## Johdatus todennäköisyyslaskentaan

# Jakaumien tunnusluvut

# Jakaumien tunnusluvut

**Odotusarvo**

**Varianssi**

**Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt**

**Momentit**

**Vinous ja huipukkuus**

**Kvantiilit**

**Moodi**

**Suurten lukujen laki**

# Jakaumien tunnusluvut: Mitä opimme? – 1/2

- Tarkastelemme tässä luvussa todennäköisyysjakaumien kuvaamista erilaisten **tunnuslukujen** avulla.
- Tunnusluvuista tärkein on todennäköisyysjakauman **todennäköisyysmassan painopistettä** kuvaava – ja siksi jakauman **sijaintiparametrina** käytettävä – **odotusarvo**.
- Jakauman todennäköisyysmassan **hajaantuneisuutta** (tai **keskittyneisyyttä**) sen painopisteen suhteen kuvataan **varianssilla** tai **standardipoikkeamalla**.
- Odotusarvo ja varianssi voidaan määritellä todennäköisyysjakauman **1.** ja **2. momentin** avulla.
- Jakauman **vinouden** tai **huipukkuuden** tarkastelu vaatii *korkeampien* **momenttien** määrittelemistä.
- Tarkastelemme lisäksi jakauman **kvantiileja** sekä **moodia**.

# Jakaumien tunnusluvut: Mitä opimme? – 2/2

- Esitämme tässä luvussa myös monikäyttöiset **Markovin** ja **Tshebyshevin epäyhtälöt**.
- Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöiden avulla voidaan arvioida todennäköisyysjakauman *todennäköisyysmassan määrää jakauman häntäalueilla*.
- Esitämme tässä luvussa myös usean riippumattoman satunnaismuuttujan **aritmeettisen keskiarvon asymptoottista käyttäytymisestä** koskevan **suurten lukujen lain**.

# Jakaumien tunnusluvut:
# Esitiedot

- Esitiedot: ks. seuraavaa lukua:

  **Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat**

# Jakaumien tunnusluvut: Lisätiedot

- Tässä luvussa tarkastellaan myös satunnaismuuttujien **summan odotusarvoa** ja **varianssia**.
- Tarkkaan ottaen tämä vaatii täsmennykseen **moniulotteisten satunnaismuuttujien** tarkastelua; ks. lukua

**Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat**

# Jakaumien tunnusluvut

\>> **Odotusarvo**

**Varianssi**

**Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt**

**Momentit**

**Vinous ja huipukkuus**

**Kvantiilit**

**Moodi**

**Suurten lukujen laki**

# Odotusarvo

***Avainsanat***

**Diskreetin jakauman odotusarvo**

**Jatkuvan jakauman odotusarvo**

**Odotusarvo**

**Painopiste**

**Sijaintiparametri**

**Satunnaismuuttujien summan odotusarvo**

**Todennäköisyysmassa**

# Johdatteleva esimerkki: Arpajaiset 1/7

- Olkoon **arpajaisissa** 1000 *arpaa*.
- *Arpanumerot*: 1, 2, … , 1000.
- *Voitonjako*:

| Voitot (mk) | Voittoja (kpl) |
|---|---|
| 1000 | 1 |
| 100 | 10 |
| 20 | 100 |

# Johdatteleva esimerkki: Arpajaiset 2/7

- *Arvotaan* voittonumerot seuraavalla tavalla:
  (1) Kirjoitetaan arpanumerot lipukkeille.
  (2) Pannaan lipukkeet uurnaan.
  (3) Poimitaan uurnasta *satunnaisesti* 111 arpaa:
    – 100 ensimmäistä saa voittona 20 mk
    – 10 seuraavaa saa voittona 100 mk
    – Viimeinen saa voittona 1000 mk
- *Voitot yhteensä* (mk):

$$1000\times1 + 100\times10 + 20\times100 = 4000$$

- *Voitto yhtä ostettua arpaa kohden* eli *voitto*/*arpa* (mk):

$$4000/1000 = 4$$

# Johdatteleva esimerkki: Arpajaiset 3/7

- *Voitto*/*arpa* voidaan laskea myös *toisella tavalla*.
- *Arpanumerot*: 1, 2, … , 1000.
- *Voitonjako*:

| Voitot (mk) | Voittoja (kpl) |
|---|---|
| 1000 | 1 |
| 100 | 10 |
| 20 | 100 |
| 0 | 889 |

- *Voitto*/*arpa* (mk):

$$\begin{aligned}
&\frac{1\times 1000+10\times 100+100\times 20+889\times 0}{1000}\\
&=\frac{1}{1000}\times 1000+\frac{10}{1000}\times 100+\frac{100}{1000}\times 20+\frac{889}{1000}\times 0\\
&=4
\end{aligned}$$

# Johdatteleva esimerkki: Arpajaiset 4/7

- *Voitto*/*arpa* saadaan siis laskutoimituksella

$$\frac{1}{1000}\times 1000+\frac{10}{1000}\times 100+\frac{100}{1000}\times 20+\frac{889}{1000}\times 0=4$$

jossa *voitto*/*arpa* on laskettu voittojen *painotettuna summana*, jossa *painoina* on käytetty voittojen *todennäköisyyksiä*:

$$\Pr(\text{Voitto}=1000)=\frac{1}{1000}=0.001$$

$$\Pr(\text{Voitto}=100)=\frac{10}{1000}=0.01$$

$$\Pr(\text{Voitto}=20)=\frac{100}{1000}=0.1$$

$$\Pr(\text{Voitto}=0)=\frac{889}{1000}=0.889$$

# Johdatteleva esimerkki: Arpajaiset 5/7

- Siten suure *voitto*/*arpa* on laskettu kaavalla

  $$\sum x_i p_i$$

  jossa

  $x_i$ = voitto

  $p_i$ = on voiton $x_i$ todennäköisyys
- Suuretta *voitto*/*arpa* kutsutaan todennäköisyyslaskennassa *voiton* **odotusarvoksi**.
- Voiton odotusarvo on *odotettavissa oleva voitto*, jos ostaa *yhden arvan*.
- Voiton odotusarvolle voidaan antaa seuraava *tulkinta*:

  Jos ostetaan useita arpoja, voiton odotusarvo kertoo *keskimääräisen voiton yhtä arpaa kohden*.

# Johdatteleva esimerkki: Arpajaiset 6/7

- Arpominen on *satunnaisilmiö*.
- Määritellään *satunnaismuuttuja* $X$ = *voitto*.
- Satunnaismuuttujan $X$ mahdolliset *arvot* $x_i$ (voitot) ja niiden *todennäköisyydet* $p_i$ :

| $x_i$ | $\Pr(X = x_i) = p_i$ |
|---|---|
| 1000 | 1/1000 |
| 100 | 10/1000 |
| 20 | 100/1000 |
| 0 | 889/1000 |

- Huomautus:

  Huomaa, että tulosvaihtoehto 0 mk ja sen todennäköisyys on otettava mukaan!

# Johdatteleva esimerkki: Arpajaiset 7/7

- Satunnaismuuttujan $X$ *arvot* $x_i$ ja niiden *todennäköisyydet*

  $$\Pr(X = x_i) = p_i$$

  määrittelevät *diskreetin todennäköisyysjakauman*.
- Lauseke

  $$\sum x_i p_i = \sum x_i \Pr(X = x_i)$$

  määrittelee diskreetin satunnaismuuttujan $X$ *odotusarvon*.
- Huomautus:

  Odotusarvo määritellään seuraavassa erikseen *diskreeteille* ja *jatkuville* jakaumille.

# Diskreetin jakauman odotusarvo: Määritelmä

- Olkoon $X$ *diskreetti satunnaismuuttuja*.
- Olkoon $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ satunnaismuuttujan $X$ *tulos-vaihtoehtojen* eli arvojen joukko.
- Olkoon satunnaismuuttujan $X$ *pistetodennäköisyysfunktio*

$$f(x_i) = \Pr(X = x_i) = p_i \text{ , } i = 1, 2, 3, \ldots$$

- Satunnaismuuttujan $X$ **odotusarvo** on *vakio*

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = \sum_i x_i \Pr(X = x_i) = \sum_i x_i f(x_i)$$

- Sanomme, että satunnaismuuttujan $X$ odotusarvo $\mathrm{E}(X)$ on sen *jakauman odotusarvo*, joka kuvaa satunnaismuuttujaan $X$ liittyviä todennäköisyyksiä.

# Diskreetin jakauman odotusarvo: Kommentteja

- Vaikka satunnaismuuttujan saama arvo vaihtelee satunnaisesti koetoistosta toiseen, satunnaismuuttuja saa *keskimäärin* arvoja, jotka vaihtelevat sen odotusarvon ympärillä.
- *Jos jakaumalla on odotusarvo*, se on jakauman todennäköisyysmassan **painopiste**.
- *Diskreetin* jakauman odotusarvon *ei tarvitse kuulua* ko. satunnaismuuttujan tulosvaihtoehtojen joukkoon.

  Nopanheiton tuloksen odotusarvo on 3.5 (ks. >), mikä ei esiinny mahdollisten tulosvaihtoehtojen joukossa.

# Diskreetin jakauman odotusarvo: Esimerkki nopanheitosta

- Nopanheittoon liittyvän **diskreetin tasaisen jakauman** *pistetodennäköisyysfunktio* on muotoa

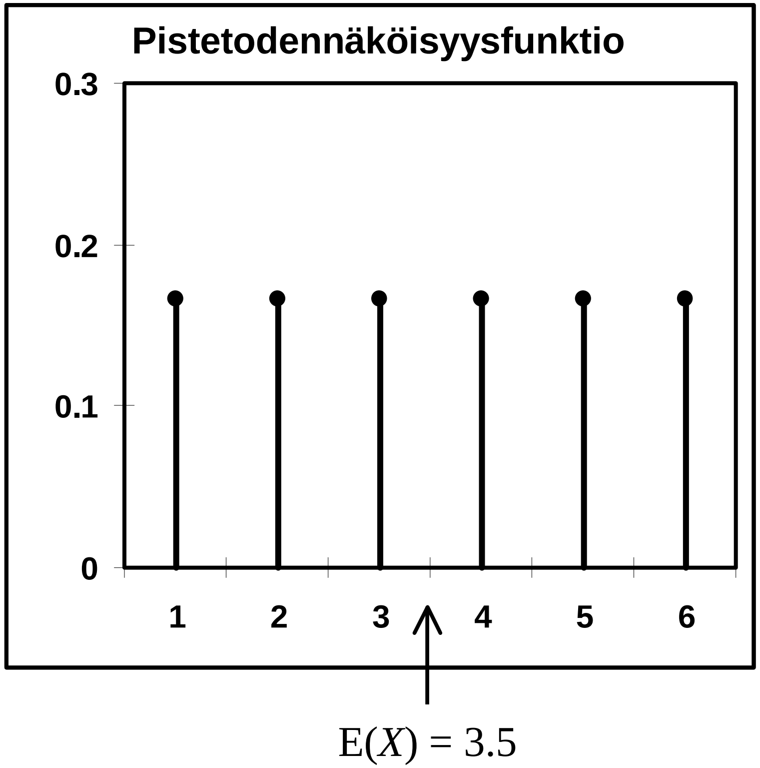
$$\Pr(X = i) = \frac{1}{6}\,,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- Satunnaismuuttujan $X$ *odotusarvo*:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} i \Pr(X = i) = \sum_{i=1}^{6} i \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6}$$

$$= 3.5$$

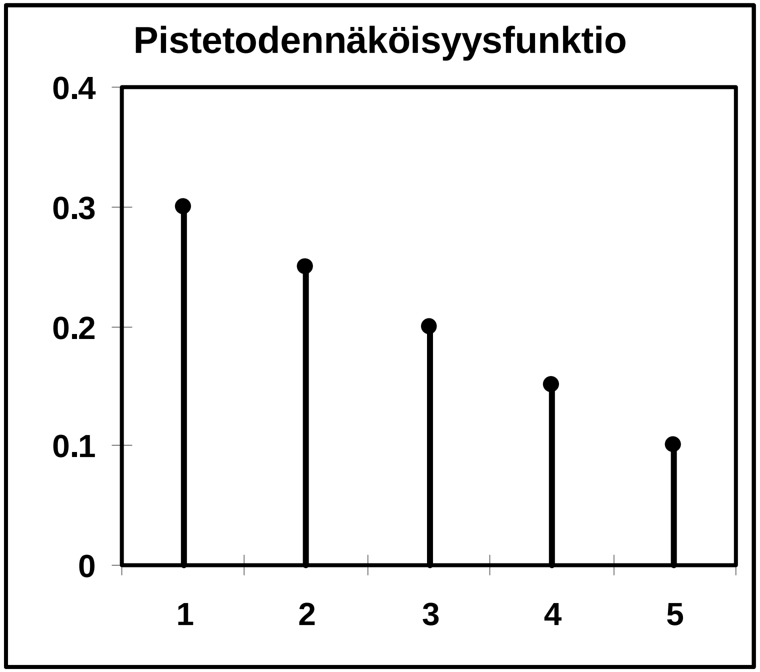


# Diskreetin jakauman odotusarvo: Esimerkki onnenpyörästä 1/2

- Olkoon *diskreetin satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyysfunktio* muotoa

