Johdatus todennäköisyyslaskentaan

Todennäköisyys ja sen määritteleminen

Todennäköisyys ja sen määritteleminen

Deterministisyys ja satunnaisuus

Todennäköisyyden määritteleminen

Todennäköisyyden perusominaisuudet

Todennäköisyys ja sen määritteleminen: Mitä opimme? – 1/2

- Opimme millainen reaalimaailman ilmiö on **satunnaisilmiö** ja mitä tarkoitetaan, kun puhutaan tapahtumien **todennäköisyyksistä**.
- Opimme, että **ilmiön satunnaisuus ei merkitse ilmiön tuloksen mielivaltaista vaihtelua**.
- Esitämme **kolme *naiivia* määritelmää todennäköisyydelle**:

(i) **Empiirisen todennäköisyyden** määritelmän mukaan tapahtuman todennäköisyys on **tapahtuman** (tilastollisesti stabiili) **suhteellinen frekvenssi** ilmiön toistokertojen joukossa.

(ii) **Klassisen todennäköisyyden** määritelmän mukaan tapahtuman todennäköisyys on **tapahtumalle suotuisien tulosvaihtoehtojen suhteellinen frekvenssi**.

(iii) Tapahtuman todennäköisyys on **tapahtuman sattumisen mahdollisuuden mitta**.

Todennäköisyys ja sen määritteleminen: Mitä opimme? – 2/2

- Opimme myös, että satunnaisilmiön **tilastollisen mallin** eli **todennäköisyysmallin** on sisällettävä kuvaus ilmiön **tulosvaihtoehdoista** ja niiden **todennäköisyyksistä**.
- Jotta satunnaisilmiöistä ja niiden tulosvaihtoehdoista voitaisiin puhua täsmällisesti, määrittelemme **todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet otosavaruus**, **tapahtuma** ja **alkeistapahtuma**.
- Näemme myös, kuinka todennäköisyyslaskennan peruskäsitteille voidaan antaa **joukko-opilliset tulkinnat** sekä esittelemme **todennäköisyyden perusominaisuudet**.

Todennäköisyys ja sen määritteleminen: Lisätiedot

- **Todennäköisyyslaskennan perusoperaatiot** ja **peruslaskusäännöt** esitellään luvussa

  Todennäköisyyden peruslaskusäännöt

Todennäköisyys ja sen määritteleminen

>> Deterministisyys ja satunnaisuus

Todennäköisyyden määritteleminen

Todennäköisyyden perusominaisuudet

Deterministisyys ja satunnaisuus

Avainsanat

Deterministinen ilmiö
Frekvenssi
Koetoisto
Peli
Peli luontoa vastaan
Reilu peli
Satunnaisilmiö
Satunnaiskoe
Stokastinen ilmiö
Suhteellinen frekvenssi
Tilastollinen stabiliteetti
Todennäköisyyden frekvenssitulkinta
Tulosvaihtoehto

Deterministiset ilmiöt

- Reaalimaailman ilmiö on **deterministinen**, jos *ilmiön alkutilan perusteella voidaan tarkasti ennustaa ilmiön lopputila* eli *tulos*.
- Deterministisen ilmiön *alkutila määrää tarkasti ilmiön lopputilan* eli *tuloksen*.
- Deterministisiä ilmiöitä kutsutaan usein *eksakteiksi* tai *kausaalisiksi*.

Deterministiset ilmiöt: Esimerkkejä

- Monia *fysiikan*, kuten *klassisen mekaniikan*, tutkimia ilmiöitä pidetään tavallisesti deterministisinä.
- Esimerkiksi kappaleen lentorata voidaan ennustaa hyvin tarkasti, jos tunnetaan kappaleen paino, lähtönopeus, lähtökulma, lähtösuunta, ilmanvastus jne.
- Huomautuksia:
  – Deterministisistä ilmiöistä tehtäviin *havaintoihin* liittyy hyvin usein luonteeltaan *satunnaisia havaintovirheitä*.
  – Deterministisiin ilmiöihin saattaa liittyä *ennustamattomuutta*, jota kutsutaan *kaaokseksi*.

Satunnaisilmiöt

- Reaalimaailman ilmiö on **stokastinen ilmiö** eli **satunnaisilmiö**, jos sillä on seuraavat ominaisuudet:

  (i) Ilmiö voi päätyä *alkutilastaan* useisiin erilaisiin *lopputiloihin* eli ilmiöllä on useita erilaisia *vaihto-ehtoisia tuloksia*.

  (ii) Ilmiön alkutilan perusteella *ei voida* tarkasti *ennustaa* ilmiön lopputilaa eli sitä, mikä mahdollisista *tulos-vaihtoehdoista realisoituu* eli *toteutuu*.

  (iii) Vaikka ilmiön lopputilaa ei voida ennustaa tarkasti, tulosvaihtoehtojen *suhteellisten frekvenssien* eli *osuuksien nähdään* ilmiön toistuessa *käyttäytyvän säännönmukaisesti*.

Satunnaisilmiöt: Esimerkkejä 1/2

- Biologiset ilmiöt
  - sukupuolen määräytyminen
  - perinnöllisyys
- Havaintovirheiden syntyminen empiirisissä tutkimuksessa
- Ihmisen ominaisuuksien periytyminen
  - fyysiset ominaisuudet
  - henkiset ominaisuudet
  - suorituskyky
- Kvanttimekaniikan ilmiöt
  - radioaktiivinen hajoaminen
  - hiukkasfysiikan ilmiöt
- **Tilastollisen tutkimus-aineiston keruu**
  - *otoksen* poiminta
  - *satunnaistus* empiirisissä kokeissa
- Uhkapelit
  - rahanheitto
  - korttipelit
  - lotto
  - ruletti
  - arpajaiset
- Yhteiskunnalliset ilmiöt
  - sosiologiset ilmiöt
  - taloustieteelliset ilmiöt

Satunnaisilmiöt: Esimerkkejä 2/2

- *Satunnaisilmiöiden* tulosta *ei voida ennustaa tarkasti*, mutta ilmiön *toistuessa* mahdollisten tulosvaihtoehtojen suhteellisten frekvenssien eli osuuksien havaitaan *käyttäytyvän säännönmukaisesti*.
- Esimerkkejä säännönmukaisuuksista satunnaisilmiöissä:
  – Satunnaisesti valitun ihmisen älykkyysosamäärää ei tiedetä, mutta älykkyysosamäärät *jakautuvat* suurissa ihmisjoukoissa *normaalijakauman mukaan*.
  – Havaintovirheen suuruutta ei voida ennustaa yksittäiselle havainnolle, mutta havaintovirheet *jakautuvat* suurissa havaintomäärissä usein *normaalijakauman mukaan*.
  – Radioaktiivisen aineen yksittäisen atomin hajoamishetkeä ei voida ennustaa, mutta *puoliintumisaika* on jokaiselle radioaktiiviselle aineelle ominainen *vakio*.

