellaisten **laskutoimitusten ja laskusääntöjen kokoelmaa**, joiden avulla voidaan määrätä jonkin satunnaisilmiön tapahtumista *joukko-opin operaatioiden avulla* johdettujen **uusien tapahtumien** todennäköisyydet.
- *Laskusääntöjä ei tässä kappaleessa todisteta, mutta säännöt tehdään ilmeisiksi Venn-diagrammien ja esimerkkien avulla.* Laskusääntöjen todistaminen: ks. lukua **Todennäköisyyden aksioomat**.



## Johdetut tapahtumat

---

- Olkoot  $A$  ja  $B$  johonkin satunnaisilmiöön liittyviä *tapahtumia*.
- Tarkastelemme seuraavia **tapahtumista  $A$  ja  $B$  johdettuja tapahtumia**:
  - (i) **Tapahtuma  $A$  ei satu.**
  - (ii) **Tapahtuma  $A$  tai  $B$  sattuu:**  
**Tapahtuma  $A$  sattuu *tai* tapahtuma  $B$  sattuu *tai* molemmat sattuvat.**
  - (iii) **Tapahtuma  $A$  sattuu *ja* tapahtuma  $B$  sattuu.**
  - (iv) **Tapahtuma  $A$  sattuu, *mutta* tapahtuma  $B$  ei satu.**

## Todennäköisyyslaskenta ja joukko-oppi

---

- Todennäköisyyslaskennan historian tärkeimpiä teoreettisia oivalluksia on ollut se, että *satunnaisilmiöiden tapahtumia voidaan käsitellä joukkoina*.
- Siksi seuraavassa esitetään joukko-opin *peruskäsitteet*.  
Lisätietoja: ks. liitettä **Joukko-oppi**.

# Joukko-oppia: Joukko ja sen alkiot

---

- **Joukko** on *kokoelma olioita*, joita kutsutaan joukon **alkioiksi**.
- Joukko on **hyvin määritelty**, jos *sen alkiot tunnetaan*.
- Merkitään **joukon ja sen alkioiden välistä relaatiota** seuraavasti:
  - (i)  **$s$  on joukon  $A$  alkio** eli  **$s$  kuuluu joukkoon  $A$** :
$$s \in A$$
  - (ii)  **$s$  ei ole joukon  $A$  alkio** eli  **$s$  ei kuulu joukkoon  $A$** :
$$s \notin A$$

## Joukko-oppia: Osajoukko

---

- Olkoot  $A$  ja  $B$  kaksi joukkoa.
- Jos jokaiselle joukon  $B$  alkiolle  $s$  pätee, että

$$s \in B \Rightarrow s \in A$$

niin sanomme, että *joukko  $B$  on joukon  $A$  osajoukko* tai, että *joukko  $B$  sisältyy joukkoon  $A$ .*

- Merkintä:

*Joukko  $B$  on joukon  $A$  osajoukko:*

$$B \subset A \text{ tai } A \supset B$$

## Joukko-oppia: Tyhjä joukko

---

- Joukko on **tyhjä**, jos siihen ei kuulu yhtään alkiota.
- Tyhjää joukkoa merkitään symbolilla  
 $\emptyset$
- Jos joukko  $\emptyset$  on tyhjä, *ei ole olemassa* oliota  $s$ , jolle  
 $s \in \emptyset$
- Tyhjä joukko  $\emptyset$  on *jokaisen* joukon osajoukko eli mieli-  
valtaiselle joukolle  $A$  pätee:  
 $\emptyset \subset A$

## Otosavaruus ja alkeistapahtumat

---

- Satunnaisilmiön *kaikkien mahdollisten tulosvaihtoehtojen joukkoa* kutsutaan **otosavaruudeksi**.
- Otosavaruuden *alkioita* kutsutaan **alkeistapahtumiksi**.
- Merkinntät:
  - (i) *Otosavaruutta* (engl. *sample space*) merkitään tavallisesti isolla kirjaimella  $S$ .
  - (ii) *Otosavaruuden  $S$  alkiota* merkitään usein vastaavalla pienellä kirjaimella  $s$ .
- Jos siis alkeistapahtuma  $s$  kuuluu otosavaruuteen  $S$ , merkitään:

$$s \in S$$

## Otosavaruus ja alkeistapahtumat: Kommentteja

---

- Otosavaruus muodostaa sen **perusjoukon**, jossa satunnaisilmiön tulosvaihtoja tarkastellaan.
- Otosavaruuden alkiot ovat tarkasteltavan satunnaisilmiön alkeistapahtumia siinä mielessä, että satunnaisilmiötä ei voida ”purkaa” alkeistapahtumia *alkeellisempiin* tulosvaihtoehtoihin.

## Tapahtuma 1/2

---

- Olkoon  $S$  otosavaruus eli tarkasteltavan satunnaisilmiön kaikkien mahdollisten tulosvaihtoehtojen joukko.
- Tarkasteltavan satunnaisilmiön **tapahtumat** ovat otosavaruuden  $S$  alkeistapahtumien muodostamia joukkoja.
- Siten tapahtumat ovat tarkasteltavaan satunnaisilmiöön liittyvän otosavaruuden  $S$  osajoukkoja.



## Tapahtuma 2/2

---

- Jos siis  $A$  on jokin otosavaruuden  $S$  *tapahtuma*, niin

$$A \subset S$$

eli

$$s \in A \Rightarrow s \in S$$

jossa  $s$  on tapahtumaan  $A$  kuuluva *alkeistapahtuma*.

- **Kun sanomme, että tapahtuma  $A$  sattuu, tarkoitamme sitä, että jokin tapahtumaan  $A$  kuuluva alkeistapahtuma  $s$  sattuu.**

## Uusien tapahtumien johtaminen ja joukko-opin operaatiot 1/2

---

- Olkoot  $A$  ja  $B$  otosavaruuden  $S$  tapahtumia.
- Jokaista *operaatiota*, jolla *tapahtumista*  $A$  ja  $B$  johdetaan *uusia tapahtumia*, vastaa jokin **joukko-opin operaatio**.

# Uusien tapahtumien johtaminen ja joukko-opin operaatiot 2/2

---

Uuden tapahtuman muodostamisoperaatio	Vastaava joukko-opin operaatio
” <i>A ei satu</i> ”	Komplementti: $A^c = \{s \in S \mid s \notin A\}$
” <i>A tai B sattuu tai molemmat sattuvat</i> ”	Yhdiste eli unioni: $A \cup B = \{s \in S \mid s \in A \text{ tai } s \in B\}$
” <i>A ja B sattuvat</i> ”	Leikkaus: $A \cap B = \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \in B\}$
” <i>A sattuu, mutta B ei satu</i> ”	Erotus: $A \setminus B = \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \notin B\}$

## Venn-diagrammi 1/2

---

- Joukko-opin operaatioita ja todennäköisyyyslaskennan laskusääntöjä voidaan havainnollistaa **Venn-diagrammien** avulla:

(i) *Otosavaruutta*  $S$  kuvataan *suorakaiteella*, jonka pinta-ala vastaa otosavaruuden todennäköisyyttä

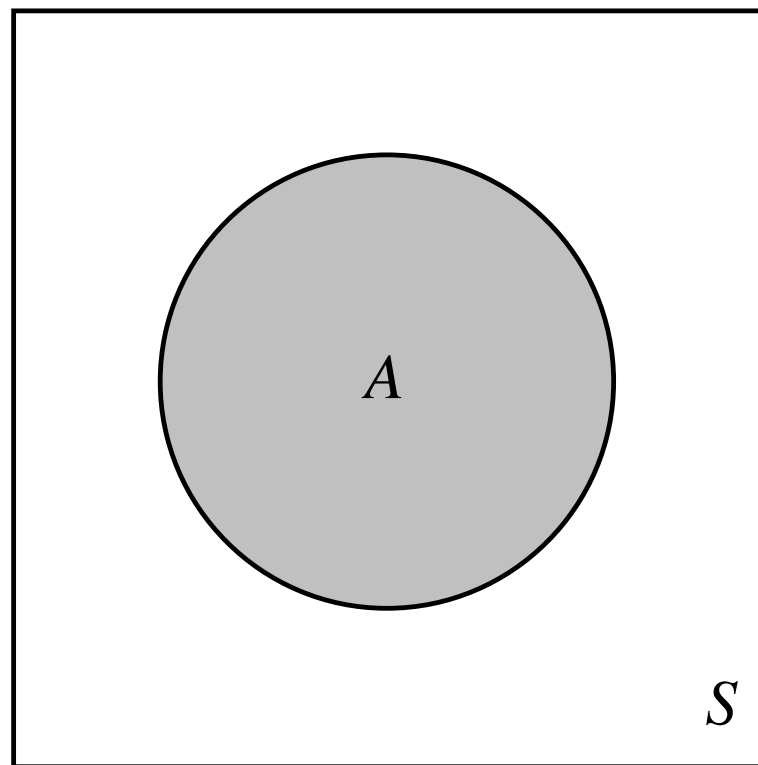
$$\Pr(S) = 1$$

(ii) *Tapahtumaa*  $A \subset S$  kuvataan *suorakaiteen osaluueella*, jonka pinta-ala vastaa tapahtuman  $A$  todennäköisyyttä

$$\Pr(A)$$

## Venn-diagrammi 2/2

- *Otosavaruutta eli perusjoukkoa*  $S$  kuvaa suorakaide.
- Suorakaiteen *pinta-ala* vastaa otosavaruuden  $S$  todennäköisyyttä  $\Pr(S) = 1$ .
- *Tapahtumaa*  $A \subset S$  kuvaa suorakaiteen varjostettu osa-alue.
- Osa-alueen  $A$  *pinta-ala* vastaa tapahtuman  $A$  todennäköisyyttä  $\Pr(A)$ .



## Venn-diagrammi: Kommentteja 1/2

---

- Todennäköisyyttä sanotaan usein *tapahtumien sattumisen mahdollisuuden mitaksi*.
- Venn-diagrammien käyttö todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen *havainnollistuksissa* perustuu juuri tähän kuvaan todennäköisyydestä *mittana*.
- *Todennäköisyys* käyttäytyy mittana samalla tavalla kuin *pinta-ala* paitsi, että todennäköisyysmitalla on ylärajana varman tapahtuman todennäköisyys 1.

## Venn-diagrammi: Kommentteja 2/2

---

- On syytä huomata, että todennäköisyyslaskennan laskusäännön *havainnollistus Venn-diagrammin avulla ei ole säännön todistus.*
- Todennäköisyyslaskennan laskusäännöt *voidaan todistaa Kolmogorovin aksioomajärjestelmässä.*  
Ks. lukua **Todennäköisyyden aksioomat.**
- Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä voidaan havainnollistaa myös ns. *puudiagrammeilla.*  
Ks. liitettä **Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit.**

## Tapahtuman $A$ komplementti

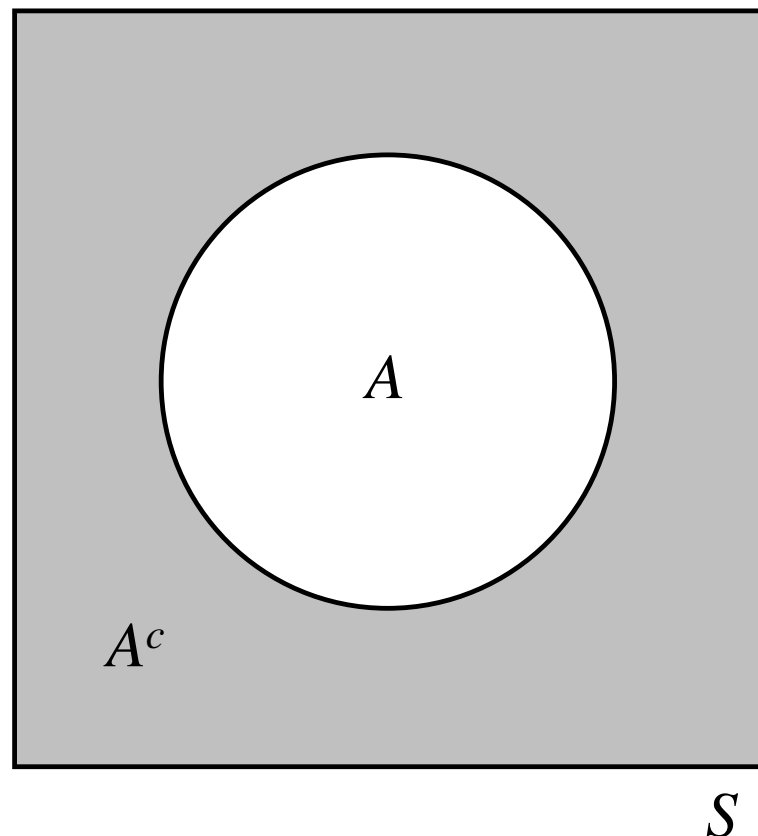
- Olkoon  $A \subset S$  otosavaruuden  $S$  tapahtuma.