  $\Pr(X = 1) = 0.3$
  $\Pr(X = 2) = 0.25$
  $\Pr(X = 3) = 0.2$
  $\Pr(X = 4) = 0.15$
  $\Pr(X = 5) = 0.1$

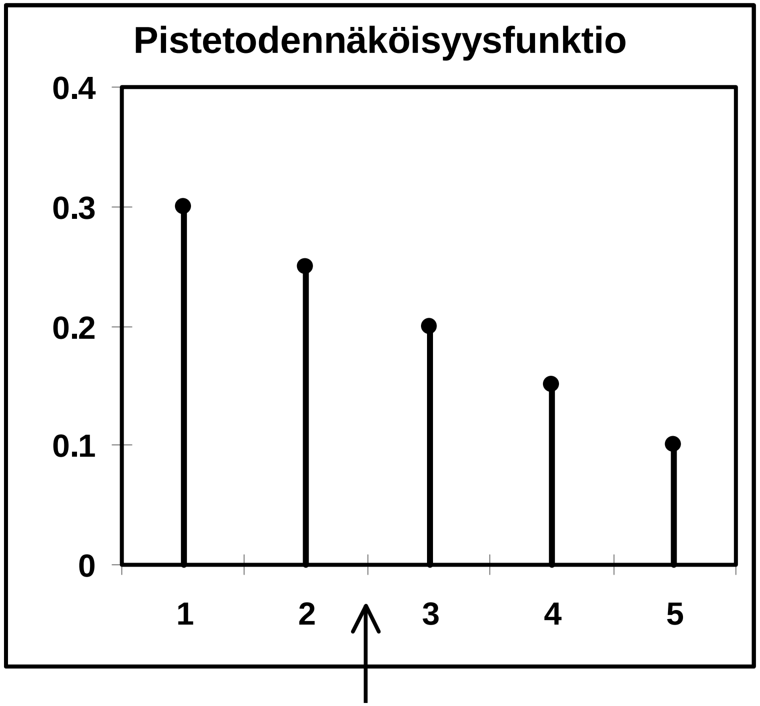
- Pistetodennäköisyysfunktio liittyy luvussa **Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat** käsiteltyyn esimerkkiin onnenpyörästä.



# Diskreetin jakauman odotusarvo: Esimerkki onnenpyörästä 2/2

- Satunnaismuuttujan $X$ *odotusarvo*:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{i=1}^{5} i\,\Pr(X=i) \\ &= 1\times 0.3 + 2\times 0.25 + 3\times 0.2 \\ &\quad + 4\times 0.15 + 5\times 0.1 \\ &= 2.5\end{aligned}$$




$\mathrm{E}(X) = 2.5$

# Jatkuvan jakauman odotusarvo: Määritelmä

- Olkoon $X$ on *jatkuva satunnaismuuttuja*.
- Olkoon satunnaismuuttujan $X$ *tiheysfunktio* $f(x)$.
- Satunnaismuuttujan $X$ **odotusarvo** on *vakio*

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

- Sanomme, että satunnaismuuttujan $X$ odotusarvo $\mathrm{E}(X)$ on sen *jakauman odotusarvo*, joka kuvaa satunnaismuuttujaan $X$ liittyviä todennäköisyyksiä.

# Jatkuvan jakauman odotusarvo: Kommentteja

- Vaikka satunnaismuuttujan saama arvo vaihtelee satunnaisesti koetoistosta toiseen, satunnaismuuttuja saa *keskimäärin* arvoja, jotka vaihtelevat sen odotusarvon ympärillä.
- *Jos jakaumalla on odotusarvo*, se on jakauman todennäköisyysmassan **painopiste**.
- *Jatkuvan* jakauman odotusarvo *kuuluu aina* ko. satunnaismuuttujan tulosvaihtoehtojen joukkoon.

# Jatkuvan jakauman odotusarvo: Esimerkki tasaisesta jakaumasta

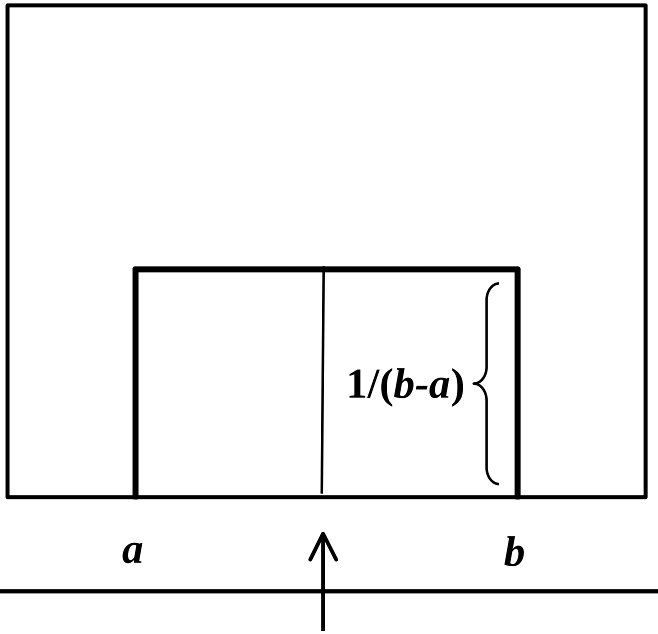
- **Jatkuvan tasaisen jakauman** *tiheysfunktio* on

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

- Jakauman *odotusarvo* on

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \\ &= \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_a^b \\ &= (b+a)/2 = a + (b-a)/2 \end{aligned}$$

**Jatkuva tasainen jakauma**




E($X$) = $a$ + ($b$ – $a$)/2

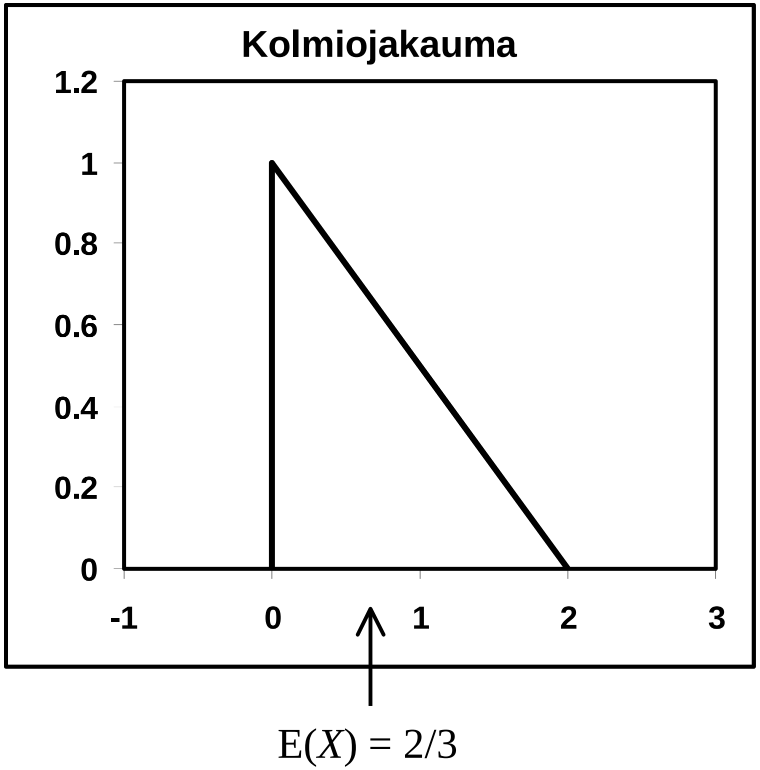
# Jatkuvan jakauman odotusarvo: Esimerkki kolmiojakaumasta

- Erään **kolmiojakauman** *tiheysfunktio* on

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

- Jakauman *odotusarvo* on

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_0^2 x\left(-\tfrac{1}{2}x + 1\right)dx \\ &= \left[-\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$



# Jatkuvan jakauman odotusarvo: Esimerkki normaalijakaumasta

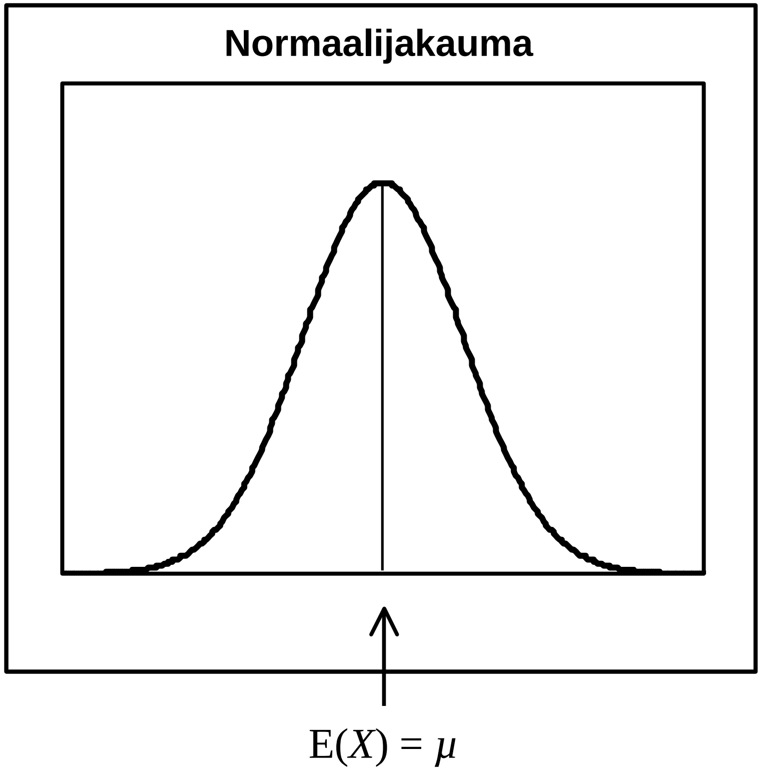
- **Normaalijakauman** *tiheysfunktio* on

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

- Normaalijakauman tiheysfunktio on *symmetrinen* suoran $x = \mu$ suhteen.
- Voidaan osoittaa, että normaalijakauman *odotusarvo*

  $\mathrm{E}(x) = \mu$

  ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.



# Odotusarvon olemassaolo

- Jakaumalla *ei välttämättä ole* odotusarvoa.
- **Odotusarvon olemassaololla** tarkoitetaan diskreetin jakauman tapauksessa sitä, että

$$\sum_i |x_i| f(x_i) < \infty$$

ja jatkuvan jakauman tapauksessa sitä, että

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

# Odotusarvo ja todennäköisyysmassan painopiste

- Jos jakaumalla on odotusarvo, se yhtyy aina ko. jakauman todennäköisyysmassan **painopisteeseen**.
- Olkoon

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

satunnaismuuttujan $X$ odotusarvo.

- Jos satunnaismuuttujan $X$ jakauma on *symmetrinen* suoran

$$x = a$$

suhteen, niin

$$\mathrm{E}(X) = \mu = a$$

# Vakion odotusarvo

- Olkoon *a ei-satunnainen vakio*.
- **Vakion odotusarvo** on vakio itse:

$$\mathrm{E}(a) = a$$

- Kommentti:

  Vakio *ei vaihtele* koetoistosta toiseen.