Satunnaisuus *ei ole* mielivaltaisuutta

- Ilmiön satunnaisuudella tarkoitetaan sitä, että ilmiön tulos *vaihtelee* ilmiön toistuessa tavalla, jota *ei voida ennustaa tarkasti*.
- Satunnaisilmiön tulos *ei kuitenkaan saa ilmiön toistuessa vaihdella mielivaltaisella tavalla*.
- Satunnaisilmiön *säännönmukaisten piirteiden on tultava esille ilmiön toistuessa*.

Tilastollinen stabiliteetti

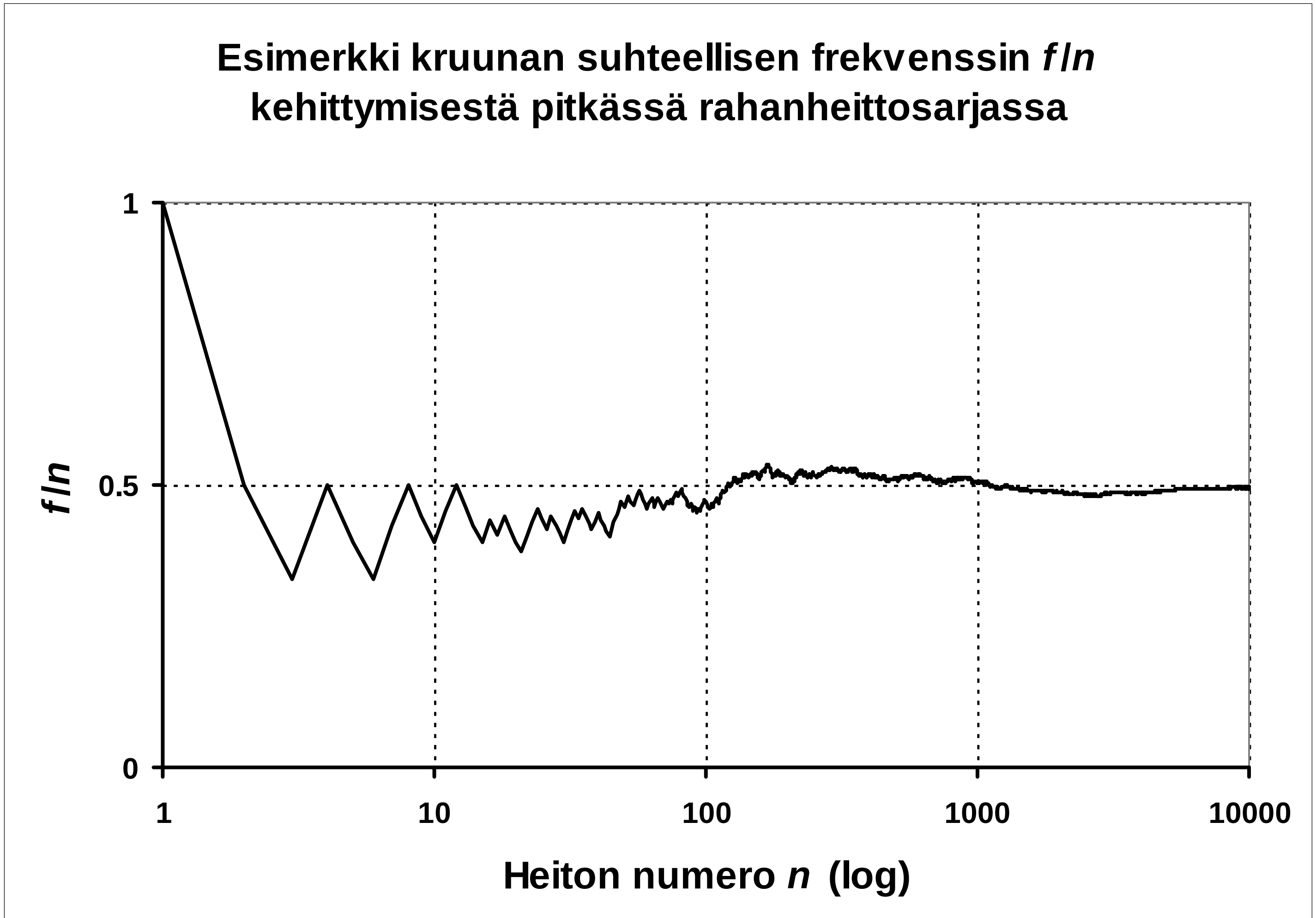
- Satunnaisilmiön toistuessa ilmenevää *säännönmukaisuutta* kutsutaan tilastotieteessä **tilastolliseksi stabiliteetiksi**.
- Jos satunnaisilmiö *ei ole tilastollisesti stabiili*, sitä *ei voida mallintaa* tilastollisilla malleilla.
- Huomautus:

  Tilastollisen stabiliteetin idea saa matemaattisesti täsmällisen muotoilun ns. *suurten lukujen laissa*; ks. lukua **Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet.**

Tilastollinen stabiliteetti: Esimerkki 1/2

- Heitetään *virheetöntä* eli *harhatonta* rahaa toistuvasti ja pidetään kirjaa kruunien *suhteellisesta osuudesta* eli *frekvenssistä*.
- *Yksittäisen heiton tulosta* ei voida ennustaa.
- Kruunien suhteellinen frekvenssi *vaihtelee* heittoja toistettaessa, mutta *lähestyy* virheettömän rahan tapauksessa lukua 1/2 siten, että *suuret poikkeamat* luvusta 1/2 tulevat yhä *epätodennäköisemmiksi* eli *harvinaisemmiksi*.
- Huomautuksia:
  – Luku 1/2 *ei ole* kruunien suhteellisen frekvenssin *raja-arvo* tavanomaisessa mielessä.
  – Tapa, jolla kruunien suhteellinen frekvenssi lähestyy lukua 1/2, on esimerkki ns. *stokastisesta konvergenssista*.

Tilastollinen stabiliteetti: Esimerkki 2/2



Satunnaisilmiöt, tilastolliset mallit ja todennäköisyyslaskenta 1/2

- Tilastotieteen tehtävänä on rakentaa (*tilastollisia*) *malleja*, joiden avulla voidaan *kuvata* ja *selittää mekanismit*, jotka *tuottavat* **tiedot** tutkimuksen kohteena olevasta reaalimaailman ilmiöstä.
- Koska tilastollisissa tutkimusasetelmissa ilmiötä koskeviin tietoihin sisältyy *satunnaisuutta* ja *epävarmuutta*, tilastollisia malleja rakennettaessa sovelletaan *todennäköisyyslaskentaa*.

