
Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet

Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet

Konvergenssikäsitteitä

Suurten lukujen lait

Keskeinen raja-arvolause

Keskeisen raja-arvolauseen seurauksia

Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet: Mitä opimme? – 1/2

- Tässä luvussa tarkastellaan seuraavia **todennäköisyyslaskennan konvergenssikäsitteitä**:
 - (i) **Melkein varma konvergenssi**
 - (ii) **Kvadraattinen konvergenssi**
 - (iii) **Stokastinen konvergenssi**
 - (iv) **Jakaumakonvergenssi**
- Todennäköisyyslaskennan konvergenssikäsitteiden avulla päästään tarkastelemaan *satunnaismuuttujin jonojen* **asymptoottista käyttäytymistä**.

Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet: Mitä opimme? – 2/2

- *Melkein varman konvergenssin ja stokastisen konvergenssin* sovelluksena tarkastelemme **suurten lukujen lakeja**, jotka koskevat *riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien* **aritmeettisen keskiarvon** *asymptoottista käyttäytymistä*, kun satunnaismuuttujien lukumäärän annetaan kasvaa rajatta.
- Jakaumakonvergenssin sovelluksena tarkastelemme **keskeistä raja-arvolauseetta**, jonka mukaan *riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien* **summan jakauma lähestyy normaalijakaumaa**, kun yhteenlaskettavien lukumäärän annetaan rajatta kasvaa.
- **Keskeinen raja-arvolause on ehkä tärkein perustelu normaalijakauman keskeiselle asemalle tilastotieteessä.**
- Keskeisen raja-arvolauseen seurauksina tarkastellaan **binomi-, hypergeometrisen ja Poisson-jakautuneiden satunnaismuuttujien** rajakäyttäytymistä.

Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet: Esitiedot

- Esitiedot: ks. seuraavia lukuja:

Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

Jakaumien tunnusluvut

Diskreettejä jakaumia

Jatkuvia jakaumia

Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia

Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio

Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet: Lisätiedot

- *Suurten lukujen lakiin* on viitattu **tilastollisen stabiliteetin** käsitteen matemaattisena formulointina seuraavissa luvuissa:

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet

Jakaumien tunnusluvut

- *Keskeistä raja-arvolauseetta* on sovellettu luvussa

Jatkuvia jakaumia

esitettäessä miten *binomi-*, *hypergeometrinen* ja *Poisson-jakaumia* voidaan **approksimoida normaalijakaumalla**.

Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet

- >> **Konvergenssikäsitteitä**
 - Suurten lukujen lait**
 - Keskeinen raja-arvolause**
 - Keskeisen raja-arvolauseen seurauksia**

Konvergenssikäsitteitä

Avainsanat

Heikko konvergenssi

Jakaumakonvergenssi

Kvadraattinen konvergenssi

Melkein varma konvergenssi

Satunnaismuuttuja

Satunnaismuuttujien jono

Stokastinen konvergenssi

Varma konvergenssi

Satunnaismuuttujat

- Olkoon

$$(S, \mathcal{F}, \Pr)$$

todennäköisyyskenttä ja olkoon X (mitallinen) *funktio* otosavaruudesta S reaalilukujen joukkoon \mathbb{R} :

$$X : S \rightarrow \mathbb{R}$$

- Tällöin X on **satunnaismuuttuja**.
- Jos haluamme korostaa sitä, että satunnaismuuttuja X on otosavaruuden S kuvaus reaalilukujen joukkoon \mathbb{R} , merkitsemme

$$X(s) \in \mathbb{R} , s \in S$$

Satunnaismuuttajat: Kommentteja

- *Satunnaismuuttuja on funktiona täysin määrätty, mutta sattuma määrää mikä funktion arvoista realisoituu.*
- *Satunnaismuuttuja kuvaa satunnaisilmiön tulosvaihtoehtoja numeerisessa muodossa.*
- *Satunnaismuuttuja liittyy jokaiseen satunnaisilmiön tulosvaihtoehtoon reaaliluvun (numeerisen koodin).*

Satunnaismuuttujien jonot 1/2

- Tarkastelemme jatkossa satunnaismuuttujien

$$X_1, X_2, X_3, \dots$$

muodostamia **jonoja** ja niiden *konvergenssia*.

- Satunnaismuuttujien X_1, X_2, X_3, \dots muodostama jono *ei ole* lukujono missään tavanomaisessa mielessä, vaan se on *lukujonojen joukko*.

- Satunnaismuuttujien X_1, X_2, X_3, \dots muodostamassa jonossa *jokaiseen* otosavaruuden alkioon $s \in S$ liittyy lukujono

$$X_1(s), X_2(s), X_3(s), \dots$$

Satunnaismuuttujien jonot 2/2

- Lukujono

$$X_1(s), X_2(s), X_3(s), \dots$$

voi *konvergoida*, kun

$$s \in A \subset S$$

ja *hajaantua*, kun

$$s \in A^c \subset S$$

- Tämä havainto muodostaa toisen lähtökohdan todennäköisyyslaskennan konvergenssikäsitteiden tarkastelulle.
- Toisen lähtökohdan muodostaa satunnaismuuttujien X_1, X_2, X_3, \dots jakaumien ja niiden *konvergenssin* tarkastelu.

Konvergenssikäsitteitä

Varma konvergenssi

- Satunnaismuuttujien

$$X_1, X_2, X_3, \dots$$

muodostama jono **konvergoi varmasti** kohti satunnaismuuttujaa X , jos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} X_i(s) = X(s) \quad \forall s \in S$$

- Huomautus:

Satunnaismuuttujien jonojen varmaa konvergenssia käytetään liian rajoittavana konvergenssin muotona vain harvoin.