# Vakion odotusarvo: Perustelu

- Väite: *Vakiolle a* pätee

$$\mathrm{E}(a) = a$$

- Perustelu *jatkuvan jakauman* tapauksessa:

$$\mathrm{E}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} af(x)dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a \cdot 1 = a$$

# Lineaarimuunnoksen odotusarvo

- Olkoon satunnaismuuttujan $X$ odotusarvo $\mathrm{E}(X)$.
- **Satunnaismuuttujan $X$ lineaarimuunnoksen**

  $$Y = a + bX$$

  ($a$ ja $b$ *vakioita*) odotusarvo $\mathrm{E}(Y)$ saadaan soveltamalla ko. lineaarimuunnosta odotusarvoon $\mathrm{E}(X)$:

  $$\mathrm{E}(Y) = a + b\,\mathrm{E}(X)$$

# Lineaarimuunnoksen odotusarvo: Perustelu

- Väite: *Lineaarimuunnokselle*

  $$Y = a + bX$$

  pätee

  $$\mathrm{E}(Y) = a + b\mathrm{E}(X).$$

- Perustelu *jatkuvan jakauman* tapauksessa:

  $$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(a + bX) = \int_{-\infty}^{+\infty} (a + bx) f(x)dx$$

  $$= a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

  $$= a + b\,\mathrm{E}(X)$$

# Lineaarimuunnoksen odotusarvo: Kommentteja

- Satunnaismuuttujan $X$ kertominen vakiolla $b$ merkitsee satunnaismuuttujan $X$ saamien arvojen *mittakaavan muuttamista*.
- Satunnaismuuttujan $X$ saamien arvojen mittakaavan muuttaminen *verrannollisuuskertoimella* $b$ muuttaa satunnaismuuttujan $X$ jakauman todennäköisyysmassan painopistettä samalla kertoimella.
- Vakion $a$ lisääminen satunnaismuuttujaan $X$ merkitsee satunnaismuuttujan $X$ jakauman todennäköisyysmassan *siirtoa*.
- Todennäköisyysmassan siirtäminen vakion $a$ verran siirtää todennäköisyysmassan painopistettä *saman* verran.

# Odotusarvo jakauman sijaintiparametrina 1/2

- Koska odotusarvolla on *fysikaalinen tulkinta* todennäköisyysmassan *painopisteenä*, odotusarvoa voidaan kutsua jakauman **sijaintiparametriksi**.
- Oletetaan, että satunnaismuuttujien $X$ ja $Y$ *tiheysfunktiot yksihuippuisia* ja *symmetrisiä painopisteensä suhteen*.
- Tällöin satunnaismuuttujan $X$ todennäköisyysmassan pääosa *sijaitsee vasemmalla* satunnaismuuttujan $Y$ todennäköisyysmassan pääosasta, jos ja vain jos

$$\mathrm{E}(X) < \mathrm{E}(Y)$$

ks. havainnollistusta 1 >.

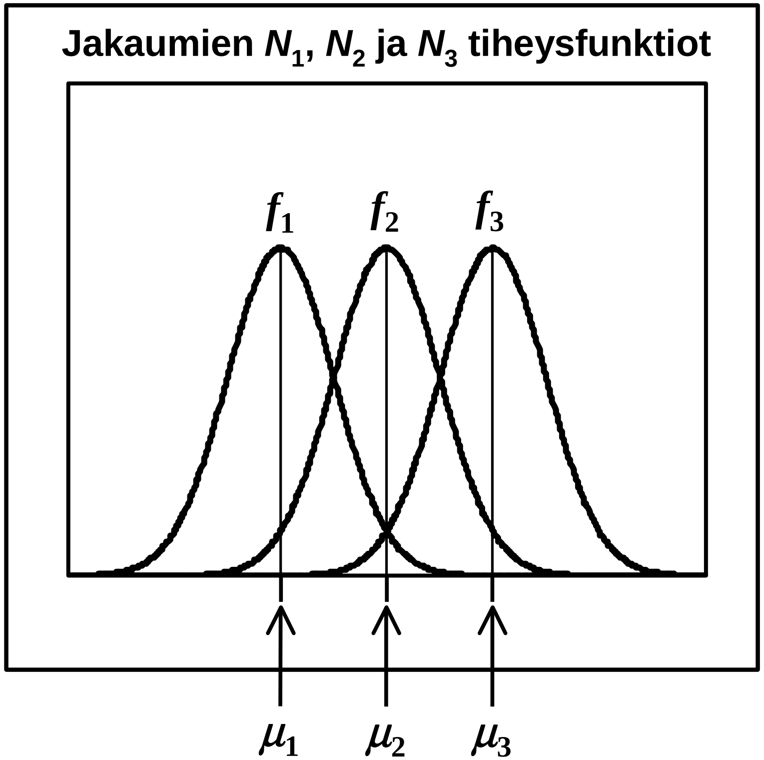
# Odotusarvo jakauman sijaintiparametrina 2/2

- Myös jos jakauma on *yksihuippuinen*, mutta *vino*, odotusarvo kuvaa luontevalla tavalla jakauman todennäköisyysmassan pääosan *sijaintia*; ks. havainnollistusta 2 >.
- Sen sijaan, jos jakauma on *monihuippuinen*, jakauman todennäköisyysmassan pääosien ei tarvitse olla lähellä odotusarvoa; ks. havainnollistusta 3 >.

# Odotusarvo jakauman sijaintiparametrina: Havainnollistus 1

- Kuva oikealla esittää kolmen **normaalijakauman** $N_1$, $N_2$ ja $N_3$ *tiheysfunktioita* $f_1$, $f_2$ ja $f_3$ .
- Tiheysfunktiot $f_1$, $f_2$ ja $f_3$ ovat *yksihuippuisia* ja *symmetrisiä* suorien $x = \mu_1$, $x = \mu_2$ ja $x = \mu_3$ suhteen.
- Jakaumat $N_2$ ja $N_3$ on saatu *siirtämällä* jakauman $N_1$ todennäköisyysmassaa *oikealle*.
- Jakaumien $N_1$, $N_2$ ja $N_3$ odotusarvot $\mu_1$, $\mu_2$ ja $\mu_3$ toteuttavat epäyhtälöt

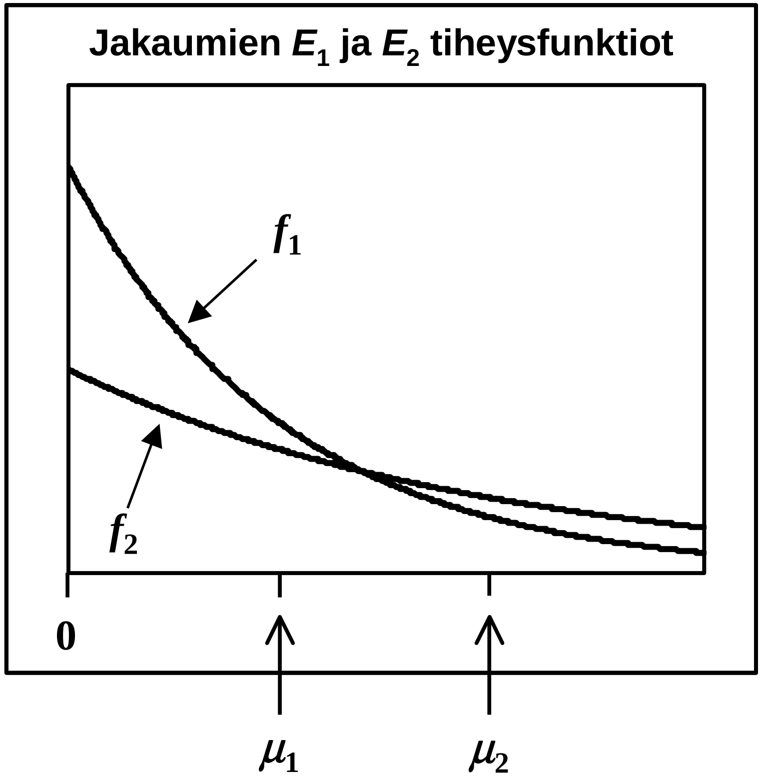
  $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$



# Odotusarvo jakauman sijaintiparametrina: Havainnollistus 2

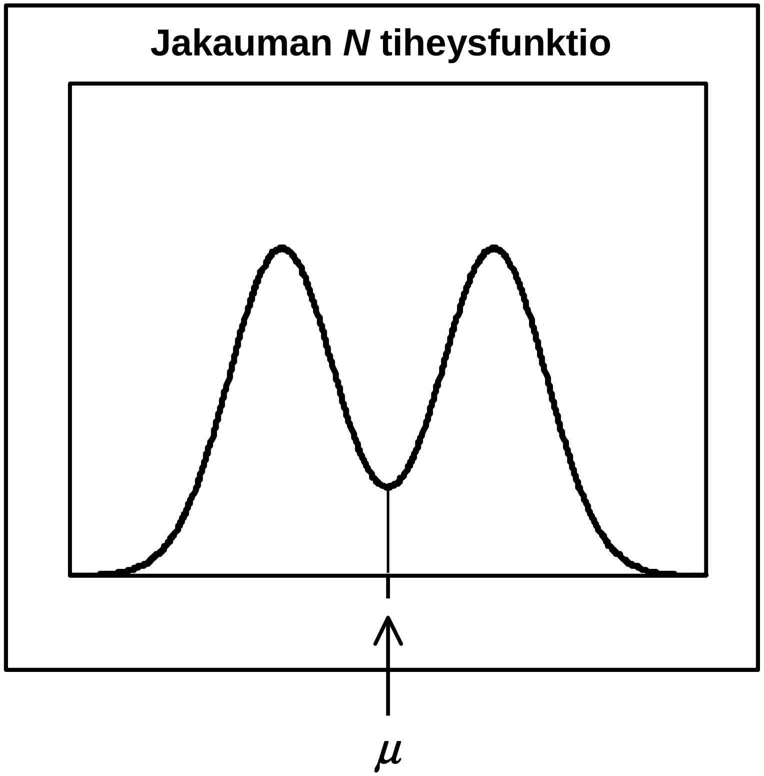
- Kuva oikealla esittää kahden **eksponenttijakauman** $E_1$ ja $E_2$ *tiheysfunktioita* $f_1$ ja $f_2$ .
- Tiheysfunktiot $f_1$ ja $f_2$ ovat *yksihuippuisia* ja *epä-symmetrisiä*.
- Jakauman $E_1$ todennäköisyys-massa *on keskittynyt* jakauman $E_2$ todennäköisyysmassaa *voimakkaammin origon lähelle*.
- Jakaumien $E_1$ ja $E_2$ odotusarvot $\mu_1$ ja $\mu_2$ toteuttavat epäyhtälön

$$\mu_1 < \mu_2$$



# Odotusarvo jakauman sijaintiparametrina: Havainnollistus 3

- Kuva oikealla esittää erään **sekoitetun normaalijakauman** *N tiheysfunktiota f*.
- Tiheysfunktio *f* on *kaksi-huippuinen* ja *symmetrinen* suoran $x = \mu$ suhteen.
- Jakauman *N* todennäköisyys-massalla *on* vaaka-akselilla *kaksi keskittymää*.
- Jakauman *N* odotusarvo $\mu$ on todennäköisyysmassojen keskittymien *välissä*.