Satunnaisilmiöt, tilastolliset mallit ja todennäköisyyslaskenta 2/2

- Satunnaisilmiölle voidaan rakentaa tilastollisia malleja vain, jos *ilmiöiden tulokset eivät vaihtele mielivaltaisella tavalla*.
- *Ei-mielivaltaisuudella* tarkoitetaan sitä, että ilmiön toistuessa tulosvaihtoehtojen *suhteelliset frekvenssit* eli *osuudet* käyttäytyvät *tilastollisesti stabiilisti*.

Satunnaiskokeet ja koetoistot: Määritelmät

- Kutsumme *satunnaisilmiötä* usein **satunnaiskokeeksi**.

  Esimerkkejä:

  – Lapsen sukupuolen *määräytymismekanismi* munasolun hedelmöittyessä on satunnaiskoe.

  – Nopanheitto on satunnaiskoe.

- Kutsumme *satunnaisilmiön esiintymiskertaa* usein **koetoistoksi**.

  Esimerkkejä:

  – Yksittäisen lapsen sukupuolen *määräytyminen* on koetoisto.

  – Yksittäinen nopanheitto on koetoisto.

Satunnaiskokeet ja koetoistot, tilastollinen stabiliteetti ja reilun pelin vaatimus

- Satunnaiskokeen toistaminen *samoissa olosuhteissa* – ts. kokeen *olosuhteiden vakiointi* – takaa tavallisesti sen, että satunnaiskokeen tulokset käyttäytyvät *tilastollisesti stabiilisti*.
- Vaatimus satunnaiskokeen tulosten käyttäytymisen tilastollisesta stabiliteetista voidaan tulkita vaatimukseksi **reilusta pelistä**.

Reilu *vs* epäreilu peli: Esimerkki 1/3

- Pelaat Mr. Ebenezer Scroogea vastaan *peliä*, jolla on seuraavat *säännöt*:

(i) Mr. Scroogella on hallussaan useita *erilaisia* noppia, joiden silmälukuja *et tiedä*.

(ii) Mr. Scrooge valitsee nopistaan *yhden*.

(iii) Et saa ottaa Mr. Scroogen valitsemaa noppaa käteesi, mutta Mr. Scroogen on heitettävä valitsemaansa noppaa *niin monta kertaa kuin haluat*.

(iv) Jokaisen heiton jälkeen Mr. Scroogen on näytettävä sinulle heiton *tulos* eli silmäluku, joka on nopan ylösjääneellä tahkolla.

(v) Voitat ennalta sovitun rahasumman, jos saat selville Mr. Scroogen heittämän nopan silmäluvut.

Reilu *vs* epäreilu peli: Esimerkki 2/3

- Saat Mr. Scroogen heittämän nopan silmäluvut selville, jos *toistatat nopanheittoa* riittävän monta kertaa ja *tarkkailet* heittojen tuloksena esiintyvien silmälukujen *suhteellisia frekvenssejä*.
- Oletetaan esimerkiksi, että Mr. Scroogen valitseman nopan silmäluvut ovat

  1, 1, 1, 2, 2, 3
- Tällöin tuntuu ilmeiseltä, että silmälukujen

  1, 2, 3

  suhteellisten frekvenssien on *jakauduttava* pitkässä heittosarjassa suunnilleen suhteessa

  3 : 2 : 1

Reilu *vs* epäreilu peli: Esimerkki 3/3

- Oletetaan, että Mr. Scrooge *vaihtaa salaa* noppaansa pelin aikana.
- Tällöin *et voi voittaa* peliä, koska Mr. Scrooge *rikkoo tietämättäsi pelin sääntöä* (ii) *vastaan*.
- *Vaatimus reilusta pelistä* tarkoittaa sitä, että tällaista sääntöjen rikkomista *ei saa* tapahtua.

Tilastollinen tutkimus on peliä luontoa vastaan 1/3

- *Tilastollista tutkimusta* voidaan kuvata **peliksi luontoa vastaan**.
- Tilastollisessa tutkimuksessa pyritään *tekemään luonnon tilaa koskevia johtopäätöksiä luonnon tilasta kerättyjen havaintojen perusteella*.
- *Luonnon tila* on sitä, että luonnolla on kädessään joukko ”pelikortteja”.
- Tutkijan tavoitteena on *ottaa selville* luonnon kädessä olevat ”kortit”.
- Luonnon tavoitteena on *salata* kädessään olevat ”kortit” tutkijalta.

Tilastollinen tutkimus on peliä luontoa vastaan 2/3

- Peli koostuu eristä, joissa jokaisessa tutkija voi katsoa yhden *satunnaisesti valitsemansa* ”kortin” luonnon kädestä – tämä on *havaintojen keräämistä*.
- Tutkija voi saada selville luonnon tilan eli luonnon kädessä olevat ”kortit” *pelaamalla riittävän monta erää* eli *keräämällä riittävästi havaintoja*.

Tilastollinen tutkimus on peliä luontoa vastaan 3/3

- *Tilastollisessa tutkimuksessa* pyritään satunnaisilmiötä koskevien *havaintojen* perusteella *päättelemään*, millainen on *havainnot tuottanut mekanismi*.
- Päättely *ei onnistu*, jos *havainnot tuottanut mekanismi* ei ole jossakin mielessä *pysyvä* eli *tilastollisesti stabiili*.
- Oletus havainnot tuottaneen mekanismin pysyvyydestä voidaan tulkita oletukseksi siitä, että luonto *pelaa reilusti* eikä *riko pelin sääntöjä vastaan* vaihtamalla pelin aikana *salaa* kädessään olevia ”kortteja”.

Tilastollinen tutkimus on peliä luontoa vastaan: Kommentteja

- Tilastotiede tuntee myös sellaisia menetelmiä, joilla voidaan pyrkiä *paljastamaan muutokset* havainnot tuottaneessa mekanismissa.
- Tilastollisen tutkimuksen kohteena ovat usein seuraavat kysymykset:
  - (i) Onko havainnot tuottaneessa mekanismissa *tapahtunut muutoksia*?
  - (ii) Mitkä ovat tapahtuneiden *muutosten syyt*?
- Jotta tilastotiede pystyisi *mallintamaan* muutokset ja niiden syyt, muutokset eivät saa kuitenkaan tapahtua *mielivaltaisella tavalla*, vaan niissä on oltava jokin *systemaattinen piirre*.