- Tapahtuman  $A$   
*komplementtitapahtuma*

$$A^c = \text{”}A \text{ ei satu”} = ei-A$$

on niiden alkeistapahtumien joukko, jotka *eivät* kuulu joukkoon  $A$ :

$$A^c = \{s \in S \mid s \notin A\}$$





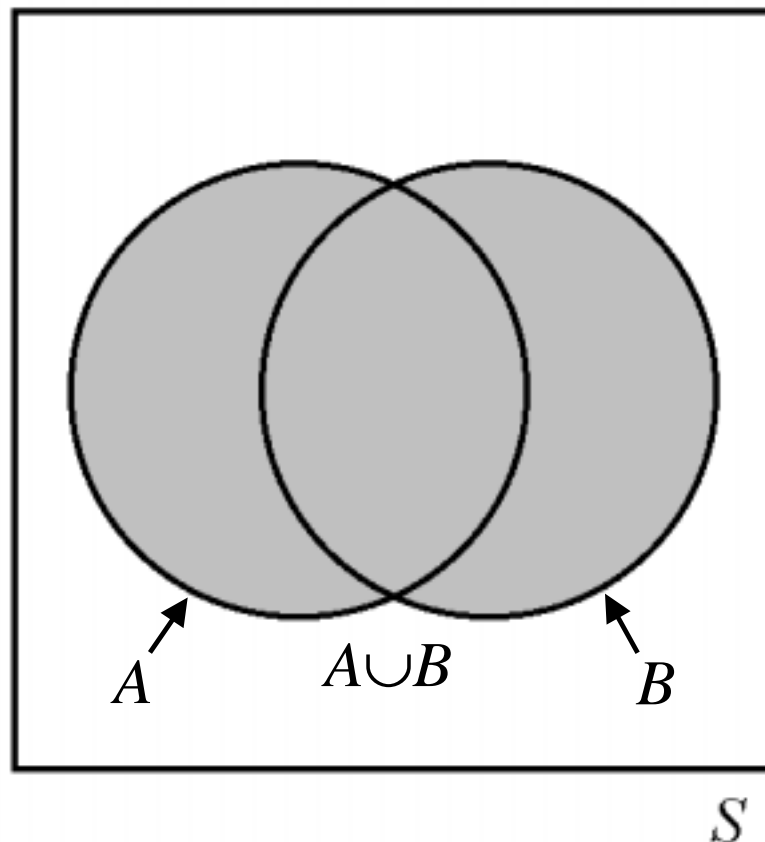
## Tapahtumien $A$ ja $B$ yhdiste

- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  tapahtumia.
- Yhdistetty tapahtuma

$A \cup B =$  ” $A$  sattuu tai  $B$  sattuu tai molemmat sattuvat”

on niiden alkeistapahtumien joukko, jotka kuuluvat joukkoon  $A$  tai joukkoon  $B$  tai molempiin:

$$A \cup B = \{s \in S \mid s \in A \text{ tai } s \in B\}$$



## Tapahtumien $A$ ja $B$ leikkaus

- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  tapahtumia.

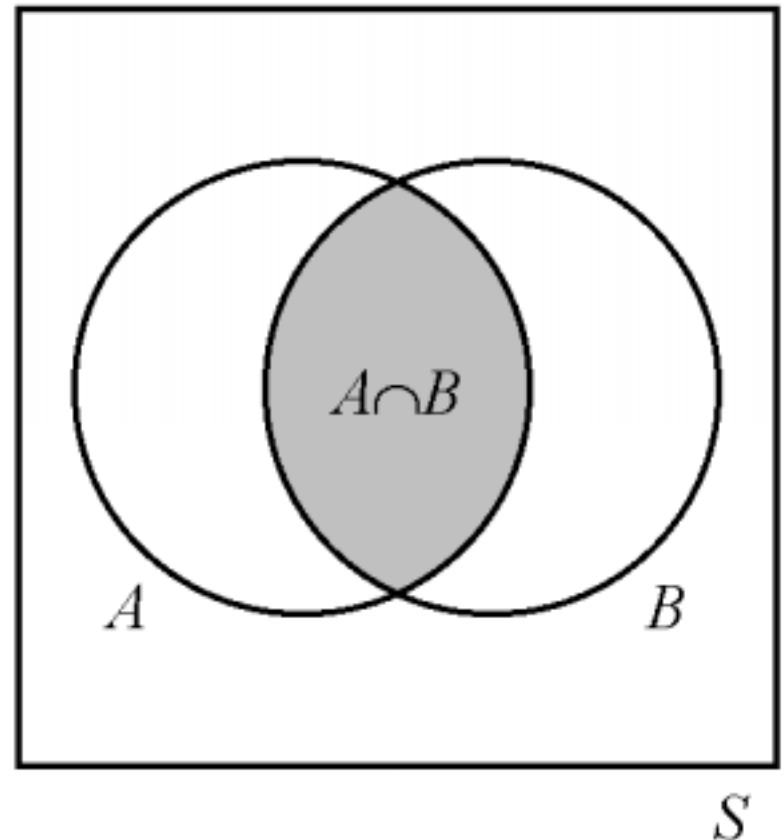
- Yhdistetty tapahtuma

$A \cap B =$  ” $A$  ja  $B$  sattuvat”

on niiden alkeistapahtumien joukko, jotka kuuluvat joukkoon  $A$  ja joukkoon  $B$ :

$$A \cap B$$

$$= \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \in B\}$$



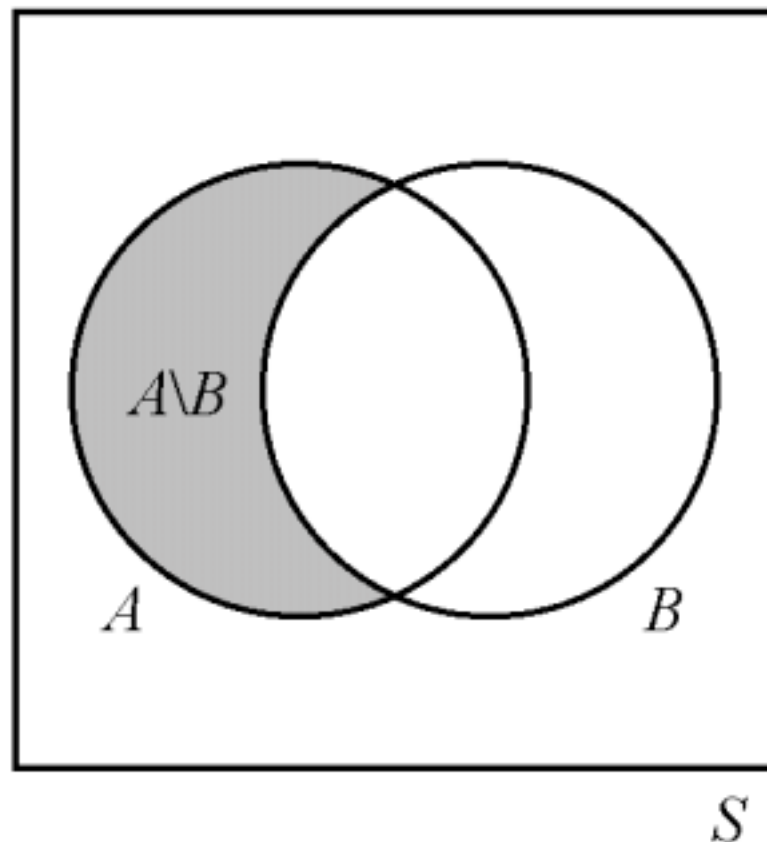
## Tapahtumien $A$ ja $B$ erotus

- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  tapahtumia.
- Yhdistetty tapahtuma

$A \setminus B =$  ” $A$  sattuu,  
*mutta  $B$  ei satu*”

on niiden alkeistapahtumien joukko, jotka kuuluvat joukkoon  $A$ , *mutta eivät* kuulu joukkoon  $B$ :

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \notin B\} \\ &= A \cap B^c \end{aligned}$$



# Esimerkkiaineisto 1:

## Eduskunnan kokoonpano – 1/3

---

- Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä havainnollistetaan tässä kappaleessa useilla esimerkeillä, joissa yksi tai useampia kansanedustajia valitaan *satunnaisesti* kaikkien kansanedustajien joukosta.
- Esimerkeissä eduskunnan kokoonpano on vuoden 1999 eduskuntavaalien tuloksen mukainen.
- Edustajan *satunnaista* valintaa voidaan kuvata *arvontana*, joka voidaan toteuttaa esim. seuraavalla tavalla:
  - (1) Asetetaan jokaista edustajaa vastaamaan *arpalippu*.
  - (2) Pannaan arpaliput *urnaan*.
  - (3) *Sekoitetaan* urnan sisältö huolellisesti.
  - (4) *Nostetaan* urnasta arpalippu, jota vastaava edustaja valitaan.

# Esimerkkiaineisto 1: Eduskunnan kokoonpano – 2/3

---

- Arvonta voidaan *toistaa* kahdella eri tavalla:
  - (i) Arpalippu *palautetaan* noston jälkeen uurnaan ja uurnan sisältö *sekoitetaan* huolellisesti.  
Tällöin sama edustaja *voi* tulla valituksi *uudelleen*.
  - (ii) Arpalippua *ei palauteta* noston jälkeen uurnaan.  
Tällöin sama edustaja *ei voi* tulla valituksi *kuin kerran*.
- Arvontamenetelmää (i) kutsutaan *otoksen poimimiseksi takaisinpanolla*.
- Arvontamenetelmää (ii) kutsutaan *otoksen poimimiseksi ilman takaisinpanoa*.
- Esimerkki:  
*Lottoarvonnassa sovelletaan otantaa ilman takaisinpanoa.*

Tapahumat

## Esimerkkiaineisto 1:

### Eduskunnan kokoonpano – 3/3

---

Edustajapaikkojen jakautuminen vuoden 1999 vaaleissa:

<b>Puolue</b>	<b>Paikat</b>	<b>Miehet</b>	<b>Naiset</b>
SDP	51	29	22
Kesk	48	35	13
Kok	46	29	17
Vas	20	14	6
RKP	12	9	3
Vihr	11	2	9
SKL	10	7	3
PS	1	1	0
Rem	1	1	0
<b>Yhteensä</b>	<b>200</b>	<b>127</b>	<b>73</b>

## Esimerkkiaineisto 2: Korttipakka

---

- Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä havainnollistetaan tässä kappaleessa useilla esimerkeillä, joissa pelikortteja poimitaan *satunnaisesti* hyvin sekoitetusta korttipakasta.
- Korttipakassa on 52 korttia (ilman jokereita).
- Korttipakka jakautuu 4:ään *maahan*:
  - pata, hertta, ruutu, risti
- Jokaisessa maassa on 13 korttia:
  - A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2
- Kortit
  - A = ässä (kortti numero 1)
  - K = kuningas
  - Q = kuningatar
  - J = sotilas

ovat ns. *kuvakortteja*.

# Todennäköisyyden peruslaskusäännöt

---

Uusien tapahtumien muodostaminen

>> Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle

Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus



# Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle

---

## *Avainsanat*

**Erotustapahtuman todennäköisyys**

**Komplementtitapahtuman**

**todennäköisyys**

**Leikkausjoukon todennäköisyys**

**Osajoukon todennäköisyys**

**Riippumattomuus**

**Todennäköisyyslaskennan**

**peruslaskutoimitukset**

**Toisensa poissulkevat tapahtumat**

**Tulosääntö**

**riippumattomille tapahtumille**

**Yhdisteen todennäköisyys**

**Yhteenlaskusääntö**

**toisensa poissulkeville**

**tapahtumille**

**Yleinen tulosääntö**

**Yleinen yhteenlaskusääntö**

**Yleistetty tulosääntö**

**riippumattomille tapahtumille**

**Yleistetty yhteenlaskusääntö**

**toisensa poissulkeville**

**tapahtumille**

**Yhdistetyt tapahtumat**

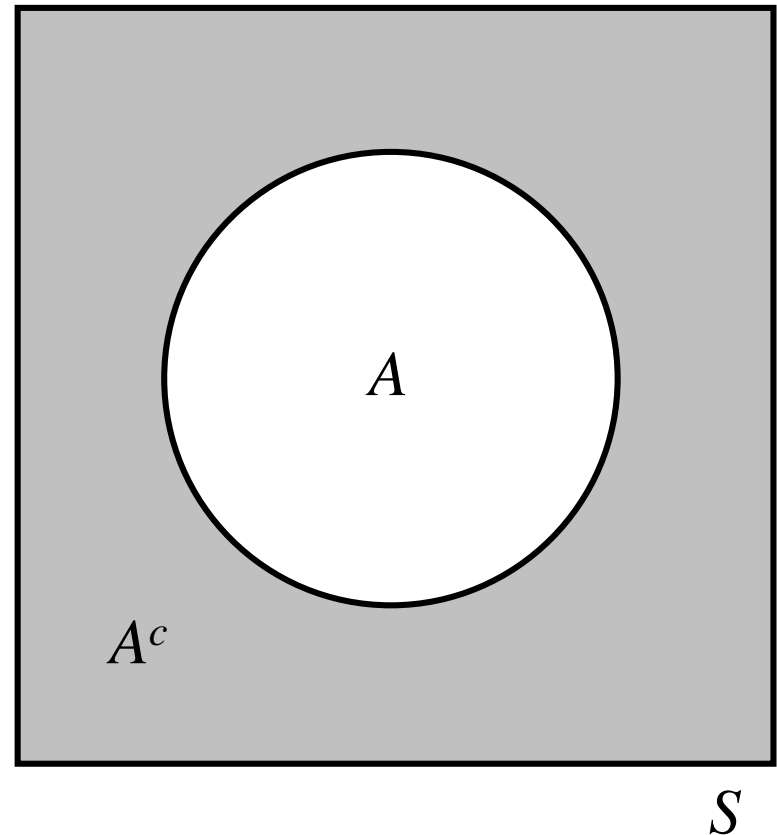
## Todennäköisyyslaskennan peruslaskutoimitukset