# Summan ja erotuksen odotusarvo

- Satunnaismuuttujien $X$ ja $Y$ **summan $X + Y$ odotusarvo** on

$$\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)$$

- Satunnaismuuttujien $X$ ja $Y$ **erotuksen $X - Y$ odotusarvo** on

$$\mathrm{E}(X-Y)=\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(Y)$$

- Tämä merkitsee sitä, että odotusarvo on *lineaarinen operaattori*.
- Huomautus:

  Todistus vaatii *kaksiulotteisten satunnaismuuttujien* määrittelemistä ja esitetään luvussa **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat.**

# Summan odotusarvo: Yleistys

- Olkoot $X_i$ , $i = 1, 2, \ldots , n$ *satunnaismuuttujia* ja $a_i$ , $i = 1, 2, \ldots , n$ *vakioita*.
- Satunnaismuuttujien $X_i$ , $i = 1, 2, \ldots , n$ **painotetun summan**

$$\sum a_i X_i$$

**odotusarvo** on

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \,\mathrm{E}(X_i)$$

# Diskreetin satunnaismuuttujan funktion odotusarvo: Määritelmä

- Olkoon $X$ *diskreetti satunnaismuuttuja*, jonka *piste-todennäköisyysfunktio* on

$$f(x_i) = \Pr(X = x_i) = p_i \text{ , } i = 1, 2, 3, \ldots$$

- Olkoon $g$ reaaliarvoinen funktio.
- Satunnaismuuttujan $g(X)$ odotusarvo on vakio

$$\mathrm{E}(g(X)) = \mu_{g(X)} = \sum_i g(x_i) f(x_i)$$

# Jatkuvan satunnaismuuttujan funktion odotusarvo: Määritelmä

- Olkoon $X$ *jatkuva satunnaismuuttuja*, jonka *tiheysfunktio* on

  $$f(x)$$

- Olkoon $g$ reaaliarvoinen funktio.
- Satunnaismuuttujan $g(X)$ odotusarvo on vakio

  $$\mathrm{E}(g(X)) = \mu_{g(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

# Jakaumien tunnusluvut

Odotusarvo

>> Varianssi

Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt

Momentit

Vinous ja huipukkuus

Kvantiilit

Moodi

Suurten lukujen laki

# Varianssi

***Avainsanat***

**Diskreetin jakauman varianssi**
**Empiirinen jakauma**
**Hajontaparametri**
**Jatkuvan jakauman varianssi**
**Odotusarvo**
**Painopiste**
**Satunnaismuuttujien summan varianssi**
**Sijaintiparametri**
**Standardipoikkeama**
**Todennäköisyysmassan hajaantuneisuus**
**Todennäköisyysmassan keskittyneisyys**
**Varianssi**

# Varianssi:
# Yleinen määritelmä

- Olkoon satunnaismuuttujan $X$ odotusarvo

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X$$

- Satunnaismuuttujan $X$ **varianssi** on *vakio*

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \mathrm{E}(X - \mu_X)^2$$

- Satunnaismuuttujan $X$ varianssi on satunnaismuuttujan $X$ omasta odotusarvostaan $\mu_X$ määrätyn *poikkeaman neliön odotusarvo*.

# Diskreetin jakauman varianssi

- Olkoon $X$ *diskreetti satunnaismuuttuja*.
- Olkoon $\{x_1, x_2, \ldots \}$ satunnaismuuttujan $X$ *tulos-vaihtoehtojen* eli arvojen joukko.
- Olkoon satunnaismuuttujan $X$ *pistetodennäköisyysfunktio*

$$f(x_i) = \Pr(X = x_i) = p_i \;,\; i = 1, 2, \ldots$$

- Tällöin satunnaismuuttujan $X$ **varianssi** on *vakio*

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 p_i$$

# Jatkuvan jakauman varianssi

- Olkoon $X$ on *jatkuva satunnaismuuttuja*.
- Olkoon satunnaismuuttujan $X$ *tiheysfunktio* $f(x)$.
- Tällöin satunnaismuuttujan $X$ **varianssi** on *vakio*

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f(x)dx$$

# Varianssin olemassaolo

- Jakaumalla *ei välttämättä ole* varianssia.
- **Varianssin olemassaololla** tarkoitetaan sitä, että varianssin määrittelevä summa (diskreetin jakauman tapauksessa) tai integraali (jatkuvan jakauman tapauksessa) on äärellinen.

# Varianssin määritelmä: Kommentteja

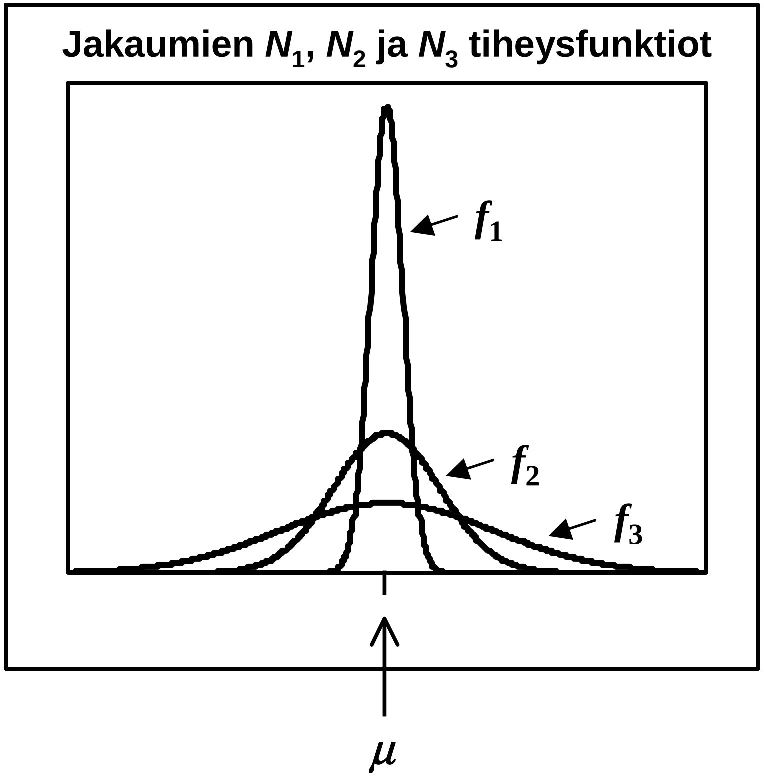
- Varianssi kuvaa todennäköisyysmassan **hajaantuneisuutta** tai – mikä on sama asia – **keskittyneisyyttä** jakauman *painopisteen* suhteen.
- Jos

$$\mathrm{Var}(X) > \mathrm{Var}(Y)$$

niin satunnaismuuttujan $X$ todennäköisyysmassa on hajaantunut *voimakkaammin oman painopisteeseensä suhteen* kuin satunnaismuuttujan $Y$ todennäköisyysmassa *oman painopisteeseensä suhteen*.
- Koska varianssi kuvaa todennäköisyysmassan hajaantuneisuutta, sitä voidaan kutsua **hajonta-parametriksi**.

# Varianssi jakauman hajaantuneisuuden mittana: Esimerkki normaalijakaumista 1/2

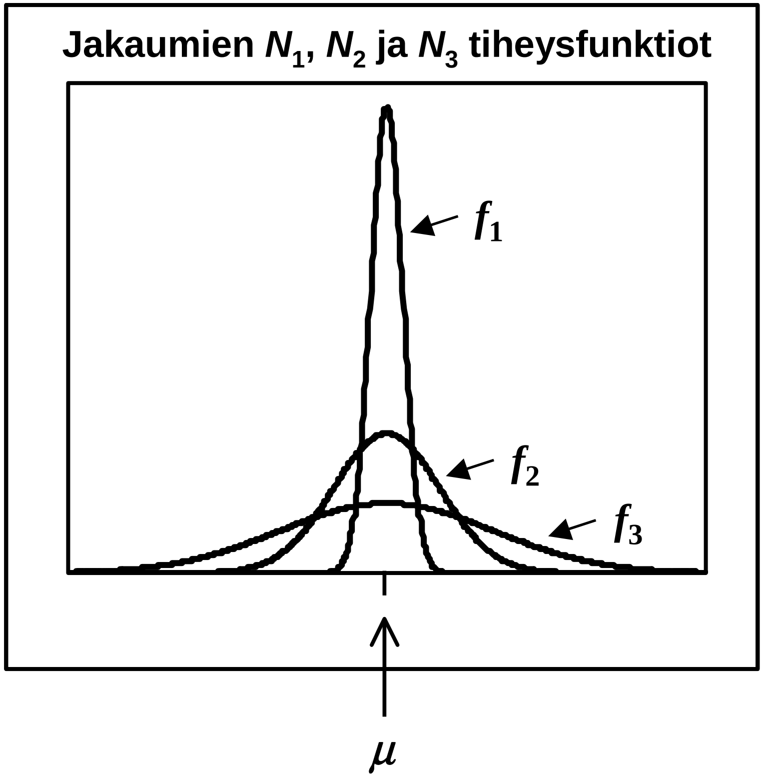
- Kuva oikealla esittää kolmen **normaalijakauman** $N_1$, $N_2$ ja $N_3$ *tiheysfunktioita* $f_1$, $f_2$ ja $f_3$ .
- Kaikilla jakaumilla on *sama* odotusarvo $\mu$.
- Tiheysfunktiot $f_1$, $f_2$ ja $f_3$ ovat *yksihuippuisia* ja *symmetrisiä* suoran $x = \mu$ suhteen.



# Varianssi jakauman hajaantuneisuuden mittana: Esimerkki normaalijakaumista 2/2

- Jakauman $N_1$ todennäköisyysmassa *on keskittynein*, kun taas jakauman $N_3$ todennäköisyysmassa on *hajaantunein*.
- Jakaumien varianssit toteuttavat epäyhtälöt:

  $\mathrm{Var}(X_1) < \mathrm{Var}(X_2) < \mathrm{Var}(X_3)$



# Varianssi: Toinen laskukaava

- Olkoon satunnaismuuttujan $X$ *odotusarvo*

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

- Satunnaismuuttujan $X$ *varianssi* voidaan laskea myös kaavalla

$$\mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \mu^2$$

jossa

$$\alpha_2 = \mathrm{E}(X^2)$$

on satunnaismuuttujan $X$ *toinen* (*origo*-) *momentti*.

# Varianssin toinen laskukaava: Perustelu

- Olkoot satunnaismuuttujan $X$ *odotusarvo*

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

ja *toinen momentti*

$$\mathrm{E}(X^2) = \alpha_2$$

- Satunnaismuuttujan $X$ *varianssi* on

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X-\mu)^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\
&= \mathrm{E}(X^2) - 2\mu\,\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(\mu^2) \\
&= \alpha_2 - 2\mu \times \mu + \mu^2 \\
&= \alpha_2 - \mu^2
\end{aligned}$$

# Standardipoikkeama: Määritelmä

- Olkoon satunnaismuuttujan $X$ odotusarvo

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X$$

- Satunnaismuuttujan $X$ **standardipoikkeama** on vakio

$$\mathrm{D}(X) = \sigma_X = \sqrt{\mathrm{E}(X - \mu_X)^2}$$

- Standardipoikkeamaa käytetään samaan tapaan kuin varianssia todennäköisyysmassan *hajaantuneisuuden* (*keskittyneisyyden*) mittana.
- Standardipoikkeama on – toisin kuin varianssi – samoissa *mittayksiköissä* kuin odotusarvo.