Melkein varma konvergenssi

- Satunnaismuuttujien

$$X_1, X_2, X_3, \dots$$

muodostama jono **konvergoi melkein varmasti** eli **todennäköisyydellä yksi** kohti satunnaismuuttujaa X , jos

$$\Pr(\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = X) = 1$$

- Käytämme tällöin seuraavia merkintöjä:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = X \quad (\text{a.s.})$$

$$X_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} X$$

jossa lyhenne a.s. = *almost surely*.

Melkein varma konvergenssi:

Esimerkki 1/3

- Liitetään *otosavaruuden*

$$S = [0, 1]$$

osaväleihin todennäköisyydet seuraavalla tavalla:

$$\Pr[a, b] = b - a, 0 \leq a \leq b \leq 1$$

- Määritellään *satunnaismuuttuja* X otosavaruudessa S kaavalla

$$X(s) = s, s \in S$$

- Funktio $X(\cdot)$ on *identtinen kuvaus*.
- Määritellään satunnaismuuttujien $X_i, i = 1, 2, 3, \dots$ jono seuraavasti:

$$X_i(s) = \begin{cases} 1, & \text{kun } s = 0 \\ \left(1 - \frac{1}{i}\right)s, & \text{kun } 0 < s < 1 \\ 0, & \text{kun } s = 1 \end{cases}$$

Melkein varma konvergenssi:

Esimerkki 2/3

- Satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ muodostama jono konvergoi i :n kasvaessa rajatta kohti *rajamuuttujaa*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} X_i(s) = \begin{cases} 1, & \text{kun } s = 0 \\ s, & \text{kun } 0 < s < 1 \\ 0, & \text{kun } s = 1 \end{cases}$$

- Olkoon joukko

$$A = \{s \in S \mid \lim X_i(s) \neq X(s)\}$$

niiden otosavaruuden $S = [0, 1]$ alkioiden (pisteiden) s joukko, joissa satunnaismuuttujien $X_i(s)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ muodostama jono *ei konvergoi* kohti satunnaismuuttujan $X(s)$ arvoa.

Melkein varma konvergenssi:

Esimerkki 3/3

- Satunnaismuuttujien $X_i(s)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ muodostama jono *konvergoi* kohti satunnaismuuttujaa $X(s)$, jos $0 < s < 1$, mutta ei konvergoi kohti satunnaismuuttujaa $X(s)$, jos $s = 0$ tai $s = 1$.

- Siten

$$A = \{s \in S \mid \lim X_i(s) \neq X(s)\} = \{0, 1\}$$

- Koska

$$\Pr(A) = 0$$

voimme sanoa, että satunnaismuuttujien $X_i(s)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ muodostama jono *konvergoi* kohti satunnaismuuttujaa $X(s)$ muualla paitsi *nollamittaisessa* joukossa A .

- Siten olemme todistaneet, että satunnaismuuttujien $X_i(s)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ muodostama jono *konvergoi melkein varmasti* eli *todennäköisyydellä yksi* kohti satunnaismuuttujaa $X(s)$:

$$X_i \rightarrow X \text{ (a.s.)}$$

Kvadraattinen konvergenssi

- Satunnaismuuttujien

$$X_1, X_2, X_3, \dots$$

muodostama jono **konvergoi kvadraattisesti** kohti satunnaismuuttujaa X , jos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E \left[(X_i - X)^2 \right] = 0$$

- Käytämme tällöin seuraavia merkintöjä:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = X \quad (\text{q.m.})$$

$$X_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\text{q.m.}} X$$

jossa lyhenne q.m. = in *quadratic mean*.

Kvadraattinen konvergenssi:

Esimerkki 1/2

- Olkoon

$$X_i, i = 1, 2, 3, \dots$$

jono *riippumattomia* ja *samoin jakautuneita* satunnaismuuttujia, joiden odotusarvot ja varianssit ovat

$$E(X_i) = \mu$$

$$\text{Var}(X_i) = \sigma^2$$

- Määritellään satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ *aritmeettinen keskiarvo* kaavalla

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, n = 1, 2, 3, \dots$$

Kvadraattinen konvergenssi:

Esimerkki 2/2

- Koska satunnaismuuttujat $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ oletettiin riippumattomiksi ja niillä on sama odotusarvo ja varianssi, niin niiden aritmeettinen keskiarvon $\bar{X}_n = \sum X_i / n$ odotusarvo ja varianssi ovat

$$E(\bar{X}_n) = \mu$$

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \sigma^2 / n$$

- Koska

$$E[(\bar{X}_n - \mu)^2] = \text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

niin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ aritmeettisten keskiarvojen $\bar{X}_n = \sum X_i / n$ muodostama jono $\bar{X}_n, n = 1, 2, 3, \dots$ konvergoi kvadraattisesti kohti satunnaismuuttujien X_1, X_2, X_3, \dots yhteistä odotusarvoa μ :

$$\bar{X}_n \rightarrow \mu \text{ (q.m.)}$$

Stokastinen konvergenssi

- Satunnaismuuttujien

$$X_1, X_2, X_3, \dots$$

muodostama jono **konvergoi stokastisesti** kohti satunnaismuuttujaa X , jos kaikille $\varepsilon > 0$ pätee

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Pr(|X_i - X| > \varepsilon) = 0$$

- Käytämme tällöin seuraavia merkintöjä:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = X \quad (\mathbf{P})$$

$$X_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} X$$

jossa lyhenne \mathbf{P} = in *probability*.