Todennäköisyys ja sen määritteleminen

Deterministisyys ja satunnaisuus

\>> Todennäköisyyden määritteleminen

Todennäköisyyden perusominaisuudet

Todennäköisyyden määritteleminen

Avainsanat

Empiirinen todennäköisyys
Frekvenssi
Klassinen todennäköisyys
Suhteellinen frekvenssi
Suotuisa tulosvaihtoehto
Tapahtuma
Tilastollinen stabiliteetti
Todennäköisyyden frekvenssitulkinta
ja empiirinen todennäköisyys
Todennäköisyyden frekvenssitulkinta
ja klassinen todennäköisyys
Todennäköisyyden määritteleminen
Todennäköisyyden naiivit määritelmät
Todennäköisyys
Todennäköisyys mittana
Tulosvaihtoehto

Todennäköisyyden naiivit määritelmät

- Satunnaisilmiöiden tapahtumien todennäköisyydelle voidaan esittää seuraavat *naiivit* **määritelmät**:

(i) Tapahtuman (**empiirinen**) **todennäköisyys** on tapahtuman suhteellinen frekvenssi ilmiön toistokertojen joukossa.

(ii) Tapahtuman (**klassinen**) **todennäköisyys** on tapahtumalle suotuisien tulosvaihtoehtojen suhteellinen frekvenssi.

(iii) Tapahtuman **todennäköisyys on** tapahtuman sattumisen mahdollisuuden **mitta**.

Todennäköisyyden naiivit määritelmät: Kommentteja

- Määritelmiä kutsutaan **naiiveiksi**, koska ne *eivät määrittele todennäköisyyttä matemaattisesti täsmällisellä tavalla*.
- Todennäköisyyden *täsmällinen määritteleminen* tapahtuu ns. **Kolmogorovin aksioomien** avulla.

  Ks. lukua **Todennäköisyyden aksioomat**.
- Kolmogorovin aksioomien olennaisena sisältönä on se, että **todennäköisyys on mitta matemaattisen mitta-teorian tarkoittamassa mielessä**.
- Todennäköisyyden naiivit määritelmät voidaan sisällyttää Kolmogorovin aksioomien muodostamaan kehikkoon todennäköisyyden **tulkintoina**.

Empiirinen todennäköisyys: Määritelmä 1/2

- Tarkastellaan *satunnaiskoetta*, jota voidaan *toistaa* siten, että seuraavat ehdot pätevät:
  - (i) Kokeen olosuhteet *säilyvät muuttumattomina* koetoistosta toiseen.
  - (ii) Koetoistot *ovat riippumattomia* siinä mielessä, että yhdenkään koetoiston tulos ei riipu siitä mitä tuloksia muista koetoistoista saadaan.

Empiirinen todennäköisyys: Määritelmä 2/2

- Tarkkaillaan jonkin *tulosvaihtoehdon* esiintymistä koetoistojen aikana.
- Jos tulosvaihtoehdon *suhteellinen frekvenssi* eli *osuus* lähestyy jotakin kiinteätä lukua koetoistojen lukumäärän kasvaessa rajatta, lukua kutsutaan tulosvaihtoehdon **empiiriseksi todennäköisyydeksi**.

Empiirinen todennäköisyys ja suhteellinen frekvenssi 1/2

- *Toistetaan* satunnaiskoetta n kertaa.
- Tarkkaillaan jonkin *tulosvaihtoehdon* esiintymistä koe-toistojen aikana.
- Olkoon f ko. tulosvaihtoehdon **frekvenssi** eli *lukumäärä* koetoistojen joukossa.
- Tällöin

$$\frac{f}{n}$$

on ko. tulosvaihtoehdon **suhteellinen frekvenssi** eli *suhteellinen osuus* koetoistojen joukossa.

Empiirinen todennäköisyys ja suhteellinen frekvenssi 2/2

- Annetaan koetoistojen lukumäärän *n* kasvaa rajatta.
- Oletetaan, että (jossakin mielessä)

$$\frac{f}{n} \to p, \text{ kun } n \to +\infty$$

- Tällöin luku *p* on ko. tulosvaihtoehdon **empiirinen todennäköisyys**.
- Huomautus:

  Suhteellisen frekvenssin f/n rajakäyttäytyminen koetoistojen lukumäärän *n* kasvaessa ei ole tavanomaista lukujono-konvergenssia.

  Todennäköisyyslaskennan konvergenssikäsitteitä käsitellään luvussa **Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet**.

Empiirinen todennäköisyys: Kommentteja

- Tulosvaihtoehdon empiirinen todennäköisyys on tulosvaihtoehdon suhteellinen frekvenssi ”*pitkässä juoksussa*”.
- Empiirisen todennäköisyyden määritelmä edellyttää tulosvaihtoehtojen suhteellisilta frekvensseiltä *tilastollista stabiliteettia*:

  Tulosvaihtoehdon empiirisestä todennäköisyydestä ei ole mielekästä puhua, ellei tulosvaihtoehdon suhteellinen frekvenssi käyttäydy satunnaiskoetta toistettaessa *tilastollisesti stabiilisti*.
- *Matemaattista todennäköisyyttä* voidaan pitää empiirisen todennäköisyyden käsitteen *idealisointina*.

Empiirinen todennäköisyys: Ongelmat määritelmässä 1/2

- Empiirinen todennäköisyys on *empiirinen käsite* siinä mielessä, että tulosvaihtoehdon suhteellisen frekvenssin f/n määrääminen vaatii satunnaiskokeen *toistamista* ja *havaintojen keräämistä* satunnaiskokeen tuloksista.
- Tulosvaihtoehdon *empiiristä todennäköisyyttä ei kuitenkaan voida* – nimestään huolimatta – *määrätä kokeellisesti*, koska suhteellisen frekvenssin tilastollisen stabiliteetin empiirinen todentaminen vaatisi satunnaiskokeen toistamista *äärettömän* monta kertaa.
- Empiirisen todennäköisyyden käsite *ei anna* mahdollisuutta puhua sellaisten tapahtumien todennäköisyyksistä, *joista ei ole havaintoja*.

Empiirinen todennäköisyys: Ongelmat määritelmässä 2/2

- Empiirisen todennäköisyyden määritelmässä esiintyvä suhteellisen frekvenssin raja-arvo *ei ole hyvin määritelty*:

  Mikään ei takaa, että määritelmässä esiintyvä raja-arvo *on olemassa*.

- Empiiristä todennäköisyyttä voidaan pikemminkin pitää *tilastollisesti stabiilisti käyttäytyvän suhteellisen frekvenssin ominaisuutena* kuin *todennäköisyyden määritelmänä*.

Empiirinen todennäköisyys ja todennäköisyyden frekvenssitulkinta

- Oletetaan, että *toistamme* jotakin satunnaiskoetta ja tarkkailemme jonkin *tulosvaihtoehdon suhteellista frekvenssiä* koetoistojen aikana.
- **Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan** mukaan ko. *tulosvaihtoehdon suhteellinen frekvenssi vaihtelee satunnaisesti koetoistosta toiseen*, *mutta saa keskimäärin tulosvaihtoehdon todennäköisyyttä lähellä olevia arvoja*.

