Johdatus todennäköisyyslaskentaan

Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

Kaksiulotteiset todennäköisyysjakaumat

Kaksiulotteisten jakaumien reunajakaumat ja riippumattomuus

Kaksiulotteisten jakaumien odotusarvot ja varianssit

Kovarianssi ja korrelaatio

Ehdolliset jakaumat ja odotusarvot

Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat: Mitä opimme? – 1/5

- *Yhden* satunnaismuuttujan todennäköisyysjakaumat kuvaavat useimpia satunnaisilmiötä vain rajoitetusti.
- Satunnaisilmiöihin liittyy tavallisesti *useita satunnaisia tekijöitä*, joiden väliset **riippuvuudet** ovat varsinaisen mielenkiinnon kohteina.
- Useiden satunnaisten tekijöiden välisten riippuvuuksien *mallintaminen* vaatii tekijöihin liittyvien satunnaismuuttujien **yhteisjakauman** tarkastelua.
- Jos usean satunnaismuuttujan yhteisjakauma tunnetaan, hallitaan myös muuttujien erilaisten kombinaatioiden muodostamat **reunajakaumat**.
- Satunnaismuuttujat ovat **riippumattomia**, jos ja vain jos niiden *yhteisjakauman pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio voidaan esittää reunajakaumien pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktioiden tulona*.

Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat: Mitä opimme? – 2/5

- Usean satunnaismuuttujan yhteisjakauman *karakteristisia ominaisuuksia* kuvataan erilaisilla **tunnusluvuilla**.
- Yhteisjakauman satunnaismuuttujien **odotusarvot** määräävät ko. satunnaismuuttujien *reunajakaumien todennäköisyysmassojen* **painopisteet**.
- Yhteisjakauman satunnaismuuttujien **odotusarvot** määräävät *yhdessä* ko. satunnaismuuttujien *yhteisjakauman todennäköisyysmassan* **painopisteen**.
- Yhteisjakaumien satunnaismuuttujien **varianssit** tai **standardi-poikkeamat** kuvaavat ko. satunnaismuuttujien *reunajakaumien todennäköisyysmassan* **vaihtelua** *omien odotusarvojensa ympärillä*.

Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat: Mitä opimme? – 3/5

- Satunnaismuuttujien X ja Y **kovarianssi** kuvaa *satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman todennäköisyysmassan* **yhteisvaihtelua** *niiden odotusarvojen muodostaman lukuparin määräämän pisteen ympärillä*.
- Kahden satunnaismuuttujan X ja Y **lineaarisen riippuvuuden** *voimakkuutta* kuvataan muuttujien **korrelaatiolla**.
- Satunnaismuuttujien X ja Y **korrelaatiokertoimella** $\mathrm{Cor}(X,Y)$ on seuraavat ominaisuudet:

(i) $-1 \leq \mathrm{Cor}(X,Y) \leq +1$

(ii) Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, niin

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = 0$$

(iii) Jos

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \pm 1$$

niin satunnaismuuttujien välillä on *eksakti lineaarinen riippuvuus*.

Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat: Mitä opimme? – 4/5

- Mitä suurempi on

  $$|\mathrm{Cor}(X,Y)|$$

  sitä voimakkaammin muuttujat X ja Y *riippuvat lineaarisesti toisistaan*.
- Satunnaismuuttujien **riippumattomuudesta *seuraa aina*** niiden **korreloimattomuus**, mutta satunnaismuuttujien **korreloimattomuudesta *ei välttämättä seuraa*** niiden **riippumattomuutta**.

Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat: Mitä opimme? – 5/5

- Satunnaismuuttujien välisiä *riippuvuuksia* voidaan luonnehtia ns. **ehdollisten jakaumien** avulla.
- Ehdollisen jakauman *odotusarvoa* kutsutaan **ehdolliseksi odotusarvoksi** ja ehdollisen jakauman *varianssia* kutsutaan **ehdolliseksi varianssiksi**.
- Ehdollista odotusarvoa kutsutaan *ehtomuuttujien arvojen funktiona* **regressiofunktioksi**.
- Regressiofunktioita käytetään apuna, kun *satunnaismuuttujan käyttäytymistä pyritään* **ennustamaan** *toisten satunnaismuuttujien saamien arvojen avulla*.
- Regressiofunktiot muodostavat *teoreettisen perustan* tilastotieteen ehkä tärkeimmälle menetelmälle **regressioanalyysille**; ks. lukuja **Johdatus regressioanalyysiin** ja **Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli**.

Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat: Esitiedot

- Esitiedot: ks. seuraavia lukuja:

  Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

  Jakaumien tunnusluvut

Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat: Lisätiedot

- Kahta tärkeätä moniulotteista jakaumaa (*multinomi*- ja *kaksiulotteista normaalijakaumaa*) esitellään luvussa

  Moniulotteisia jakaumia

Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat: Huomautus

- **Vaikka tässä luvussa rajoitutaan pääasiassa *kaksiulotteisiin* todennäköisyysjakaumiin, esitetty teoria voidaan ilmeisellä tavalla laajentaa *useampiulotteisiin* todennäköisyysjakaumiin**.

Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

>> **Kaksiulotteiset todennäköisyysjakaumat**

Kaksiulotteisten jakaumien reunajakaumat ja riippumattomuus

Kaksiulotteisten jakaumien odotusarvot ja varianssit

Kovarianssi ja korrelaatio

Ehdolliset jakaumat ja odotusarvot

Kaksiulotteiset todennäköisyysjakaumat

Avainsanat

Diskreetti kaksiulotteinen jakauma
Diskreetti kaksiulotteinen satunnaismuuttuja
Jatkuva kaksiulotteinen jakauma
Jatkuva kaksiulotteinen satunnaismuuttuja
Kaksiulotteinen satunnaismuuttuja
Kaksiulotteinen todennäköisyysjakauma
Kertymäfunktio
Pistetodennäköisyysfunktio
Symmetrinen todennäköisyyskenttä
Tiheysfunktio
Yhteisjakauma

Satunnaistekijöiden väliset riippuvuudet

- ***Yhden* satunnaismuuttujan todennäköisyysjakaumat kuvaavat useimpia satunnaisilmiötä vain rajoitetusti**.
- Satunnaisilmiöihin liittyy tavallisesti **useita satunnaisia tekijöitä**, joiden väliset **riippuvuudet** ovat mielenkiinnon kohteina.
- Useiden satunnaisten tekijöiden välisten riippuvuuksien *mallintaminen* vaatii tekijöihin liittyvien satunnais-muuttujien **yhteisjakauman** tarkastelua.

Esimerkkejä riippuvuustarkasteluista

- Miten työttömyysaste Suomessa (% työvoimasta) *riippuu* BKT:n kasvuvauhdista, viennin volyymista ja BKT:n kasvuvauhdista muissa EU-maissa ja USA:ssa?
- Miten alkoholin kokonais-kulutus (l *per capita* vuodessa) *riippuu* alkoholijuomien hinta-tasosta, käytettävissä olevista tuloista ja alkoholin saatavuudesta?
- Miten todennäköisyys sairastua keuhkosyöpään (p) *riippuu* tupakoinnin määrästä ja kestosta?
- Miten vehnän sato (t/ha) *riippuu* kesän keskilämpötilasta, sade-määrästä, maan muokkaus-tavoista, lannoituksesta ja tuholaisten torjunnasta?

Kaksiulotteiset satunnaismuuttujat

- Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia, joiden otosavaruudet ovat R ja S.
- Tällöin

$$X : S \to \mathbb{R}$$

$$Y : R \to \mathbb{R}$$

- Olkoon $R\times S$ otosavaruuksien R ja S *karteesinen tulo*:

$$R\times S = \{(r,s) \,|\, r \in R, s \in S\}$$

- Satunnaismuuttujien X ja Y *järjestetty pari* (X, Y) määrittelee **kaksiulotteisen satunnaismuuttujan**:

$$(X,Y) : S\times R \to \mathbb{R}^2$$

Diskreetit kaksiulotteiset satunnaismuuttujat ja niiden jakaumat

- Olkoot X ja Y *diskreettejä* satunnaismuuttujia.
- Tällöin järjestetty pari (X, Y) määrittelee **diskreetin kaksiulotteisen satunnaismuuttujan**.
- Diskreetti kaksiulotteinen satunnaismuuttuja (X, Y) määrittelee **diskreetin kaksiulotteisen todennäköisyysjakauman**, jota kutsutaan satunnaismuuttujien X ja Y **yhteisjakaumaksi**.

Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: Pistetodennäköisyysfunktio

- Reaaliarvoinen funktio

  $$f_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

  määrittelee *diskreettien satunnaismuuttujien X* ja *Y* **yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktion**, jos seuraavat ehdot pätevät:

(1) $f_{XY}(x, y) \geq 0$ kaikille x ja y

(2) $$\sum_x \sum_y f_{XY}(x, y) = 1$$

(3) $\Pr(X = x \text{ ja } Y = y) = f_{XY}(x, y)$

Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: Tapahtumien todennäköisyydet

- Olkoon

$$f_{XY} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

diskreettien satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio*.

- Olkoon

$$A \subset \mathbb{R}^2$$

jokin *tapahtuma*.

- Tällöin

$$\Pr((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)} \sum_{\in A} f_{XY}(x,y)$$

Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: Symmetriset todennäköisyyskentät

- Olkoon (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots , n$ erillisten tason pisteiden muodostama *diskreetti* pistejoukko.
- Määritellään *diskreetin kaksiulotteisen jakauman piste-todennäköisyysfunktio* kaavalla

$$f_{XY}(x_i, y_i) = \Pr(X = x_i \text{ ja } Y = y_i) = \frac{1}{n}, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

- Tällöin satunnaismuuttuja (X, Y) määrittelee **symmetrisen todennäköisyyskentän**, jossa kaikki alkeistapahtumat

  (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \ldots , n$

  ovat *yhtä todennäköisiä*.

Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: 1. esimerkki nopanheitosta 1/6

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa.
- Määritellään *satunnaismuuttujat* X ja Y:

  X = tulos (silmäluku) 1. heitosta
  Y = tulos (silmäluku) 2. heitosta

- Voimme olettaa, että 2. heiton tulos on *riippumaton* 1. heiton tuloksesta (ja kääntäen).
- Satunnaismuuttujien X ja Y mahdolliset arvot:

  X: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  Y: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Muodostetaan satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauma*.

Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: 1. esimerkki nopanheitosta 2/6

- Kahden nopanheiton tulosvaihtoehdot voidaan esittää seuraavana taulukkona:

Tulos 1. nopanheitosta	Mahdolliset tulokset 2. nopanheitosta					
1	1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	4	5	6
3	1	2	3	4	5	6
4	1	2	3	4	5	6
5	1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5	6

- Siten satunnaismuuttujien X ja Y järjestetty pari (X, Y) määrittelee *diskreetin kaksiulotteisen satunnaismuuttujan*, jonka arvoina on 36 lukuparia

$$(x, y)\ ;\ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6\ ;\ y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: 1. esimerkki nopanheitosta 3/6

- Koska noppa oletettiin *virheettömäksi* ja heittojen tulokset oletettiin *riippumattomiksi*, on luontevaa ajatella, että kahden nopanheiton tulosten muodostamat 36 tulosvaihtoehtoa

  $$(x, y)\ ;\ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6\ ;\ y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

  ovat *yhtä todennäköisiä*.
- Tällöin satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman piste-todennäköisyysfunktio* saa positiiviset arvot

  $$f_{XY}(x, y) = \Pr(X = x, Y = y) = \frac{1}{36}$$

  kun

  $$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$
  $$y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: 1. esimerkki nopanheitosta 4/6

- Satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman* pistetodennäköisyysfunktio

$$f_{XY}(x,y) = \Pr(X = x \text{ ja } Y = y) = \frac{1}{36}$$

$$x = 1,2,3,4,5,6\,;\; y = 1,2,3,4,5,6$$

voidaan esittää seuraavana taulukkona:

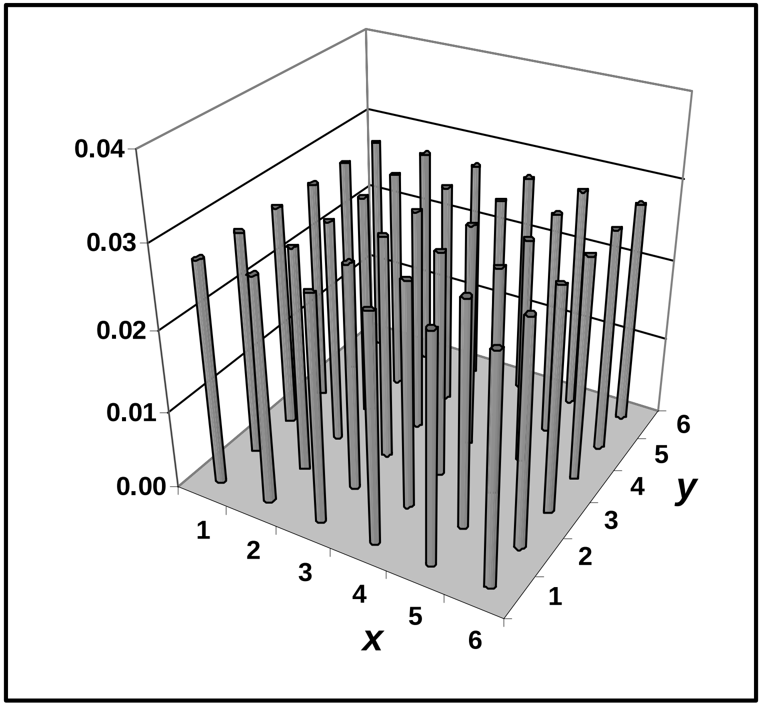
2. heiton silmäluku *y*						
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

1. heiton silmäluku *x*

Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: 1. esimerkki nopanheitosta 5/6

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa:

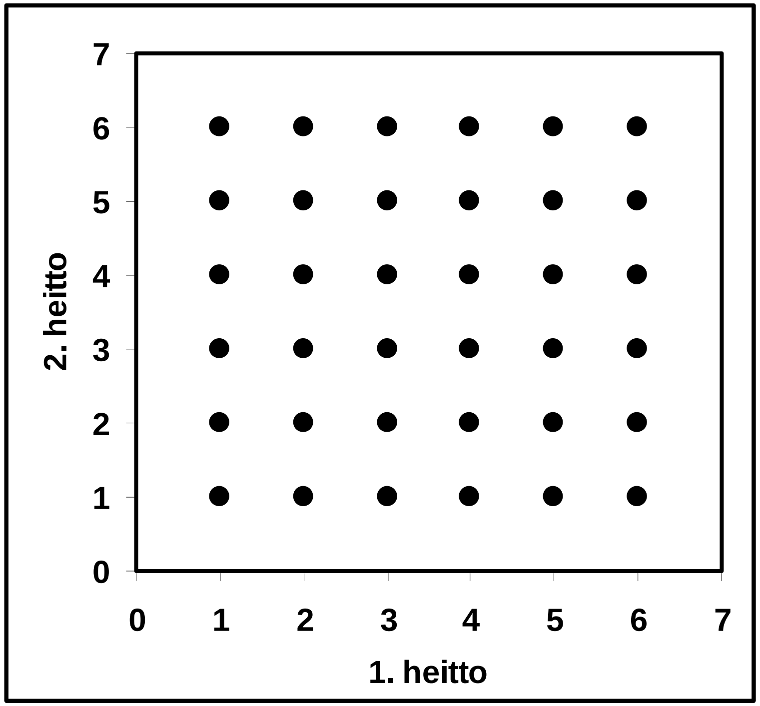
  X = tulos 1. heitosta
  Y = tulos 2. heitosta
- Kuva oikealla esittää satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktiota*.
- Kuvassa on 36 pylvästä, joista jokaisen korkeus 1/36.



Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: 1. esimerkki nopanheitosta 6/6

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa:

  X = tulos 1. heitosta
  Y = tulos 2. heitosta
- Kuva oikealla havainnollistaa satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakaumaa*.
- Kuvassa on 36 pistettä, joista jokaisen todennäköisyys on 1/36.



Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 1/9

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa.
- Määritellään *satunnaismuuttujat* X, Y ja Z:

  X = tulos (silmäluku) 1. heitosta
  Y = tulos (silmäluku) 2. heitosta
  $Z = X + Y$ = silmälukujen summa

- Voimme olettaa, että 2. heiton tulos on *riippumaton* 1. heiton tuloksesta (ja kääntäen).
- Satunnaismuuttujien X, Y ja Z mahdolliset arvot:

  X: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  Y: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  Z: $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

- Määrätään satunnaismuuttujien X ja Z *yhteisjakauma*.

Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 2/9

- Muodostetaan ensin *summamuuttujan* $Z = X + Y$ *jakauma*.
- Muodostetaan sitä varten *aputaulukko*, joka esittää kaikkia mahdollisia tapoja, joilla nopanheittojen silmälukujen summa $Z = X + Y$ voi syntyä:

Silmälukujen summat $z = x + y$

2. heiton silmäluku y						
6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

1. heiton silmäluku x

Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 3/9

- Aputaulukosta voidaan suoraan lukea 1. ja 2. nopanheiton silmälukujen *summan*

  $$Z = X + Y$$

  todennäköisyysjakauma:

Silmälukujen summat $z = x + y$ ja niiden todennäköisyydet

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

- Esimerkki:

  Summa 5 voi syntyä kahden nopanheiton tuloksena 4:llä eri tavalla:

  $$5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1$$

  joten todennäköisyys saada summaksi 5 on 4/36.

Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 4/9

- 1. nopanheiton tulos ja 1. ja 2. nopanheiton tulosten kaikki mahdolliset summat voidaan esittää seuraavana taulukkona:

Tulos 1. nopanheitosta	**Mahdolliset summat 1. ja 2. nopanheiton tuloksista**					
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

- Siten satunnaismuuttujien X ja $Z = X + Y$ järjestetty pari (X, Z) määrittelee *diskreetin kaksiulotteisen satunnaismuuttujan*, jonka arvoina on 66 lukuparia

$$(x, z)\ ;\ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6\ ;\ z = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12$$

Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 5/9

- Koska noppa oletettiin *virheettömäksi* ja heittojen tulokset oletettiin *riippumattomiksi*, on luontevaa ajatella, että 1. heiton tulos ja 1. ja 2. heiton tulosten *mahdollisten* summien muodostamat 36 tulosvaihtoehtoa

  $$(x, z)\ ;\ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6\ ;\ z = x + y\ ;\ y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

  ovat *yhtä todennäköisiä*.
- Tällöin satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman piste-todennäköisyysfunktion* saa positiiviset arvot

  $$f_{XZ}(x,z) = \Pr(X = z \text{ ja } Z = z) = \frac{1}{36}$$

  kun

  $$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$
  $$z = x + y$$
  $$y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 6/9

- Satunnaismuuttujien X ja $Z = X + Y$ *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* voidaan esittää seuraavana taulukkona:

Silmälukujen summa z						
12	0	0	0	0	0	1/36
11	0	0	0	0	1/36	1/36
10	0	0	0	1/36	1/36	1/36
9	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36
8	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
7	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0
5	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0
4	1/36	1/36	1/36	0	0	0
3	1/36	1/36	0	0	0	0
2	1/36	0	0	0	0	0
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

1. nopan silmäluku *x*

Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 7/9

- Esimerkkejä:

(i) Oletetaan, että 1. nopalla on saatu 2. Tällöin silmälukujen summaksi *ei voi tulla* 10, joten

$$\Pr(X = 1 \text{ ja } Z = 10) = 0$$

(ii) Oletetaan, että 1. nopalla on saatu 6. Tällöin silmälukujen summaksi *ei voi tulla* 3, joten

$$\Pr(X = 6 \text{ ja } Z = 3) = 0$$

(iii) Oletetaan, että 1. nopalla on saatu 2. Tällöin silmälukujen summaksi *voi tulla* 3, 4, 5, 6, 7 tai 8, joten

$$\Pr(X = 1 \text{ ja } Z = z) = 1/36 \;;\; z = 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

(iv) Oletetaan, että 1. nopalla on saatu 6. Tällöin silmälukujen summaksi *voi tulla* 7, 8, 9, 10, 11 tai 12, joten

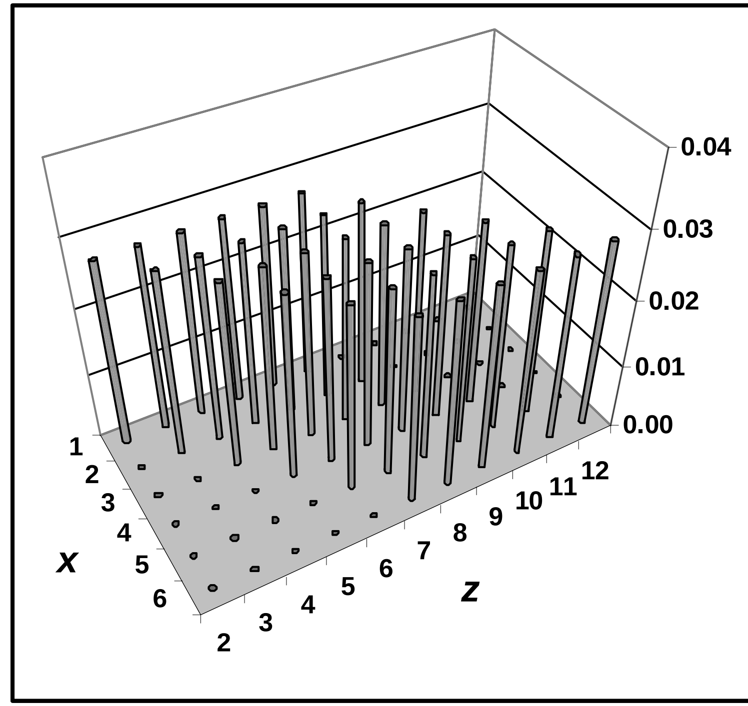
$$\Pr(X = 6 \text{ ja } Z = z) = 1/36 \;;\; z = 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 8/9

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa:

  X = tulos 1. heitosta
  Y = tulos 2. heitosta
  $Z = X + Y$

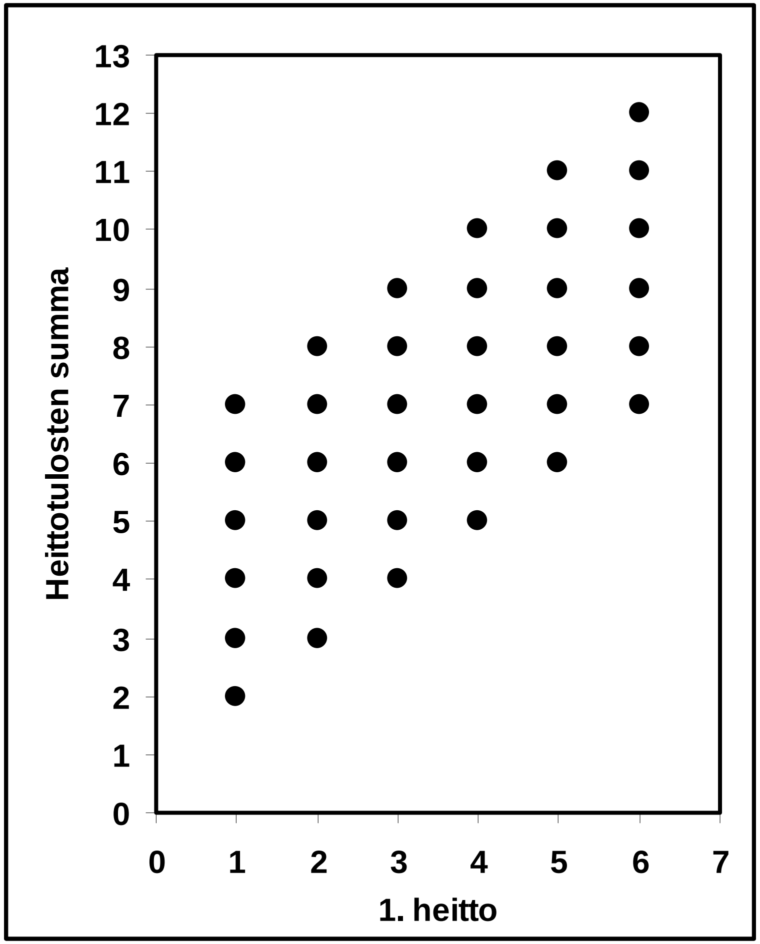
- Kuva oikealla esittää satunnaismuuttujien X ja Z *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktiota*.
- Kuvassa on 36 pylvästä, joista jokaisen korkeus on 1/36.



Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 9/9

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa:

  X = tulos 1. heitosta
  Y = tulos 2. heitosta
  $Z = X + Y$
- Kuva oikealla havainnollistaa satunnaismuuttujien X ja Z *yhteisjakaumaa*.
- Kuvassa on 36 pistettä, joista jokaisen todennäköisyys on 1/36.



Jatkuvat kaksiulotteiset satunnaismuuttujat ja niiden jakaumat

- Olkoot X ja Y *jatkuvia* satunnaismuuttujia.
- Tällöin järjestetty pari (X, Y) määrittelee **jatkuvan kaksiulotteisen satunnaismuuttujan**.
- Kaksiulotteinen jatkuva satunnaismuuttuja (X, Y) määrittelee **jatkuvan kaksiulotteisen todennäköisyys-jakauman**, jota kutsutaan satunnaismuuttujien X ja Y **yhteisjakaumaksi**.

Jatkuvat kaksiulotteiset jakaumat: Tiheysfunktio

- Reaaliarvoinen jatkuva funktio

$$f_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

määrittelee *jatkuvien satunnaismuuttujien* X ja Y **yhteisjakauman tiheysfunktion**, jos seuraavat ehdot pätevät:

(1) $f_{XY}(x, y) \geq 0$ kaikille x ja y

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)\,dydx = 1$

(3) $\displaystyle\Pr(a \leq X \leq b \text{ ja } c \leq Y \leq d) = \int_a^b\int_c^d f_{XY}(x, y)\,dydx$

Kaksinkertaiset integraalit: Integrointijärjestys

- Huomautus:

  Käytämme *kaksinkertaisten integraalien* yhteydessä seuraavaa sopimusta integrointijärjestyksestä:

$$\int_a^b \int_c^d f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f_{XY}(x,y)\,dy \right) dx$$

Jatkuvat kaksiulotteiset jakaumat: Tapahtumien todennäköisyydet

- Olkoon

$$f_{XY} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

jatkuvien satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio*.

- Olkoon

$$A \subset \mathbb{R}^2$$

jokin *tapahtuma*.

- Tällöin

$$\Pr((X,Y) \in A) = \iint_A f_{XY}(x,y)dydx$$

Kaksiulotteisten jakaumien kertymäfunktiot

- Olkoon (X, Y) satunnaismuuttujien X ja Y muodostama *järjestetty pari*.
- Satunnaismuuttujien X ja Y **yhteisjakauman kertymäfunktio** F_{XY} määritellään kaavalla:

$$F_{XY}(x, y) = \Pr(X \leq x \text{ ja } Y \leq y)$$

Diskreettien kaksiulotteisten jakaumien kertymäfunktiot

- Olkoon (X, Y) *diskreetti* kaksiulotteinen satunnaismuuttuja.
- Olkoon $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ satunnaismuuttujan X tulosvaihtoehtojen eli arvojen joukko.
- Olkoon $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$ satunnaismuuttujan Y tulosvaihtoehtojen eli arvojen joukko.
- **Diskreetin kaksiulotteisen jakauman kertymäfunktio** on

$$\begin{aligned} F_{XY}(x, y) &= \Pr(X \le x \text{ ja } Y \le y) \\ &= \sum_{x_i \le x} \sum_{y_i \le y} f_{XY}(x_i, y_i) \end{aligned}$$

jossa f_{XY} satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio*.

Jatkuvien kaksiulotteisten jakaumien kertymäfunktiot

- Olkoon (X, Y) *jatkuva* kaksiulotteinen satunnaismuuttuja.
- **Jatkuvan kaksiulotteisen jakauman kertymäfunktio** on

$$F_{XY}(x,y) = \Pr(X \leq x \text{ ja } Y \leq y)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\,dv\,du$$

jossa f_{XY} satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio*.

Jatkuvan kaksiulotteisen jakauman tiheysfunktion ja kertymäfunktion yhteys

- Olkoon (X, Y) *jatkuva* kaksiulotteinen satunnaismuuttuja.
- Olkoon $F_{XY}(x, y)$ satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman *kertymäfunktio*.
- Jos *derivaatta*

$$\frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} = f_{XY}(x, y)$$

on olemassa ja on jatkuva, funktio $f_{XY}(x, y)$ on satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman *tiheysfunktio*.

Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

Kaksiulotteiset todennäköisyysjakaumat

>> Kaksiulotteisten jakaumien reunajakaumat ja riippumattomuus

Kaksiulotteisten jakaumien odotusarvot ja varianssit

Kovarianssi ja korrelaatio

Ehdolliset jakaumat ja odotusarvot

Kaksiulotteisten jakaumien reunajakaumat ja riippumattomuus

Avainsanat

- **Diskreetin kaksiulotteisen jakauman reunajakaumat**
- **Jatkuvan kaksiulotteisen jakauman reunajakaumat**
- **Kertymäfunktio**
- **Pistetodennäköisyysfunktio**
- **Reunajakaumat**
- **Riippumattomuus**
- **Tiheysfunktio**
- **Yhteisjakauma**

Diskreetin kaksiulotteisen jakauman reunajakaumat

- Olkoon $f_{XY}(x, y)$ *diskreetin* kaksiulotteisen jakauman pistetodennäköisyysfunktio.
- Satunnaismuuttujan X **reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio** on

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \sum_y f_{XY}(x, y)$$

- Satunnaismuuttujan Y **reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio** on

$$f_Y(y) = \Pr(Y = y) = \sum_x f_{XY}(x, y)$$

- Satunnaismuuttujien X ja Y reunajakaumat *yhtyvät* satunnaismuuttujien X ja Y todennäköisyysjakaumiin.