Stokastinen konvergenssi:

Esimerkki 1/3

- Olkoon

$$X_i, i = 1, 2, 3, \dots$$

jono riippumattomia ja samaa normaalijakaumaa $N(\mu, \sigma^2)$ noudattavia satunnaismuuttujia, joiden odotusarvot ja varianssit ovat

$$E(X_i) = \mu$$

$$\text{Var}(X_i) = \sigma^2$$

- Määritellään satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ aritmeettinen keskiarvo kaavalla

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, n = 1, 2, 3, \dots$$

- Tällöin

$$\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2 / n)$$

Stokastinen konvergenssi:

Esimerkki 2/3

- Kaikille $\varepsilon > 0$ pätee

$$\begin{aligned}\Pr(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) &= 1 - \Pr(\mu - \varepsilon < \bar{X}_n < \mu + \varepsilon) \\ &= 1 - \Pr\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < +\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \Pr\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} < Z < +\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \left[\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right] \\ &\rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty\end{aligned}$$

jossa $\Phi(z)$ on *standardoitua normaalijakaumaa* $N(0, 1)$ noudattavan satunnaismuuttujan Z kertymäfunktio.

Stokastinen konvergenssi:

Esimerkki 3/3

- Koska kaikille $\varepsilon > 0$ pätee

$$\Pr(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty$$

niin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ aritmeettisten keskiarvojen $\bar{X}_n = \sum X_i / n$ muodostama jono $\bar{X}_n, n = 1, 2, 3, \dots$ *konvergoi stokastisesti* kohti satunnaismuuttujien X_1, X_2, X_3, \dots yhteistä odotusarvoa μ :

$$\bar{X}_n \rightarrow \mu \text{ (P)}$$

Jakaumakonvergenssi 1/2

- Olkoon

$$X_1, X_2, X_3, \dots$$

jono *satunnaismuuttujia*, joiden *kertymäfunktiot* ovat

$$F_1(x), F_2(x), F_3(x), \dots$$

- Satunnaismuuttujien X_1, X_2, X_3, \dots muodostama jono **konvergoi jakaumaltaan** eli **heikosti** kohti satunnaismuuttujaa X , jonka kertymäfunktio on $F_X(x)$, jos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F_i(x) = F_X(x)$$

jokaisessa satunnaismuuttujan X kertymäfunktion $F_X(x)$ *jatkuvuuspisteessä* x eli sellaisessa pisteessä x , jossa $F_X(x)$ on jatkuva.

Jakaumakonvergenssi 2/2

- Käytämme tällöin seuraavia merkintöjä:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = X \quad (\text{L})$$

$$X_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\text{L}} X \sim F_X(x)$$

jossa L = in (probability) *law*.

- Kirjaimen L tilalla käytetään joskus kirjainta D:
D = in *distribution*.

Konvergenssikäsitteitä

Jakaumakonvergenssi:

Esimerkki 1/2

- Olkoon

$$X_1, X_2, X_3, \dots$$

jono *satunnaismuuttujia*, joiden *kertymäfunktiot* ovat

$$F_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i, & \text{kun } 0 \leq x \leq i \\ 0, & \text{kun } x > i \end{cases}$$

- Koska

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i = e^{-x}$$

niin

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F_i(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0$$

Jakaumakonvergenssi: Esimerkki 2/2

- Funktio

$$F(x) = 1 - e^{-x}, x \geq 0$$

on eksponenttijakauman $\text{Exp}(1)$ kertymäfunktio.

- Siten satunnaismuuttujien $X_i, i = 1, 2, 3, \dots$ muodostama jono *konvergoi jakaumaltaan eli heikosti* kohti satunnaismuuttujaa $X \sim \text{Exp}(1)$:

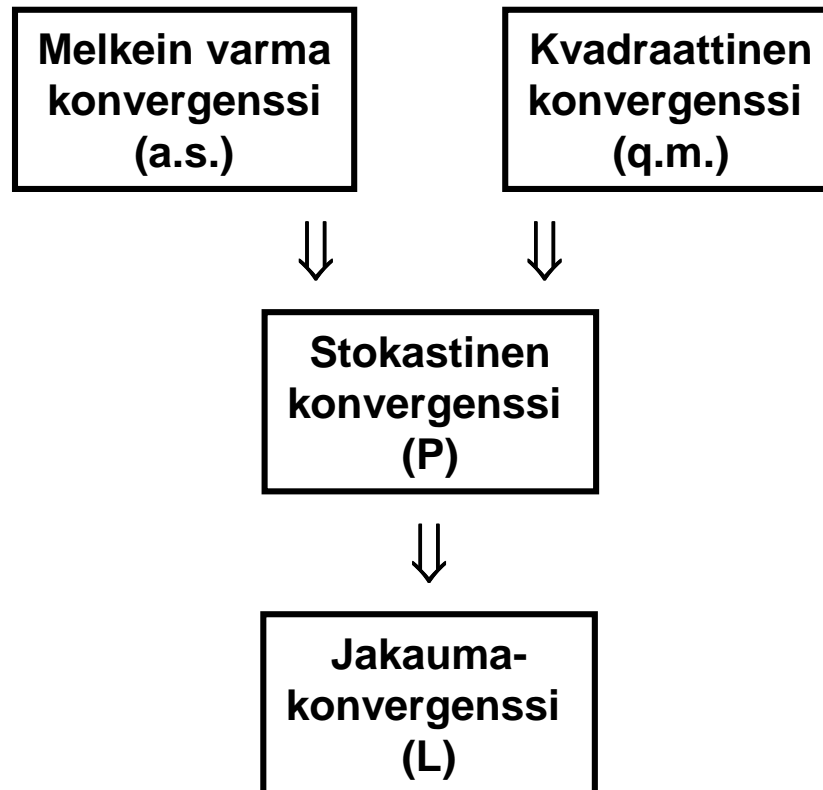
$$X_i \rightarrow X \sim \text{Exp}(1)$$