# Diskreetin jakauman varianssi: Esimerkki nopanheitosta 1/2

- Nopanheiton tulosta satunnaisilmiönä kuvaavan **diskreetin tasaisen jakauman** *pistetodennäköisyysfunktio*:

$$\mathrm{P}(X = i) = \frac{1}{6}\,,\; i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- Satunnaismuuttujan *X odotusarvo*:

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \sum_{i=1}^{6} i \,\Pr(X = i) = \sum_{i=1}^{6} i \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

- Satunnaismuuttujan *X toinen momentti*:

$$\mathrm{E}(X^2) = \alpha_2 = \sum_{i=1}^{6} i^2 \Pr(X = i) = \sum_{i=1}^{6} i^2 \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6} = \frac{91}{6}$$

# Diskreetin jakauman varianssi: Esimerkki nopanheitosta 2/2

- Satunnaismuuttujan $X$ *varianssi*:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{35}{12} \approx 2.917$$

- Satunnaismuuttujan $X$ *standardipoikkeama* eli *keskihajonta*:

$$\mathrm{D}(X) = \sigma = \sqrt{2.917} \approx 1.708$$

# Diskreetin jakauman odotusarvo ja varianssi: Laskujen järjestäminen 1/5

- Nopanheiton tulosta satunnaisilmiönä kuvaavan **diskreetin tasaisen jakauman** *odotusarvon* ja *varianssin* määräämistä varten tarvittavat laskutoimitukset voidaan järjestää seuraavan taulukon muotoon:

| | Keskiarvo | | | Varianssi 1 | | Varianssi 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $i$ | $x_i$ | $p_i$ | $x_i p_i$ | $x_i^2$ | $x_i^2 p_i$ | $x_i - \mu$ | $(x_i - \mu)^2$ | $(x_i - \mu)^2 p_i$ |
| 1 | 1 | 1/6 | 1/6 | 1 | 1/6 | –2.5 | 6.25 | 25/24 |
| 2 | 2 | 1/6 | 2/6 | 4 | 4/6 | –1.5 | 2.25 | 9/24 |
| 3 | 3 | 1/6 | 3/6 | 9 | 9/6 | –0.5 | 0.25 | 1/24 |
| 4 | 4 | 1/6 | 4/6 | 16 | 16/6 | +0.5 | 0.25 | 1/24 |
| 5 | 5 | 1/6 | 5/6 | 25 | 25/6 | +1.5 | 2.25 | 9/24 |
| 6 | 6 | 1/6 | 6/6 | 36 | 36/6 | +2.5 | 6.25 | 25/24 |
| $\Sigma$ | 21 | 1 | 21/6 | 91 | 91/6 | 0 | 17.5 | 70/24 |

# Diskreetin jakauman odotusarvo ja varianssi: Laskujen järjestäminen 2/5

- Taulukon rivillä Σ on sarakesummat riveiltä 1-6:

Sarake 2: $\sum x_i = 21$

Sarake 3: $\sum p_i = 1$

Sarake 4: $\sum x_i p_i = \mu = 21/6 = 3.5$

Sarake 5: $\sum x_i^2 = 91$

Sarake 6: $\sum x_i^2 p_i = \alpha_2 = 91/6 = 15.167$

Sarake 7: $\sum (x_i - \mu) = 0$

Sarake 8: $\sum (x_i - \mu)^2 = 17.5$

Sarake 9: $\sum (x_i - \mu)^2 p_i = \sigma^2 = 70/24 = 2.917$

# Diskreetin jakauman odotusarvo ja varianssi: Laskujen järjestäminen 3/5

- Satunnaismuuttujan *X odotusarvon* määräämistä varten tarvittavat laskutoimitukset on suoritettu sarakkeissa 2-4.
- Odotusarvo saadaan rivin Σ sarakkeesta 4:

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \sum x_i p_i = 21/6 = 3.5$$

# Diskreetin jakauman odotusarvo ja varianssi: Laskujen järjestäminen 4/5

- Satunnaismuuttujan *X varianssi* voidaan määrätä kahdella eri tavalla:
- Kaava 1:

$$\mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \mu^2$$

jossa

$$\alpha_2 = \mathrm{E}(X^2) = \sum x_i^2 p_i$$

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \sum x_i p_i$$

- Kaava 2:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X-\mu)^2 = \sigma^2 = \sum \left(x_i - \mu\right)^2 p_i$$

jossa $\mu$ on kuten kaavassa 1.

# Diskreetin jakauman odotusarvo ja varianssi: Laskujen järjestäminen 5/5

- Kaavan 1 vaatimat laskutoimitukset on tehty sarakkeissa 2-4 ja 5-6:

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \sum x_i p_i = 21/6 = 3.5$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \alpha_2 = \sum x_i^2 p_i = 91/6 = 15.167$$

- Kaavan 1 mukaan

$$\mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \mu^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{35}{12} = 2.917$$

- Kaavan 2 vaatimat laskutoimitukset on tehty sarakkeissa 2-4 ja 7-9:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X-\mu)^2 = \sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 p_i = \frac{70}{24} = 2.917$$

- Kaavan 2 soveltaminen on siinä mielessä monimutkaisempaa kuin kaavan 1 soveltaminen, että kaavassa 2 on erotuksien $(x_i - \mu)$ määräämiseksi *ensin* määrättävä odotusarvo $\mu$.

# Jatkuvan jakauman odotusarvo ja varianssi: Esimerkki tasaisesta jakaumasta 1/2

- Erään **jatkuvan tasaisen jakauman** *tiheysfunktio*:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b}, & 0 \le x \le b \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

- Satunnaismuuttujan $X$ *odotusarvo*:

$$\mathbf{E}(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^b x\frac{1}{b}dx = \left[\frac{1}{2b}x^2\right]_0^b = \frac{b}{2}$$

- Satunnaismuuttujan $X$ *toinen momentti*:

$$\mathrm{E}(X^2) = \alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^b x^2\frac{1}{b}dx = \left[\frac{x^3}{3b}\right]_0^b = \frac{b^2}{3}$$

# Jatkuvan jakauman odotusarvo ja varianssi: Esimerkki tasaisesta jakaumasta 2/2

- Satunnaismuuttujan $X$ *varianssi*:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = \frac{b^2}{3} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{12}$$

- Satunnaismuuttujan $X$ *standardipoikkeama*:

$$\mathrm{D}(X) = \sigma = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

# Vakion varianssi

- Olkoon *a ei-satunnainen vakio*.
- **Vakion varianssi** on nolla:

$$\mathrm{Var}(a) = 0$$

- Tulkinta:

Vakio *ei vaihtele* satunnaiskokeesta toiseen.

# Vakion varianssi: Perustelu

- Väite: Vakiolle $a$ pätee

  $\mathrm{Var}(a) = 0$

- Perustelu:

  $$\mathrm{Var}(a) = \mathrm{E}\big(a - \mathrm{E}(a)\big)^2 = \mathrm{E}(a-a)^2 = \mathrm{E}(0) = 0$$

  koska vakiolle $a$ pätee:

  $\mathrm{E}(a) = a$

# Lineaarimuunnoksen varianssi

- Olkoon satunnaismuuttujan $X$ varianssi Var($X$).
- **Satunnaismuuttujan *X* lineaarimuunnoksen**

$$Y = a + bX$$

(*a* ja *b* *vakiota*) varianssi on

$$\mathrm{Var}(Y) = b^2\,\mathrm{Var}(X)$$

# Lineaarimuunnoksen varianssi: Perustelu

- Väite: *Lineaarimuunnokselle*

  $Y = a + bX$

  pätee

  $\mathrm{Var}(Y) = b^2\mathrm{Var}(X).$

- Perustelu:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(a+bX) &= \mathrm{E}\left[(a+bX)-\mathrm{E}\left(a+bX\right)\right]^2 \\ &= \mathrm{E}\left[a+bX-a-b\,\mathrm{E}(X)\right]^2 \\ &= \mathrm{E}\left[bX-b\,\mathrm{E}(X)\right]^2 \\ &= b^2\,\mathrm{E}\left[X-\mathrm{E}(X)\right]^2 \\ &= b^2\,\mathrm{Var}(X)\end{aligned}$$

# Lineaarimuunnoksen varianssi: Kommentteja

- Satunnaismuuttujan $X$ kertominen vakiolla $b$ merkitsee satunnaismuuttujan $X$ saamien arvojen *mittakaavan muuttamista*.
- Satunnaismuuttujan $X$ saamien arvojen mittakaavan muuttaminen *verrannollisuuskertoimella* $b$ muuttaa satunnaismuuttujan $X$ varianssia kertoimella $b^2$.
- Vakion $a$ lisääminen satunnaismuuttujaan $X$ merkitsee satunnaismuuttujan $X$ jakauman todennäköisyysmassan *siirtoa*.
- Todennäköisyysmassan siirtäminen *ei muuta* todennäköisyysmassan hajaantuneisuutta.

# Standardointi

- Olkoon $X$ satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo $\mathrm{E}(X) = \mu$ ja varianssi $\mathrm{D}^2(X) = \sigma^2$.
- Tällöin **standardoidun satunnaismuuttujan**

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

odotusarvo

$$\mathrm{E}(Z) = 0$$

ja varianssi

$$\mathrm{D}^2(Z) = 1$$

# Standardointi: Perustelu

- Olkoot $\mathrm{E}(X) = \mu$ ja $\mathrm{D}^2(X) = \sigma^2$.
- Standardoidaan satunnaismuuttuja $X$:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

- Tällöin

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X) - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\mu - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

$$\mathrm{D}^2(Z) = \mathrm{D}^2\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{D}^2(X) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1$$

# Summan ja erotuksen varianssi 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat $X$ ja $Y$ ovat *riippumattomia*.
- Tarkastellaan satunnaismuuttujien $X$ ja $Y$ *summan* $X + Y$ ja *erotuksen* $X - Y$ varianssia.
- Huomautus:

  Satunnaismuuttujien $X$ ja $Y$ *riippumattomuudella* tarkoitetaan seuraavaa:

  Se, mitä arvoja satunnaismuuttuja $X$ saa, ei saa riippua siitä, mitä arvoja satunnaismuuttuja $Y$ saa ja kääntäen, se, mitä arvoja satunnaismuuttuja $Y$ saa, ei saa riippua siitä, mitä arvoja satunnaismuuttuja $X$ saa; käsite täsmennetään luvussa **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat.**

# Summan ja erotuksen varianssi 2/2

- Riippumattomien satunnaismuuttujien $X$ ja $Y$ **summan $X + Y$ varianssi** on

$$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$$

- Riippumattomien satunnaismuuttujien $X$ ja $Y$ **erotuksen $X - Y$ varianssi** on

$$\mathrm{Var}(X-Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$$

- Huomautus:

  Todistus vaatii *kaksiulotteisen satunnaismuuttujan* määrittelemistä ja esitetään luvussa **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat.**

# Summan ja erotuksen varianssi: Kommentteja

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat $X$ ja $Y$ ovat *riippumattomia*.
- Tällöin satunnaismuuttujien $X$ ja $Y$ *summan* ja *erotuksen* varianssille pätee

$$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

- Huomaa:

$$\mathrm{Var}(X - Y) \neq \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y)$$

$$\mathrm{D}(X + Y) \neq \mathrm{D}(X) + \mathrm{D}(Y)$$

$$\mathrm{D}(X - Y) \neq \mathrm{D}(X) - \mathrm{D}(Y)$$

# Summan varianssi: Yleistys

- Olkoot satunnaismuuttujat $X_i$ , $i = 1, 2, \dots , n$ *riippumattomia* ja $a_i$ , $i = 1, 2, \dots , n$ *vakioita*.
- Tällöin satunnaismuuttujien $X_i$ , $i = 1, 2, \dots , n$ **painotetun summan**

  $$\sum a_i X_i$$

  **varianssi** on

  $$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \,\mathrm{Var}(X_i)$$

# Empiirinen jakauma 1/3

- Oletetaan, että *diskreetin satunnaismuuttujan* $X$ *mahdolliset arvot* ovat

$$x_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

- Liitetään satunnaismuuttujan $X$ arvoihin *symmetriset todennäköisyydet*

$$\Pr(X = x_i) = p_i = \frac{1}{n}\ , i = 1, 2, \ldots, n$$

- Otannan perustyypissä, *yksinkertaisessa satunnais-otannassa*, *havaintoarvot* $x_i$ noudattavat tätä, ns. **empiiristä jakaumaa**.

# Empiirinen jakauma 2/3

- Suoraan diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvon ja varianssin määritelmistä saadaan:

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \alpha_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

## Empiirinen jakauma 3/3

- Huomaa, että odotusarvo

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

on lukujen $x_i$ **aritmeettinen keskiarvo** ja

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

on lukujen $x_i$ ns. **otosvarianssi**.

# Aritmeettisen keskiarvon odotusarvo ja varianssi 1/2

- Olkoot $X_i$ , $i$ = 1, 2, … , $n$ *riippumattomia* satunnais-muuttujia.
- Oletetaan lisäksi, että satunnaismuuttujilla $X_i$ , $i$ = 1, 2, … , $n$ on *sama* odotusarvo ja varianssi:

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu \text{ , } \mathrm{D}^2(X_i) = \sigma^2 \text{ , } i = 1, 2, \ldots, n$$

- Olkoon

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

satunnaismuuttujien $X_i$ , $i$ = 1, 2, … , $n$ *aritmeettinen keskiarvo*.