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman reunajakaumat: 1. esimerkki nopanheitosta 1/5

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa.
- Määritellään *satunnaismuuttujat* X ja Y:

  X = tulos (silmäluku) 1. heitosta
  Y = tulos (silmäluku) 2. heitosta

- Satunnaismuuttujien X ja Y mahdolliset arvot:

  X: {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  Y: {1, 2, 3, 4, 5, 6}

- Määrätään satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumat*.

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman reunajakaumat: 1. esimerkki nopanheitosta 2/5

- Satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio*:

$$\Pr(X = x \text{ ja } Y = y) = f_{XY}(x, y) \; ; \; x = 1, 2, \dots , 6 \; ; \; y = 1, 2, \dots , 6$$

1. heiton silmäluku *x*

2. heiton silmäluku *y*

	1	2	3	4	5	6
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman reunajakaumat: 1. esimerkki nopanheitosta 3/5

- Satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumien pistetodennäköisyys-funktiot* saadaan määräämällä yhteisjakauman todennäköisyydet antavassa taulukossa *rivi*- ja *sarakesummat*.
- Satunnaismuuttujan X *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \sum_{y=1}^{6} f_{XY}(x, y) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \; ; \; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

koska

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{36} \; ; \; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \; ; \; y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- Satunnaismuuttujan Y *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_Y(y) = \Pr(Y = y) = \sum_{x=1}^{6} f_{XY}(x, y) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \; ; \; y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

koska

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{36} \; ; \; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \; ; \; y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman reunajakaumat: 1. esimerkki nopanheitosta 4/5

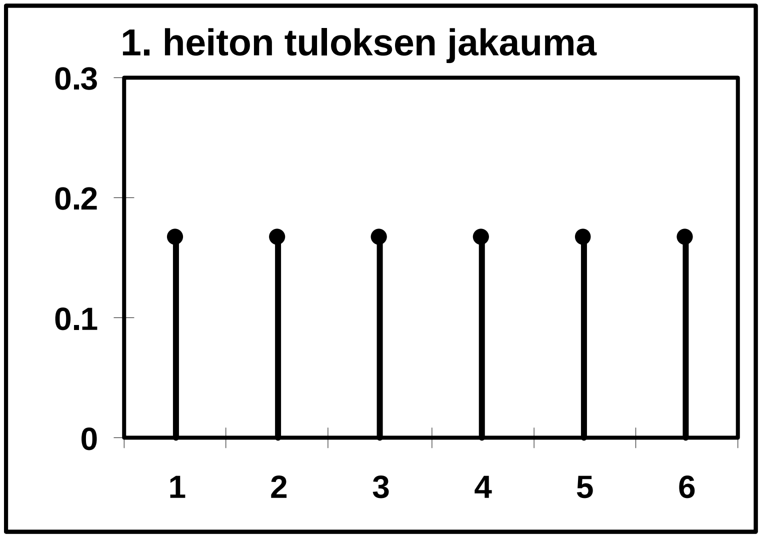
- Satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman* ja *reunajakaumien pistetodennäköisyysfunktiot*:

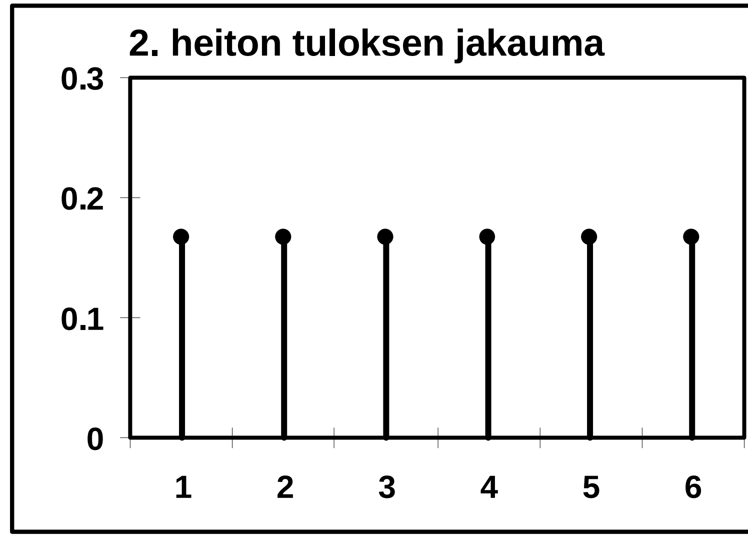
1. heiton silmäluku *x*

2. heiton silmäluku *y*

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Yht**
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
Yht	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1**

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman reunajakaumat: 1. esimerkki nopanheitosta 5/5





- Kuvat yllä esittävät satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumien pistetodennäköisyysfunktioita*:

  X = tulos 1. heitosta
  Y = tulos 2. heitosta

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman reunajakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 1/5

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa.
- Määritellään *satunnaismuuttujat* X, Y ja Z seuraavasti:

  X = tulos (silmäluku) 1. heitosta
  Y = tulos (silmäluku) 2. heitosta
  $Z = X + Y$ = silmälukujen summa

- Satunnaismuuttujien X, Y ja Z mahdolliset arvot:

  X: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  Y: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  Z: $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

- Määrätään satunnaismuuttujien X ja Z *reunajakaumat*.

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman reunajakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 2/5

- Satunnaismuuttujien X ja Z *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio*:

$$\Pr(X = x \text{ ja } Z = z) = f_{XZ}(x, z) \; ; x = 1, 2, \ldots , 6 \; ; z = 2, 3, \ldots , 12$$

1. nopan silmäluku *x*

Silmälukujen summa *z*

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
12	0	0	0	0	0	1/36
11	0	0	0	0	1/36	1/36
10	0	0	0	1/36	1/36	1/36
9	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36
8	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
7	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0
5	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0
4	1/36	1/36	1/36	0	0	0
3	1/36	1/36	0	0	0	0
2	1/36	0	0	0	0	0

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman reunajakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 3/5

- Satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumien pistetodennäköisyys-funktiot* saadaan määräämällä yhteisjakauman todennäköisyydet antavassa taulukossa *rivi*- ja *sarakesummat*.
- Esimerkkejä:

(i) Satunnaismuuttujan X *reunajakauman* pistetodennäköisyys, kun $X = 4$:

$$f_X(4) = \sum_{z=1}^{12} f_{XZ}(4, z)$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{6}$$

(ii) Satunnaismuuttujan Z *reunajakauman* pistetodennäköisyys, kun $Z = 10$:

$$f_Z(10) = \sum_{x=1}^{6} f_{XZ}(x, 10) = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$$

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman reunajakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 4/5

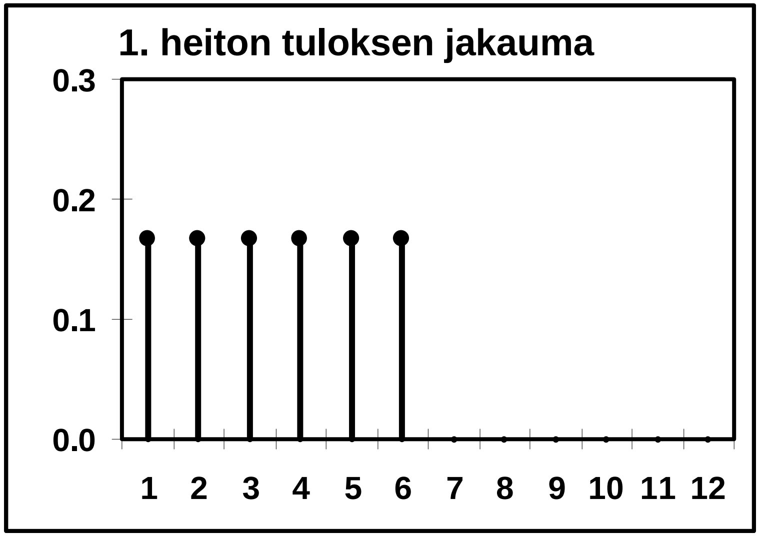
- Satunnaismuuttujien X ja $Z = X + Y$ *yhteisjakauma* ja *reunajakaumat*:

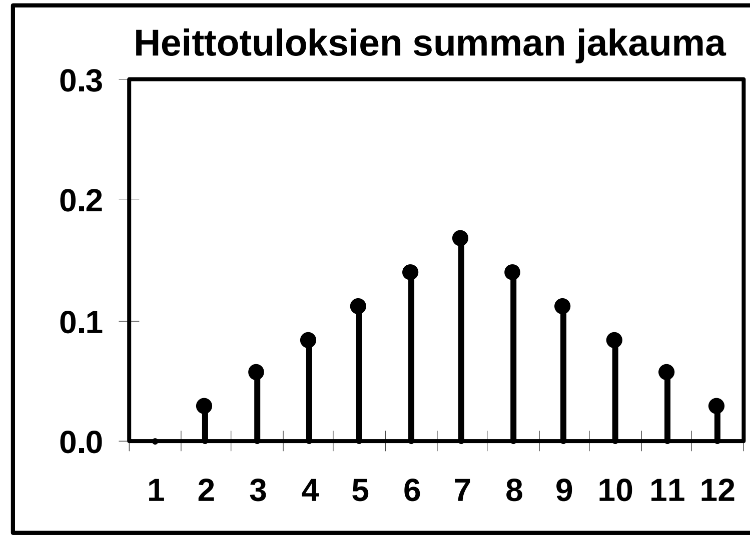
1. nopan silmäluku *x*

Silmälukujen summa *z*

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Yht**
12	0	0	0	0	0	1/36	**1/36**
11	0	0	0	0	1/36	1/36	**2/36**
10	0	0	0	1/36	1/36	1/36	**3/36**
9	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	**4/36**
8	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**5/36**
7	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**6/36**
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	**5/36**
5	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	**4/36**
4	1/36	1/36	1/36	0	0	0	**3/36**
3	1/36	1/36	0	0	0	0	**2/36**
2	1/36	0	0	0	0	0	**1/36**
Yht	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1**

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman reunajakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 5/5





- Kuvat yllä esittävät satunnaismuuttujien X ja Z *reunajakaumien pistetodennäköisyysfunktioita*:

  X = tulos 1. heitosta
  Y = tulos 2. heitosta
  $Z = X + Y$ = heittotulosten summa

Jatkuvan kaksiulotteisen jakauman reunajakaumat

- Olkoon $f_{XY}(x, y)$ *jatkuvan* kaksiulotteisen jakauman tiheysfunktio.
- Satunnaismuuttujan X **reunajakauman tiheysfunktio** on

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)dy$$

- Satunnaismuuttujan Y **reunajakauman tiheysfunktio** on

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)dx$$

- Satunnaismuuttujien X ja Y reunajakaumat *yhtyvät* satunnaismuuttujien X ja Y todennäköisyysjakaumiin.

Satunnaismuuttujien riippumattomuus 1/2

- Oletukset:

(i) Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman* pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio $f_{XY}(x, y)$.

(ii) Olkoon satunnaismuuttujan X *reunajakauman* pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio $f_X(x)$.

Olkoon satunnaismuuttujan Y *reunajakauman* pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio $f_Y(y)$.

- Määritelmä 1:

Satunnaismuuttujat X ja Y ovat **riippumattomia**, jos ja vain, jos

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Satunnaismuuttujien riippumattomuus 2/2

- Oletukset:

(i) Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman* kertymäfunktio $F_{XY}(x, y)$.

(ii) Olkoon satunnaismuuttujan X *reunajakauman* kertymäfunktio $F_X(x)$.

Olkoon satunnaismuuttujan Y *reunajakauman* kertymäfunktio $F_Y(y)$.

- Määritelmä 2:

Satunnaismuuttujat X ja Y ovat **riippumattomia**, jos ja vain, jos

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Satunnaismuuttujien riippumattomuus: Yleistys 1/2

- Oletukset:

(i) Olkoon satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \dots , p$ *yhteisjakauman* pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio

$$f(x_1, x_2, \dots , x_p)$$

(ii) Olkoot satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \dots , p$ *reunajakaumien* pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktiot $f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots , p$.

- Määritelmä 1:

Satunnaismuuttujat X_i , $i = 1, 2, \dots , p$ ovat **riippumattomia**, jos ja vain, jos

$$f(x_1, x_2, \dots , x_p) = f(x_1)f(x_2)\times \cdots \times f(x_p)$$

Satunnaismuuttujien riippumattomuus: Yleistys 2/2

- Oletukset:

(i) Olkoon satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \dots , p$ *yhteisjakauman* kertymäfunktio

$$F(x_1, x_2, \dots , x_p)$$

(ii) Olkoot satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \dots , p$ *reunajakaumien* kertymäfunktiot $F(x_i)$, $i = 1, 2, \dots , p$.

- Määritelmä 2:

Satunnaismuuttujat X_i , $i = 1, 2, \dots , p$ ovat **riippumattomia**, jos ja vain, jos

$$F(x_1, x_2, \dots , x_p) = F(x_1)F(x_2)\times \cdots \times F(x_p)$$

Satunnaismuuttujien riippumattomuus ja tapahtumien riippumattomuus

- Olkoot satunnaismuuttujat X ja Y *riippumattomia*.
- Tällöin

$$\Pr(a \le X \le b \text{ ja } c \le Y \le d) = \Pr(a \le X \le b)\Pr(c \le Y \le d)$$

- Huomautus:

Vrt. *riippumattomien tapahtumien tulosääntö*:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

Satunnaismuuttujien riippumattomuus ja tapahtumien riippumattomuus: Perustelu

- Olkoot satunnaismuuttujat X ja Y jatkuvia ja *riippumattomia*.

$$
\begin{aligned}
\Pr(a \le X \le b \text{ ja } c \le Y \le d) &= \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x,y)\,dy\,dx \\
&= \int_a^b \int_c^d f_X(x) f_Y(y)\,dy\,dx \\
&= \int_a^b f_X(x) \int_c^d f_Y(y)\,dy\,dx \\
&= \int_a^b f_X(x) \Pr(c \le Y \le d)\,dx \\
&= \Pr(c \le Y \le d) \int_a^b f_X(x)\,dx \\
&= \Pr(c \le Y \le d) \Pr(a \le X \le b)
\end{aligned}
$$

Satunnaismuuttujien riippumattomuus: 1. esimerkki nopanheitosta

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa:

  X = tulos (silmäluku) 1. heitosta
  Y = tulos (silmäluku) 2. heitosta

- Tarkastellaan satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakaumaa*:

$$\begin{aligned}\Pr(X = x \text{ ja } Y = y) &= \frac{1}{36}\\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\\ &= \Pr(X = x)\Pr(Y = y)\end{aligned}$$

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6\ ;\ y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- Siten satunnaismuuttujat X ja Y *ovat riippumattomia*.