Konvergenssikäsitteiden yhteydet 1/2

- Voidaan osoittaa, että todennäköisyyslaskennan konvergenssikäsitteillä on seuraavat yhteydet:
 - Melkein varma konvergenssi (a.s.) implikoi stokastisen konvergenssin (P).**
 - Kvadraattinen konvergenssi (q.m.) implikoi stokastisen konvergenssin (P).**
 - Stokastinen konvergenssi (P) implikoi jakauma-konvergenssin eli heikon konvergenssin (L).**
 - Melkein varman ja kvadraattisen konvergenssin yhteydestä ei voida sanoa mitään yleistä.
- Todistamme seuraavassa kohdan (ii).

Konvergenssikäsitteiden yhteydet 2/2

- Konvergenssikäsitteiden yhteydet voidaan esittää seuraavana kaaviona:



Kvadraattinen konvergenssi implikoi stokastisen konvergenssin: Todistus 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttujien

$$X_i, i = 1, 2, 3, \dots$$

muodostama jono *konvergoi kvadraattisesti* kohti satunnaismuuttujaa X , jolloin

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E[(X_i - X)^2] = 0$$

- Tarkastellaan todennäköisyyttä

$$\Pr(|X_i - X| > \varepsilon)$$

- *Markovin epäyhtälöstä* (ks. lukua **Jakaumien tunnusluvut**) ja kvadraattisen konvergenssin *määritelmästä* seuraa, että

$$\Pr(|X_i - X| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E[(X_i - X)^2] \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$$

Kvadraattinen konvergenssi implikoi stokastisen konvergenssin: Todistus 2/2

- Koska

$$\Pr(|X_i - X| > \varepsilon) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$$

niin satunnaismuuttujien

$$X_i, i = 1, 2, 3, \dots$$

muodostama jono *konvergoi stokastisesti* kohti satunnaismuuttujaa X suoraan stokastisen konvergenssin määritelmän perusteella.

Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet

Konvergenssikäsitteitä

>> Suurten lukujen lait

Keskeinen raja-arvolause

Keskeisen raja-arvolauseen seurauksia

Suurten lukujen lait

Avainsanat

Heikko suurten lukujen laki

Melkein varma konvergenssi

Satunnaismuuttuja

Satunnaismuuttujien jono

Stokastinen konvergenssi

Vahva suurten lukujen laki

Vahva suurten lukujen laki 1/2

- Olkoon

$$X_i, i = 1, 2, 3, \dots$$

jono *riippumattomia* ja *samoin jakautuneita* satunnaismuuttujia, joilla on *sama* odotusarvo:

$$E(X_i) = \mu, i = 1, 2, 3, \dots$$

- Määritellään satunnaismuuttujien $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ *aritmeettinen keskiarvo*:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Vahva suurten lukujen laki 2/2

- Tällöin pätee **vahva suurten lukujen laki**:

Satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ aritmeettisten keskiarvojen $\bar{X}_n = \sum X_i / n$ muodostama jono konvergoi **melkein varmasti** eli **todennäköisyydellä yksi** kohti satunnaismuuttujien yhteistä odotusarvoa μ :

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \mu$$

- Huomautus:

Vahvan suurten lukujen lain todistus on vaativa ja sivuutetaan; Sen sijaan todistamme seuraavassa *heikon suurten lukujen lain*.

Vahva suurten lukujen laki: Kommentteja

- *Vahva suurten lukujen laki* ilmaistaan usein sanoin seuraavasti:

Samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien *aritmeettinen keskiarvo lähestyy muuttujien lukumäärän kasvaessa rajatta muuttujien yhteistä odotusarvoa melkein kaikkialla* eli se **otosavaruuden S osajoukko, jossa konvergenssia ei tapahdu on nollamittainen.**

Heikko suurten lukujen laki 1/2

- Olkoon X_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ jono *riippumattomia* satunnaismuuttujia, joilla on *sama* odotusarvo ja varianssi:

$$E(X_i) = \mu, D^2(X_i) = \sigma^2, i = 1, 2, 3, \dots$$

- Määritellään satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ *aritmeettinen keskiarvo*:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Heikko suurten lukujen laki 2/2

- Tällöin pätee **heikko suurten lukujen laki**:

Satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ aritmeettisten keskiarvojen $\bar{X}_n = \sum X_i / n$ muodostama jono konvergoi **stokastisesti** kohti satunnaismuuttujien yhteistä odotusarvoa μ :

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu$$

Heikko suurten lukujen laki: Todistus

- Olkoon $X_i, i = 1, 2, 3, \dots$ jono *riippumattomia* satunnaismuuttujia, joilla on *sama* odotusarvo ja varianssi:

$$E(X_i) = \mu, D^2(X_i) = \sigma^2, i = 1, 2, 3, \dots$$

- Määritellään satunnaismuuttujien $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ *aritmeettinen keskiarvo*:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- *Tshebyshevin epäyhtälön* (ks. lukua **Jakaumien tunnusluvut**) mukaan

$$\Pr(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

- Koska epäyhtälön oikea puoli $\rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, niin