---

- Oletetaan, että *tunnettu* tapahtumien  $A$  ja  $B$  todennäköisyydet.
- Tehtävänä on *määrätä* seuraavien tapahtumien todennäköisyydet:
  - Mikä on todennäköisyys sille, että  $A$  ei satu?**
  - Mikä on todennäköisyys sille, että  $A$  tai  $B$  sattuu:  
Mikä on todennäköisyys sille, että  $A$  sattuu tai  $B$  sattuu tai molemmat sattuvat?**
  - Mikä on todennäköisyys sille, että  $A$  ja  $B$  sattuvat?**
  - Mikä on todennäköisyys sille, että  $A$  sattuu, mutta  $B$  ei satu?**

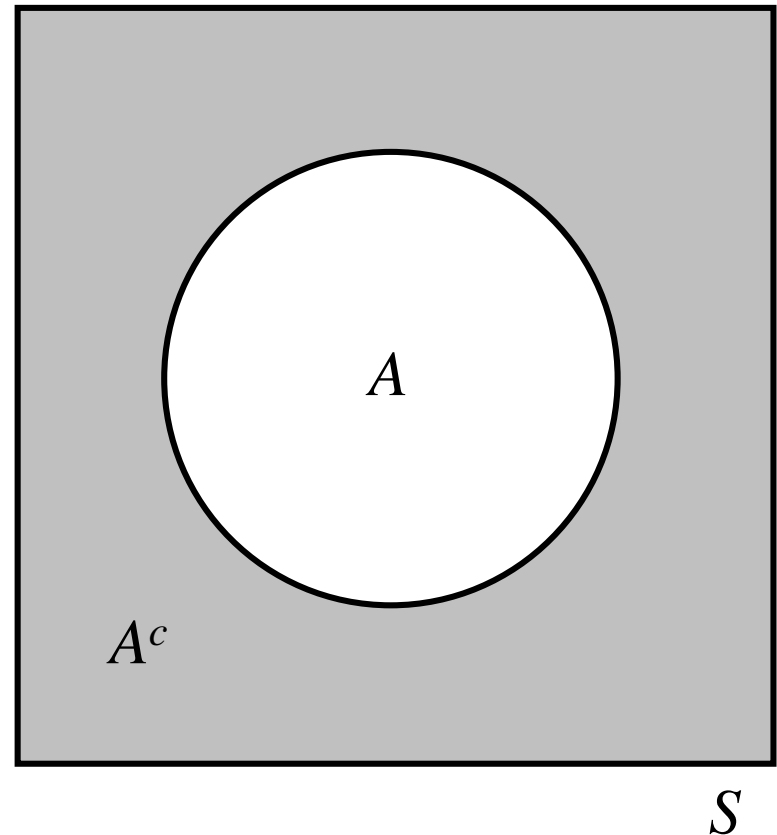
## Komplementtitapahtuman todennäköisyys 1/2

- Olkoon  $A \subset S$  otos-  
avaruuden  $S$  tapahtuma.
- Olkoon  
 $A^c$   
= ” $A$  ei satu”  
=  $\{s \in S \mid s \notin A\}$   
tapahtuman  $A$   
**komplementtitapahtuma.**



## Komplementtitapahtuman todennäköisyys 2/2

- Olkoon tapahtuman  $A$  todennäköisyys  $\Pr(A)$ .
- Tällöin tapahtuman  $A$  **komplementtitapahtuman**  $A^c$  **todennäköisyys** on  $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$



Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle

## Komplementtitapahtuman todennäköisyys: Esimerkki eduskunnasta

---

- Vuoden 1999 eduskunnassa:

$$n_{\text{Sosialistit}} = n_{\text{SDP}} + n_{\text{Vas}} = 51 + 20 = 71$$

$$n_{\text{Ei-sosialistit}} = 200 - n_{\text{Sosialistit}} = 200 - 71 = 129$$

- Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu edustaja oli ei-sosialisti:

$$\Pr(\text{Ei-sosialisti}) = 1 - \Pr(\text{Sosialisti})$$

$$= 1 - \frac{71}{200}$$

$$= \frac{129}{200}$$

$$= 0.645$$

## Toisensa poissulkevat tapahtumat 1/2

- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  tapahtumia.

- Olkoon

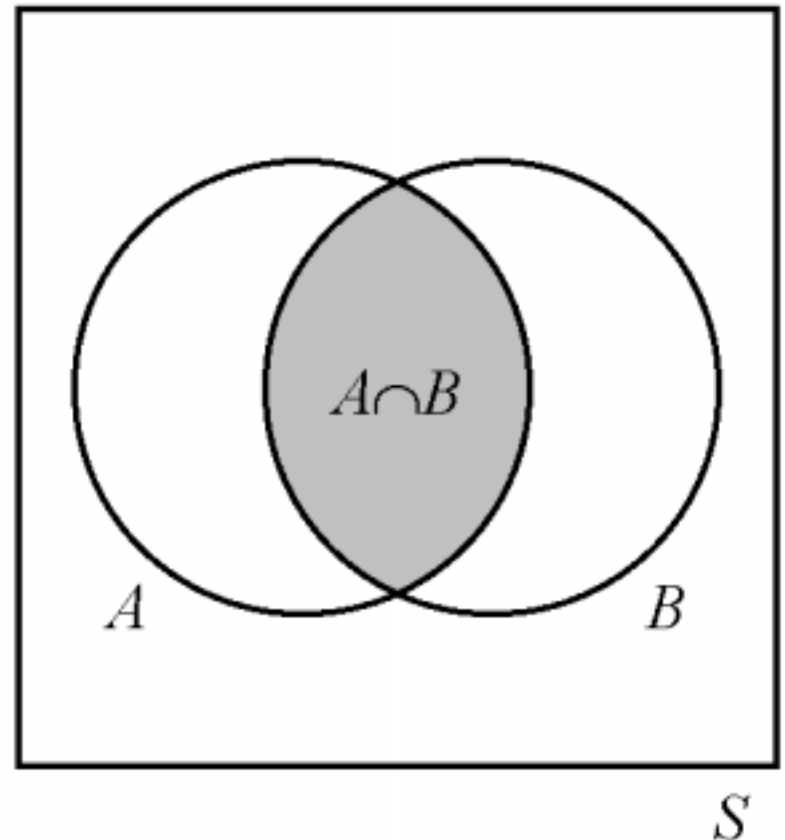
$$A \cap B$$

= ” $A$  ja  $B$  sattuvat”

$$= \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \in B\}$$

tapahtumien  $A$  ja  $B$

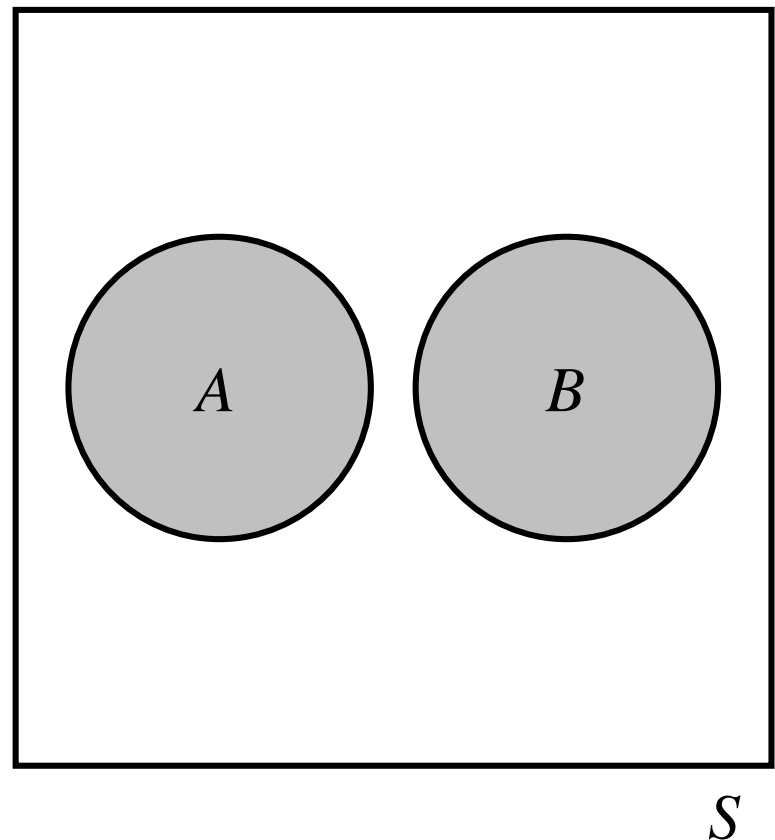
**leikkaus.**



## Toisensa poissulkevat tapahtumat 2/2

- Tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat **toisensa poissulkevia**, jos  $A$  ja  $B$  eivät voi sattua samanaikaisesti.
- Tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat toisensa poissulkevia, jos ne ovat otosavaruuden  $S$  osajoukkoina *pistevieraita* eli

$$A \cap B = \emptyset$$



## Toisensa poissulkevat tapahtumat: Esimerkki eduskunnasta

---

- Kansanedustaja ei voi olla kahden puolueen jäsen.
- Olkoon
  - $A = \text{”Edustaja kuuluu vasemmistoliittoon”}$
  - $B = \text{”Edustaja kuuluu kokoomukseen”}$
- Tällöin tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat toisensa poissulkevia, koska yksikään kansanedustaja ei voi olla kahden puolueen jäsen, mikä merkitsee sitä, että joukot  $A$  ja  $B$  ovat pistevieraita:

$$A \cap B = \emptyset.$$

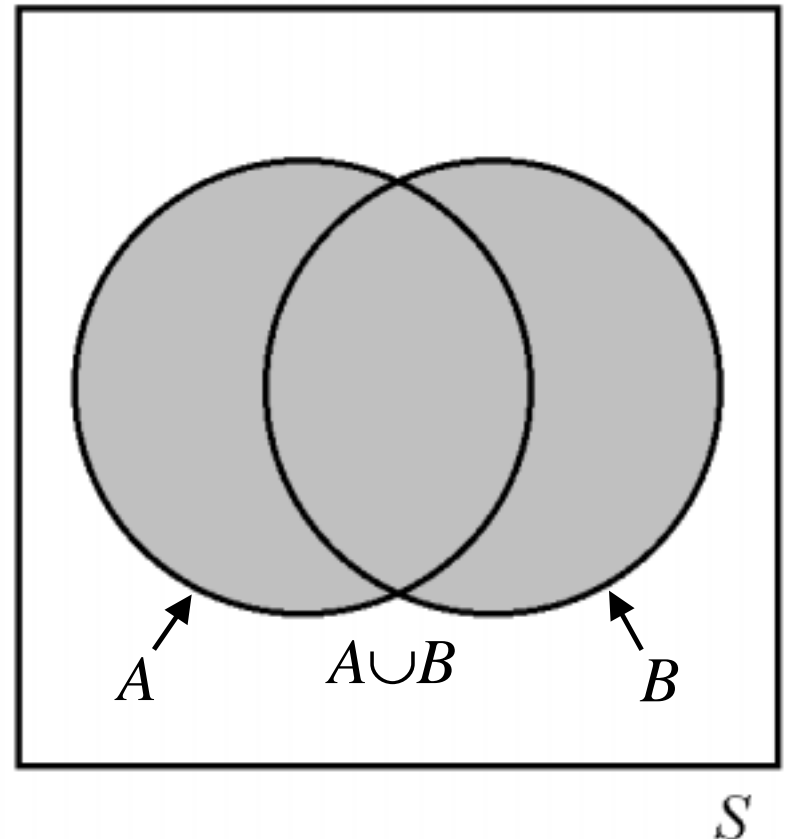


## Yhteenlaskusääntö

### toisensa poissulkeville tapahtumille 1/3

---

- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  tapahtumia.
- Olkoon  
 $A \cup B$   
= ” $A$  tai  $B$  sattuu”  
=  $\{s \in S \mid s \in A \text{ tai } s \in B\}$   
tapahtumien  $A$  ja  $B$  **yhdiste**.