  Vahvistavatko havainnot tämän on empiirinen kysymys.

Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki laadunvalvonnasta 1/3

- Tehdas valmistaa erästä sähkölaitetta 300 kpl päivässä.
- Osa laitteista ei täytä ankaria laatukriteereitä.
- Merkitään:

  K = Laite on kelvollinen

  V = Laite on viallinen
- Oletetaan, että vialliset laitteet syntyvät tuotannossa *täysin satunnaisesti*.
- Eräänä päivänä valmistettujen laitteiden joukossa on 6 viallista laitetta.

Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki laadunvalvonnasta 2/3

- Satunnaisilmiö: Laitteen laatu
- Koetoisto: Valmistetaan 1 laite
- Koetoistojen lkm n: 300
- Tulosvaihtoehto V: Laite on viallinen
- Viallisten laitteiden *frekvenssi*:

$$f = 6$$

- Viallisten laitteiden *suhteellinen frekvenssi*:

$$\frac{f}{n} = \frac{6}{300} = \frac{1}{50} = 0.02$$

Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki laadunvalvonnasta 3/3

- Oletetaan, että viallisten laitteiden suhteellinen osuus pysyy päivästä toiseen *suunnilleen samana* eli, että viallisten laitteiden suhteellinen osuus käyttäytyy *tilastollisesti stabiilisti*.
- Tällöin suhteellista frekvenssiä

$$p = \frac{f}{n} = \frac{6}{300} = \frac{1}{50} = 0.02$$

on järkevää kutsua *todennäköisyydeksi* saada viallinen laite, jos tehtaalla valmistettujen laitteiden joukosta *poimitaan satunnaisesti* 1 laite tarkastettavaksi.

Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki otannasta 1/4

- Väestötilaston mukaan Suomen väestö jakautui vuoden 1998 lopussa miehiin ja naisiin seuraavasti:

Miehet	2 516 000
Naiset	2 643 600
Yhteensä	**5 159 600**

- Tyypillisessä *otantatutkimuksessa* tutkimuksen kohteet valitaan *poimimalla satunnaisotos* kaikkien suomalaisten joukosta.
- Satunnaisotoksen poimintaa voidaan kuvata *arvontana*, jossa jokaista suomalaista vastaa yksi arpalippu.
- *Todennäköisyys* poimia tietty henkilö on

$$\frac{1}{5159600}$$

Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki otannasta 2/4

- Suomalaisten lukumäärä: 5 159 600
- Miesten *lukumäärä* eli *frekvenssi*: 2 516 000
- Miesten *suhteellinen osuus* eli *suhteellinen frekvenssi* kaikkien suomalaisten joukosta:

$$\frac{2516000}{5159600} = 0.488$$

- Naisten *lukumäärä* eli *frekvenssi*: 2 643 600
- Naisten *suhteellinen osuus* eli *suhteellinen frekvenssi* kaikkien suomalaisten joukosta:

$$\frac{2643600}{5159600} = 0.512$$

Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki otannasta 3/4

- Koska suomalaisia on näinkin paljon, miesten ja naisten suhteelliset frekvenssit voidaan *tulkita* empiirisen todennäköisyyden määritelmän mukaan todennäköisyyksiksi.
- Siten *todennäköisyys*, että satunnaisesti suomalaisten joukosta poimittu henkilö on *mies*, on

$$\frac{2516000}{5159600} = 0.488$$

- Siten *todennäköisyys*, että satunnaisesti suomalaisten joukosta poimittu henkilö on *nainen*, on

$$\frac{2643600}{5159600} = 0.512$$

- Todennäköisyys poimia suomalaisten joukosta nainen on *suurempi kuin* todennäköisyys poimia mies, koska naisia on *enemmän*.

Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki otannasta 4/4

- Oletetaan, että suomalaisten joukosta poimitaan *arpomalla* yhä uusia 1 000 henkilön *satunnaisotoksia*.
- Tällöin otokseen poimittujen miesten ja naisten suhteelliset osuudet *vaihtelevat otoksesta toiseen*, mutta otokseen poimituista henkilöistä *keskimäärin*

$$100\times\frac{2516000}{5159600}=48.8\ \%$$

on miehiä ja *keskimäärin*

$$100\times\frac{2643600}{5159600}=51.2\ \%$$

on naisia.
- *Tilastollinen stabiliteetti* on sitä, että nämä suhdeluvut pysyvät otoksesta toiseen *suunnilleen samoina*.

Klassinen todennäköisyys: Määritelmä

- Tarkastellaan *satunnaisilmiötä*, johon liittyy *n yhtä todennäköistä tulosvaihtoehtoa*.
- Tarkastellaan satunnaisilmiön puitteissa *tapahtumaa*, johon liittyy *k yhtä todennäköistä tulosvaihtoehtoa*, joita sanotaan ko. tapahtumalle *suotuisiksi*.
- Ko. tapahtuman **klassinen todennäköisyys** p on tapahtumalle *suotuisien* tulosvaihtoehtojen *suhteellinen frekvenssi* eli tapahtumalle *suotuisien* tulosvaihtoehtojen *osuus* satunnaisilmiön *kaikista* tulosvaihtoehdoista:

$$p = \frac{k}{n}$$

Klassinen todennäköisyys: Kommentteja

- Klassisen todennäköisyyden käsite sopii erityisesti *uhkapelien* analysointiin.
- Uhkapeleissä pelitapahtumien todennäköisyydet voidaan tavallisesti määrätä *päättelemällä* ne pelin säännöistä.
- *Historiallisesti* todennäköisyyslaskenta sai alkunsa 1600-luvulla juuri uhkapeleihin liittyvien ongelmien ratkaisuyrityksistä.
- Tulosvaihtoehtojen *lukumäärien laskeminen* on usein epätriviaali tehtävä ja apuna tarvitaan *kombinatoriikaksi* kutsuttua matematiikan osa-aluetta.

  Ks. lukua **Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka**.

Klassinen todennäköisyys: Ongelmat määritelmässä

- Klassisen todennäköisyyden määritelmä *ei anna* mahdollisuutta puhua sellaisten tapahtumien todennäköisyyksistä, *joihin liittyvät tulosvaihtoehdot eivät ole yhtä todennäköisiä*.
- Klassisen todennäköisyyden määritelmä *ei anna* mahdollisuutta puhua sellaisten tapahtumien todennäköisyyksistä, joihin liittyy *äärettömän monta tulosvaihtoehtoa*.

Klassinen todennäköisyys ja todennäköisyyden frekvenssitulkinta

- Oletetaan, että *toistamme* jotakin satunnaiskoetta ja tarkkailemme jonkin *tulosvaihtoehdon suhteellista frekvenssiä* koetoistojen aikana.
- **Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan** mukaan ko. *tulosvaihtoehdon suhteellinen frekvenssi vaihtelee satunnaisesti koetoistosta toiseen*, *mutta saa keskimäärin tulosvaihtoehdon todennäköisyyttä lähellä olevia arvoja*.