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu$$

Heikko suurten lukujen laki: Kommentteja

- *Heikko suurten lukujen laki* ilmaistaan usein sanoin seuraavasti:

Samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien *aritmeettinen keskiarvo lähestyy muuttujien lukumäärän kasvaessa muuttujien yhteistä odotusarvoa* sellaisella tavalla, että **poikkeamien todennäköisyys satunnaismuuttujien yhteisestä odotusarvosta tulee yhä pienemmäksi eli poikkeamat tulevat yhä harvinaisemmiksi.**

Suurten lukujen lait: Kommentteja

- Suurten lukujen lakeja voidaan pitää matemaattisena formulointina **tilastollisen stabiliteetin** käsitteelle (ks. lukua **Todennäköisyytlaskennan peruskäsitteet**).
- Suurten lukujen lait koskevat satunnaismuuttujien **asymptoottista käyttäytymistä** samaan tapaan kuin **keskeinen raja-arvolause**.
- Vahva suurten lukujen laki *implikoi* heikon suurten lukujen lain.
- Suurten lukujen laeista on olemassa *yleisempiä muotoja*, joissa voidaan lieventää *samoinjakautuneisuus-* ja *riippumattomuusoletuksia*.

Suurten lukujen lait:

Esimerkki 1/5

- Olkoon A otosavaruuden S jokin *tapahtuma* ja oletetaan, että

$$\Pr(A) = p$$

- Tällöin

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A) = 1 - p = q$$

- Määritellään *diskreetti satunnaismuuttuja* X :

$$X = \begin{cases} 1, & \text{jos } A \text{ tapahtuu} \\ 0, & \text{jos } A \text{ ei tapahdu} \end{cases}$$

- Satunnaismuuttujan X *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x) = p^x q^{1-x}, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p, \quad x = 0, 1$$

joten satunnaismuuttuja X noudattaa *Bernoulli-jakaumaa* parametrilla p (ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**):

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

$$E(X) = p$$

Suurten lukujen lait:

Esimerkki 2/5

- *Toistetaan* edellisellä kalvolla määriteltyä Bernoulli-koetta n kertaa ja oletetaan, että koetoistot ovat *riippumattomia*.
- Tarkastellaan tapahtuman A sattumista koetoistojen aikana.
- Oletuksien mukaan

$$\Pr(A) = p, \Pr(A^c) = 1 - p = q$$

- Määritellään *diskreetit satunnaismuuttujat* $X_i, i = 1, 2, \dots, n$:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jos } A \text{ tapahtuu kokeessa } i \\ 0, & \text{jos } A \text{ ei tapahdu kokeessa } i \end{cases}$$

- Satunnaismuuttujat $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ ovat *riippumattomia* ja noudattavat *samaa* Bernoulli-jakaumaa Bernoulli(p):

$$X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p), i = 1, 2, \dots, n$$

$$E(X_i) = p, i = 1, 2, \dots, n$$

Suurten lukujen lait

Suurten lukujen lait:

Esimerkki 3/5

- Olkoon

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ summa.

- Koska luku 1 esiintyy summassa $\sum X_i$ täsmälleen yhtä monta kertaa kuin tapahtuma A sattuu n :n koetoiston aikana, satunnaismuuttuja Y kuvaa tapahtuman A esiintymisten *frekvenssiä* eli lukumäärää n -kertaisessa Bernoulli-kokeessa.
- Satunnaismuuttuja Y noudattaa Binomijakaumaa parametrein n ja p (ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**):

$$Y \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$E(Y) = np$$

Suurten lukujen lait

Suurten lukujen lait:

Esimerkki 4/5

- Satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ aritmeettinen keskiarvo

$$\bar{X}_n = \frac{Y}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

kuvaa tapahtuman A esiintymisten *suhteellista frekvenssiä* eli *suhteellista lukumäärää* n -kertaisessa Bernoulli-kokeessa.

- *Tilastotieteessä* satunnaismuuttujat X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ tulkitaan *havainnoiksi* saman Bernoulli-kokeen toistoista.
- Tällöin suhteelliselle frekvenssille Y/n käytetään tavallisesti merkintää

$$\hat{p}_n = \frac{f}{n}$$

jossa f on tapahtuman A havaittu frekvenssi, kun tarkastelun kohteena oleva satunnaisilmiö on toistunut n kertaa.

Suurten lukujen lait:

Esimerkki 5/5

- *Vahvan suurten lukujen lain* mukaan suhteellinen frekvenssi $\hat{p}_n = f / n$ konvergoi *melkein varmasti* eli *todennäköisyydellä* yksi kohti tapahtuman A todennäköisyyttä p :

$$\hat{p}_n = f / n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} p = \Pr(A)$$

- Koska vahva suurten lukujen laki *implikoi* heikon suurten lukujen lain, tiedämme, että tapahtuman A suhteellinen frekvenssi *konvergoi* myös *stokastisesti* kohti tapahtuman A todennäköisyyttä.
- Koska tapahtuman A havaittu suhteellinen frekvenssi $\hat{p}_n = f / n$ konvergoi kohti tapahtuman A todennäköisyyttä $\Pr(A) = p$, kun havaintojen X_i lukumäärä n kasvaa rajatta, sanomme, että *suhteellinen frekvenssi **tarkentuu** havaintojen lukumäärän kasvaessa kohden tapahtuman A todennäköisyyttä.*

Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet

Konvergenssikäsitteitä

Suurten lukujen lait

>> Keskeinen raja-arvolause

Keskeisen raja-arvolauseen seurauksia

Keskeinen raja-arvolause

Avainsanat

Approksimointi

Asymptoottinen

Heikko konvergenssi

Jakaumakonvergenssi

Kertymäfunktio

Normaalijakauma

Satunnaismuuttuja

Satunnaismuuttujien summa

Standardoitu normaalijakauma

Tiheysfunktio

Johdanto 1/2

- Olkoon X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ jono *riippumattomia, samaa normaalijakaumaa* $N(\mu, \sigma^2)$ *noudattavia satunnaismuuttujia*.
- Tällöin *satunnaismuuttujien* X_i *summa* Y_n on normaalinen:

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

- Kysymys:

Mitä voidaan sanoa *riippumattomien, samaa jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakaumasta*, jos ko. satunnaismuuttujat *eivät noudata normaali-jakaumaa*?

Keskeinen raja-arvolause

Johdanto 2/2

- *Ei-normaalisten* satunnaismuuttujien summa *ei yleensä ole* normaalin.
- Kuitenkin, jos yhteenlaskettavia on ”tarpeeksi paljon”, *satunnaismuuttujien summa on* (hyvin yleisin ehdoin) **approksimatiivisesti normaalin**.
- Tämä on **keskeisen raja-arvolauseen** olennainen sisältö.
- Koska monia satunnaismuuttujia voidaan pitää *usean riippumattoman tekijän summana*, antaa keskeinen raja-arvolause selityksen *empiiriselle havainnolle* niiden normalisuudesta.

Keskeisen raja-arvolauseen formulointi 1/3

- Olkoon X_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ jono *riippumattomia, samoin jakautuneita satunnaismuuttujia*, joiden odotusarvo ja varianssi ovat

$$E(X_i) = \mu, i = 1, 2, 3, \dots$$

$$D^2(X_i) = \sigma^2, i = 1, 2, 3, \dots$$

- Olkoon

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ summa.

Keskeisen raja-arvolauseen formulointi 2/3

- Summan Y_n odotusarvo ja varianssi ovat

$$E(Y_n) = n\mu$$

$$D^2(Y_n) = n\sigma^2$$

- *Standardoidaan* summa Y_n :

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

- Annetaan $n \rightarrow \infty$
- Tällöin satunnaismuuttujan Z_n *jakauma lähestyy standardoitua normaalijakaumaa* $N(0, 1)$.

Keskeisen raja-arvolauseen formulointi 3/3

- Siten **keskeinen raja-arvolause** sanoo, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq z \right) = \Phi(z)$$

jossa Φ on *standardoidun normaalijakauman* $N(0, 1)$ *kertymäfunktio*.

- Merkintä:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim_a N(0, 1)$$

Keskeinen raja-arvolause: Todistus 1/9

- Olkoon

$$X_i, i = 1, 2, 3, \dots$$

jono *riippumattomia, samoin jakautuneita satunnaismuuttujia*.

- Oletetaan, että satunnaismuuttujilla $X_i, i = 1, 2, 3, \dots$ on (yhteinen) *momenttiemäfunktio* (ks. lukua **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio**) jossakin origon ympäristössä.
- Olkoot satunnaismuuttujien $X_i, i = 1, 2, 3, \dots$ odotusarvo ja varianssi

$$E(X_i) = \mu, i = 1, 2, 3, \dots$$

$$D^2(X_i) = \sigma^2, i = 1, 2, 3, \dots$$

Keskeinen raja-arvolause: Todistus 2/9

- Olkoon

$$Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ summa.

- Summamuuttujan Y_n odotusarvo ja varianssi ovat

$$E(Y_n) = n\mu$$

$$D^2(Y_n) = n\sigma^2$$

- *Standardoidaan* summa Y_n :

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

- Standardoidun muuttujan Z_n odotusarvo ja varianssi ovat

$$E(Z_n) = 0$$

$$D^2(Z_n) = 1$$

Keskeinen raja-arvolause: Todistus 3/9

- Siirrytään tarkastelemaan *keskistettyjä satunnaismuuttujia*

$$T_i = X_i - \mu, i = 1, 2, 3, \dots$$

- Satunnaismuuttujien T_i odotusarvo ja varianssi ovat

$$E(T_i) = 0, i = 1, 2, 3, \dots$$

$$D^2(T_i) = \sigma^2, i = 1, 2, 3, \dots$$

- Keskistettyjen muuttujien T_i avulla standardoitu muuttuja Z_n voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} Z_n &= \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \\ &= \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} (T_1 + T_2 + \dots + T_n) \end{aligned}$$

Keskeinen raja-arvolause: Todistus 4/9

- Satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ momenttiemäfunktion olemassaolosta jossakin origon ympäristössä seuraa keskitettyjen muuttujien

$$T_i = X_i - \mu, i = 1, 2, 3, \dots$$

momenttiemäfunktion olemassaolo jossakin origon ympäristössä.

- Olkoon

$$m(t) = E(e^{tT_i})$$

satunnaismuuttujien T_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ yhteinen momenttiemäfunktio.