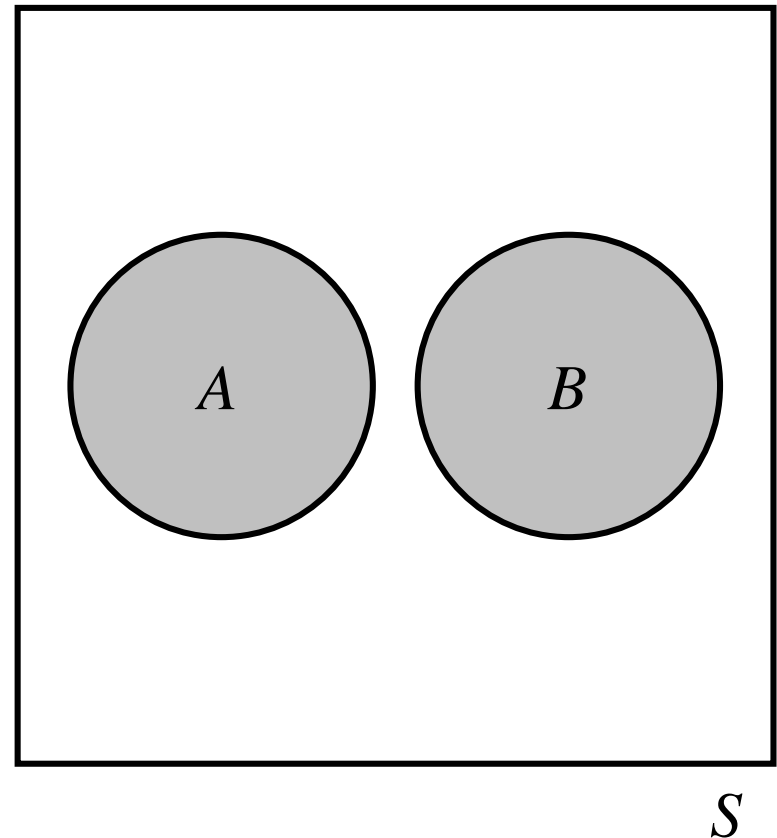


## Yhteenlaskusääntö

### toisensa poissulkeville tapahtumille 2/3

---

- Olkoot tapahtumat  $A$  ja  $B$  **toisensa poissulkevia**.
- Tällöin  $A$  ja  $B$  ovat otosavaruuden  $S$  osajoukkoina *pistevieraita* eli  
 $A \cap B = \emptyset$

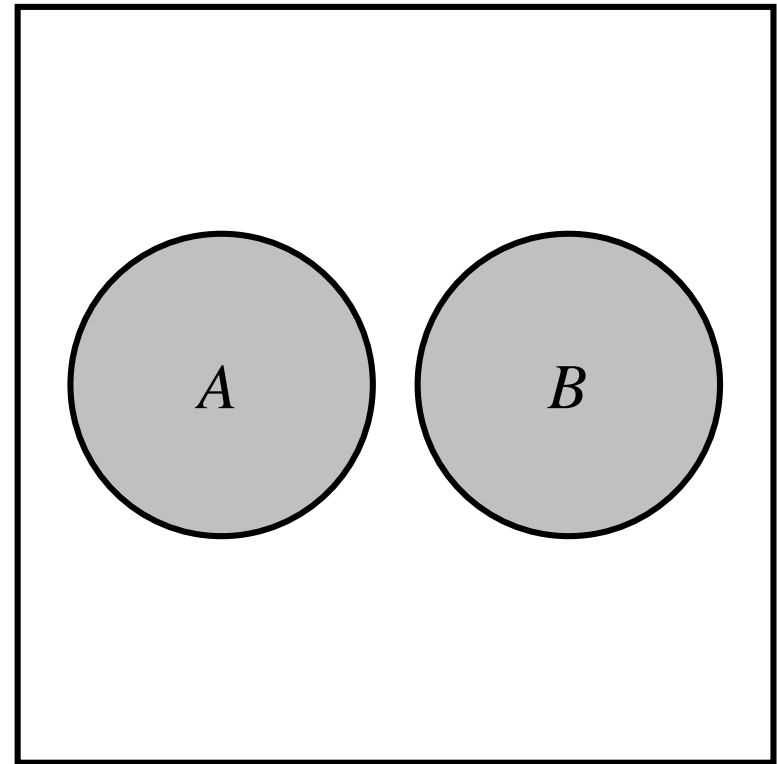


## Yhteenlaskusääntö

### toisensa poissulkeville tapahtumille 3/3

---

- Olkoon tapahtuman  $A$  todennäköisyys  $\Pr(A)$ .
- Olkoon tapahtuman  $B$  todennäköisyys  $\Pr(B)$ .
- Jos  $A$  ja  $B$  ovat *toisensa poissulkevia*, **yhdisteen**  $A \cup B =$  ” $A$  tai  $B$  sattuu” **todennäköisyys** on  
 $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$



$S$

Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle

## Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille: Esimerkki eduskunnasta

---

- Vuoden 1999 eduskunnassa:

$$n_{\text{Sosialistit}} = n_{\text{SDP}} + n_{\text{Vas}} = 51 + 20 = 71$$

- Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu edustaja oli sosialisti:

$$\Pr(\text{Sosialisti}) = \Pr(\text{SDP}) + \Pr(\text{Vas})$$

$$= \frac{51}{200} + \frac{20}{200}$$

$$= \frac{71}{200}$$

$$= 0.355.$$

# Komplementtitapahtuman todennäköisyys: Perustelu

---

- Tapahtuma  $A$  ja sen *komplementti-tapahtuma*  $A^c$  ovat toisensa pois-sulkevia:

$$A \cap A^c = \emptyset$$

- Lisäksi otosavaruudelle  $S$  pätee aina:

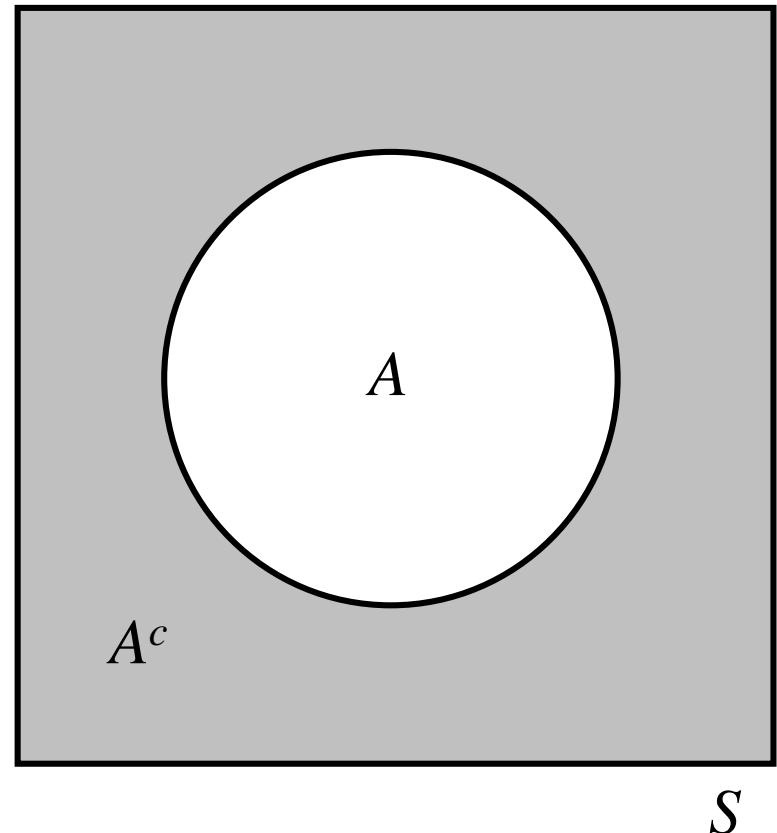
$$S = A \cup A^c$$

- Siten *toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan*

$$\Pr(S) = 1 = \Pr(A) + \Pr(A^c)$$

- Siten *komplementtitapahtuman  $A^c$  todennäköisyydeksi saadaan:*

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$$



## Yleistetty yhteenlaskusääntö

### pareittain toisensa poissulkeville tapahtumille

---

- Olkoot  $A_1, A_2, \dots, A_k$  **pareittain toisensa poissulkevia**.
- Tällöin  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , kun  $i \neq j$ .
- Olkoon tapahtuman  $A_i$  todennäköisyys

$$\Pr(A_i), i = 1, 2, \dots, k.$$

- Tällöin **yhdisteen**

*” $A_1$  tai  $A_2$  tai ... tai  $A_k$  sattuu”*

**todennäköisyys on**

$$\Pr(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \dots + \Pr(A_k)$$

## Yhteenlaskusäännön yleistäminen tapahtumille, jotka eivät ole toisensa poissulkevia

---

- Yhteenlaskusääntö voidaan yleistää tapahtumille, jotka *eivät ole toisensa poissulkevia*.

- Tällöin yhdistetyn tapahtuman

$$A \cup B = \text{”}A \text{ tai } B \text{ sattuu”}$$

todennäköisyyttä määrättäessä joudutaan tapahtumien  $A$  ja  $B$  todennäköisyyksien lisäksi ottamaan huomioon yhdistetyn tapahtuman

$$A \cap B = \text{”}A \text{ ja } B \text{ sattuvat”}$$

todennäköisyys.

- Tarkastelemme *yleistä yhteenlaskusääntöä* myöhemmin.

## Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle

# Riippumattomuus

---

- Tapahtuma  $A$  on **riippumaton** tapahtumasta  $B$ , jos  $B$ :n tapahtuminen (tai tapahtumatta jääminen) *ei vaikuta*  $A$ :n tapahtumisen todennäköisyyteen.
- Riippumattomuus on *symmetrinen* ominaisuus:  
Jos  $A$  on riippumaton  $B$ :stä, niin  $B$  on riippumaton  $A$ :sta.
- Riippumattomuuden symmetrisyyden takia sanomme yksinkertaisesti, että  $A$  ja  $B$  ovat riippumattomia.
- Merkitään tapahtumien  $A$  ja  $B$  riippumattomuutta:  
$$A \perp B$$
- Riippumattomuuden käsite saa lisävalaistusta *ehdollisen todennäköisyyden* käsitteestä.



## Riippumattomuus:

### Esimerkit rahanheitosta ja arvonnasta

---

- **Rahanheitto:**

Heitetään toistuvasti rahaa.

Tällöin on järkevää olettaa, että heittojen tulokset eivät riipu aikaisemmin tehtyjen heittojen tuloksista.

- **Arvonta:**

Nostetaan uurnasta toistuvasti arpalippuja niin, että jokaisen noston jälkeen nostettu lippu palautetaan uurnaankin ja uurnan sisältö sekoitetaan huolellisesti (otanta takaisinpanolla).

Tällöin on järkevää olettaa, että nostojen tulokset eivät riipu aikaisemmin tehtyjen nostojen tuloksista.

## Riippumattomuus vs riippuvuus

---

- Tapahtumien *riippumattomuus* on oletus, jota voidaan *testata* tilastollisesti.
- *Alkeistilastotieteen* esityksissä oletetaan tavallisesti, että *havainnot* ovat toisistaan *riippumattomia*.
- Tilastollisissa tutkimusasetelmissä joudutaan usein *luopumaan* oletuksesta havaintojen riippumattomuudesta.
- Esimerkiksi *stokastisia* eli *satunnaisprosesseja* ja *aikasarjoja* analysoitaessa tarkastellaan toisistaan riippuvia havaintoja.

## Tulosääntö

### riippumattomille tapahtumille 1/2

---

- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  tapahtumia.

- Olkoon

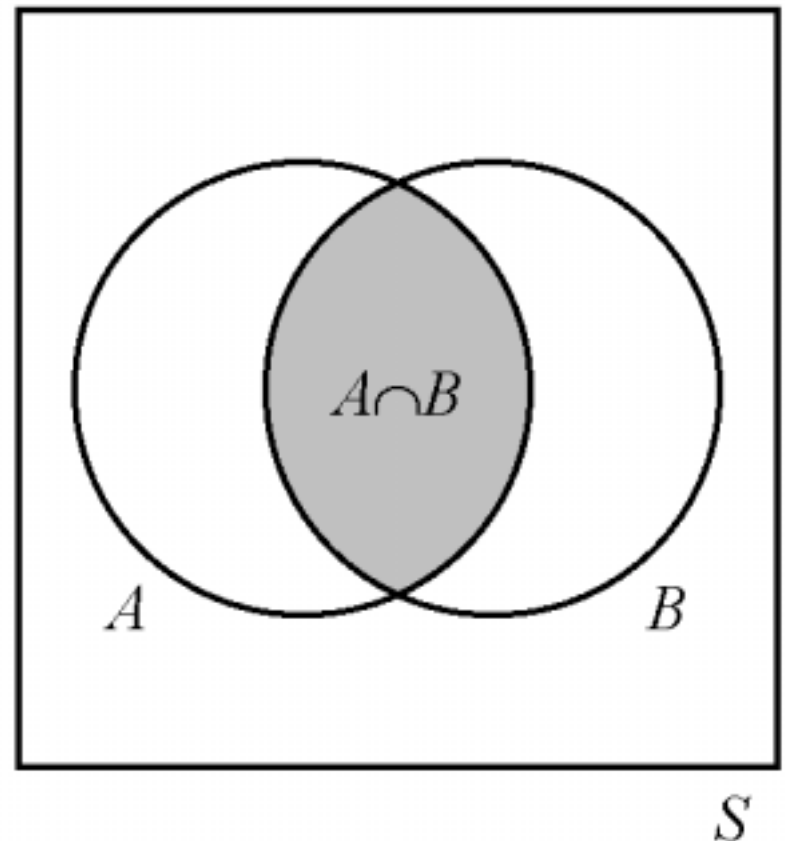
$$A \cap B$$

= ”*A ja B sattuvat*”