# Aritmeettisen keskiarvon odotusarvo ja varianssi 2/2

- Tällöin

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = \mu$$

$$\mathrm{D}^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- Huomautuksia:
  - Satunnaismuuttujien $X_i$ aritmeettisen keskiarvon odotusarvo on sama kuin yksittäisten muuttujien yhteinen odotusarvo.
  - Satunnaismuuttujien $X_i$ aritmeettinen keskiarvo vaihtelee varianssilla mitattuna *vähemmän* kuin muuttujat itse.

# Aritmeettisen keskiarvon odotusarvo ja varianssi: Perustelu

- Olkoot $X_i$ , $i$ = 1, 2, … , $n$ *riippumattomia* satunnaismuuttujia, joille

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu \text{ , } \mathrm{D}^2(X_i) = \sigma^2 \text{ , } i = 1, 2, \ldots, n$$

- Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\bar{X}) &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i\right) = \frac{1}{n}\mathrm{E}\left(\sum_i X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_i \mathrm{E}(X_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_i \mu = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^2(\bar{X}) &= \mathrm{D}^2\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{D}^2\left(\sum_i X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_i \mathrm{D}^2(X_i) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_i \sigma^2 = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

# Jakaumien tunnusluvut

Odotusarvo

Varianssi

\>> Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt

Momentit

Vinous ja huipukkuus

Kvantiilit

Moodi

Suurten lukujen laki

# Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt

***Avainsanat***

**Markovin epäyhtälö**
**Odotusarvo**
**Tshebyshevin epäyhtälö**
**Varianssi**

# Markovin epäyhtälö

- Olkoon $g(X)$ satunnaismuuttujan $X$ *positiivinen* reaaliarvoinen funktio, jonka *odotusarvo* on

$$\mathrm{E}(g(X))$$

- Tällöin jokaiselle reaaliselle vakiolle $a > 0$ pätee **Markovin epäyhtälö**

$$\Pr\left(g(X) \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{E}(g(X))}{a}$$

# Markovin epäyhtälö: Todistus

- Todistamme Markovin epäyhtälön *jatkuvien* satunnaismuuttujien tapauksessa.
- Olkoon $g(X)$ satunnaismuuttujan $X$ *positiivinen* reaaliarvoinen funktio, jonka odotusarvo on $\mathrm{E}(g(X))$.
- Olkoon satunnaismuuttujan $X$ *tiheysfunktio* $f(x)$ ja olkoon $a > 0$ *vakio*.
- *Markovin epäyhtälö* saadaan epäyhtälöketjusta

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(g(X)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \\ &\geq a\int_S f(x)dx \\ &= a\Pr(g(X) \geq a) \end{aligned}$$

jossa

$$S = \{x \,|\, g(x) \geq a\}$$

# Markovin epäyhtälö: Kommentteja 1/2

- Markovin epäyhtälön

$$\Pr\big(g(X) \geq a\big) \leq \frac{\mathrm{E}(g(X))}{a}$$

mukaan todennäköisyys sille, että mielivaltaisen satunnaismuuttujan $X$ (jolle odotusarvo $\mathrm{E}(g(X))$ on olemassa) *positiivinen* funktio $g(X)$ saa *suurempia* arvoja kuin $a > 0$, on *korkeintaan*

$$\frac{\mathrm{E}(g(X))}{a}$$

# Markovin epäyhtälö: Kommentteja 2/2

- Markovin epäyhtälön erikoistapauksena saadaan *positiivisille* satunnaismuuttujille $X$ epäyhtälö

$$\Pr\left( X \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{a}$$

jossa $a > 0$.

- Siten mielivaltaisen *positiivisen* satunnaismuuttujan (jonka odotusarvo $\mathrm{E}(X)$ on olemassa) todennäköisyysjakauman todennäköisyysmassasta *korkeintaan*

$$100 \times \frac{\mathrm{E}(X)}{a} \%$$

on etäisyyttä $a > 0$ *kauempana* origosta.

# Tshebyshevin epäyhtälö

- Olkoon $X$ satunnaismuuttuja, jonka *odotusarvo* on

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

ja *varianssi* on

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

- Tällöin pätee **Tshebyshevin epäyhtälö**

$$\Pr\left(\left|X-\mu\right| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

# Tshebyshevin epäyhtälö: Todistus

- Todistamme Tshebyshevin epäyhtälön *jatkuvien* satunnaismuuttujien tapauksessa.
- Olkoon $X$ *jatkuva* satunnaismuuttuja.
- Olkoon satunnaismuuttujan $X$ *tiheysfunktio* $f(x)$, sen *odotusarvo* $\mathrm{E}(X) = \mu$ ja *varianssi* $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ sekä olkoon $k > 0$ *vakio*.
- *Tshebyshevin epäyhtälö* seuraa *Markovin epäyhtälöstä*

$$\Pr\left(g(X) \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{E}(g(X))}{a}$$

valitsemalla

$$g(x) = (x-\mu)^2 \; ; \mu = \mathrm{E}(X)$$

$$a = k^2\sigma^2 \; ; \sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[g(X)]$$

# Tshebyshevin epäyhtälö: Kommentteja 1/3

- Tshebyshevin epäyhtälön

$$\Pr\left(\left|X-\mu\right|\geq k\sigma\right)\leq\frac{1}{k^2}$$

mukaan mielivaltaisen satunnaismuuttujan $X$ (jonka odotusarvo $\mathrm{E}(X)=\mu$ ja varianssi $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$ ovat olemassa) todennäköisyysmassasta *korkeintaan*

$$100\times\frac{1}{k^2}\,\%$$

on etäisyyttä $k\sigma$ *kauempana* jakauman painopisteestä $\mu$.

# Tshebyshevin epäyhtälö: Kommentteja 2/3

- Jos $X$ on mielivaltainen satunnaismuuttuja, jolla on odotusarvo ja varianssi, Tshebyshevin epäyhtälö antaa *absoluuttisen ylärajan* satunnaismuuttujan $X$ todennäköisyysjakauman ”häntäalueiden” todennäköisyysmassan osuudelle.
- Jos satunnaismuuttujan $X$ jakauma spesifioidaan tarkemmin, ”häntäalueiden” todennäköisyysmassan osuudesta voidaan antaa tarkempia arvioita.

# Tshebyshevin epäyhtälö: Kommentteja 3/3

- Esimerkki:

Tshebyshevin epäyhtälön mukaan *kaikille satunnaismuuttujille* $X$, joilla on odotusarvo $\mathrm{E}(X) = \mu$ ja varianssi $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, pätee

$$\Pr\left(\left|X-\mu\right| \ge 3\sigma\right) \le \frac{1}{9}$$

Jos tiedämme, että $X$ noudattaa *normaalijakaumaa* (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**), saadaan (esimerkiksi normaalijakaumien taulukoiden avulla) tarkempi tulos:

$$\Pr\left(\left|X-\mu\right| \ge 3\sigma\right) \approx 0.3\,\%$$

# Jakaumien tunnusluvut

Odotusarvo

Varianssi

Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt

>> Momentit

Vinous ja huipukkuus

Kvantiilit

Moodi

Suurten lukujen laki

# Momentit

***Avainsanat***

**Keskusmomentit**

**Momentit**

**Odotusarvo**

**Origomomentit**

# Origomomentit

- Olkoon $X$ satunnaismuuttuja.
- Tällöin satunnaismuuttujan $X^k$ odotusarvo

$$\mathrm{E}(X^k) = \alpha_k$$

on satunnaismuuttujan $X$ ***k*. momentti** eli $k$. momentti *origon suhteen*.

# Origomomentit: Erikoistapauksia

- Olkoon

$$\mathrm{E}(X^k) = \alpha_k$$

satunnaismuuttujan $X$ ***k*. momentti**

- Erityisesti:

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = \mathrm{E}(X) = \mu$$

- Siten satunnaismuuttujan $X$ 1. momentti on satunnaismuuttujan $X$ *odotusarvo*.

# Keskusmomentit

- Olkoon $X$ satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo on

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

- Tällöin satunnaismuuttujan $(X-\mu)^k$ odotusarvo

$$\mathrm{E}\left[(X-\mu)^k\right] = \mu_k$$

on satunnaismuuttujan $X$ ***k*. keskusmomentti** eli *k*. momentti *painopisteen* $\mu$ *suhteen*.

# Keskusmomentit: Erikoistapauksia

- Olkoon
$$\mathrm{E}\left[(X-\mu)^k\right]=\mu_k$$
satunnaismuuttujan $X$ ***k*. keskusmomentti** eli
*k*. momentti *painopisteen* $\mu$ *suhteen*.
- Erityisesti:
$$\mu_1 = 0$$
$$\mu_2 = \mathrm{E}\left[(X-\mu)^2\right]=\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X)$$
- Siten satunnaismuuttujan $X$ 1. keskusmomentti *häviää aina* ja 2. keskusmomentti on satunnaismuuttujan $X$ *varianssi*.

# Momenttien olemassaolo

- Satunnaismuuttujan $X$ ***k*. origomomentti on olemassa**, jos

$$\mathrm{E}(|X|^k) < \infty$$

- Satunnaismuuttujan $X$ ***k*. keskusmomentti on olemassa**, jos vastaava origomomentti on olemassa.
- Voidaan osoittaa, että jos

$$\mathrm{E}(|X|^n) < \infty$$

jollekin $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\mathrm{E}(|X|^k) < \infty \text{ kaikille } k < n$$

- Jos siis satunnaismuuttujalla on $n$. origomomentti, sillä on myös kaikki alempien kertalukujen momentit.

# Jakaumien tunnusluvut

Odotusarvo

Varianssi

Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt

Momentit

\>> Vinous ja huipukkuus

Kvantiilit

Moodi

Suurten lukujen laki

# Vinous ja huipukkuus

***Avainsanat***

**Huipukkuus**

**Keskusmomentit**

**Odotusarvo**

**Origomomentit**

**Vinous**

# Momentit

- Olkoon on
$$\alpha_k = \mathrm{E}(X^k)\,,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$
satunnaismuuttujan $X$ ***k*. origomomentti**.
- Olkoon
$$\mu_k = \mathrm{E}\left[(X - \alpha_1)^k\right],\ k = 1, 2, 3, \ldots$$
satunnaismuuttujan $X$ ***k*. keskusmomentti**.
- Huomaa:
$$\alpha_1 = \mathrm{E}(X) = \mu$$
$$\mu_2 = \mathrm{E}\left[(X - \mu)^2\right] = \mathrm{Var}(X)$$

# Vinous

- Tunnuslukua

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

käytetään *todennäköisyysjakaumien* **vinouden** *mittana*.

# Todennäköisyysjakaumien vinous

- Jos todennäköisyysjakauman pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio on *yksihuippuinen*, pätee seuraava:

  $\gamma_1 < 0$: Jakauma on **negatiivisesti vino** eli **vino vasemmalle**, jolloin jakauman vasen häntä on pitempi kuin oikea häntä.

  $\gamma_1 = 0$: Jakauma on **symmetrinen**.

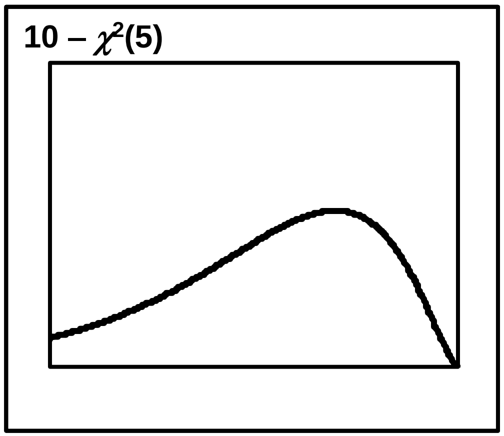
  $\gamma_1 > 0$: Jakauma on **positiivisesti vino** eli **vino oikealle**, jolloin jakauman oikea häntä on pitempi kuin vasen häntä.