Keskeinen raja-arvolause:

Todistus 5/9

- Koska riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktio on summan tekijöiden momenttiemäfunktioiden tulo, niin satunnaismuuttujan

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(T_1 + T_2 + \dots + T_n)$$

momenttiemäfunktio $m_n(t)$ voidaan esittää muodossa

$$m_n(t) = \left[m\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right]^n$$

jossa siis $m(t)$ on satunnaismuuttujien T_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ yhteinen momenttiemäfunktio.

Keskeinen raja-arvolause:

Todistus 6/9

- Satunnaismuuttujien T_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ yhteisellä momenttiemäfunktiolla $m(t)$ on jossakin pisteen $t = 0$ ympäristössä voimassa sarjakehitelmä

$$m(t) = 1 + \alpha_1 t + \frac{\alpha_2}{2} t^2 + t^2 \eta(t)$$

jossa

$$\alpha_k = E(T_i^k), k = 1, 2, 3, \dots$$

on satunnaismuuttujien T_i , $i = 1, 2, 3, \dots k$. (origo-) momentti ja $\eta(t) \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow 0$.

- Koska

$$\alpha_1 = E(T_i) = 0, i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\alpha_2 = E(T_i^2) = D^2(T_i) = \sigma^2, i = 1, 2, 3, \dots$$

niin

$$m(t) = 1 + \alpha_1 t + \frac{\alpha_2}{2} t^2 + t^2 \eta(t) = 1 + \frac{\sigma^2}{2} t^2 + t^2 \eta(t)$$

Keskeinen raja-arvolause: Todistus 7/9

- Sijoitetaan satunnaismuuttujien T_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ yhteisen momenttiemäfunktion $m(t)$ sarjakehitelmä

$$m(t) = 1 + \frac{\sigma^2}{2}t^2 + t^2\eta(t)$$

satunnaismuuttujan

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(T_1 + T_2 + \dots + T_n)$$

momenttiemäfunktion lausekkeeseen

$$m_n(t) = \left[m\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right]^n$$

Keskeinen raja-arvolause: Todistus 8/9

- Saamme sijoituksen tuloksena lausekkeen

$$\begin{aligned} m_n(t) &= \left[1 + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right)^2 + \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right)^2 \eta \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n \\ &= \left[1 + \frac{1}{n} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{\sigma^2} \eta \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right) \right]^n \end{aligned}$$

jossa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) = 0$$

jokaiselle kiinteälle t .

Keskeinen raja-arvolause: Todistus 9/9

- Eksponenttifunktion ominaisuuksien perusteella

$$m_n(t) = \left[1 + \frac{1}{n} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{\sigma^2} \eta \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right) \right]^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{t^2/2}$$

- Koska

$$e^{t^2/2}$$

on *standardoidun normaalijakauman* $N(0, 1)$ *momenttiemäfunktio*,
satunnaismuuttujien

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

muodostama jono *konvergoi jakaumaltaan* eli *heikosti* kohti
standardoitua normaalijakaumaa $N(0, 1)$:

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} Z \sim N(0,1)$$

Keskeinen raja-arvolause

Kommentteja 1/3

- Keskeisen raja-arvolauseen mukaan usean satunnaismuuttujan *summa on (tietyin ehdoin) approksimatiivisesti normaalin (lähes) riippumatta yhteenlaskettavien jakaumasta.*
- Huomautus:

Yhteenlaskettavien ei tarvitse olla edes *jatkuvia*, vaan ne voivat olla jopa *diskreettejä*.

Keskeinen raja-arvolause

Kommentteja 2/3

- Approksimaation *hyvyys riippuu* yhteenlaskettavien satunnaismuuttujien lukumäärästä, niiden jakaumasta ja erityisesti niiden jakauman *vinoudesta*.
- Approksimaation *hyvyys paranee*, kun yhteenlaskettavien satunnaismuuttujien *lukumäärä kasvaa*.
- Jos yhteenlaskettavien satunnaismuuttujien jakauma on *symmetrinen*, approksimaatio on hyvä jo suhteellisen pienillä yhteenlaskettavien lukumäärillä.
- Jos yhteenlaskettavien satunnaismuuttujien jakauma on *epäsymmetrinen*, hyvä approksimaatio vaatii enemmän yhteenlaskettavia.

Keskeinen raja-arvolause

Kommentteja 3/3

- Keskeinen raja-arvolause koskee satunnaismuuttujien **asymptoottista käyttäytymistä** samaan tapaan kuin **suurten lukujen laki**.
- Keskeisessä raja-arvolauseessa esiintyvä *rajakäyttäytymisen muoto* on esimerkki **jakauma-konvergenssista** eli **heikosta konvergenssista**.
- Keskeisestä raja-arvolauseesta on olemassa *yleisempiä muotoja*, joissa lievennetään *samoinjakautuneisuus-* ja *riippumattomuusoletuksia*.

Keskeinen raja-arvolause

Aritmeettisen keskiarvon approksimatiivinen jakauma

- Keskeisestä raja-arvolauseesta seuraa:
Riippumattomien samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ **aritmeettinen keskiarvo**

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

on suurille (mutta äärellisille) n *approksimatiivisesti normaalinen parametreinaan μ ja σ^2/n :*

$$\bar{X}_n \sim_a \mathbf{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet

Konvergenssikäsitteitä

Suurten lukujen lait

Keskeinen raja-arvolause

>> Keskeisen raja-arvolauseen seurauksia

Keskeisen raja-arvolauseen seurauksia

Avainsanat

Approksimointi
Asymptoottinen
Binomijakauma
Heikko konvergenssi
Hypergeometrinen jakauma
Jakaumakonvergenssi
Kertymäfunktio
Normaalijakauma
Poisson-jakauma
Satunnaismuuttuja
Satunnaismuuttujien jono
Satunnaismuuttujien summa
Standardoitu normaalijakauma
Tiheysfunktio

De Moivre'n ja Laplacen raja-arvolause

- Olkoon $X \sim \text{Bin}(n, p)$ ja $q = 1 - p$.