  Vahvistavatko havainnot tämän on empiirinen kysymys.

Klassinen todennäköisyys: Esimerkki nopanheitosta 1/2

- Heitetään noppaa.
- Tällöin tulosvaihtoehtoja on 6 kpl:

  Silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Tarkastellaan tapahtumia

  A = ”Silmäluku on parillinen”

  B = ”Silmäluku < 3”
- Tapahtumalle A *suotuisia* tulosvaihtoehtoja on 3 kpl:

  Silmäluvut 2, 4, 6
- Tapahtumalle B *suotuisia* tulosvaihtoehtoja on 2 kpl:

  Silmäluvut 1, 2

Klassinen todennäköisyys: Esimerkki nopanheitosta 2/2

- Tapahtuman *A* = ”Silmäluku on parillinen” todennäköisyys on

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

- Tapahtuman *B* = ”Silmäluku < 3” todennäköisyys on

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.333$$

- Siten tapahtuma *A* on *todennäköisempi* kuin tapahtuma *B*.
- Oletetaan, että heität noppaa useita kertoja.
- *Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan* mukaan *on odotettavissa*, että keskimäärin 1/3 heitoista antaa tulokseksi tapahtuman *B* ja tapahtuma *A* esiintyy heittojen tuloksena useammin kuin tapahtuma *B*.

Todennäköisyys *mittana*: Määritelmä

- Hyödyllisen *mielikuvan* todennäköisyyden luonteesta antaa seuraava *naiivi määritelmä*:

  Todennäköisyys on **mitta**, jolla mitataan satunnaisilmiön tapahtumavaihtoehtojen *sattumisen mahdollisuutta*.

Todennäköisyys *mittana*: Kommentteja 1/2

- Määritelmä *ei täytä hyvän määritelmän tunnusmerkkejä*, koska se on *kehämääritelmä*:

  Sattumisen mahdollisuus ja todennäköisyys *tarkoittavat* suunnilleen *samaa*.
- Kuitenkin on totta, että *Kolmogorovin aksioomien* mukaan todennäköisyys on *mitta matemaattisen mittateorian tarkoittamassa mielessä*.
- Kolmogorovin aksioomien mukaan *todennäköisyysmitta* käyttäytyy samalla tavalla kuin *pinta-alamitta* paitsi, että todennäköisyysmitalla on ylärajana ns. varman tapahtuman todennäköisyys.

Todennäköisyys *mittana*: Kommentteja 2/2

- Todennäköisyyden laskusääntöjä voidaan havainnollistaa joukko-opissa käytettävien **Venn-diagrammien** avulla.
- Venn-diagrammien idea:

  (i) Tapahtumia kuvataan *tasoalueilla*.

  (ii) Tapahtumien todennäköisyyksiä kuvataan *tasoalueiden pinta-aloilla*.
- Venn-diagrammien käyttö todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistamisessa perustuu siihen, että *todennäköisyydellä on mittana* (lähes kaikki) *samat ominaisuudet kuin pinta-alalla*.

Todennäköisyys ja sen määritteleminen

Deterministisyys ja satunnaisuus

Todennäköisyyden määritteleminen

>> Todennäköisyyden perusominaisuudet

Todennäköisyyden perusominaisuudet

Avainsanat

Alkeistapahtuma
Alkio
Joukko
Joukko-opin relaatiot
- **kuulua joukkoon**
- **osajoukko**

Joukko-oppi
Mahdoton tapahtuma
Osajoukko
Otosavaruus
Perusjoukko
Stokastinen malli
Symmetriset alkeistapahtumat
Tapahtuma
Tilastollinen malli
Todennäköisyyden frekvenssitulkinta
Todennäköisyyden perusominaisuudet
Todennäköisyyksien vertailu
Todennäköisyys
Todennäköisyysmalli
Tulosvaihtoehto
Tyhjä joukko
Varma tapahtuma
Venn-diagrammi
Äärellisen otosavaruuden tapahtumat
Äärellinen otosavaruus

Satunnaisilmiöt ja niiden tilastolliset mallit

- Tilastotieteen tehtävänä on kehittää satunnaisilmiöille **tilastollisia malleja**, joiden avulla pyritään tekemään satunnaisilmiöitä koskevia *johtopäätöksiä*.
- Satunnaisilmiöiden tilastolliset mallit perustuvat **todennäköisyyslaskentaan** ja siksi niitä kutsutaan usein myös *stokastisiksi malleiksi* eli *todennäköisyysmalleiksi*.

Todennäköisyysmalli satunnaisilmiön tilastollisena mallina

- Satunnaisilmiön **tilastollisessa mallissa** eli **todennäköisyysmallissa** eli **stokastisessa mallissa** on kaksi osaa:

  (i) Satunnaisilmiön *kaikkien mahdollisten* **tulosvaihtoehtojen** kuvaus.

  (ii) Tulosvaihtoehtojen **todennäköisyyksien** kuvaus.

- Satunnaisilmiön tilastollinen malli esitetään tavallisesti satunnaisilmiön tulosvaihtoja numeerisessa muodossa kuvaavaan *satunnaismuuttujan* ja sen *todennäköisyysjakauman* avulla.

  Ks. lukua **Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat**.

Tilastollisten mallien rakentaminen ja tilastollisen tutkimuksen tavoitteet 1/2

- *Tilastollisen tutkimuksen* päätavoitteena on *tilastollisen mallin rakentaminen* tutkimuksen kohteena olevalle satunnaisilmiöille.

Tilastollisten mallien rakentaminen ja tilastollisen tutkimuksen tavoitteet 2/2

- Tilastollisen mallin rakentamisen työvaiheet:

(1) *Mallin muodostaminen* ilmiölle.

(2) Ilmiötä koskevien *havaintojen kerääminen*.

Ks. lukua **Tilastollisten aineistojen kerääminen ja mittaaminen.**

(3) Mallin *parametrien estimointi*.

Ks. lukua **Tilastollisten mallien parametrien estimointi.**

(4) Mallin ja havaintojen *yhteensopivuuden testaaminen*.

Jos mallissa havaitaan puutteita vaiheessa (4), palataan vaiheeseen (1).

Ks. *luentosarjaa* **Tilastollisen analyysin perusteet.**

Todennäköisyyslaskenta ja joukko-oppi

- Todennäköisyyslaskennan historian tärkeimpiä teoreettisia oivalluksia on ollut se, että satunnaisilmiön tapahtumia voidaan käsitellä **joukkoina**.
- Siksi seuraavassa palautetaan mieleen **joukko-opin** *perus-määritelmät*.
- Huomautus:

  Täydellisempi esitys joukko-opin peruskäsitteistä ja -määritelmistä on koottu liitteeksi **Joukko-oppi**.