Satunnaismuuttujien riippumattomuus: 2. esimerkki nopanheitosta

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa:

  X = tulos (silmäluku) 1. heitosta
  Y = tulos (silmäluku) 2. heitosta
  $Z = X + Y$ = silmälukujen summa

- Tarkastellaan satunnaismuuttujien X ja Z *yhteisjakaumaa*.
- Esimerkiksi:

$$\Pr(X = 1 \text{ ja } Z = 8) = 0 \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36} = \Pr(X = 1)\Pr(Z = 8)$$

- Siten satunnaismuuttujat X ja Z *eivät ole riippumattomia*.

Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

Kaksiulotteisten jakaumien odotusarvot ja varianssit

Avainsanat

Odotusarvo

Painopiste

Riippumattomuus

Standardipoikkeama

Summan odotusarvo

Varianssi

Diskreetin kaksiulotteisen satunnaismuuttujan funktion yleinen odotusarvo

- Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* $f_{XY}(x, y)$.
- Olkoon

$$g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

jatkuva funktio.

- Tällöin satunnaismuuttujan $g(X, Y)$ **odotusarvo** on *vakio*

$$\mathrm{E}(g(X,Y)) = \sum_x \sum_y g(x,y)\, f_{XY}(x,y)$$

Jatkuvan kaksiulotteisen satunnaismuuttujan funktion yleinen odotusarvo

- Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio* $f_{XY}(x, y)$.
- Olkoon

  $$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

  jatkuva funktio.
- Tällöin satunnaismuuttujan $g(X, Y)$ **odotusarvo** on *vakio*

  $$\mathrm{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y)\,dy\,dx$$

Reunajakaumien odotusarvot: Diskreetit jakaumat 1/2

- Olkoon *diskreettien* satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* $f_{XY}(x, y)$.
- Satunnaismuuttujan X **odotusarvo** $\mathrm{E}(X) = \mu_X$ yhtyy satunnaismuuttujan X *reunajakauman odotusarvoon*:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_x \sum_y x f_{XY}(x, y) = \sum_x x \sum_y f_{XY}(x, y)$$

$$= \sum_x x f_X(x)$$

Reunajakaumien odotusarvot: Diskreetit jakaumat 2/2

- Olkoon *diskreettien* satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* $f_{XY}(x, y)$.
- Satunnaismuuttujan Y **odotusarvo** $\mathrm{E}(Y) = \mu_Y$ yhtyy satunnaismuuttujan Y *reunajakauman odotusarvoon*:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y) &= \sum_x \sum_y y f_{XY}(x, y) = \sum_y y \sum_x f_{XY}(x, y) \\ &= \sum_y y f_Y(y)\end{aligned}$$

Reunajakaumien odotusarvot: Jatkuvat jakaumat 1/2

- Olkoon *jatkuvien* satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio* $f_{XY}(x, y)$.
- Satunnaismuuttujan X **odotusarvo** $\mathrm{E}(X) = \mu_X$ yhtyy satunnaismuuttujan X *reunajakauman odotusarvoon*:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$$

Reunajakaumien odotusarvot: Jatkuvat jakaumat 2/2

- Olkoon *jatkuvien* satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio* $f_{XY}(x, y)$.
- Satunnaismuuttujan Y **odotusarvo** $\mathrm{E}(Y) = \mu_Y$ yhtyy satunnaismuuttujan Y *reunajakauman odotusarvoon*:

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy$$

Odotusarvot ja todennäköisyysmassan painopiste

- Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *odotusarvot*

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X \qquad \mathrm{E}(Y) = \mu_Y$$

- Tällöin kaksiulotteisen satunnaismuuttujan (X, Y) *odotusarvo* on *järjestetty pari*

$$(\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y)) = (\mu_X, \mu_Y)$$

- Satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvojen muodostama järjestetty pari (μ_X, μ_Y) määrää satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman todennäköisyysmassan* **painopisteen**.

Summan ja erotuksen odotusarvot

- Satunnaismuuttujien X ja Y **summan** $X + Y$ **odotusarvo**:

$$\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)$$

- Satunnaismuuttujien X ja Y **erotuksen** $X - Y$ **odotusarvo**:

$$\mathrm{E}(X-Y)=\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(Y)$$

- Huomautus:

  Satunnaismuuttujien summan ja erotuksen odotusarvojen kaavat on esitetty ilman perustelua luvussa **Jakaumien tunnusluvut**.

Summan ja erotuksen odotusarvot: Perustelu 1/2

- Esitetään satunnaismuuttujien summan odotusarvoa koskevan tuloksen perustelu kahden *jatkuvan* satunnaismuuttujan tapauksessa.
- Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio*

$$f_{XY}(x, y)$$

ja X:n ja Y:n *reunajakaumien tiheysfunktiot* vastaavasti

$$f_X(x) \text{ ja } f_Y(y)$$

Summan ja erotuksen odotusarvot: Perustelu 2/2

- Tällöin $$\begin{aligned}\mathrm{E}(X \pm Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x \pm y) f_{XY}(x,y)dydx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[xf_{XY}(x,y) \pm yf_{XY}(x,y)\right]dydx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{XY}(x,y)dydx \pm \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf_{XY}(x,y)dydx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}x\int_{-\infty}^{+\infty}f_{XY}(x,y)dydx \pm \int_{-\infty}^{+\infty}y\int_{-\infty}^{+\infty}f_{XY}(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx \pm \int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy \\ &= \mathrm{E}(X) \pm \mathrm{E}(Y)\end{aligned}$$

Lineaarikombinaation odotusarvo

- Olkoot satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \ldots , k$ *odotusarvot*

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu_i \ , i = 1, 2, \ldots, k$$

ja olkoot a_i , $i = 1, 2, \ldots , k$ *vakioita*.

- Tällöin satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \ldots , k$ **lineaarikombinaation**

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_k X_k$$

odotusarvo on

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y) &= \mathrm{E}(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_k X_k) \\ &= a_1 \mathrm{E}(X_1) + a_2 \mathrm{E}(X_2) + \cdots + a_k \mathrm{E}(X_k) \\ &= a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \cdots + a_k \mu_k\end{aligned}$$

Riippumattomuus ja tulon odotusarvo

- Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *odotusarvot*

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X \qquad \mathrm{E}(Y) = \mu_Y$$

- Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, niin **tulon** XY **odotusarvo on odotusarvojen tulo**:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \\ &= \mu_X \mu_Y\end{aligned}$$

- Huomautus:

  Käänteinen *ei päde*: Siitä, että

  $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$

  ei seuraa, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia.

Riippumattomuus ja tulon odotusarvo: Perustelu 1/2

- Esitetään riippumattomien satunnaismuuttujien tulon odotusarvoa koskevan tuloksen perustelu kahden *jatkuvan* satunnaismuuttujan tapauksessa.
- Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio*

$$f_{XY}(x, y)$$

ja X:n ja Y:n *reunajakaumien tiheysfunktiot* vastaavasti

$$f_X(x) \text{ ja } f_Y(y)$$

- Olkoot satunnaismuuttujat X ja Y *riippumattomia*, jolloin

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

Riippumattomuus ja tulon odotusarvo: Perustelu 2/2

- Tällöin
$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_{XY}(x,y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\mathrm{E}(Y)dx \\
&= \mathrm{E}(Y)\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx \\
&= \mathrm{E}(Y)\mathrm{E}(X)
\end{aligned}
$$

Riippumattomuus ja tulon odotusarvo: Yleistys

- Olkoot satunnaismuuttujien X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ *odotusarvot*

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu_i \ , i = 1, 2, \ldots, k$$

- Jos satunnaismuuttujat X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ ovat *riippumattomia*, niin

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_1 X_2 \cdots X_k) &= \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}(X_2)\cdots\mathrm{E}(X_k)\\ &= \mu_1\mu_2\cdots\mu_k\end{aligned}$$

- Huomautus:

  Käänteinen *ei päde*: Siitä, että

  $$\mathrm{E}(X_1 X_2 \cdots X_k) = \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}(X_2)\cdots\mathrm{E}(X_k)$$

  ei seuraa, että satunnaismuuttujat X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ ovat riippumattomia.

Reunajakaumien varianssit

- Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *odotusarvot*

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X \qquad \mathrm{E}(Y) = \mu_Y$$

- Satunnaismuuttujien X ja Y **varianssit** yhtyvät vastaavien *reunajakaumien variansseihin*:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{D}^2(X) = \sigma_X^2 \\ &= \mathrm{E}[(X-\mu_X)^2]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{D}^2(Y) = \sigma_Y^2 \\ &= \mathrm{E}[(Y-\mu_Y)^2]\end{aligned}$$

Varianssi vaihtelun mittana

- Satunnaismuuttujan X varianssi

  $$\mathrm{Var}(X)$$

  kuvaa satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauman *todennäköisyysmassan* **vaihtelua** *satunnaismuuttujan* X *oman odotusarvon* $\mathrm{E}(X)$ *ympärillä*.
- Satunnaismuuttujan Y varianssi

  $$\mathrm{Var}(Y)$$

  kuvaa satunnaismuuttujan Y todennäköisyysjakauman *todennäköisyysmassan* **vaihtelua** *satunnaismuuttujan* Y *oman odotusarvon* $\mathrm{E}(Y)$ *ympärillä*.

Reunajakaumien varianssit: Diskreetit jakaumat

- Olkoon *diskreettien* satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* $f_{XY}(x, y)$ ja vastaavien reunajakaumien pistetodennäköisyyfunktiot $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.
- Tällöin satunnaismuuttujien X ja Y **varianssit** ovat *vakioita*

$$\mathrm{D}^2(X) = \sum_x (x - \mu_X)^2 f_X(x)$$

$$\mathrm{D}^2(Y) = \sum_y (y - \mu_Y)^2 f_Y(y)$$

jossa

$$\mu_X = \mathrm{E}(X)$$

$$\mu_Y = \mathrm{E}(Y)$$

Reunajakaumien varianssit: Jatkuvat jakaumat

- Olkoon *jatkuvien* satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio* $f_{XY}(x, y)$ ja vastaavien reunajakaumien tiheysfunktiot $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.
- Tällöin satunnaismuuttujien X ja Y **varianssit** ovat *vakioita*

$$\mathrm{D}^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx$$

$$\mathrm{D}^2(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y-\mu_Y)^2 f_Y(y)dy$$

jossa

$$\mu_X = \mathrm{E}(X)$$

$$\mu_Y = \mathrm{E}(Y)$$

Varianssien vaihtoehtoiset laskukaavat

- Satunnaismuuttujien X ja Y *varianssien* kaavat voidaan kirjoittaa seuraaviin yhtäpitäviin muotoihin:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}^2(X) &= \mathrm{E}[(X-\mu_X)^2] \\
&= \mathrm{E}(X^2)-\mu_X^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2 \\
\mathrm{D}^2(Y) &= \mathrm{E}[(Y-\mu_Y)^2] \\
&= \mathrm{E}(Y^2)-\mu_Y^2 \\
&= \mathrm{E}(Y^2)-[\mathrm{E}(Y)]^2
\end{aligned}
$$

Varianssien vaihtoehtoiset laskukaavat: Perustelu

- Esitetään varianssin vaihtoehtoisen laskukaavan perustelu satunnaismuuttujalle *X*:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}^2(X) &= \mathrm{E}[(X-\mu_X)^2] \\
&= \mathrm{E}[X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2] \\
&= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(2\mu_X X) + \mathrm{E}(\mu_X^2) \\
&= \mathrm{E}(X^2) - 2\mu_X \mathrm{E}(X) + \mu_X^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2) - 2\mu_X \mu_X + \mu_X^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2) - \mu_X^2
\end{aligned}
$$

Reunajakaumien standardipoikkeamat

- Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *odotusarvot*

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X \qquad \mathrm{E}(Y) = \mu_Y$$

- Satunnaismuuttujien X ja Y **standardipoikkeamat** yhtyvät vastaavien *reunajakaumien standardipoikkeamiin*:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(X) &= \sigma_X \\ &= \sqrt{\mathrm{E}[(X-\mu_X)^2]} \\ \mathrm{D}(Y) &= \sigma_Y \\ &= \sqrt{\mathrm{E}[(Y-\mu_Y)^2]} \end{aligned}$$

Standardipoikkeama vaihtelun mittana

- Satunnaismuuttujan X standardipoikkeama

$$\mathrm{D}(X)$$

kuvaa satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauman *todennäköisyysmassan* **vaihtelua** *satunnaismuuttujan* X *oman odotusarvon* $\mathrm{E}(X)$ *ympärillä*.

- Satunnaismuuttujan Y standardipoikkeama

$$\mathrm{D}(Y)$$

kuvaa satunnaismuuttujan Y todennäköisyysjakauman *todennäköisyysmassan* **vaihtelua** *satunnaismuuttujan* Y *oman odotusarvon* $\mathrm{E}(Y)$ *ympärillä*.

Odotusarvo, varianssi ja standardipoikkeama: Suureiden dimensio eli laatu

- Satunnaismuuttujalla sekä sen *odotusarvolla* ja *standardi-poikkeamalla on aina sama dimensio* eli *laatu*.

  Esimerkki:

  Jos satunnaismuuttujan laatuna on m (metri), niin myös niiden odotusarvon ja standardipoikkeaman laatuna on m.

- Satunnaismuuttujan ja sen *varianssilla ei ole sama dimensio* eli *laatu*.

  Esimerkki:

  Jos satunnaismuuttujan laatuna on m (metri), niin sen varianssin laatuna on m^2.