- Siten

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = npq$$

- *Keskeisen raja-arvolauseen* mukaan

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr \left(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq z \right) = \Phi(z)$$

jossa Φ on *standardoidun normaalijakauman* $N(0, 1)$ *kertymäfunktio*.

- Tätä keskeisen raja-arvolauseen seurausta on tapana kutsuta **De Moivre'n ja Laplacen raja-arvolauseeksi**.

Keskeisen raja-arvolauseen seurauksia

Binomitodennäköisyydet ja normaalijakauma 1/4

- De Moivre'n ja Laplace'n raja-arvolauseen mukaan **binomijakaumaa**

$$\text{Bin}(n, p)$$

voidaan suurille n approksimoida normaalijakaumalla

$$\text{N}(\mu, \sigma^2)$$

jossa

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = npq, \quad q = 1 - p$$

Keskeisen raja-arvolauseen seurauksia

Binomitodennäköisyydet ja normaalijakauma 2/4

- Jos siis

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

niin De Moivre'n ja Laplace'n raja-arvolauseen mukaan suurille n

$$\Pr(a < X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

jossa Φ on standardoidun normaalijakauman $N(0, 1)$ kertymäfunktio.

Keskeisen raja-arvolauseen seurauksia

Binomitodennäköisyydet ja normaalijakauma 3/4

- Jos a ja b ovat kokonaislukuja, approksimaatio *on* hieman *parempi*, jos käytetään kaavaa

$$\Pr(a < X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

- *Korjaustekijä* $1/2$ perustuu siihen, että *diskreettiä* binomijakaumaa approksimoidaan *jatkuvalla* normaalijakaumalla.

Keskeisen raja-arvolauseen seurauksia

Binomitodennäköisyydet ja normaalijakauma 4/4

- Jos annetaan $a \rightarrow -\infty$, saadaan approksimaatitulos

$$\Pr(X \leq b) = F_X(b) \approx \Phi\left(\frac{b + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

jossa F_X on *binomijakauman kertymäfunktio*.

- Jos $a = b$, saadaan approksimaatitulos

$$\Pr(X = a) = f_X(a) \approx \Phi\left(\frac{a + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

jossa f_X on *binomijakauman pistetodennäköisyysfunktio*.

Hypergeometrisen jakauman todennäköisyydet ja normaalijakauma 1/2

- *Hypergeometrinen jakauma*

$$\text{HyperGeom}(N, r, n)$$

lähestyy perusjoukon koon N kasvaessa rajatta *binomijakaumaa*

$$\text{Bin}(n, p)$$

jossa

$$p = r/N$$

Hypergeometrisen jakauman todennäköisyydet ja normaalijakauma 2/2

- Siten hypergeometrista jakaumaa

$$\text{HyperGeom}(N, r, n)$$

voidaan suurille N approksimoida normaalijakaumalla

$$N(\mu, \sigma^2)$$

jossa

$$\mu = n \frac{r}{N}$$

$$\sigma^2 = n \frac{r}{N} \left(1 - \frac{r}{N} \right)$$

Keskeisen raja-arvolauseen seurauksia

Poisson-jakauma ja normaalijakauma

- Olkoon $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

- Siten

$$E(X) = \lambda$$

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

- *Keskeisen raja-arvolauseen mukaan*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Pr\left(\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq z\right) = \Phi(z)$$

jossa Φ on *standardoidun normaalijakauman* $N(0, 1)$ *kertymäfunktio*.

Poisson-jakauman todennäköisyydet ja normaalijakauma 1/4

- Poisson-jakaumaa koskevan raja-arvolauseen mukaan **Poisson-jakaumaa**

$$\text{Poisson}(\lambda)$$

voidaan suurille λ approksimoida normaalijakaumalla

$$N(\mu, \sigma^2)$$

jossa

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda$$

Poisson-jakauman todennäköisyydet ja normaalijakauma 2/4

- Jos siis

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

niin Poisson-jakaumaa koskevan raja-arvolauseen mukaan suurille λ

$$\Pr(a < X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

jossa Φ on *standardoidun normaalijakauman* $N(0, 1)$ *kertymäfunktio*.

Poisson-jakauman todennäköisyydet ja normaalijakauma 3/4

- Jos a ja b ovat kokonaislukuja, approksimaatio *on* hieman *parempi*, jos käytetään kaavaa

$$\Pr(a < X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b + 1/2 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 1/2 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

- *Korjaustekijä* $1/2$ perustuu siihen, että *diskreettiä* Poisson-jakaumaa approksimoidaan *jatkuvalla* normaalijakaumalla.

Poisson-jakauman todennäköisyydet ja normaalijakauma 4/4

- Jos annetaan $a \rightarrow -\infty$, saadaan approksimaatitulos

$$\Pr(X \leq b) = F_X(b) \approx \Phi\left(\frac{b + 1/2 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

jossa F_X on *Poisson-jakauman kertymäfunktio*.

- Jos $a = b$, saadaan approksimaatitulos

$$\Pr(X = a) = f_X(a) \approx \Phi\left(\frac{a + 1/2 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 1/2 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

jossa f_X on *Poisson-jakauman pistetodennäköisyysfunktio*.