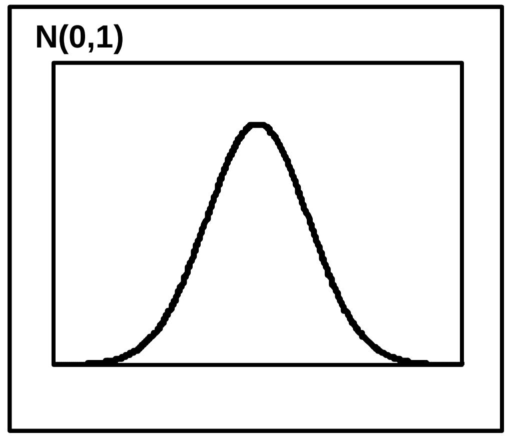
- Huomautus:

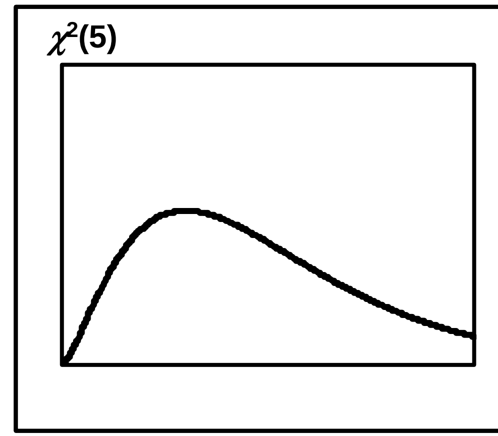
  *Normaalijakaumalle* $\gamma_1 = 0$.

# Todennäköisyysjakaumien vinous: Havainnollistus

Alla on kuvattuna kolme *yksihuippuista* tiheysfunktiota.




$\gamma_1 < 0$:
Jakauma on **negatiivisesti vino** eli **vino vasemmalle**.

$\gamma_1 = 0$:
Jakauma on **symmetrinen**.

$\gamma_1 > 0$:
Jakauma on **positiivisesti vino** eli **vino oikealle**.

# Huipukkuus

- Tunnuslukua

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

käytetään *todennäköisyysjakaumien* **huipukkuuden** *mittana*.

# Todennäköisyysjakaumien huipukkuus

- Jos todennäköisyysjakauman pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio on *yksihuippuinen*, pätee seuraava:

  $\gamma_2 > 0$: Jakauma on **huipukas** (normaalijakaumaan verrattuna).

  $\gamma_2 < 0$: Jakauma on **laakea** (normaalijakaumaan verrattuna).

- Huomautus:

  *Normaalijakaumalle* $\gamma_2 = 0$.

# Jakaumien tunnusluvut

Odotusarvo
Varianssi
Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt
Momentit
Vinous ja huipukkuus
>> Kvantiilit
Moodi
Suurten lukujen laki

# Kvantiilit

***Avainsanat***

**Desiili**

**Kertymäfunktio**

**Kvantiili**

**Kvartiili**

**Mediaani**

**Prosenttipiste**

# Kvantiilin määritelmä

- Olkoon $X$ satunnaismuuttuja.
- Olkoon lisäksi

$$0 < p < 1$$

- Jos luku $x_p$ toteuttaa ehdot

$$\Pr(X \leq x_p) \geq p$$

$$\Pr(X \geq x_p) \geq 1 - p$$

sanomme, että $x_p$ on satunnaismuuttujan $X$ ja sen jakauman **kvantiili** kertalukua $p$.

- Kvantiili $x_p$ toteuttaa siis epäyhtälöt

$$\Pr(X < x_p) \leq p \leq \Pr(X \leq x_p)$$

# Kvantiilin määritelmä: Kommentteja

- Kvantiilit voidaan määrätä myös sellaisille satunnaismuuttujille, joilla *ei ole* momentteja.
- Kvantiilit *eivät välttämättä ole yksikäsitteisiä*:

  (i) *Diskreettien* satunnaismuuttujien kvantiilit *ovat usein monikäsitteisiä*.

  (ii) *Jatkuvien* satunnaismuuttujien kvantiilit *ovat yksikäsitteisiä*; ks. seuraavaa kalvoa.

# Jatkuvan satunnaismuuttujan kvantiilit

- Olkoon

  $$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

  *jatkuvan satunnaismuuttujan X kertymäfunktio*.
- Tällöin satunnaismuuttujan $X$ kvantiili $x_p$ toteuttaa yhtälön

  $$F(x_p) = p$$
- Kvantiili $x_p$ jakaa satunnaismuuttujan $X$ jakauman todennäköisyysmassan *kahteen osaan* niin, että massasta

  $$p\times 100\ \%$$

  on kvantiilista $x_p$ *vasemmalla* ja

  $$(1-p)\times 100\ \%$$

  on kvantiilista $x_p$ *oikealla*.

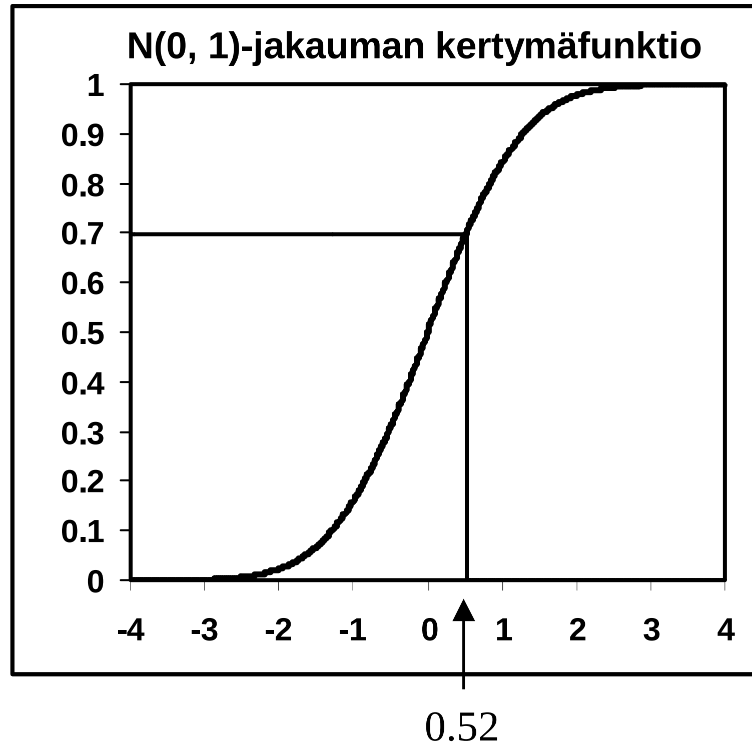
# Jatkuvan satunnaismuuttujan kvantiilit: Esimerkki 1/2

- Kuva oikealla esittää **standardoidun normaali-jakauman** N(0, 1) *kertymä-funktiota* $\Phi(z)$.
- Standardoidun normaalijakauman N(0, 1) taulukoiden mukaan:

$$\Phi(0.52) = \Pr(Z \le 0.52) \approx 0.7$$

- Siten

$$x_{0.7} \approx 0.52$$



# Jatkuvan satunnaismuuttujan kvantiilit: Esimerkki 2/2

- Kuva oikealla esittää **standardoidun normaali-jakauman** N(0, 1) *tiheys-funktiota*.
- Standardoidun normaalijakauman N(0, 1) taulukoiden mukaan:

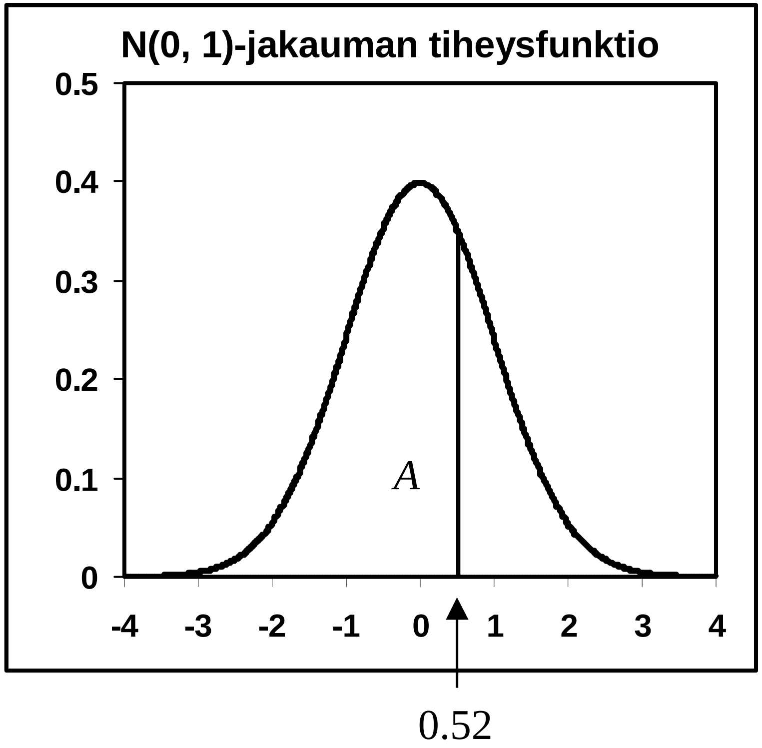
  Alueen $A$ pinta-ala

  $$= \int_{-\infty}^{0.52} f_Z(z)dz$$

  $$= \Pr(Z \leq 0.52)$$

  $$\approx 0.7$$
- Siten

  $$x_{0.7} \approx 0.52$$



# Kvantiilit ja tilastolliset taulukot

- Useimmissa *todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen oppikirjoissa on taulukoituna* keskeisten *tilastollisessa päättelyssä* käytettävien jatkuvien jakaumien kvantiileja $x_p$ ja niitä vastaavia todennäköisyyksiä $p$.
- Useimmissa *tilastollisissa tietokoneohjelmissa on aliohjelmia*, jotka laskevat tavallisimpien jatkuvien jakaumien kvantiileja $x_p$ ja niitä vastaavia toden-näköisyyksiä $p$.
- Lisätietoja: ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia.**

# Prosenttipisteet

- Jos $p$ on muotoa

  $$p = q/100\ ,\ q = 1, 2, \ldots , 99$$

  kvantiilia $x_p$ kutsutaan ***q*. prosenttipisteeksi**.
- Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa $q$. prosenttipiste jakaa jakauman todennäköisyysmassan *kahteen osaan* niin, että massasta

  $$q\ \%$$

  on $q$. prosenttipisteestä *vasemmalla* ja

  $$(100 - q)\ \%$$

  on $q$. prosenttipisteestä *oikealla*.

# Desiilit

- Jos $p$ on muotoa

$$p = 10 \times q/100 \; , \; q = 1, 2, \ldots , 9$$

kvantiilia $x_p$ kutsutaan ***q*. desiiliksi**.

- Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa $q$. desiili jakaa jakauman todennäköisyysmassan *kahteen osaan* niin, että massasta

$$10 \times q \; \%$$

on $q$. desiilistä *vasemmalla* ja

$$(100 - 10 \times q) \; \%$$

on $q$. desiilistä *oikealla*.

# Kvartiilit 1/2

- Jos $p$ on muotoa

  $$p = 25\times q/100 \text{ , } q = 1, 2, 3$$

  kvantiilia $x_p$ kutsutaan ***q*. kvartiiliksi**.
- Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa $q$. kvartiili jakaa satunnaismuuttujan $X$ jakauman todennäköisyys-massan *kahteen osaan* niin, että massasta

  $$25\times q \text{ \%}$$

  on $q$. kvartiilista *vasemmalla* ja

  $$(100 - 25\times q) \text{ \%}$$

  on $q$. kvartiilista *oikealla*.

# Kvartiilit 2/2

- Kvartiileja merkitään tavallisesti symboleilla $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ ja sanotaan, että

  $Q_1$ = **alakvartiili**
  $Q_2$ = **keskikvartiili**
  $Q_3$ = **yläkvartiili**

- Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa kvartiilit jakavat jakauman todennäköisyysmassan *neljään yhtä suureen osaan*:

  25 % massasta on kvartiilista $Q_1$ *vasemmalle*
  25 % massasta on kvartiilien $Q_1$ ja $Q_2$ *välissä*
  25 % massasta on kvartiilien $Q_2$ ja $Q_3$ *välissä*
  25 % massasta on kvartiilista $Q_3$ *oikealle*

# Mediaani

- Jos

  $p = 0.5$

  kvantiilia $x_p$ kutsutaan **mediaaniksi**.
- Mediaania merkitään tavallisesti symbolilla *Me*.
- Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa mediaani *Me* jakaa jakauman todennäköisyysmassan *kahteen yhtä suureen osaan* niin, että massasta

  50 %

  on mediaanista *vasemmalla* ja

  50 %

  on mediaanista *oikealla*.