Odotusarvot ja standardipoikkeamat: 1. esimerkki nopanheitosta

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa:

  X = tulos (silmäluku) 1. heitosta
  Y = tulos (silmäluku) 2. heitosta

- Tarkastellaan satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakaumaa*.
- *Odotusarvot*, *varianssit* ja *standardipoikkeamat*:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=1}^{6} x \Pr(X = x) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = \frac{21}{6} = 3.5 = \mathrm{E}(Y)$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{x=1}^{6} x^2 \Pr(X = x) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x^2 = \frac{91}{6} = \mathrm{E}(Y^2)$$

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{35}{12} = 2.917 = \mathrm{D}^2(Y)$$

$$\mathrm{D}(X) = \sqrt{2.917} = 1.708 = \mathrm{D}(Y)$$

Odotusarvot ja standardipoikkeamat: 2. esimerkki nopanheitosta 1/2

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa:

  X = tulos (silmäluku) 1. heitosta
  Y = tulos (silmäluku) 2. heitosta
  $Z = X + Y$ = silmälukujen summa

- Tarkastellaan satunnaismuuttujien X ja Z *yhteisjakaumaa*.
- *Odotusarvot* ja 2. *momentit*:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=1}^{6} x \Pr(X = x) = \frac{21}{6} = 3.5 = \mathrm{E}(Y)$$

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{z=1}^{12} z \Pr(Z = z) = \frac{252}{36} = 7$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{x=1}^{6} x^2 \Pr(X = x) = \frac{91}{6} = \mathrm{E}(X^2)$$

$$\mathrm{E}(Z^2) = \sum_{z=1}^{12} z^2 \Pr(Z = z) = \frac{1974}{36}$$

Odotusarvot ja standardipoikkeamat: 2. esimerkki nopanheitosta 2/2

- *Varianssit* ja *standardipoikkeamat* :

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \frac{35}{12} = 2.917 = \mathrm{D}^2(Y)$$

$$\mathrm{D}(X) = \sqrt{2.917} = 1.708 = \mathrm{D}(Y)$$

$$\mathrm{D}^2(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - [\mathrm{E}(Z)]^2 = \frac{210}{36} = 5.833$$

$$\mathrm{D}(Z) = \sqrt{5.833} = 2.415$$

Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

Kovarianssi ja korrelaatio

Avainsanat

Korrelaatiokerroin
Kovarianssi
Riippumattomuus
Summan varianssi
Varianssi

Kovarianssi

- Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *odotusarvot*

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X \qquad \mathrm{E}(Y) = \mu_Y$$

- Satunnaismuuttujien X ja Y **kovarianssi** on *vakio*

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \sigma_{XY} \\ &= \mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]\end{aligned}$$

- Satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssi

  $\mathrm{Cov}(X, Y)$

  kuvaa satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman todennäköisyysmassan* **yhteisvaihtelua** *satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvojen* $\mathrm{E}(X)$ *ja* $\mathrm{E}(Y)$ *määräämän pisteen* $(\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y))$ *ympärillä*.

Kovarianssi: Diskreetit jakaumat

- Olkoon *diskreettien* satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* $f_{XY}(x, y)$.
- Tällöin satunnaismuuttujien X ja Y **kovarianssi** on *vakio*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f_{XY}(x,y)$$

jossa

$$\mu_X = \mathrm{E}(X)$$

$$\mu_Y = \mathrm{E}(Y)$$

Kovarianssi: Jatkuvat jakaumat

- Olkoon *jatkuvien* satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio* $f_{XY}(x, y)$.
- Tällöin satunnaismuuttujien X ja Y **kovarianssi** on *vakio*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)\,f_{XY}(x,y)\,dxdy$$

jossa

$$\mu_X = \mathrm{E}(X)$$

$$\mu_Y = \mathrm{E}(Y)$$

Kovarianssi: Vaihtoehtoinen laskukaava

- Satunnaismuuttujien X ja Y *kovarianssin* kaava voidaan kirjoittaa seuraaviin yhtäpitäviin muotoihin:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\ &= \mathrm{E}(XY)-\mu_X\mu_Y \\ &= \mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)\end{aligned}$$

- Huomautus:

  Vrt. kovarianssin vaihtoehtoista laskukaavaa varianssin vaihtoehtoisiin laskukaavoihin.

Kovarianssin vaihtoehtoinen laskukaava: Perustelu

- Esitetään satunnaismuuttujien kovarianssin vaihtoehtoisen laskukaavan perustelu:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\
&= \mathrm{E}[XY-\mu_X Y-\mu_Y X+\mu_X\mu_Y] \\
&= \mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(\mu_X Y)-\mathrm{E}(\mu_Y X)+\mathrm{E}(\mu_X\mu_Y) \\
&= \mathrm{E}(XY)-\mu_X\,\mathrm{E}(Y)-\mu_Y\,\mathrm{E}(X)+\mu_X\mu_Y \\
&= \mathrm{E}(XY)-\mu_X\mu_Y-\mu_Y\mu_X+\mu_X\mu_Y \\
&= \mathrm{E}(XY)-\mu_X\mu_Y
\end{aligned}
$$

Kovarianssi ja varianssit

- Satunnaismuuttujien kovarianssit itsensä kanssa yhtyvät satunnaismuuttujien variansseihin:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,X) &= \mathrm{E}[(X-\mu_X)(X-\mu_X)] \\ &= \mathrm{Var}(X) \\ &= \sigma_X^2 \\ \mathrm{Cov}(Y,Y) &= \mathrm{E}[(Y-\mu_Y)(Y-\mu_Y)] \\ &= \mathrm{Var}(Y) \\ &= \sigma_Y^2\end{aligned}$$

Odotusarvot, varianssit ja kovarianssi sekä lineaarimuunnokset 1/2

- Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvot, varianssit ja kovarianssi:

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2$$

$$\mathrm{E}(Y) = \mu_Y \qquad \mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sigma_{XY}$$

- Olkoot

$$W = a + bX$$

$$Z = c + dY$$

jossa a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ ovat reaalisia vakioita.

Odotusarvot, varianssit ja kovarianssi sekä lineaarimuunnokset 2/2

- Tällöin pätevät seuraavat kaavat:

$$\mathrm{E}(W) = a + b\,\mathrm{E}(X) = a + b\mu_X$$

$$\mathrm{Var}(W) = b^2\,\mathrm{Var}(X) = b^2\sigma_X^2$$

$$\mathrm{E}(Z) = c + d\,\mathrm{E}(Y) = c + d\mu_Y$$

$$\mathrm{Var}(Z) = d^2\,\mathrm{Var}(Y) = d^2\sigma_Y^2$$

$$\mathrm{Cov}(W, Z) = bd\,\mathrm{Cov}(X, Y) = bd\sigma_{XY}$$

Kovarianssi ja lineaarimuunnokset: Perustelu

- Jos satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssi on Cov(X, Y), niin

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(W,Z) &= \mathrm{E}[(W-\mathrm{E}(W))(Z-\mathrm{E}(Z))] \\
&= \mathrm{E}[(a+bX-\mathrm{E}(a+bX))(c+dY-\mathrm{E}(c+dY))] \\
&= \mathrm{E}[(bX-\mathrm{E}(bX))(dY-\mathrm{E}(dY))] \\
&= bd\,\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))] \\
&= bd\,\mathrm{Cov}(X,Y)
\end{aligned}$$

Summan ja erotuksen varianssit

- Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *varianssit*

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 \qquad \mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2$$

ja kovarianssi

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{XY}$$

- Tällöin

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X \pm Y) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) \\ &= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \pm 2\sigma_{XY}\end{aligned}$$

Summan ja erotuksen varianssit: Perustelu

- Summan ja erotuksen varianssia koskevat kaavat nähdään oikeaksi seuraavalla tavalla:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X \pm Y) &= \mathrm{E}[X \pm Y - \mathrm{E}(X \pm Y)]^2 \\
&= \mathrm{E}[X \pm Y - \mathrm{E}(X) \mp \mathrm{E}(Y)]^2 \\
&= \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X)) \pm (Y - \mathrm{E}(Y))]^2 \\
&= \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^2 + (Y - \mathrm{E}(Y))^2 \\
&\qquad \pm 2(X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))] \\
&= \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^2] + \mathrm{E}[(Y - \mathrm{E}(Y))^2] \\
&\qquad \pm 2\,\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))] \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)
\end{aligned}
$$

Riippumattomuus ja kovarianssi

- Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, niin

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$$

- Huomautus:

Käänteinen *ei päde*: Siitä, että

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$$

ei välttämättä seuraa, että satunnaismuuttujat X ja Y olisivat riippumattomia.

Riippumattomuus ja kovarianssi: Perustelu

- Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, niin

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

- Siten

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \\ &= \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \\ &= 0\end{aligned}$$

Riippumattomuus sekä summan ja erotuksen varianssit

- Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *varianssit*

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 \qquad \mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2$$

- Olkoot X ja Y ovat *riippumattomia*, jolloin

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

- Tällöin

$$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

- Huomautus:

  Riippumattomien satunnaismuuttujien summan ja erotuksen varianssien kaavat on esitetty ilman perustelua luvussa **Jakaumien tunnusluvut**.

Korrelaatiokerroin 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttujilla X ja Y on seuraavat odotusarvot, varianssit ja kovarianssi:

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X \qquad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma_X^2$$

$$\mathrm{E}(Y) = \mu_Y \qquad \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{D}^2(Y) = \sigma_Y^2$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sigma_{XY}$$

Korrelaatiokerroin 2/2

- Satunnaismuuttujien X ja Y **korrelaatiokerroin** on *vakio*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cor}(X,Y) &= \rho_{XY} \\
&= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} \\
&= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{D}(X)\,\mathrm{D}(Y)} \\
&= \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}
\end{aligned}$$

Korrelaatiokerroin lineaarisen riippuvuuden mittana

- Satunnaismuuttujien X ja Y korrelaatiokerroin

  $\mathrm{Cor}(X, Y)$

  kuvaa satunnaismuuttujien X ja Y **lineaarisen riippuvuuden** *voimakkuutta*:

  (i) Mitä *suurempi* on
  $|\mathrm{Cor}(X, Y)|$
  sitä *voimakkaampaa* on satunnaismuuttujien X ja Y välinen lineaarinen riippuvuus.

  (ii) Mitä *pienempi* on
  $|\mathrm{Cor}(X, Y)|$
  sitä *heikompaa* on satunnaismuuttujien X ja Y välinen lineaarinen riippuvuus.

Kovarianssi ja korrelaatio: Suureiden dimensio eli laatu

- Huomaa, että satunnaismuuttujien korrelaatio *on dimensioton* eli *laaduton suure* toisin kuin niiden kovarianssi.

Korrelaatiokerroin ja lineaarimuunnokset

- Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y *korrelaatiokerroin* $\mathrm{Cor}(X, Y)$.
- Olkoot

$$W = a + bX$$
$$Z = c + dY$$

- Tällöin

$$\mathrm{Cor}(W, Z) = \mathrm{sgn}(bd)\,\mathrm{Cor}(X, Y)$$

jossa sgn on ns. *merkkifunktio*:

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1, \text{ jos } x > 0 \\ 0, \text{ jos } x = 0 \\ -1, \text{ jos } x < 0 \end{cases}$$

Lineaarimuunnosten korrelaatiokerroin: Perustelu

- Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y *korrelaatiokerroin* $\mathrm{Cor}(X, Y)$.
- Olkoot

$$W = a + bX$$
$$Z = c + dY$$

- Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cor}(W,Z) &= \frac{\mathrm{Cov}(W,Z)}{\sqrt{\mathrm{Var}(W)\,\mathrm{Var}(Z)}} \\
&= \frac{bd\,\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{b^2\,\mathrm{Var}(X)\;d^2\,\mathrm{Var}(Y)}} \\
&= \mathrm{sgn}(bd)\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} \\
&= \mathrm{sgn}(bd)\,\mathrm{Cor}(X,Y)
\end{aligned}$$

Korrelaatiokerroin: Ominaisuudet

- Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y *korrelaatiokerroin* $\mathrm{Cor}(X, Y)$.
- Tällöin

(i) $-1 \leq \mathrm{Cor}(X,Y) \leq +1$

(ii) Jos X ja Y ovat *riippumattomia*, niin $\mathrm{Cor}(X,Y) = 0$

(iii) $\mathrm{Cor}(X,Y) = \pm 1$, jos ja vain, jos

$$Y = \alpha + \beta X,$$

jossa α ja β ovat reaalisia *vakiota*, $\beta \neq 0$

Korrelaatiokerroin: Ominaisuuden (i) perustelu 1/2

- Väite:

$$-1 \leq \mathrm{Cor}(X, Y) \leq +1$$

- Perustelu:

(1) Olkoot W ja Z satunnaismuuttujia ja olkoon $a \in \mathbb{R}$ *vakio*.

(2) $W^2 \geq 0,\ Z^2 \geq 0 \Rightarrow \mathrm{E}(W^2) \geq 0,\ \mathrm{E}(Z^2) \geq 0$

(3) $(aW - Z)^2 \geq 0 \Rightarrow \mathrm{E}(aW - Z)^2 \geq 0$

(4) Kohdasta (3) seuraa, että

$$\mathrm{E}(aW - Z)^2 = a^2\mathrm{E}(W^2) - 2a\mathrm{E}(WZ) + \mathrm{E}(Z^2) \geq 0$$

(5) Valitaan:

$$a = \frac{\mathrm{E}(WZ)}{\mathrm{E}(W^2)}$$

Korrelaatiokerroin: Ominaisuuden (i) perustelu 2/2

(6) Siten

$$\mathrm{E}(aW - Z)^2 = -\frac{[\mathrm{E}(WZ)]^2}{\mathrm{E}(W^2)} + \mathrm{E}(Z^2) \geq 0$$

josta seuraa, että

$$\frac{[\mathrm{E}(WZ)]^2}{\mathrm{E}(W^2)\,\mathrm{E}(Z^2)} \leq 1 \qquad (*)$$

(7) Väite seuraa epäyhtälöstä $(*)$, kun valitaan

$W = X - \mathrm{E}(X)$ ja $Z = Y - \mathrm{E}(Y)$

ja otetaan saadusta epäyhtälöstä neliöjuuri.

- Huomautus:

  Epäyhtälöstä $(*)$ seuraa eräs ns. *Schwarzin epäyhtälön* monista muodoista:

  $$[\mathrm{E}(WZ)]^2 \leq \mathrm{E}(W^2)\,\mathrm{E}(Z^2)$$

Korrelaatiokerroin: Ominaisuuden (ii) perustelu

- Väite:

  Jos X ja Y ovat *riippumattomia*, niin

  $$\mathrm{Cor}(X, Y) = 0$$

- Perustelu:

  Väite seuraa siitä, että jos X ja Y ovat riippumattomia, niin

  $$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

- Huomautus:

  Käänteinen *ei päde*: Siitä, että

  $$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cor}(X, Y) = 0$$

  ei välttämättä seuraa, että satunnaismuuttujat X ja Y olisivat riippumattomia.

Korrelaatiokerroin: Ominaisuuden (iii) perustelu 1/3

- Väite:

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad Y = \alpha + \beta X \;, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$$

- Perustelu:

(1) Ominaisuuden (i) perustelussa kohdan (4) epäyhtälön vasen puoli on 2. asteen polynomi muuttujan *a* suhteen:

$$h(a) = \mathrm{E}(aW - Z)^2 = a^2\mathrm{E}(W^2) - 2a\mathrm{E}(WZ) + \mathrm{E}(Z^2)$$

(2) Ominaisuuden (i) perustelun kohdan (3) mukaan $h(a) \geq 0 \ \forall a$.