$$= \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \in B\}$$

tapahtumien  $A$  ja  $B$

**leikkaus.**

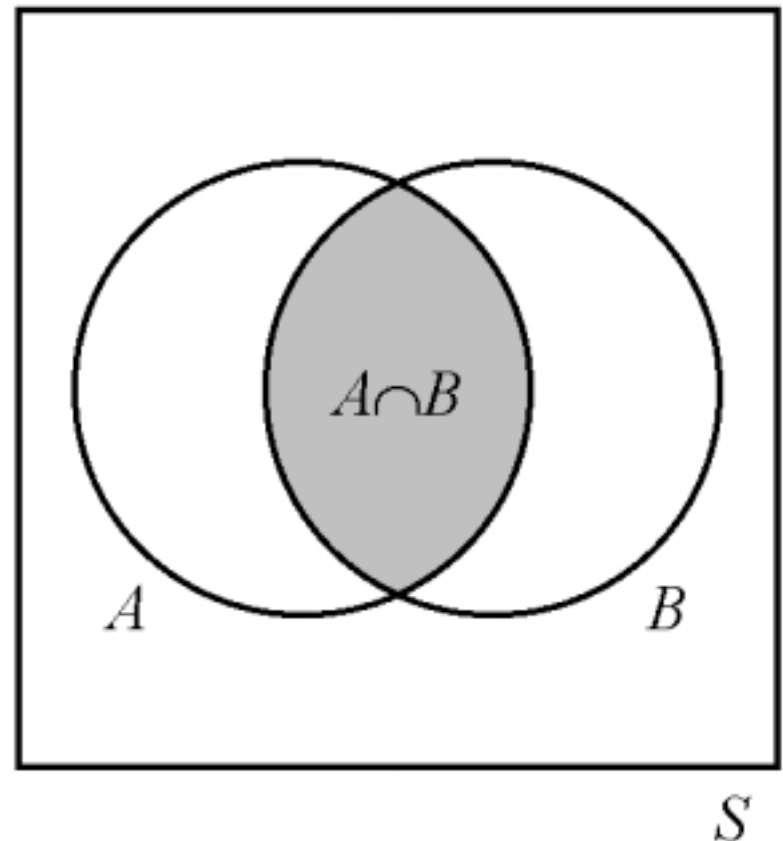


## Tulosääntö

### riippumattomille tapahtumille 2/2

---

- Olkoon tapahtuman  $A$  todennäköisyys  $\Pr(A)$ .
- Olkoon tapahtuman  $B$  todennäköisyys  $\Pr(B)$ .
- Tapahtumat  $A$  ja  $B$  **riippumattomia**, jos ja vain jos **leikkauksen**  $A \cap B = \text{”}A \text{ ja } B \text{ sattuvat”}$  **todennäköisyydelle** pätee:  
$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$



## Tulosäännön intuitiivinen perustelu: Esimerkki laadunvalvonnasta 1/2

---

- Tarkastellaan TV-vastaanottimien valmistusta ja niiden laadunvalvontaa.
- Oletetaan, että valmistetuissa TV-vastaanottimissa voi esiintyä kaksi erilaista vikaa:
  - $A = \text{”Kuvaputki ei toimi”}$
  - $B = \text{”Vahvistin ei toimi”}$
- Vika  $A$  on 5 %:ssa TV-vastaanottimia.
- Vika  $B$  on 3 %:ssa TV-vastaanottimia.
- Oletetaan, että viat syntyvät *toisistaan riippumatta*.

# Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle

## Tulosäännön intuitiivinen perustelu:

### Esimerkki laadunvalvonnasta 2/2

---

- Vikojen *riippumattomuuden* takia:
  - (i) 3 %:ssa niistä TV-vastaanottimia, joissa on vika *A*, on *myös* vika *B*.
  - (ii) 5 %:ssa niistä TV-vastaanottimia, joissa on vika *B*, on *myös* vika *A*.
- Niiden TV-vastaanottimien osuus, joissa on *sekä* vika *A että* vika *B*:  
 $0.03 \times 0.05 = 0.0015 = 0.15 \%$

## Tulosääntö riippumattomille tapahtumille: Esimerkki rahanheitosta

---

- Heitetään rahaa kaksi kertaa.

$$\Pr(\text{Kruuna}) = \Pr(\text{Klaava}) = 1/2$$

$A = \text{”Saadaan kruuna 1. heitolla”}$

$B = \text{”Saadaan kruuna 2. heitolla”}$

- Voidaan olettaa, että  $A$  ja  $B$  ovat riippumattomia.
- Tällöin

$$\Pr(A \text{ ja } B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle

## Tulosääntö riippumattomille tapahtumille: Esimerkki korttipakasta 1/2

---

- $A =$  ”Satunnaisesti korttipakasta valittu kortti on pata”  
 $\Pr(A) = 13/52 = 1/4$
- $B =$  ”Satunnaisesti korttipakasta valittu kortti on ässä”  
 $\Pr(B) = 4/52 = 1/13$
- $A \cap B =$  ”Satunnaisesti korttipakasta valittu kortti on pataässä”
- Tällöin

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{13}$$

$$= \frac{1}{52}$$



## Tulosääntö riippumattomille tapahtumille: Esimerkki korttipakasta 2/2

---

Intuitiivinen perustelu tulosäännön käytölle:

- Korttipakan korteista  $1/4$  on patoja.
- Korttipakan korteista  $1/13$  on ässiä.
- Myös niistä korteista, jotka ovat patoja  $1/13$  on ässiä.
- Siten pataässien osuus korttipakan korteista on

$$\frac{1}{13} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{52}$$

- Koska pataässiä on korttipakassa täsmälleen yksi, saadaan myös suoraan

$$\Pr(\text{Satunnaisesti valittu kortti on pataässä}) = 1/52$$

## Yleistetty tulosääntö

### riippumattomille tapahtumille 1/2

---

- Olkoon tapahtuman  $A_i$  todennäköisyys

$$\Pr(A_i), i = 1, 2, \dots, k$$

- Tapahtumat  $A_1, A_2, \dots, A_k$  ovat **riippumattomia**, jos ja vain jos *kaikille leikkauksille*

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}$$

joissa

$$\{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset \{1, 2, \dots, k\}$$

pätee:

$$\Pr(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) = \Pr(A_{i_1}) \times \Pr(A_{i_2}) \times \dots \times \Pr(A_{i_m})$$

## Yleistetty tulosääntö

### riippumattomille tapahtumille 2/2

---

- Merkitään tapahtumien  $A_1, A_2, \dots, A_k$  riippumattomuutta:

$$A_1, A_2, \dots, A_k \perp$$

## Yleistetty tulosääntö riippumattomille tapahtumille: Esimerkki rahanheitosta

---

- Heitetään rahaa 10 kertaa.
- $\Pr(\text{Kruuna}) = 1/2$ .
- Tällöin

$$\begin{aligned}\Pr(10 \text{ kruunaa}) &= \Pr(\text{Kruuna 1. heitolla}) \times \cdots \times \Pr(\text{Kruuna 10. heitolla}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2}}_{10 \text{ kappaletta}} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \\ &= 0.000977\end{aligned}$$

- *Todennäköisyyden frekvenssitulkinnasta* seuraa:

Jos suuresta joukosta ihmisiä jokainen pannaan heittämään rahaa 10 kertaa, on odotettavissa, että suunnilleen 1/1000 heittäjistä saa tulokseksi 10 kruunaa!

## Tulosäännön yleistäminen tapahtumille, jotka eivät ole riippumattomia

---

- Tulosääntö voidaan yleistää tapahtumille, jotka *eivät ole riippumattomia*.

- Tällöin yhdistetyn tapahtuman

$$A \cap B = \text{”}A \text{ ja } B \text{ sattuvat”}$$

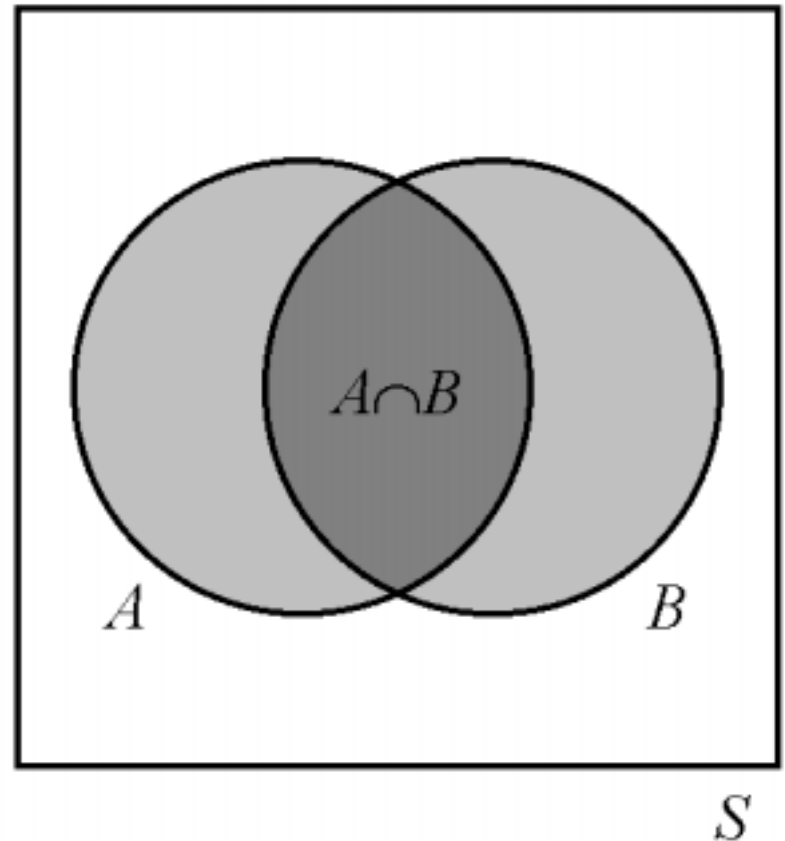
todennäköisyyttä määrättäessä tapahtumien  $A$  ja  $B$  todennäköisyyksien tunteminen *ei riitä*, vaan lisäksi on otettava huomioon joko tapahtuman  $A$  *ehdollinen todennäköisyys ehdolla, että  $B$  on tapahtunut* tai tapahtuman  $B$  *ehdollinen todennäköisyys ehdolla, että  $A$  on tapahtunut*.

- Tarkastelemme *yleistä tulosääntöä ja ehdollisia todennäköisyyksiä* myöhemmin.

# Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle

## Yleinen yhteenlaskusääntö 1/3

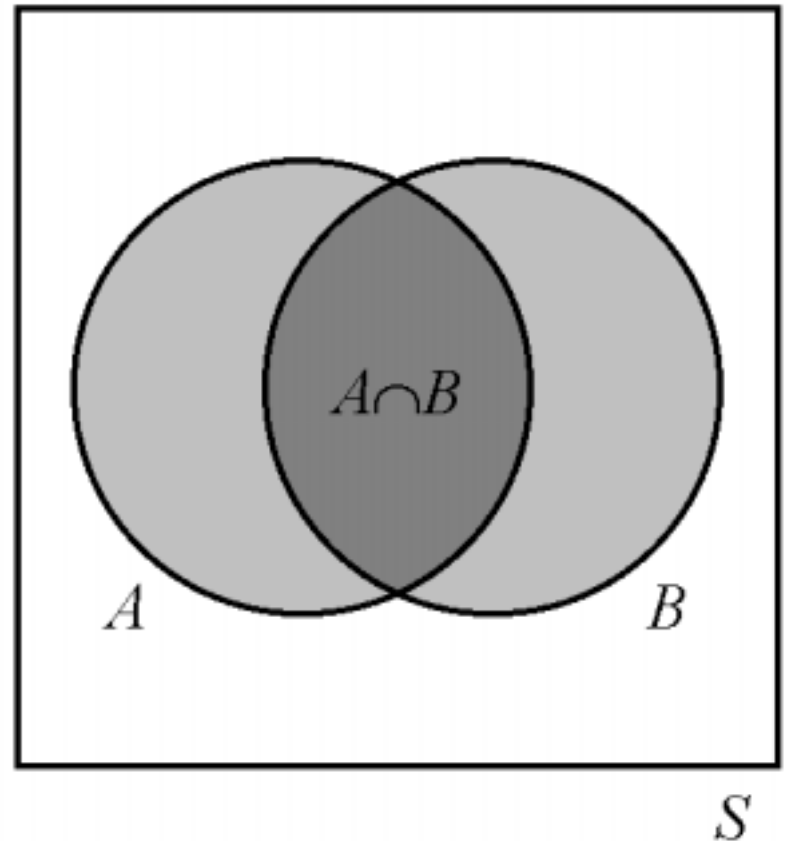
- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  tapahtumia.
- Olkoon  
 $A \cup B$   
= ” $A$  tai  $B$  sattuu”  
=  $\{s \in S \mid s \in A \text{ tai } s \in B\}$   
tapahtumien  $A$  ja  $B$  **yhdiste**.



# Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle

## Yleinen yhteenlaskusääntö 2/3

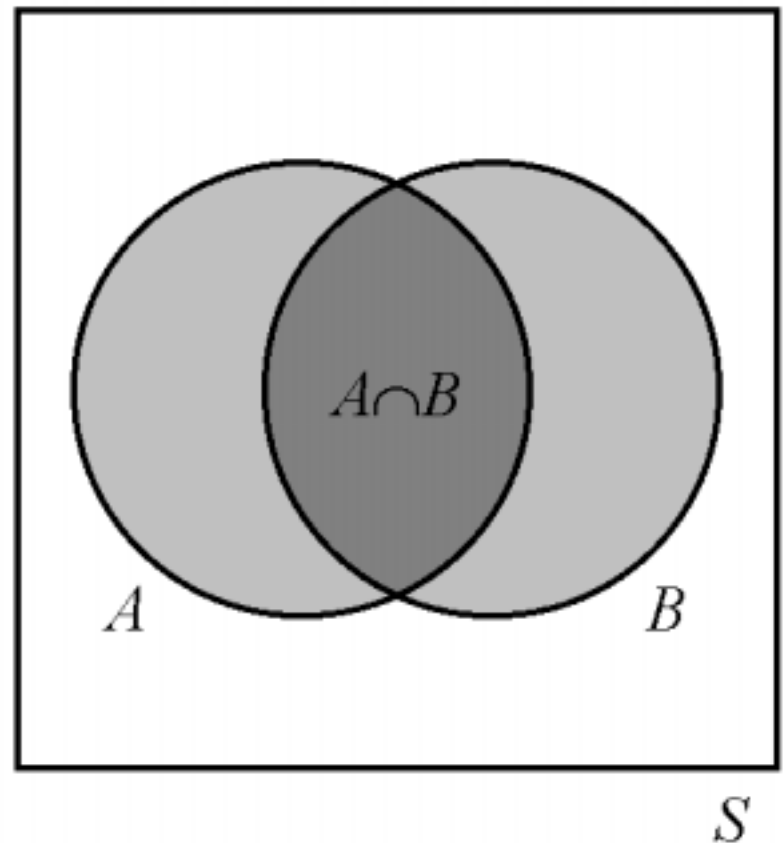
- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  tapahtumia.
- Olkoon  
 $A \cap B$   
= ” $A$  ja  $B$  sattuvat”  
=  $\{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \in B\}$   
tapahtumien  $A$  ja  $B$   
**leikkaus.**



# Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle

## Yleinen yhteenlaskusääntö 3/3

- Olkoot tapahtumien  $A$ ,  $B$ ,  $A \cap B$  todennäköisyydet  $\Pr(A)$ ,  $\Pr(B)$ ,  $\Pr(A \cap B)$
- Tällöin yhdisteen  $A \cup B = \text{”}A \text{ tai } B \text{ sattuu”}$  todennäköisyys on  $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$





# Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle

## Yleinen yhteenlaskusääntö:

### Esimerkki uskonnoista Japanissa

---

- Tilastojen mukaan 80 % japanilaisista on shintolaisia ja 80 % japanilaisista on buddhalaisia.
- Onko 160 % japanilaisista shintolaisia *tai* buddhalaisia?
- *Ei*, koska suuri osa japanilaisista noudattaa *kummankin* uskonnon menoja:  
Häät pidetään tavallisesti shintolaisten menojen mukaan, hautajaiset järjestetään tavallisesti buddhalaisten menojen mukaan.
- Annetuista tiedoista voidaan päätellä:
  - 80-100 % japanilaisista on *joko* shintolaisia *tai* buddhalaisia,
  - 60-80 % japanilaisista on *sekä* shintolaisia *että* buddhalaisia.

# Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle

## Yleinen yhteenlaskusääntö:

### Esimerkki levikkitutkimuksesta

---

- *Levikkitutkimuksessa* saatiin selville, että erään kunnan asukkaat lukevat Seuraa ja Apua seuraavasti:

Seura	20 %
Apu	16 %
Seura ja Apu	1 %

- Tällöin

$$\begin{aligned}\Pr(\text{Seura tai Apu}) &= \Pr(\text{Seura}) + \Pr(\text{Apu}) - \Pr(\text{Seura ja Apu}) \\ &= \frac{20}{100} + \frac{16}{100} - \frac{1}{100} \\ &= \frac{35}{100} \\ &= 0.35\end{aligned}$$

## Erotustapahtuman todennäköisyys 1/2

- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  tapahtumia.

- Olkoon

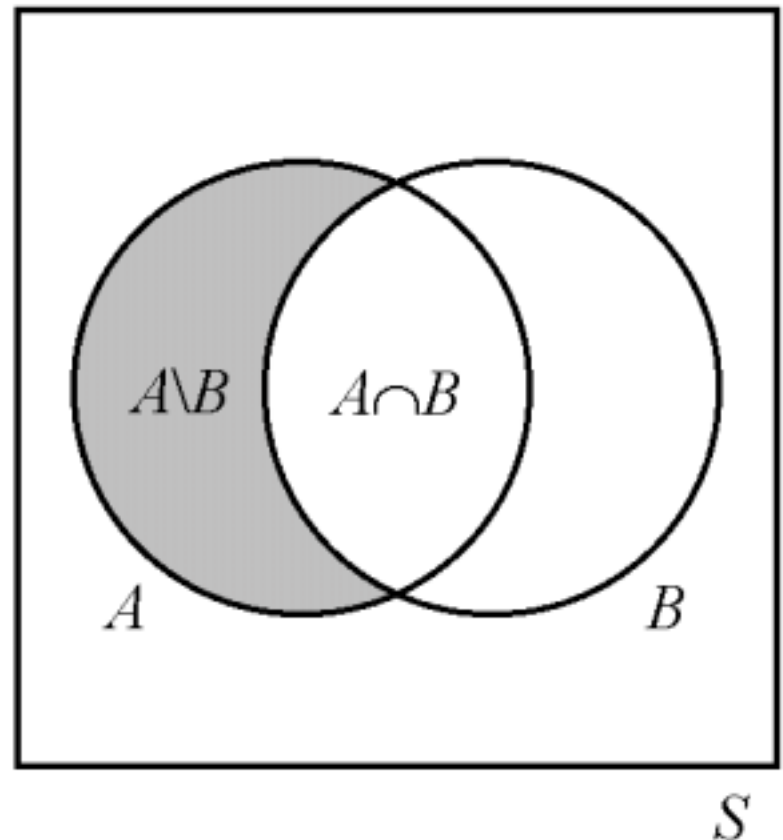
$$A \setminus B$$

= ” $A$  sattuu,  
mutta  $B$  ei satu”

$$= \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \notin B\}$$

$$= A \cap B^c$$

tapahtumien  $A$  ja  $B$  erotus.



## Erotustapahtuman todennäköisyys 2/2

- Olkoon tapahtuman  $A$  todennäköisyys  $\Pr(A)$ .
- Olkoon tapahtuman  $A \cap B$  todennäköisyys  $\Pr(A \cap B)$ .
- Tällöin **erotustapahtuman**

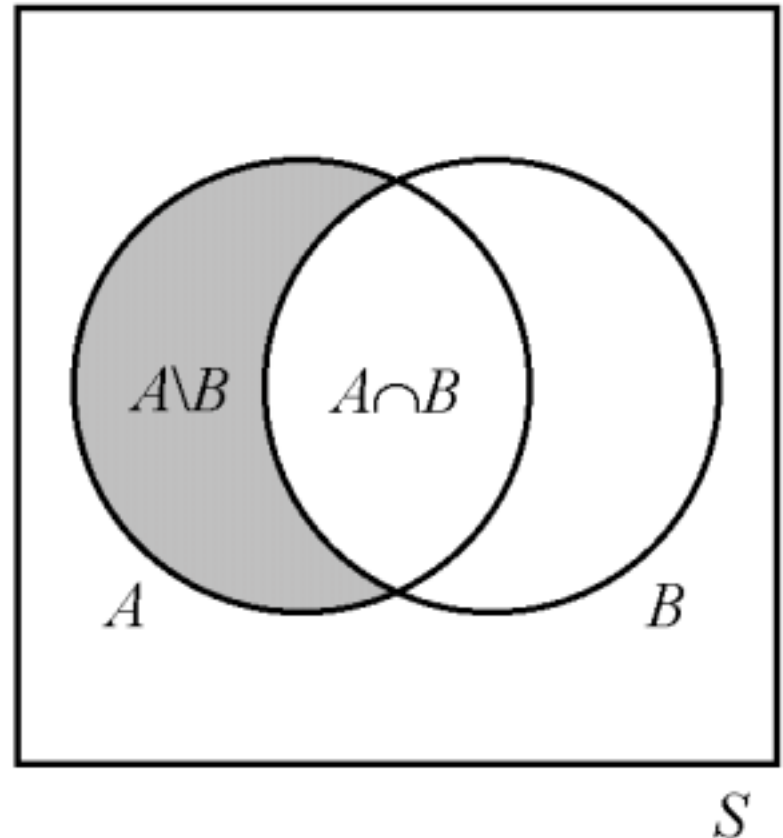
$A \setminus B =$  ” $A$  sattuu,  
*mutta  $B$  ei satu*”

**todennäköisyys on**

$$\Pr(A \setminus B)$$

$$= \Pr(A \cap B^c)$$

$$= \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$$



## Erotustapahtuman todennäköisyys: Esimerkki korttipakasta 1/2

---

- 52:n kortin pakassa on 16 kuvakorttia ja 13 patakorttia, joista 4 on kuvakortteja.
- Olkoon
  - $A =$  ”Satunnaisesti valittu kortti on pata”
  - $B =$  ”Satunnaisesti valittu kortti on kuva”
- Tällöin
  - $A \setminus B =$  ”Satunnaisesti valittu kortti on pata,  
*mutta ei ole kuvakortti*”

# Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle

## Erotustapahtuman todennäköisyys:

### Esimerkki korttipakasta 2/2

---

- Tällöin

$$\begin{aligned}\Pr(A \setminus B) &= \Pr(A) - \Pr(A \cap B) \\ &= \frac{13}{52} - \frac{4}{52} \\ &= \frac{9}{52}\end{aligned}$$

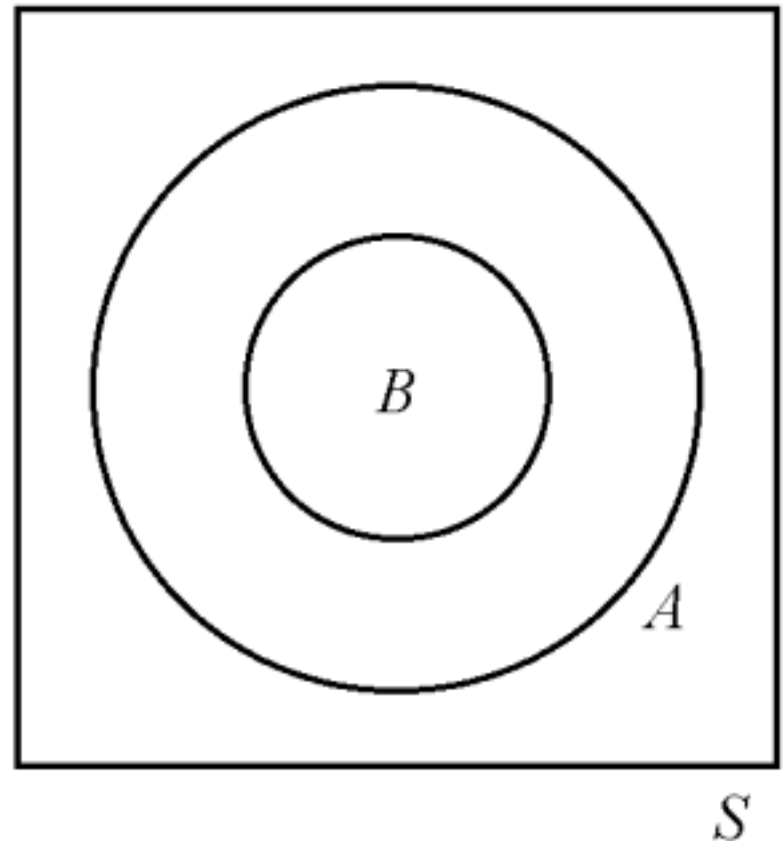
- Tulos on tietysti selvä muutenkin, koska patoja, jotka eivät ole kuvia on 9 kpl eli kortit 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.

Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle

## Tapahtuman $B$ sattumisesta seuraa tapahtuman $A$ sattuminen

---

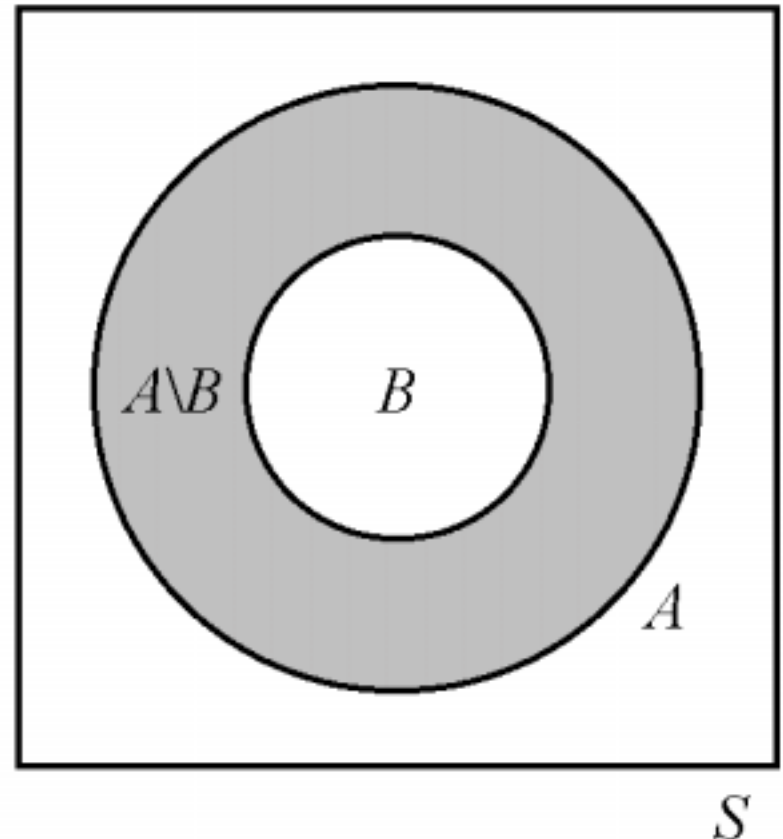
- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  tapahtumia.
- Oletetaan, että *jos  $B$  sattuu, niin  $A$  sattuu*.
- Tällöin  $B \subset A$ .
- Olkoot tapahtumien  $A$  ja  $B$  todennäköisyydet  $\Pr(A)$  ja  $\Pr(B)$ .
- Tällöin:  
$$\Pr(A) \geq \Pr(B)$$



## Erotustapahtuman todennäköisyys, kun $B$ :n sattumisesta seuraa $A$ :n sattuminen

---

- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  tapahtumia.
- Olkoon  $B \subset A$ .
- Olkoot tapahtumien  $A$  ja  $B$  todennäköisyydet  $\Pr(A)$  ja  $\Pr(B)$ .
- Tällöin **erotustapahtuman**  $A \setminus B =$  ” $A$  sattuu, mutta  $B$  ei satu”  
todennäköisyys on  
 $\Pr(A \setminus B) = \Pr(A) - \Pr(B)$

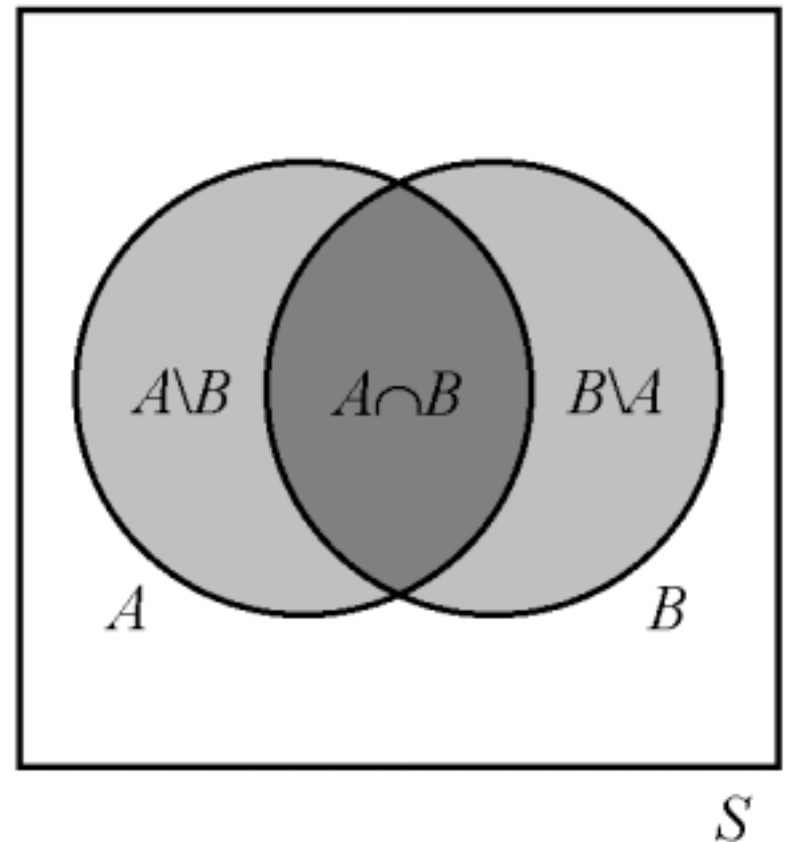




## Yhdisteen $A \cup B$ todennäköisyys: Vaihtoehtoisia laskusääntöjä 1/2

---

- Olkoot  $A \subset S$  ja  $B \subset S$  otosavaruuden  $S$  tapahtumia.
- *Yhdistetyn tapahtuman*  $A \cup B =$  ”*A tai B sattuu*” todennäköisyys voidaan aina esittää seuraavalla kalvolla esitetyissä muodoissa.



## Yhdisteen $A \cup B$ todennäköisyys: Vaihtoehtoisia laskusääntöjä 2/2

---

- **Yhdisteen**

$A \cup B =$  ” $A$  tai  $B$  sattuu”

**todennäköisyys on**

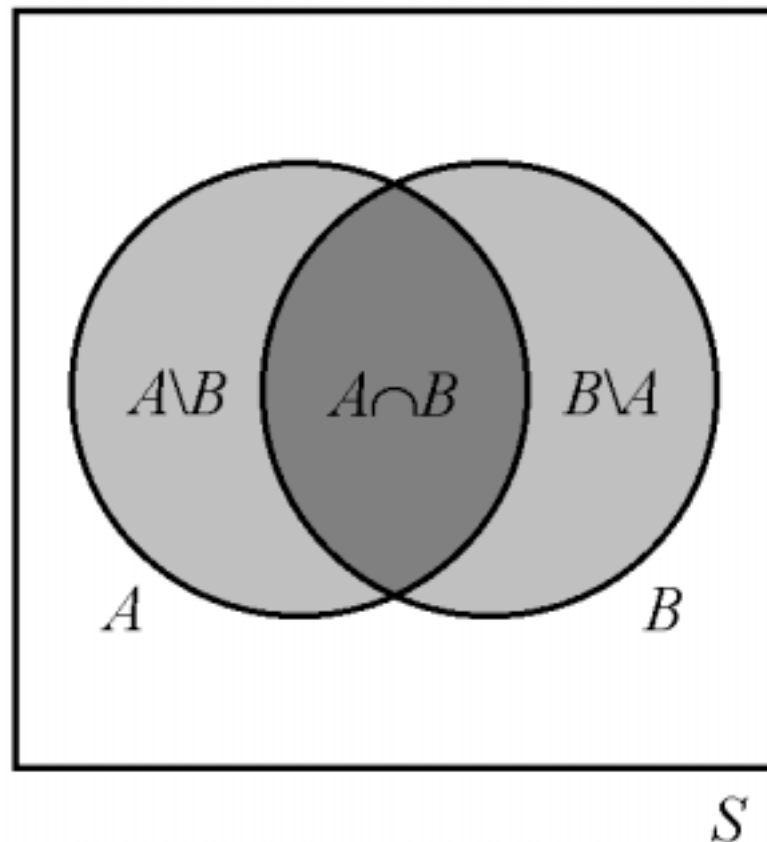
$$\Pr(A \cup B)$$

$$= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

$$= \Pr(A) + \Pr(B \setminus A)$$

$$= \Pr(B) + \Pr(A \setminus B)$$

$$= \Pr(A \setminus B) + \Pr(B \setminus A) \\ + \Pr(A \cap B)$$



# Todennäköisyyden peruslaskusäännöt

---

**Uusien tapahtumien muodostaminen**

**Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle**

**>> Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus**

# Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

---

## *Avainsanat*

Ehdollinen todennäköisyys

Ehdollinen todennäköisyys ja  
suhteellinen frekvenssi

Ehtotapahtuma

Informaatio

Riippumattomuus

Todennäköisyys

Yleinen tulosääntö

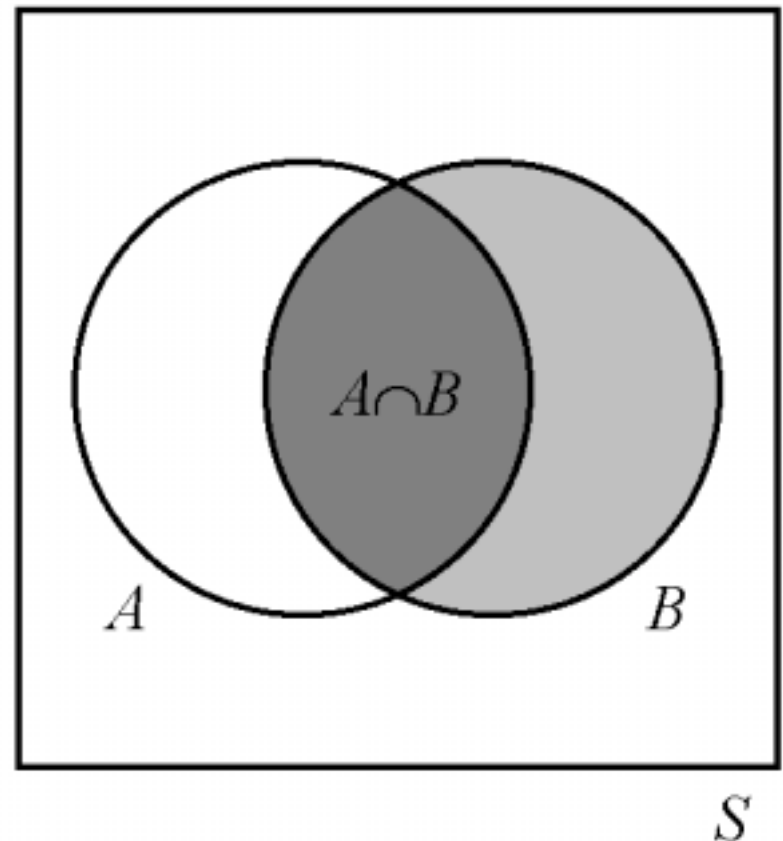
Yleistetty yleinen tulosääntö

# Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

## Ehdollinen todennäköisyys

- Olkoon tapahtuman ”*A ja B sattuvat*” todennäköisyys  $\Pr(A \cap B)$ .
- Olkoon tapahtuman  $B$  todennäköisyys  $\Pr(B) \neq 0$ .
- Tällöin *tapahtuman A ehdollinen todennäköisyys ehdolla, että tapahtuma B on sattunut* on

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$



## Ehdollinen todennäköisyys: Kommentteja

---

- Tapahtuman  $A$  ehdollinen todennäköisyys ehdolla, että tapahtuma  $B$  on sattunut, saadaan määräämällä tapahtuman

$$A \cap B = \text{”}A \text{ ja } B \text{ sattuvat”}$$

todennäköisyyden

$$\Pr(A \cap B)$$

*suhde* tapahtuman  $B$  todennäköisyyteen  $\Pr(B)$ .

- Tapahtuman  $A$  ehdollinen todennäköisyys ehdolla, että tapahtuma  $B$  on sattunut voidaan siis ymmärtää niin, että tapahtumaan  $A$  liittyviä alkeistapahtumia tarkastellaan rajoitettuna tapahtuman  $B$  indusoimaan otosavaruuteen.

# Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

## Ehdollinen todennäköisyys ja suhteellinen frekvenssi 1/3

---

- Ehdollisen todennäköisyyden määritelmää voidaan *havainnollistaa* seuraavassa esitettävällä tavalla.
- Tarkastellaan *toistuvaa* satunnaisilmiötä.
- Olkoot  $A$  ja  $B$  ko. satunnaisilmiöön liittyviä tapahtumia.
- Kun satunnaisilmiö toistuu, jokaisessa toistossa sattuu  
joko tapahtuma  $A$  tai  $ei-A = A^c$   
ja  
joko tapahtuma  $B$  tai  $ei-B = B^c$ .

## Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

# Ehdollinen todennäköisyys ja suhteellinen frekvenssi 2/3

---

- Oletetaan, että ko. satunnaisilmiön toistussa tuloksena on seuraava tapahtumaparien jono:

$$A^c B \quad AB^c \quad A^c B \quad AB \quad A^c B^c \quad A^c B \quad A^c B^c$$

- Tapahtuman  $A$  todennäköisyys tässä tapahtumajonossa on

$$\Pr(A) = \frac{2}{7}$$

- Muodostetaan ko. tapahtumaparien jonosta *karsittu* jono, johon otetaan *vain* ne tapahtumaparit, joissa  $B$  on sattunut:

$$A^c B \quad A^c B \quad AB \quad A^c B$$



## Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

# Ehdollinen todennäköisyys ja suhteellinen frekvenssi 3/3

---

- Tapahtuman  $A$  todennäköisyys *karsitussa* jonossa on  $1/4$ .
- Toisaalta *ehdollisen todennäköisyyden* kaavan mukaan

$$\begin{aligned}\Pr(A|B) &= \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \\ &= \frac{1/7}{4/7} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

- Siten tapahtuman  $A$  ehdollinen todennäköisyys ehdolla, että  $B$  on sattunut, on tapahtuman  $A$  todennäköisyys *karsitussa* jonossa, johon on mukaan otettu vain ne tapahtumaparit, *joissa B on sattunut*.

## Ehdollinen todennäköisyys: Esimerkki eduskunnasta 1/3

---

- Vuoden 1999 eduskunnan 200 kansanedustajasta 73 oli naisia.
- Mikä on todennäköisyys, että satunnaisesti valittu edustaja oli nainen?
- Merkitään

$$A = \text{”Edustaja oli nainen”}$$

- Tällöin

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= \frac{73}{200} \\ &= 0.365\end{aligned}$$

## Ehdollinen todennäköisyys: Esimerkki eduskunnasta 2/3

---

- SDP:lla oli 51 kansanedustajaa, 29 miestä, 22 naista.
- Mikä on todennäköisyys, että satunnaisesti valittu edustaja, joka kuului SDP:n ryhmään, oli nainen?
- Tällöin *ehdollinen todennäköisyys*

$$\begin{aligned}\Pr(\text{Nainen}|\text{SDP}) &= \frac{\Pr(\text{Nainen ja SDP})}{\Pr(\text{SDP})} \\ &= \frac{22/200}{51/200} = \frac{22}{51} = 0.431 > 0.365 = \Pr(\text{Nainen})\end{aligned}$$

- Johtopäätös: SDP:n ryhmässä oli *keskimääräistä enemmän* naisia.
- *Tässä tapauksessa* tieto siitä, että satunnaisesti valittu kansanedustaja oli SDP:stä muuttaa todennäköisyyttä, että hän oli nainen.