Joukko-opin perusmääritelmät: Joukko ja sen alkiot

- **Joukko** on *kokoelma olioita*, joita kutsutaan joukon **alkioiksi**.
- Joukko on **hyvin määritelty**, jos *sen alkiot tunnetaan*.
- Merkitään **joukon ja sen alkioiden välistä relaatiota** seuraavasti:

(i) *s* **on** *joukon A* **alkio** eli *s* **kuuluu** *joukkoon A*:

$$s \in A$$

(ii) *s* **ei ole** *joukon A* **alkio** eli *s* **ei kuulu** *joukkoon A*:

$$s \notin A$$

Joukko-opin perusmääritelmät: Osajoukko

- Olkoot A ja B kaksi joukkoa.
- Jos jokaiselle joukon B alkiolle s pätee, että

$$s \in B \Rightarrow s \in A$$

niin sanomme, että *joukko B on joukon A* **osajoukko** tai, että *joukko B* **sisältyy** *joukkoon A.*

- Merkintä:

Joukko B on joukon A osajoukko:

$$B \subset A \text{ tai } A \supset B$$

Joukko-opin perusmääritelmät: Tyhjä joukko

- Joukko on **tyhjä**, jos siihen ei kuulu yhtään alkiota.
- Tyhjää joukkoa merkitään symbolilla

$$\varnothing$$

- Jos joukko $\varnothing$ on tyhjä, *ei ole olemassa* oliota s, jolle

$$s \in \varnothing$$

- Tyhjä joukko $\varnothing$ on *jokaisen* joukon osajoukko eli mielivaltaiselle joukolle A pätee:

$$\varnothing \subset A$$

Otosavaruus ja alkeistapahtumat

- Satunnaisilmiön *kaikkien mahdollisten tulosvaihtoehtojen joukkoa* kutsutaan **otosavaruudeksi**.
- Otosavaruuden *alkioita* kutsutaan **alkeistapahtumiksi**.
- Merkinnät:

(i) *Otosavaruutta* (engl. *sample space*) *merkitään* tavallisesti isolla kirjaimella S.

(ii) *Otosavaruuden S alkiota merkitään* usein vastaavalla pienellä kirjaimella s.

- Jos siis alkeistapahtuma s kuuluu otosavaruuteen S, merkitään:

$$s \in S$$

Otosavaruus ja alkeistapahtumat: Kommentteja

- Otosavaruus muodostaa *perusjoukon*, jossa satunnais-ilmiön tulosvaihtoehtoja tarkastellaan.
- Satunnaisilmiötä ei voida “purkaa” otosavaruuden alkeistapahtumia *alkeellisempiin* tulosvaihtoehtoihin.

Tapahtumat 1/2

- Olkoon *S otosavaruus* eli tarkasteltavan satunnaisilmiön kaikkien mahdollisten tulosvaihtoehtojen joukko.
- Tarkasteltavan satunnaisilmiön **tapahtumat** ovat otosavaruuden *S alkeistapahtumien muodostamia joukkoja*.
- Siten tapahtumat ovat tarkasteltavaan satunnaisilmiöön liittyvän otosavaruuden *S osajoukkoja*.

Tapahtumat 2/2

- Jos siis A on jokin otosavaruuden S *tapahtuma*, niin

$$A \subset S$$

eli

$$s \in A \Rightarrow s \in S$$

jossa s on tapahtumaan A kuuluva *alkeistapahtuma*.

- **Kun sanomme, että tapahtuma A sattuu, tarkoitamme sitä, että jokin tapahtumaan A kuuluva alkeistapahtuma s sattuu**.

Otosavaruus, alkeistapahtumat ja tapahtumat: Esimerkki sukupuolen määräytymisestä

- Satunnaisilmiö:

  Lapsen sukupuolen määräytyminen

- Otosavaruus:

  S = {Tyttö, Poika}

- Alkeistapahtumat:

  s_1 = Tyttö

  s_2 = Poika

Otosavaruus, alkeistapahtumat ja tapahtumat: Esimerkki 1 nopanheitosta

- Satunnaisilmiö:

  Nopanheiton tulos

- Otosavaruus:

  Silmälukujen joukko $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Alkeistapahtumat:

  Silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5, 6

- Esimerkki tapahtumasta:

  A = ”Silmäluku on parillinen” = $\{2, 4, 6\}$

Otosavaruus, alkeistapahtumat ja tapahtumat: Esimerkki 2 nopanheitosta 1/3

- Satunnaisilmiö:

  Tulokset kahdesta nopanheitosta

- Otosavaruus *S*:

  Silmälukuparien (*i*, *j*) (36 kpl) joukko, jossa

  i = 1. nopanheiton silmäluku, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

  j = 2. nopanheiton silmäluku, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$
\begin{aligned}
S = \{ & (1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6), \\
& (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6), \\
& (3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6), \\
& (4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6), \\
& (5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (5,6), \\
& (6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6) \}
\end{aligned}
$$

Otosavaruus, alkeistapahtumat ja tapahtumat: Esimerkki 2 nopanheitosta 2/3

- Otosavaruuden alkiot voidaan esittää seuraavana *taulukkona*:

(*i*, *j*)	***j* = tulos 2. nopan heitosta**					
***i* = tulos 1. nopan-heitosta**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Otosavaruus, alkeistapahtumat ja tapahtumat: Esimerkki 2 nopanheitosta 3/3

- Esimerkki tapahtumasta:

$$\begin{aligned} A &= \text{"Kummallakin nopalla saadaan sama silmäluku"} \\ &= \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \end{aligned}$$

- Esimerkiksi:

$$(2,2) \in A$$

$$(6,1) \notin A$$

$$A \subset S$$

Varma tapahtuma ja mahdoton tapahtuma

Varma tapahtuma

- Tapahtuma on **varma**, jos se *esiintyy aina*, kun satunnaisilmiö toistuu.
- *Otosavaruus S* on varma tapahtuma.

Mahdoton tapahtuma

- Tapahtuma on **mahdoton**, jos se *ei voi esiintyä koskaan*, kun satunnaisilmiö toistuu.
- *Tyhjä joukko* $\varnothing$ on mahdoton tapahtuma.

Varma tapahtuma ja mahdoton tapahtuma: Esimerkit rahan- ja nopanheitosta

Esimerkki 1:

- Rahaa heitettäessä tuloksena on aina joko kruuna tai klaava.
- Tapahtuma

  $$S = \{\text{Kruuna, Klaava}\}$$

  on *varma*.