# Mediaani: Kommentteja

- Jakauman mediaani *ei välttämättä ole* yksikäsitteinen.
- Jakauman mediaani yhtyy jakauman 50. *prosenttipisteeseen*, 5. *desiiliin* ja *keskikvartiiliin* $Q_2$.
- Mediaani voidaan määrätä myös sellaisille satunnaismuuttujille, joilla *ei ole* odotusarvoa.
- Jos satunnaismuuttujan $X$ jakauma on *symmetrinen* suoran $x = a$ suhteen, niin jakauman mediaani yhtyy pisteeseen $a$:

  $$Me = a$$

- Jos symmetrisellä jakaumalla *on odotusarvo* $\mathrm{E}(X) = \mu$, niin jakauman mediaani yhtyy pisteeseen $\mu$:

  $$Me = \mu$$

**Kvantiilit**

# Mediaani: Esimerkki

- Kuva oikealla esittää **eksponenttijakauman** Exp(1) *tiheysfunktiota*

  $$f(x) = e^{-x}\ ,\ x \geq 0$$

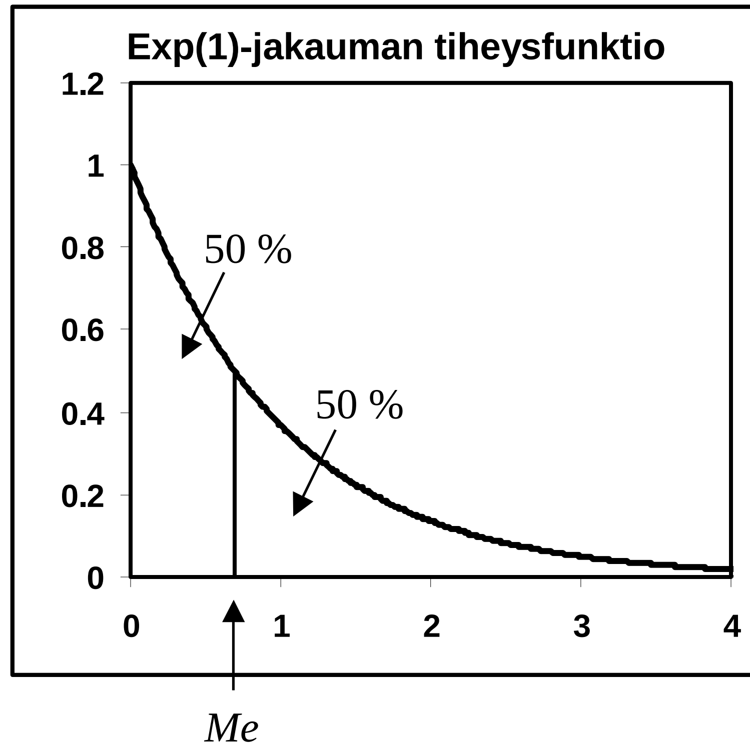
  välillä [0, 4].
- Jakauman *mediaani* saadaan ratkaisemalla yhtälö

  $$\int_0^x e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x$$

  $$= 1 - e^{-x} = 0.5$$

  $x$:n suhteen.
- Siten

  $Me = x = \log(2) \approx 0.69$



# Jakaumien tunnusluvut

Odotusarvo

Varianssi

Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt

Momentit

Vinous ja huipukkuus

Kvantiilit

>> Moodi

Suurten lukujen laki

# Moodi

***Avainsanat***

**Maksimi**

**Moodi**

# Diskreetin satunnaismuuttujan moodi

- Olkoon $X$ *diskreetti* satunnaismuuttuja, jonka *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x)$$

- Piste $Mo$ on *diskreetin satunnaismuuttujan* $X$ ja sen jakauman **moodi**, jos pistetodennäköisyysfunktio $f(x)$ saavuttaa maksiminsa pisteessä $x = Mo$:

$$f(Mo) = \max_{x} f(x)$$

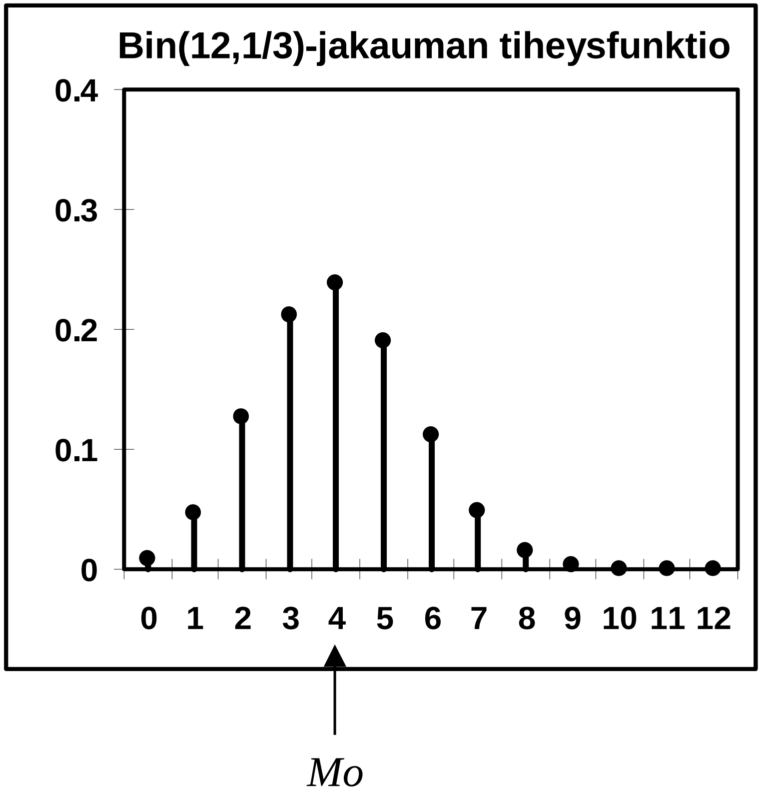
# Diskreetin satunnaismuuttujan moodi: Esimerkki

- Kuva oikealla esittää **binomijakauman** Bin(12, 1/3) *pistetodennäköisyysfunktiota*

$$f(x) = \binom{12}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{12-x}$$

- Jakauman *moodi Mo* on pisteessä

$$x = 4$$



# Jatkuvan satunnaismuuttujan moodi

- Olkoon $X$ *jatkuva* satunnaismuuttuja, jonka *tiheysfunktio* on

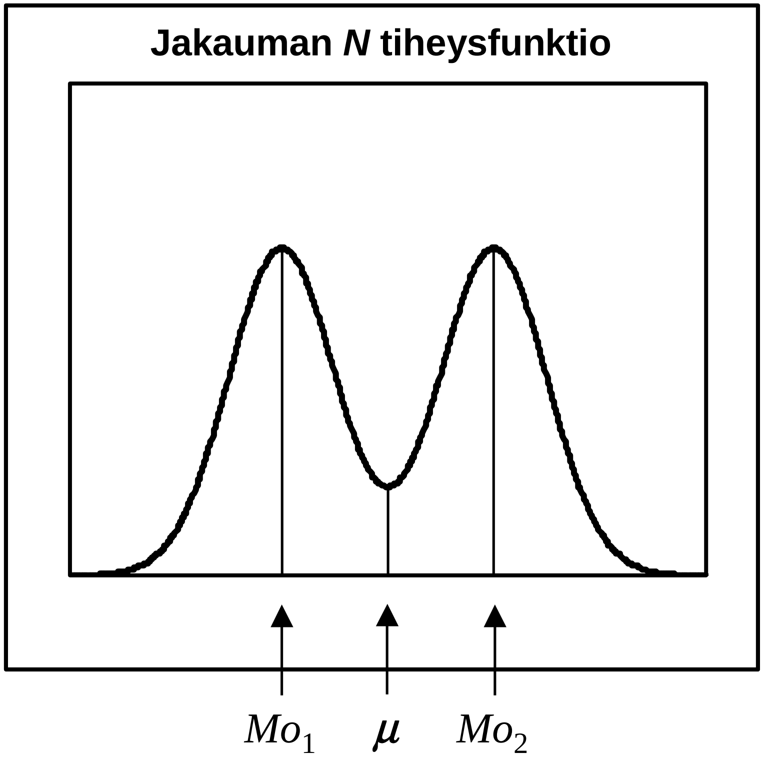
$$f(x)$$

- Piste $Mo$ on *jatkuvan satunnaismuuttujan* $X$ ja sen jakauman **moodi**, jos tiheysfunktio $f(x)$ saavuttaa maksiminsa pisteessä $x = Mo$:

$$f(Mo) = \max_x f(x)$$

# Jatkuvan satunnaismuuttujan moodi: Esimerkki

- Kuva oikealla esittää erään **sekoitetun normaalijakauman** *N tiheysfunktiota f*.
- Tiheysfunktio *f* on *kaksi-huippuinen* ja *symmetrinen* suoran $x = \mu$ suhteen.
- Jakaumalla *N* on *kaksi lokaalia moodia* $Mo_1$ ja $Mo_2$ .



# Satunnaismuuttujan moodi: Kommentteja

- Jakauman moodi *ei välttämättä ole* yksikäsitteinen; ks. edellistä kalvoa.
- Moodi voidaan määrätä myös sellaisille satunnais-muuttujille, joilla *ei ole* odotusarvoa.

# Jakaumien tunnusluvut

Odotusarvo

Varianssi

Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt

Momentit

Vinous ja huipukkuus

Kvantiilit

Moodi

>> Suurten lukujen laki

# Suurten lukujen laki

***Avainsanat***

**Asymptoottinen käyttäytyminen**

**Aritmeettinen keskiarvo**

**Odotusarvo**

**Stokastinen konvergenssi**

**Suurten lukujen laki**

**Tilastollinen stabiliteetti**

**Varianssi**

# Suurten lukujen laki: Formulointi

- Olkoon $X_i$ , $i$ = 1, 2, 3, … jono *riippumattomia* satunnaismuuttujia, joilla on *sama* odotusarvo ja varianssi:

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu \ , \ \mathrm{D}^2(X_i) = \sigma^2 \ , \ i = 1, 2, 3, \ldots$$

- Määritellään satunnaismuuttujien $X_i$ , $i$ = 1, 2, … , $n$ *aritmeettinen keskiarvo*:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Tällöin pätee (heikko) **suurten lukujen laki**:

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr\left(\left|\bar{X}_n - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0$$

# Suurten lukujen laki: Kommentteja 1/2

- Suurten lukujen laille esitetään *todistus* luvussa **Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet.**
- *Suurten lukujen laki* ilmaistaan usein sanoin seuraavasti:

  Samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien *aritmeettinen keskiarvo lähestyy muuttujien lukumäärän kasvaessa muuttujien yhteistä odotusarvoa* sellaisella tavalla, että **poikkeamien todennäköisyys satunnaismuuttujien yhteisestä odotusarvosta lähestyy lukua nolla eli poikkeamat tulevat yhä *harvinaisemmiksi*.**
- Suurten lukujen lakia voidaan pitää matemaattisena formulointina **tilastollisen stabiliteetin** käsitteelle.

# Suurten lukujen laki: Kommentteja 2/2

- Tässä formuloitua suurten lukujen lakia kutsutaan *heikoksi suurten lukujen laiksi*.
- Suurten lukujen laki koskee satunnaismuuttujien **asymptoottista käyttäytymistä** samaan tapaan kuin luvussa **Jatkuvia jakaumia** esitettävä **keskeinen raja-arvolause**.
- Suurten lukujen laissa esiintyvä *rajakäyttäytymisen muoto* on esimerkki **stokastiikan konvergenssikäsitteistä**; ks. lukua **Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet.**
- Suurten lukujen laista on olemassa *yleisempiä muotoja*, joissa voidaan lieventää *samoinjakautuneisuus*- ja *riippumattomuusoletuksia*.