## Ehdollinen todennäköisyys: Esimerkki eduskunnasta 3/3

---

- RKP:lla oli 12 kansanedustajaa, 9 miestä, 3 naista.
- Mikä on todennäköisyys, että satunnaisesti valittu edustaja, joka kuului RKP:en ryhmään, oli nainen?
- Tällöin *ehdollinen todennäköisyys*

$$\begin{aligned}\Pr(\text{Nainen} | \text{RKP}) &= \frac{\Pr(\text{Nainen ja RKP})}{\Pr(\text{RKP})} \\ &= \frac{3/200}{12/200} = \frac{3}{12} = 0.25 < 0.365 = \Pr(\text{Nainen})\end{aligned}$$

- Johtopäätös: RKP:n ryhmässä oli *keskimääräistä vähemmän* naisia.
- *Tässä tapauksessa* tieto siitä, että satunnaisesti valittu kansanedustaja oli RKP:stä muuttaa todennäköisyyttä, että hän oli nainen.

## Taphtuman todennäköisyys ja taphtuman ehdollinen todennäköisyys

---

- Taphtuman  $A$  ehdollinen todennäköisyys ehdolla, että taphtuma  $B$  on sattunut voi olla pienempi, yhtä suuri tai suurempi kuin taphtuman  $A$  todennäköisyys; ks. edellistä esimerkkiä.
- Siten mikä tahansa seuraavista vaihtoehtoista on mahdollinen:
  - (i)  $\Pr(A|B) > \Pr(A)$
  - (ii)  $\Pr(A|B) = \Pr(A)$
  - (iii)  $\Pr(A|B) < \Pr(A)$

# Ehdollinen todennäköisyys ja ehtotapahtuman sisältämä informaatio 1/2

---

- Jos

$$\Pr(A|B) \neq \Pr(A)$$

*tieto siitä, että tapahtuma  $B$  on sattunut, sisältää informaatiota, jota voidaan käyttää hyväksi tapahtuman  $A$  todennäköisyyttä määrättäessä.*

## Ehdollinen todennäköisyys ja ehtotapahtuman sisältämä informaatio 2/2

---

- Jos

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

*tieto siitä, että tapahtuma  $B$  on sattunut, ei sisällä informaatiota, jota voidaan käyttää hyväksi tapahtuman  $A$  todennäköisyyttä määrättäessä.*

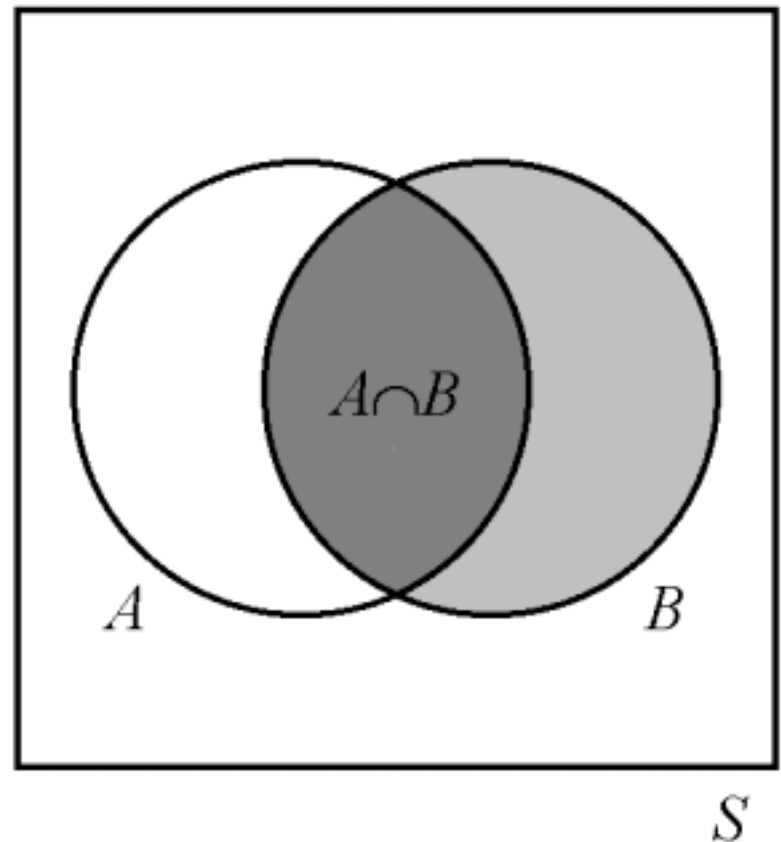
- Voidaan osoittaa, että tämä on totta täsmälleen silloin, kun tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat *riippumattomia*.

# Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

## Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

---

- Olkoon tapahtuman  $A$  todennäköisyys  $\Pr(A)$ .
- Olkoon tapahtuman  $A$  todennäköisyys ehdolla, että  $B$  on sattunut  $\Pr(A|B)$ .
- Tällöin tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat **riippumattomia**, jos ja vain jos  $\Pr(A|B) = \Pr(A)$





# Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

## Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus: Perustelu 1/2

---

- Oletetaan, että tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat *riippumattomia* ja todistetaan, että

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

- Riippumattomuuden määritelmän mukaan tällöin

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B) \quad (1)$$

- *Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän* mukaan tapahtuman  $A$  ehdollinen todennäköisyys ehdolla, että tapahtuma  $B$  on sattunut, on

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \quad (2)$$

- Sijoittamalla kaava (1) kaavaan (2) saadaan todistettava yhtälö

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

# Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

## Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus: Perustelu 2/2

---

- Oletetaan, että

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

ja todistetaan, että tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat *riippumattomia*.

- *Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän* mukaan tapahtumien  $A$  ja  $B$  leikkauksen todennäköisyys voidaan kirjoittaa muotoon

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A|B) \Pr(B)$$

- Siten oletuksesta seuraa suoraan, että

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B)$$

joten tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat *riippumattomia*.

# Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

## Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus: Esimerkki 1/3

---

- Rutenian tasavallassa on 2 puoluetta: repijät ja säilyttäjät.
- Paikkajakauma 200-paikkaisessa parlamentissa:

<b>Puolue</b>	<b>Miehet</b>	<b>Naiset</b>	<b>Paikat</b>
Repijät	20	30	50
Säilyttäjät	60	90	150
<b>Yhteensä</b>	<b>80</b>	<b>120</b>	<b>200</b>

## Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

# Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus: Esimerkki 2/3

---

- Olkoon

$A =$  ”Satunnaisesti valittu edustaja on mies”

$B =$  ”Satunnaisesti valittu edustaja on repijä”

- Tällöin

$$\Pr(A) = \frac{80}{200} = 0.4$$

$$\Pr(A|B) = \frac{20}{50} = 0.4$$

- Koska  $\Pr(A|B) = \Pr(A)$ , tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat riippumattomia.
- Huomaa, että myös tapahtumaparit  $A$  ja  $B^c$ ,  $A^c$  ja  $B$  sekä  $A^c$  ja  $B^c$  ovat riippumattomia.

# Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

## Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus: Esimerkki 3/3

---

- Edustajapaikkojen jakaumasta nähdään, että

$$\Pr(A \cap B) = \frac{20}{200}$$

$$\Pr(B) = \frac{50}{200}$$

- Siten myös ehdollisen todennäköisyyden kaavan mukaan

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{20/200}{50/200} = \frac{20}{50} = 0.4$$

## Riippumattomuuden yhtäpitävät ehdot

---

- Edellä esitetyn perusteella tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat **riippumattomia**, jos ja vain jos mikä tahansa seuraavista *riippumattomuuden yhtäpitävistä ehdoista* pätee:
  - (i)  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$
  - (ii)  $\Pr(A|B) = \Pr(A)$
  - (iii)  $\Pr(B|A) = \Pr(B)$

## Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

# Riippumattomuuden seurauksia

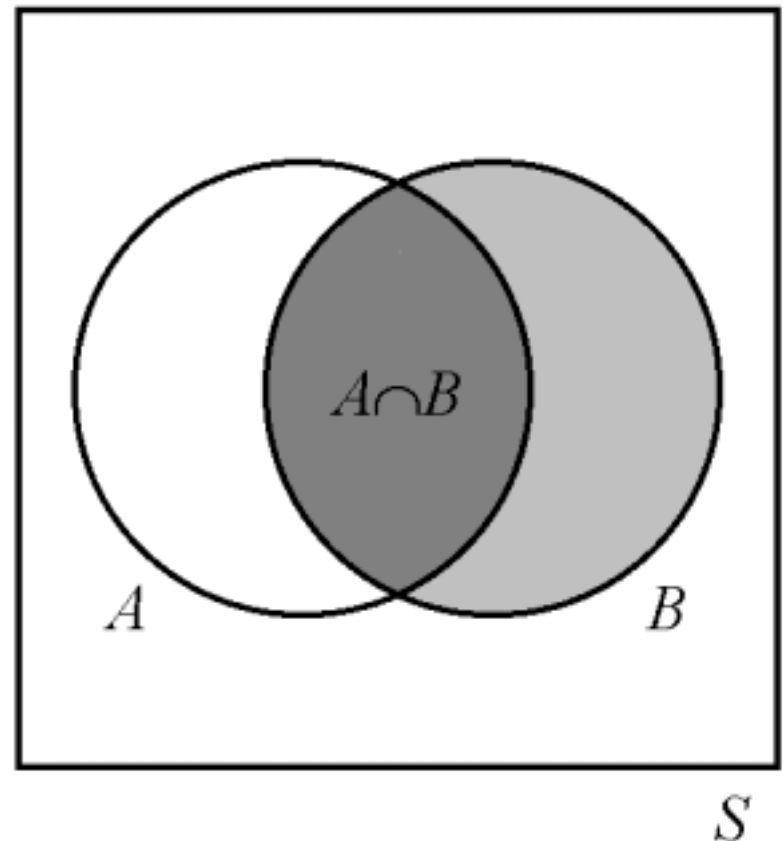
---

- Oletetaan, että tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat riippumattomia.
- Tällöin:
  - (i) Tapahtumat  $A$  ja  $B^c$  ovat riippumattomia.
  - (ii) Tapahtumat  $A^c$  ja  $B$  ovat riippumattomia.
  - (iii) Tapahtumat  $A^c$  ja  $B^c$  ovat riippumattomia.
- Tapahtumien riippumattomuus siis ”leviää” myös niiden *komplementtitapahtumiin*.
- Ks. edellä esitettyä esimerkkiä Rutenian parlamentista.

# Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

## Yleinen tulosääntö

- Olkoon tapahtuman  $A$  ehdollinen todennäköisyys ehdolla, että tapahtuma  $B$  on sattunut  $\Pr(A|B)$ .
- Olkoon tapahtuman  $B$  todennäköisyys  $\Pr(B) \neq 0$ .
- Tällöin **leikkauksen**  $A \cap B =$  ” $A$  ja  $B$  sattuvat” **todennäköisyys** on
$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B) \Pr(A|B)$$





# Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

## Yleistetty yleinen tulosääntö

---

- Tarkastellaan tapahtumia  $A_1, A_2, \dots, A_k$ .
- Tällöin **leikkauksen**

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k = \text{”}A_1 \text{ ja } A_2 \text{ ja } \dots \text{ ja } A_k \text{ sattuvat”}$$

**todennäköisyys on**

$$\begin{aligned} & \Pr(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \\ &= \Pr(A_1) \times \Pr(A_2 | A_1) \times \Pr(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \\ & \quad \dots \times \Pr(A_k | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1}) \end{aligned}$$

# Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

## Yleistetty yleinen tulosääntö:

### Perustelu

---

- Perustellaan *yleistetty yleinen tulosääntö* tapauksessa  $k = 3$ .
- Leikkauksen

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \text{”}A_1 \text{ ja } A_2 \text{ ja } A_3 \text{ sattuvat”}$$

todennäköisyys on

$$\begin{aligned} \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \Pr((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \\ &= \Pr(A_1 \cap A_2) \Pr(A_3 | A_1 \cap A_2) \\ &= \Pr(A_1) \Pr(A_2 | A_1) \Pr(A_3 | A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

- *Yleinen tapaus* voidaan todistaa *induktiolla*.

# Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

## Yleistetty yleinen tulosääntö:

### Esimerkki korttipakasta

---

- Nostetaan korttipakasta *peräkkäin* 3 korttia.
- Mikä on todennäköisyys, että ne ovat kaikki patoja?
- Olkoon tapahtuma  $A_i =$  ” $i$ . kortti on pata”,  $i = 1, 2, 3$ .
- Koska korttipakassa on 52 korttia, joista 13 on patoja, leikkauksen ” $A_1$  ja  $A_2$  ja  $A_3$  sattuvat” todennäköisyys on

$$\begin{aligned}\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \Pr(A_1) \Pr(A_2 | A_1) \Pr(A_3 | A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50} = \frac{33}{2550} \\ &= 0.0129\end{aligned}$$

- Huomautus:

Korttien nosto toteutettiin *ilman takaisinpanoa*.