(3) $h(a) > 0$ kaikille a, jos ja vain jos 2. asteen yhtälön $h(a) = 0$ *diskriminantti*

$$D = 4[\mathrm{E}(WZ)]^2 - 4\,\mathrm{E}(W^2)\,\mathrm{E}(Z^2) < 0$$

- Huomautus:

Korrelaatiokertoimen ominaisuus (i) seuraa myös kohdan (3) epäyhtälöstä.

Korrelaatiokerroin: Ominaisuuden (iii) perustelu 2/3

(4) $h(a) = 0$ täsmälleen silloin, kun 2. asteen yhtälön $h(a) = 0$ *diskriminantti*

$$D = 4[\mathrm{E}(WZ)]^2 - 4\,\mathrm{E}(W^2)\,\mathrm{E}(Z^2) = 0$$

(5) Siten $\mathrm{Cor}(X, Y) = \pm 1$ täsmälleen silloin, kun

$$\mathrm{E}(aW - Z)^2 = 0$$

mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\Pr(aW - Z = 0) = 1$$

(6) Siten

$$Z = aW$$

todennäköisyydellä 1.

(7) Väite seuraa, kun valitaan $W = X - \mathrm{E}(X)$ ja $Z = Y - \mathrm{E}(Y)$ ja merkitään

$$\beta = a \text{ ja } \alpha = \mathrm{E}(Y) - a\,\mathrm{E}(X)$$

Korrelaatiokerroin: Ominaisuuden (iii) perustelu 3/3

- Väite:

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \pm 1 \quad \Leftarrow \quad Y = \alpha + \beta X \ , \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$$

- Perustelu:

Koska $Y = \alpha + \beta X$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cor}(X,Y) &= \mathrm{Cor}(X, \alpha + \beta X) \\ &= \mathrm{sgn}(\beta)\,\mathrm{Cor}(X, X) \\ &= \mathrm{sgn}(\beta) \\ &= \pm 1 \end{aligned}$$

jossa sgn(·) on ns. *merkkifunktio*:

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1, \text{ jos } x > 0 \\ \ \ 0, \text{ jos } x = 0 \\ -1, \text{ jos } x < 0 \end{cases}$$

Korrelaatiokerroin: 1. esimerkki nopanheitosta

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa:

  X = tulos (silmäluku) 1. heitosta
  Y = tulos (silmäluku) 2. heitosta

- Tarkastellaan satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakaumaa*.
- *Odotusarvot*, *varianssit* ja *standardipoikkeamat* (laskettu aikaisemmin):

  $$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 21/6 = 3.5$$

  $$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{D}^2(Y) = 35/12 = 2.917$$

  $$\mathrm{D}(X) = \mathrm{D}(Y) = 1.708$$

- Koska satunnaismuuttujat X ja Y *ovat riippumattomia*, niin

  $$\mathrm{Cor}(X, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

Korrelaatiokerroin: 2. esimerkki nopanheitosta 1/2

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa:

  X = tulos (silmäluku) 1. heitosta
  Y = tulos (silmäluku) 2. heitosta
  $Z = X + Y$ = silmälukujen summa

- Tarkastellaan satunnaismuuttujien X ja Z *yhteisjakaumaa*.
- *Odotusarvot*, *varianssit* ja *standardipoikkeamat* (laskettu aikaisemmin):

  $\mathrm{E}(X) = 21/6 = 3.5$ $\qquad$ $\mathrm{E}(Z) = 252/36 = 7$

  $\mathrm{D}^2(X) = 35/12 = 2.917$ $\qquad$ $\mathrm{D}^2(Z) = 210/36 = 5.833$

  $\mathrm{D}(X) = 1.708$ $\qquad$ $\mathrm{D}(Z) = 2.415$

Korrelaatiokerroin: 2. esimerkki nopanheitosta 2/2

- Satunnaismuuttujat X ja Z *eivät ole riippumattomia*.
- Laksetaan ensin *kovarianssi*:

$$\mathrm{E}(XZ) = \sum_{x=1}^{6}\sum_{z=2}^{12} xz \Pr(X = x, Z = z) = \frac{987}{36}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Z) = \mathrm{E}(XZ) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Z) = \frac{987}{36} - \frac{21}{6}\cdot\frac{42}{6} = \frac{105}{36} = 2.917$$

- *Korrelaatiokertoimen* arvo on:

$$\mathrm{Cor}(X,Z) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\mathrm{D}(X)\mathrm{D}(Z)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

Korreloimattomuus

- Jos

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$$

  ja yhtäpitävästi

$$\mathrm{Cor}(X,Y)=0$$

  niin sanomme, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat **korreloimattomia**.
- Huomautus:

  Satunnaismuuttujien korreloimattomuudesta *ei välttämättä seuraa* niiden riippumattomuus.

Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

Ehdolliset jakaumat ja odotusarvot

Avainsanat

Ehdollinen jakauma

Ehdollinen odotusarvo

Regressiofunktio

Regressiokäyrä

Ehdollinen todennäköisyys

- Olkoot A ja B tapahtumia ja $\Pr(B) \neq 0$.
- Tapahtuman A *ehdollinen todennäköisyys* tapahtuman B suhteen on

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

- *Ehdollisen jakauman määritelmä* mukailee ehdollisen todennäköisyyden määritelmää.

Ehdolliset jakaumat

- Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman *pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktio* $f_{XY}(x, y)$.
- Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumien* pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktiot $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.
- Satunnaismuuttujan X **ehdollinen jakauma** satunnaismuuttujan Y suhteen (ehdolla $Y = y$) on

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \text{ , jos } f_Y(y) > 0$$

- Satunnaismuuttujan Y **ehdollinen jakauma** satunnaismuuttujan X suhteen (ehdolla $X = x$) on

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \text{ , jos } f_X(x) > 0$$

Ehdolliset jakaumat: Kommentteja

- Satunnaismuuttujan X ehdollinen jakauma

  $$f_{X|Y}(x|y)$$

  satunnaismuuttujan Y suhteen (ehdolla $Y = y$) *riippuu yleisessä tapauksessa ehtomuuttujan* Y *arvosta* y.
- Satunnaismuuttujan Y ehdollinen jakauma

  $$f_{Y|X}(y|x)$$

  satunnaismuuttujan X suhteen (ehdolla $X = x$) *riippuu yleisessä tapauksessa ehtomuuttujan* X *arvosta* x.

Riippumattomuus ja ehdolliset jakaumat 1/3

- Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman *pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktio* $f_{XY}(x, y)$.
- Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumien* pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktiot $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.
- Olkoot satunnaismuuttujat X ja Y *riippumattomia*.
- Tällöin

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

Riippumattomuus ja ehdolliset jakaumat 2/3

- Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia, satunnaismuuttujan X *ehdollinen jakauma* satunnaismuuttujan Y suhteen yhtyy satunnaismuuttujan X *reunajakaumaan*:

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \text{ , jos } f_Y(y) > 0$$

- Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia, satunnaismuuttujan Y *ehdollinen jakauma* satunnaismuuttujan X suhteen yhtyy satunnaismuuttujan Y *reunajakaumaan*:

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) \text{ , jos } f_X(x) > 0$$

Riippumattomuus ja ehdolliset jakaumat 3/3

- Olkoot satunnaismuuttujat X ja Y *riippumattomia*.
- Tällöin:

(i) Satunnaismuuttujan X ehdollinen jakauma satunnaismuuttujan Y suhteen *ei riipu* ehtomuuttujan Y arvoista.

(ii) Satunnaismuuttujan Y ehdollinen jakauma satunnaismuuttujan X suhteen *ei riipu* ehtomuuttujan X arvoista.

Ehdolliset odotusarvot: Diskreetit jakaumat

- Olkoot satunnaismuuttujat X ja Y *diskreettejä*.
- Satunnaismuuttujan X **ehdollinen odotusarvo** satunnaismuuttujan Y suhteen on satunnaismuuttujan X ehdollisen jakauman odotusarvo:

$$\mathrm{E}(X \mid Y = y) = \sum_x x f_{X|Y}(x \mid y)$$

- Satunnaismuuttujan Y **ehdollinen odotusarvo** satunnaismuuttujan X suhteen on satunnaismuuttujan Y ehdollisen jakauman odotusarvo:

$$\mathrm{E}(Y \mid X = x) = \sum_y y f_{Y|X}(y \mid x)$$

Ehdolliset odotusarvot: Jatkuvat jakaumat

- Olkoot satunnaismuuttujat X ja Y *jatkuvia*.
- Satunnaismuuttujan X **ehdollinen odotusarvo** satunnaismuuttujan Y suhteen on satunnaismuuttujan X ehdollisen jakauman odotusarvo:

$$\mathrm{E}(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid y)\,dx$$

- Satunnaismuuttujan Y **ehdollinen odotusarvo** satunnaismuuttujan X suhteen on satunnaismuuttujan Y ehdollisen jakauman odotusarvo:

$$\mathrm{E}(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y \mid x)\,dy$$

Ehdolliset odotusarvot: Kommentteja

- Satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo

  $$\mathrm{E}(X \mid Y = y)$$

  satunnaismuuttujan Y suhteen (ehdolla $Y = y$) *riippuu yleisessä tapauksessa ehtomuuttujan Y arvosta y.*
- Satunnaismuuttujan Y ehdollinen odotusarvo

  $$\mathrm{E}(Y \mid X = x)$$

  satunnaismuuttujan X suhteen (ehdolla $X = x$) *riippuu yleisessä tapauksessa ehtomuuttujan X arvosta x.*

Riippumattomuus ja ehdolliset odotusarvot 1/2

- Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, ehdolliset odotusarvot *yhtyvät* niiden *reunajakaumien odotusarvoihin*.
- Jos siis X ja Y ovat *riippumattomia*, seuraava pätee:

$$\mathrm{E}(X \mid Y) = \mathrm{E}(X)$$

$$\mathrm{E}(Y \mid X) = \mathrm{E}(Y)$$

Riippumattomuus ja ehdolliset odotusarvot 2/2

- Olkoot satunnaismuuttujat X ja Y *riippumattomia*.
- Tällöin:

(i) Satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo satunnaismuuttujan Y suhteen *ei riipu* ehtomuuttujan Y arvoista.

(ii) Satunnaismuuttujan Y ehdollinen odotusarvo satunnaismuuttujan X suhteen *ei riipu* ehtomuuttujan X arvoista.

Ehdolliset odotusarvot satunnaismuuttujina: Iteroidun odotusarvon laki

- Ehdolliset odotusarvot voidaan tulkita *satunnais-muuttujiksi* ehtomuuttujan suhteen.
- Siten satunnaismuuttujan Y *ehdollisen odotusarvon odotusarvoksi* (satunnaismuuttujan X suhteen) saadaan

$$\mathrm{E}_X\left[\mathrm{E}(Y \mid X)\right] = \mathrm{E}(Y)$$

- Siten satunnaismuuttujan X *ehdollisen odotusarvon odotusarvoksi* (satunnaismuuttujan Y suhteen) saadaan

$$\mathrm{E}_Y\left[\mathrm{E}(X \mid Y)\right] = \mathrm{E}(X)$$

- Kaavat tunnetaan nimellä **iteroidun odotusarvon laki**.

Iteroidun odotusarvon laki: Perustelu

- Iteroidun odotusarvon laki nähdään oikeaksi *jatkuvan* jakauman tapauksessa seuraavalla tavalla:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_X\left[\mathrm{E}(Y|X)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}(Y|X) f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy\right] f_X(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x) f_X(x)dy\right]dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{XY}(x,y)dy\right]dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} y \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy \\
&= \mathrm{E}(Y)
\end{aligned}
$$

Regressiofunktiot ja -käyrät 1/2

- Tarkastellaan satunnaismuuttujan X *ehdollista odotusarvoa*

$$\mathrm{E}(X \mid Y = y)$$

ehtomuuttujan Y arvojen y *funktiona*.

- Tätä funktiota kutsutaan satunnaismuuttujan X **regressiofunktioksi** satunnaismuuttujan Y suhteen.
- Satunnaismuuttujan X regressiofunktio muuttujan Y suhteen määrittelee **regressiokäyrän**

$$\begin{aligned} x &= g_y(y) \\ &= \mathrm{E}(X \mid Y = y) \end{aligned}$$

Regressiofunktiot ja -käyrät 2/2

- Tarkastellaan satunnaismuuttujan Y *ehdollista odotusarvoa*

$$\mathrm{E}(Y \mid X = x)$$

ehtomuuttujan X arvojen x *funktiona*.

- Tätä funktiota kutsutaan satunnaismuuttujan Y **regressiofunktioksi** satunnaismuuttujan X suhteen.
- Satunnaismuuttujan Y regressiofunktio muuttujan X suhteen määrittelee **regressiokäyrän**

$$\begin{aligned} y &= g_x(x) \\ &= \mathrm{E}(Y \mid X = x) \end{aligned}$$

Regressiofunktiot ja -käyrät: Kommentteja

- Olkoon
$$x = g_y(y) = \mathrm{E}(X \mid Y = y)$$
satunnaismuuttujan X *regressiokäyrä* satunnaismuuttujan Y saamien arvojen y suhteen.
- Olkoon
$$y = g_x(x) = \mathrm{E}(Y \mid X = x)$$
satunnaismuuttujan Y *regressiokäyrä* satunnaismuuttujan X saamien arvojen x suhteen.
- Vaikka funktiot g_y ja g_x *ovat funktioina täysin määrättyjä*, *sattuma määrää*, *mikä funktioiden arvoista realisoituu*.

Regressiokäyrät ja ennustaminen 1/4

- Oletetaan, että satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktio* f_{XY} tunnetaan.
- Haluamme **ennustaa** satunnaismuuttujan X (tai Y) arvon satunnaismuuttujan Y (tai X) saaman arvon perusteella.

Regressiokäyrät ja ennustaminen 2/4

- Tehtävä 1:
  - (i) Haluamme *ennustaa* satunnaismuuttujan X arvon satunnaismuuttujan Y saaman arvon perusteella.
  - (ii) Olkoon ennustettu arvo $d(X \mid Y)$.
  - (iii) Miten ennuste $d(X \mid Y)$ valitaan *optimaalisella tavalla*?

- Tehtävä 2:
  - (i) Haluamme *ennustaa* satunnaismuuttujan Y arvon satunnaismuuttujan X saaman arvon perusteella.
  - (ii) Olkoon ennustettu arvo $d(Y \mid X)$.
  - (iii) Miten ennuste $d(Y \mid X)$ valitaan *optimaalisella tavalla*?

Regressiokäyrät ja ennustaminen 3/4

- Tehtävän 1 ratkaisu:

  Valitaan $d(X \mid Y)$ siten, että *ennusteen* **keskineliövirhe**

  $$\mathrm{E}[X - d(X \mid Y)]^2$$

  minimoituu.

- Voidaan osoittaa, että keskineliövirhe minimoituu valinnalla

  $$d(X \mid Y) = \mathrm{E}(X \mid Y)$$

- Siten *ehdollinen odotusarvo* $\mathrm{E}(X \mid Y)$ on *keskineliövirheen mielessä optimaalinen ennuste* satunnaismuuttujan X saamille arvoille.