Esimerkki 2:

- Tavallista noppaa heitettäessä silmäluku 7 ei voi olla tuloksena.
- Tapahtuma $\{7\}$ on *mahdoton*.

Todennäköisyyden perusominaisuudet

- Olkoon S *otosavaruus*, jossa satunnaisilmiötä tarkastellaan.
- *Jokaisen* **tapahtuman**

  $$A \subset S$$

  todennäköisyys $\Pr(A)$ on reaaliluku välillä [0,1]:

  $$0 \le \Pr(A) \le 1$$

- **Varman tapahtuman** S **todennäköisyys** on 1:

  $$\Pr(S) = 1$$

- **Mahdottoman tapahtuman** $\varnothing$ **todennäköisyys** on 0:

  $$\Pr(\varnothing) = 0$$

Todennäköisyyksien vertailu

- Jos

  $$\Pr(A) > \Pr(B)$$

  niin sanomme:

  ”Tapahtuma A on **todennäköisempi** kuin tapahtuma B”

  tai

  ”Tapahtuma B on **epätodennäköisempi** kuin tapahtuma A”

Todennäköisyyksien vertailu ja todennäköisyyden frekvenssitulkinta

- Mitä *todennäköisempi* tapahtuma on, sitä *useammin* tapahtumalla on taipumus esiintyä satunnaisilmiön toistuessa eli sitä *suurempi* on tapahtuman havaittu suhteellinen frekvenssi.
- Mitä *epätodennäköisempi* tapahtuma on, sitä *harvemmin* tapahtumalla on taipumus esiintyä satunnaisilmiön toistuessa eli sitä *pienempi* on tapahtuman havaittu suhteellinen frekvenssi.

Lukumääräfunktio

- Olkoon

$$n(A)$$

funktio, joka kertoo *joukon A alkioiden lukumäärän*.

- Kutsumme funktiota $n(\cdot)$ **lukumääräfunktioksi**.
- Jos siis joukon A alkioiden lukumäärä on k, niin

$$n(A) = k$$

Äärelliset otosavaruudet

- Olkoon **otosavaruus *S* äärellinen joukko** ja olkoon

$$n(S) = n$$

otosavaruuden S *alkeistapahtumien* eli alkioiden lukumäärä.

- Merkitään alkeistapahtumia seuraavalla tavalla:

$$s_i \;,\; i = 1, 2, \ldots, n$$

- Tällöin otosavaruus S voidaan määritellä luettelemalla sen alkiot:

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$$

Äärelliset otosavaruudet: Alkeistapahtumien todennäköisyydet

- Äärellisen otosavaruuden

  $$S = \{s_1, s_2, \ldots , s_n\}$$

  alkeistapahtumien $s_1, s_2, \ldots , s_n$ todennäköisyyksien

  $$\Pr(s_i) = p_i \ , \ i = 1, 2, \ldots , n$$

  on toteuttava ehto

  $$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Äärelliset otosavaruudet: Tapahtumien todennäköisyydet

- Olkoon A äärellisen otosavaruuden S *tapahtuma* eli $A \subset S$.
- Tällöin **tapahtuman *A* todennäköisyys** $\Pr(A)$ on

$$\Pr(A) = \sum_{i \mid s_i \in A} p_i$$

- Summassa lasketaan yhteen kaikki todennäköisyydet

$$p_i = \Pr(s_i)$$

joille $s_i \in A$.

Symmetriset alkeistapahtumat ja niiden todennäköisyydet

- Oletetaan, että äärellisen otosavaruuden

$$S = \{s_1, s_2, \ldots , s_n\}$$

  alkeistapahtumien $s_1, s_2, \ldots , s_n$ todennäköisyydet ovat *yhtä suuria*:

$$\Pr(s_i) = \frac{1}{n}, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

- Tällöin sanomme, että alkeistapahtumat $s_1, s_2, \ldots , s_n$ ovat **symmetrisiä**.

Symmetriset alkeistapahtumat ja klassinen todennäköisyys 1/2

- Olemme määritelleet tapahtuman *klassisen todennäköisyyden* tapahtumalle suotuisien tulosvaihtoehtojen suhteellisena frekvenssinä satunnaisilmiön kaikista tulosvaihtoehdoista (ks. kappaletta **Todennäköisyyden määritteleminen**).
- Olkoot otosavaruuden

  $$S = \{s_1, s_2, \ldots , s_n\}$$

  alkeistapahtumat $s_1, s_2, \ldots , s_n$ *symmetrisiä*:

  $$\Pr(s_i) = \frac{1}{n}, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

Symmetriset alkeistapahtumat ja klassinen todennäköisyys 2/2

- Olkoon A otosavaruuden S tapahtuma, johon liittyvien alkeistapausten lukumäärä on k:

$$A \subset S$$

$$n(A) = k \leq n = n(S)$$

- Tällöin tapahtuman A **klassinen todennäköisyys** on

$$\Pr(A) = \frac{k}{n}$$

jossa siis

$$k = n(A)$$

$$n = n(S)$$

Symmetriaoletus ja uhkapelit

- Useimmissa *uhkapeleissä* pelin *säännöt edellyttävät*, *että peliin liittyvät alkeistapahtumat ovat symmetrisiä*.
- Tyypillisiä uhkapelien säännöissä esitettyjä symmetria-vaatimuksia ovat seuraavat:

  (i) Käytettävien pelivälineiden (esim. nopan, rahan tai rulettipyörän) on oltava *fysikaalisesti symmetrisiä*.

  (ii) Käytettävillä pelivälineillä (esim. arpalipuilla tai korteilla) on oltava *sama todennäköisyys tulla valituiksi* tai *jaetuiksi*.
- Huomaa, että vaatimus (ii) edellyttää pelivälineiden (esim. arpalippujen tai korttien) huolellista *sekoittamista*.

Symmetriaoletus: Kommentteja

- Otosavaruuden alkeistapahtumien symmetrisyyttä voidaan vain harvoin *perustella* uhkapelien ulkopuolella.
- Oletus alkeistapahtumien symmetrisyydestä on *oletus*, jota voidaan *testata* tilastollisesti, jos ko. satunnaisilmiöstä kerätään *havaintoja*.
- *Klassisen todennäköisyyden määritelmä* edellyttää sitä, että otosavaruus on äärellinen ja sen alkeistapahtumat ovat symmetrisiä.

Symmetriset alkeistapahtumat: Esimerkki

- Satunnaisilmiö:

    Tulos nopanheitosta

- Otosavaruus S:

  Silmälukujen i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 joukko:

    $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Oletus nopan **virheettömyydestä** voidaan pukea seuraavaan muotoon:

$$\Pr(i) = \frac{1}{6}\,,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- Siten oletus noppien virheettömyydestä merkitsee oletusta alkeistapahtumien i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 *symmetrisyydestä*.