Regressiokäyrät ja ennustaminen 4/4

- Tehtävän 2 ratkaisu:

  Valitaan $d(Y \mid X)$ siten, että *ennusteen* **keskineliövirhe**

  $$\mathrm{E}[Y - d(Y \mid X)]^2$$

  minimoituu.
- Voidaan osoittaa, että keskineliövirhe minimoituu valinnalla

  $$d(Y \mid X) = \mathrm{E}(Y \mid X)$$
- Siten *ehdollinen odotusarvo* $\mathrm{E}(Y \mid X)$ on *keskineliövirheen mielessä optimaalinen ennuste* satunnaismuuttujan Y saamille arvoille.

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: 1. esimerkki nopanheitosta 1/6

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa.
- Määritellään *satunnaismuuttujat* X ja Y:

  X = tulos (silmäluku) 1. heitosta
  Y = tulos (silmäluku) 2. heitosta

- Satunnaismuuttujien X ja Y mahdolliset arvot:

  X: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  Y: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Määrätään satunnaismuuttujien X ja Y *ehdolliset jakaumat*.

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: 1. esimerkki nopanheitosta 2/6

- Satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauma* ja *reunajakaumat*:

Todennäköisyydet Pr($X = x$, $Y = y$)

2. heiton silmäluku y	1	2	3	4	5	6	Yht
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
Yht	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1**

1. heiton silmäluku x

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: 1. esimerkki nopanheitosta 3/6

- Kalvon 2/6 satunnaismuuttujan *X ehdolliset jakaumat* saadaan jakamalla yhteisjakauman todennäköisyydet antavassa taulukossa kunkin *rivin todennäköisyydet vastaavilla rivisummilla* eli *vastaavilla reunatodennäköisyyksillä*.
- Esimerkki:

  Satunnaismuuttujan *X ehdollinen jakauma satunnaismuuttujan Y suhteen*, kun *Y* = 3:

$$f_{X|Y}(x|Y=3) = \frac{f_{XY}(x,3)}{f_Y(3)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}\ ;\ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: 1. esimerkki nopanheitosta 4/6

- Satunnaismuuttujan X *ehdolliset jakaumat* ovat taulukon *riveinä*:

Todennäköisyydet Pr($X = x \mid Y = y$)

2. heiton silmäluku y	1	2	3	4	5	6	Yht
6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**
5	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**
4	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**
3	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**
2	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**
1	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**
Yht	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	

1. heiton silmäluku x

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: 1. esimerkki nopanheitosta 5/6

- Kalvon 2/6 satunnaismuuttujan *Y ehdolliset jakaumat* saadaan jakamalla yhteisjakauman todennäköisyydet antavassa taulukossa kunkin *sarakkeen todennäköisyydet vastaavilla sarakesummilla* eli *vastaavilla reunatodennäköisyyksillä*.
- Esimerkki:

Satunnaismuuttujan *Y ehdollinen jakauma satunnaismuuttujan X suhteen*, kun $X = 4$:

$$f_{Y|X}(y \mid X = 4) = \frac{f_{XY}(4, y)}{f_X(4)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}\,;\; y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: 1. esimerkki nopanheitosta 6/6

- Satunnaismuuttujan *Y ehdolliset jakaumat* ovat taulukon *sarakkeina*:

Todennäköisyydet Pr($Y = y \mid X = x$)

2. heiton silmäluku *y* \ 1. heiton silmäluku *x*	1	2	3	4	5	6	Yht
6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**
5	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**
4	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**
3	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**
2	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**
1	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**
Yht	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 1/4

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa.
- Määritellään *satunnaismuuttujat* X, Y ja Z:

  X = tulos (silmäluku) 1. heitosta
  Y = tulos (silmäluku) 2. heitosta
  $Z = X + Y$ = silmälukujen summa

- Satunnaismuuttujien X, Y ja Z mahdolliset arvot:

  X: {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  Y: {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  Z: {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

- Määrätään satunnaismuuttujan Z *ehdolliset jakaumat* satunnaismuuttujan X suhteen.

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 2/4

- Satunnaismuuttujien X ja $Z = X + Y$ *yhteisjakauma* ja *reunajakaumat*:

1. nopan silmäluku *x*

Silmälukujen summa *z*

	1	2	3	4	5	6	Yht
12	0	0	0	0	0	1/36	**1/36**
11	0	0	0	0	1/36	1/36	**2/36**
10	0	0	0	1/36	1/36	1/36	**3/36**
9	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	**4/36**
8	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**5/36**
7	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**6/36**
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	**5/36**
5	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	**4/36**
4	1/36	1/36	1/36	0	0	0	**3/36**
3	1/36	1/36	0	0	0	0	**2/36**
2	1/36	0	0	0	0	0	**1/36**
Yht	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1**

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 3/4

- Kalvon 2/4 satunnaismuuttujan *Z ehdolliset jakaumat* saadaan jakamalla yhteisjakauman todennäköisyydet antavassa taulukossa kunkin *sarakkeen todennäköisyydet vastaavilla sarakesummilla* eli *vastaavilla reunatodennäköisyyksillä*.
- Esimerkkejä:

(i) Tapahtuman $Z = 8$ *ehdollinen todennäköisyys*, kun ehtotapahtumana on $X = 3$:

$$\Pr(Z = 8 \mid X = 3) = f_{Z|X}(8 \mid X = 3) = \frac{f_{ZX}(8,3)}{f_X(3)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}$$

(ii) Tapahtuman $Z = 10$ *ehdollinen todennäköisyys*, kun ehtotapahtumana on $X = 3$:

$$\Pr(Z = 10 \mid X = 3) = f_{Z|X}(10 \mid X = 3) = \frac{f_{ZX}(10,3)}{f_X(3)} = \frac{0}{1/6} = 0$$

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: 2. esimerkki nopanheitosta 4/4

- Satunnaismuuttujan Z *ehdolliset jakaumat* ovat taulukon *sarakkeina*:

1. nopan silmäluku *x*

Silmälukujen summa *z*

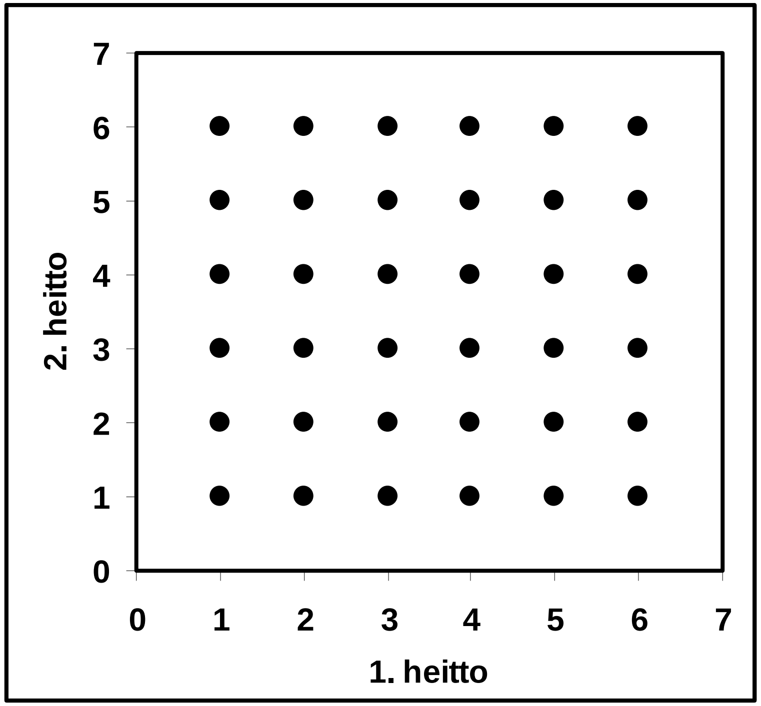
	1	2	3	4	5	6	Yht
12	0	0	0	0	0	1/6	**1/6**
11	0	0	0	0	1/6	1/6	**2/6**
10	0	0	0	1/6	1/6	1/6	**3/6**
9	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	**4/6**
8	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**5/6**
7	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**6/6**
6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	**5/6**
5	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	**4/6**
4	1/6	1/6	1/6	0	0	0	**3/6**
3	1/6	1/6	0	0	0	0	**2/6**
2	1/6	0	0	0	0	0	**1/6**
Yht	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	

Diskreetin 2-ulotteisen jakauman ehdolliset odotusarvot: 1. esimerkki nopanheitosta 1/2

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa:

  X = tulos 1. heitosta
  Y = tulos 2. heitosta

- Kuva oikealla havainnollistaa satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakaumaa*.
- Kuvassa on 36 pistettä, joista jokaisen todennäköisyys on 1/36.



Diskreetin 2-ulotteisen jakauman ehdolliset odotusarvot: 1. esimerkki nopanheitosta 2/2

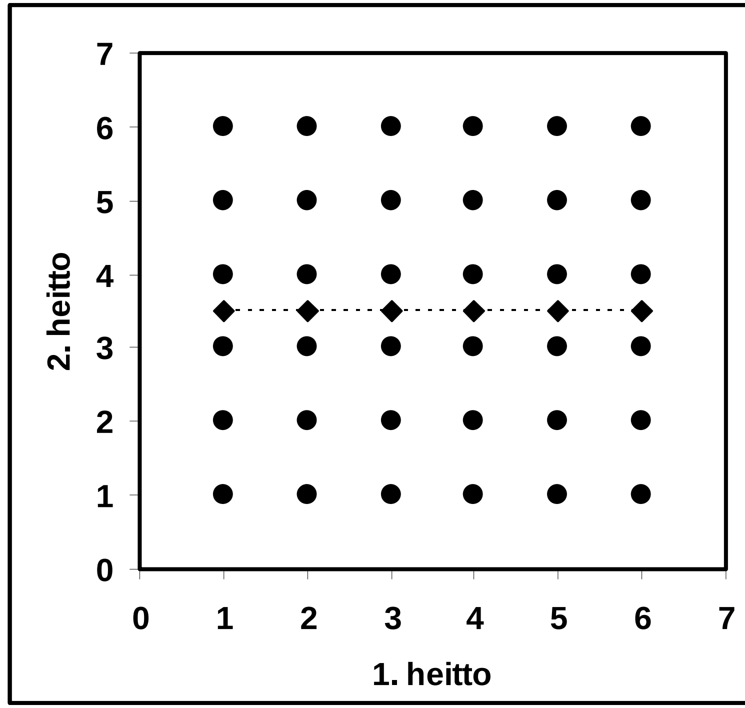
- Satunnaismuuttujan

  X (= tulos 1. heitosta)

  ehdollisia odotusarvoja satunnaismuuttujan

  Y (= tulos 2. heitosta)

  arvojen suhteen on merkitty katkoviivan yhdistämillä *vinoneliöillä*.
- 1. nopanheiton tuloksen tuntemisesta *ei ole hyötyä* 2. nopanheiton tuloksen *ennustamisessa*, koska heittojen tulokset *ovat riippumattomia*.

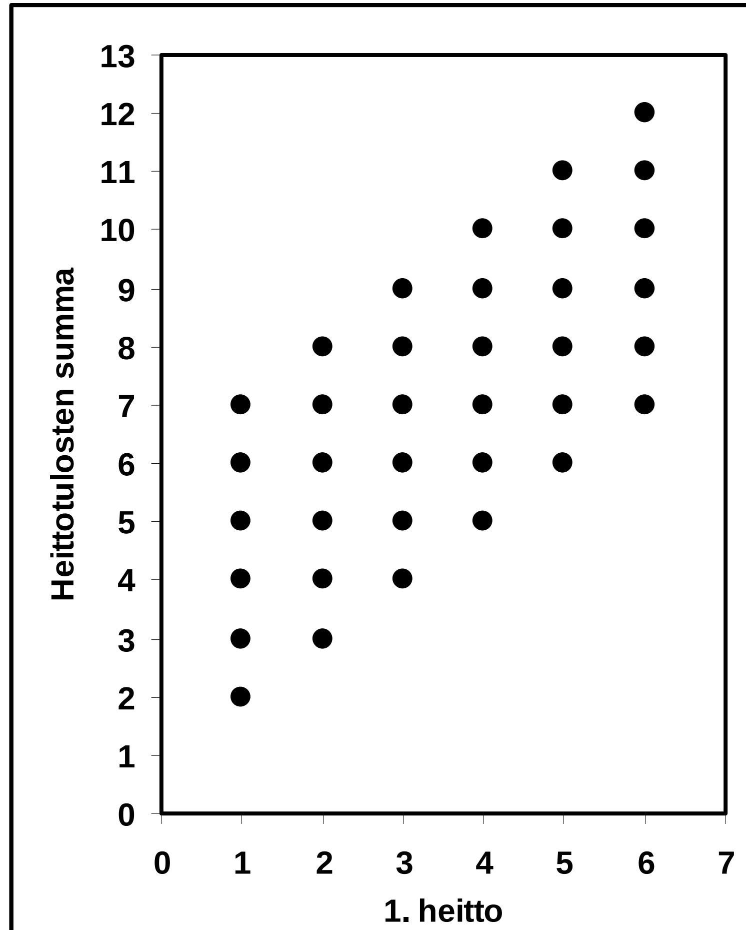


Diskreetin 2-ulotteisen jakauman ehdolliset odotusarvot: 2. esimerkki nopanheitosta 1/2

- Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa:

  X = tulos 1. heitosta
  Y = tulos 2. heitosta
  Z = $X + Y$

- Kuva oikealla havainnollistaa satunnaismuuttujien X ja Z *yhteisjakaumaa*.
- Kuvassa on 36 pistettä, joista jokaisen todennäköisyys on 1/36.



Diskreetin 2-ulotteisen jakauman ehdolliset odotusarvot: 2. esimerkki nopanheitosta 2/2

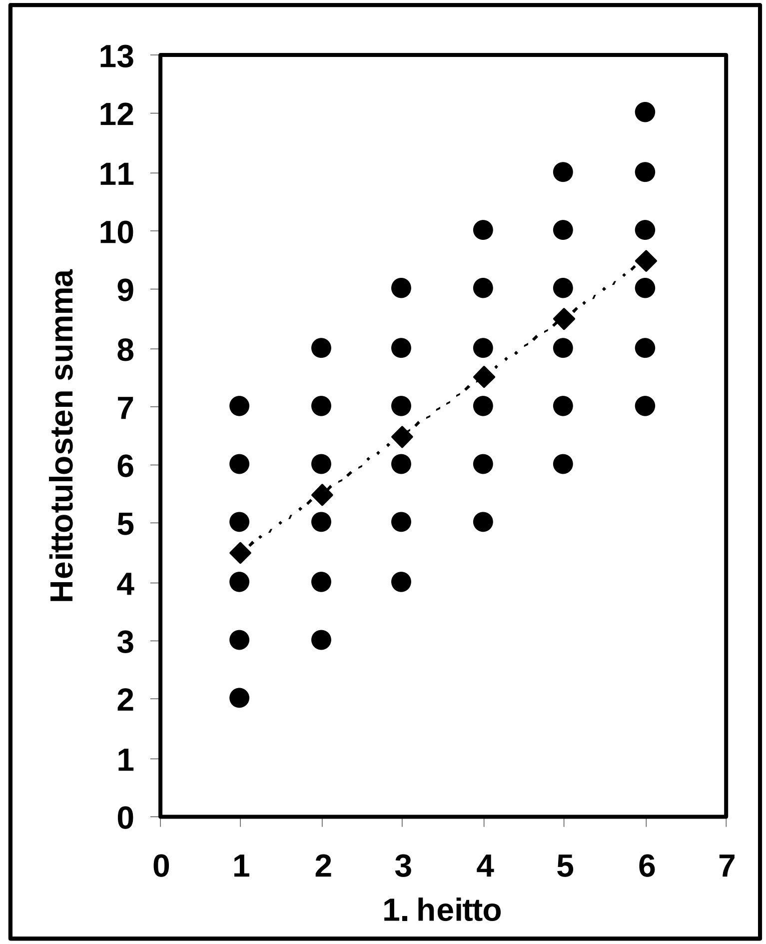
- Satunnaismuuttujan

  Z (= heittotulosten summa)

  ehdollisia odotusarvoja satunnaismuuttujan

  X (= tulos 1. heitosta)

  arvojen suhteen on merkitty katkoviivan yhdistämillä *vinoneliöillä*.
- 1. nopanheiton tuloksen tuntemisesta *on hyötyä* heitto-tulosten summan *ennustamisessa*, koska summa *ei ole riippumaton* 1. heiton tuloksesta.



Jatkuvan 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: Esimerkki 1/2

- Valitaan luvut X ja Y *satunnaisesti* väliltä [0, 1] kahdessa vaiheessa:

  (1) Valitaan väliltä (0, 1) *satunnaisesti* luku X:

  $$X \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

  Olkoon valittu luku x.

  (2) Valitaan väliltä $(0, x)$ *satunnaisesti* luku Y:

  $$Y \sim \text{Uniform}(0, x)$$

  Olkoon valittu luku y.

- Tehtävänä on määrätä satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio* $f_{XY}(x, y)$.

Jatkuvan 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: Esimerkki 2/2

- Oletuksien mukaan satunnaismuuttujan X (*reuna*-) *jakauma* tunnetaan:

  $f_X(x) = 1 \qquad 0 < x < 1$

  $f_X(x) = 0 \qquad$ muulloin

- Oletuksien mukaan satunnaismuuttujan Y *ehdollinen jakauma* ehdolla $X = x$ tunnetaan:

  $f_{Y|X}(y\,|\,x) = 1/x \qquad 0 < y < x$

  $f_{Y|X}(y\,|\,x) = 0 \qquad$ muulloin

Jatkuvan 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: Esimerkin yhteisjakauma ja *Y*:n reunajakauma

- Satunnaismuuttujien *X* ja *Y* *yhteisjakauma* on

$$\begin{aligned} f_{XY}(x,y) &= f_{Y|X}(y\,|\,x)f_X(x) \\ &= 1/x \qquad\qquad 0 < y < x < 1 \end{aligned}$$

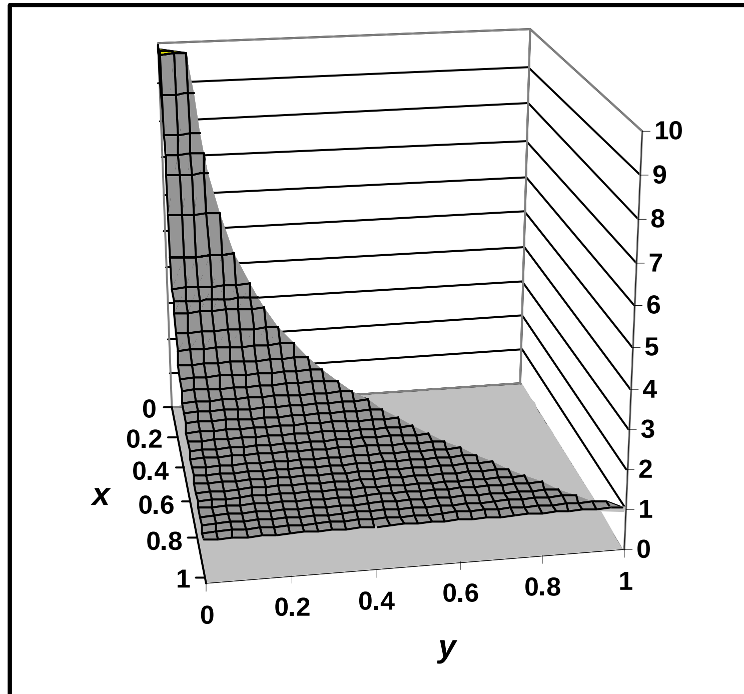
- Satunnaismuuttujan *Y* *reunajakauma* on

$$f_Y(y) = \int_y^1 f_{XY}(x,y)dx = \int_y^1 \frac{1}{x}dx = [\log x]_y^1 = -\log y$$

Jatkuvan 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: Esimerkin yhteisjakauman tiheysfunktio 1/2

- $X \sim \text{Uniform}(0, 1)$
- $Y \mid X = x \sim \text{Uniform}(0, x)$
- Kuva oikealla esittää satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktiota*

  $f_{XY}(x, y) = 1/x \, , \, 0 < y < x < 1$



Jatkuvan 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: Esimerkin yhteisjakauman tiheysfunktio 2/2

- $X \sim \text{Uniform}(0, 1)$
- $Y \mid X = x \sim \text{Uniform}(0, x)$
- Kuva oikealla esittää satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktion*

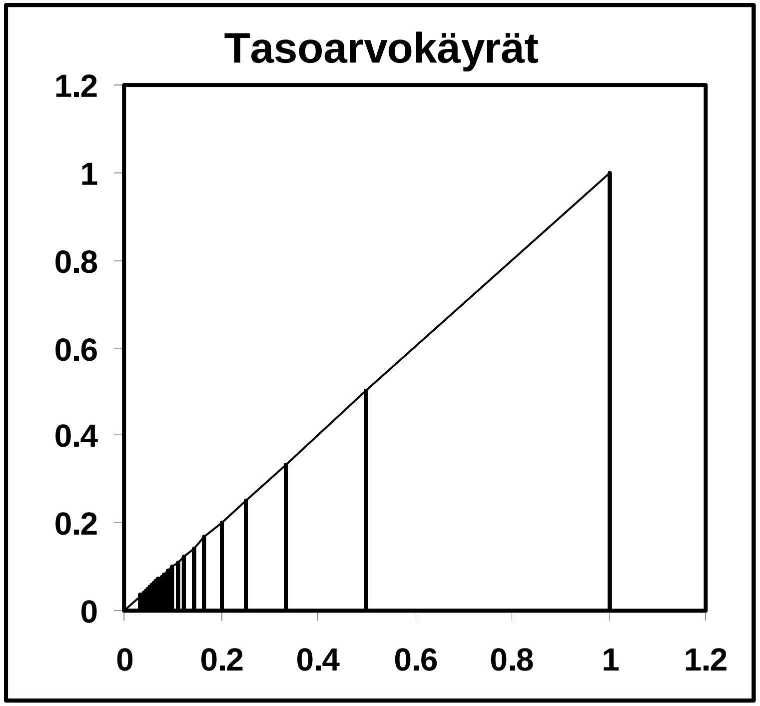
  $f_{XY}(x, y) = 1/x \,,\ 0 < y < x < 1$

  tasa-arvokäyriä

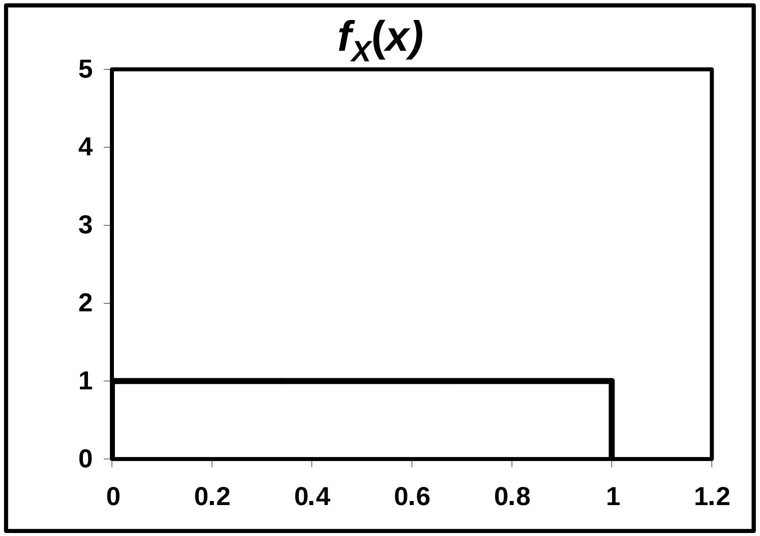
  $x = 1/k \,,\ 0 < y < x$

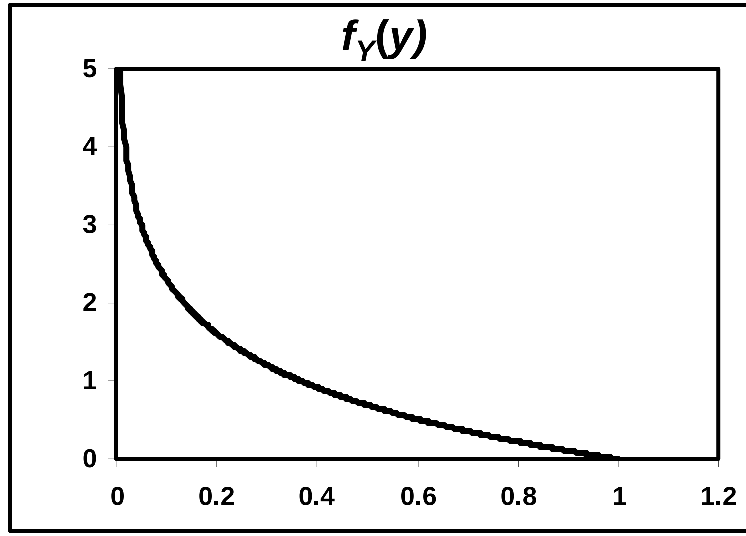
  kun $k = 1, 2, \ldots, 30.$
- Kuvaan on merkitty myös suora

  $y = x \,,\ 0 < x < 1$



Jatkuvan 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: Esimerkin reunajakaumien tiheysfunktiot





- Kuvat yllä esittävät satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumien tiheysfunktioita*:

$$f_X(x) = 1 \ , \ 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = -\log(y) \ , \ 0 < y < x < 1$$

Jatkuvan 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: Esimerkin *Y*:n ehdollinen odotusarvo 1/2

- Oletetaan, että

$$X \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

$$Y \,\big|\, X = x \sim \text{Uniform}(0, x)$$

- Koska X ja $Y \,\big|\, X = x$ noudattavat tasaista jakaumaa, niin

$$\mathrm{E}(X) = \tfrac{1}{2}$$

$$\mathrm{E}(Y \,\big|\, X = x) = \tfrac{1}{2}x$$

- Satunnaismuuttujan Y *ehdollisen odotusarvon* $\mathrm{E}(Y \,\big|\, X)$ *odotusarvo* satunnaismuuttujan X suhteen on iteroidun odotusarvon lain mukaan

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}_X\left[\mathrm{E}(Y \,\big|\, X)\right] = \tfrac{1}{2}\mathrm{E}(X) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}$$

Jatkuvan 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: Esimerkin *Y*:n ehdollinen odotusarvo 2/2

- Koska toisaalta

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 y f_Y(y)\,dy$$

ja

$$f_Y(y) = -\log(y)$$

olemme todistaneet seuraavan integraalikaavan:

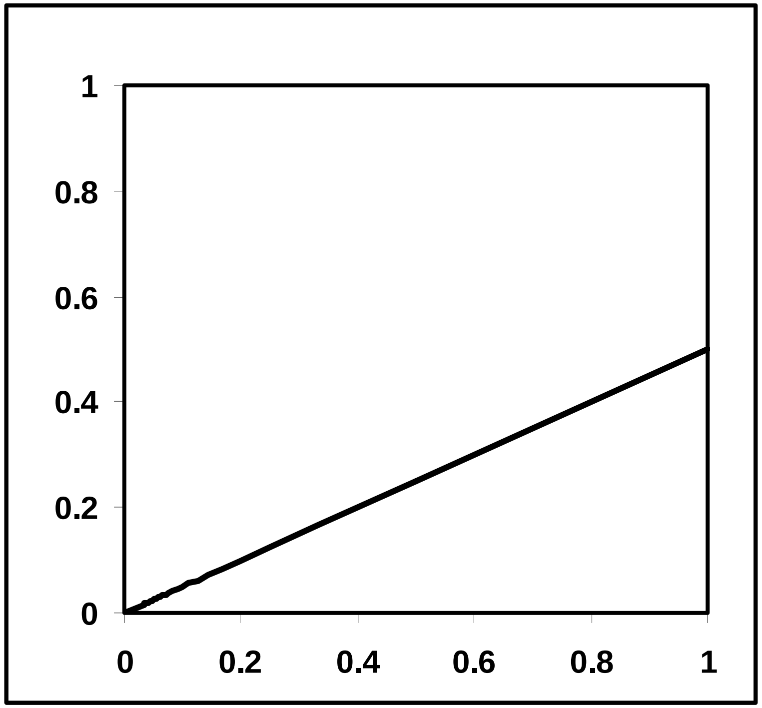
$$-\int_0^1 y\log(y)\,dy = \tfrac{1}{4}$$

Jatkuvan 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: Esimerkin *Y*:n regressiokäyrä *X*:n suhteen 1/2

- $X \sim \text{Uniform}(0, 1)$
- $Y \,\big|\, X = x \sim \text{Uniform}(0, x)$
- Satunnaismuuttujan *Y ehdollinen odotusarvo* satunnaismuuttujan *X* suhteen on

  $\mathrm{E}(Y|X = x) = x/2$
- Siten muuttujan *y regressiokäyrä* muuttujan *x* suhteen on muotoa

  $y = x/2$



Jatkuvan 2-ulotteisen jakauman ehdolliset jakaumat: Esimerkin *Y*:n regressiokäyrä *X*:n suhteen 2/2

- Huomaa, että satunnais-muuttujan *X* saaman arvon tuntemisesta *on* tässä tapauksessa *hyötyä* satunnaismuuttujan *Y* saaman arvon *ennustamisessa*.