Johdatus todennäköisyyslaskentaan

Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio

Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio

Momenttiemäfunktio

Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

Jatkuvien jakaumien momenttiemäfunktioita

Karakteristinen funktio

Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio: Mitä opimme? − 1/2

- Tässä luvussa tarkastellaan satunnaismuuttujien **momentti-emäfunktioita** eli **momentit generoivia funktioita** ja **karakteristisia funktioita**, jotka ovat paljon käytettyjä työvälineinä *todennäköisyys-laskennassa* ja *matemaattisessa tilastotieteessä*.
- Satunnaismuuttujan momenttiemäfunktion tai karakteristisen funktion avulla *voidaan helposti johtaa* satunnaismuuttujan **momentit**; ks. lukua **Jakaumien tunnusluvut**.
- Monet tärkeät *todennäköisyyslaskennan* ja *matemaattisen tilasto-tieteen teoreemat voidaan todistaa* kätevästi momenttiemäfunktion tai karakteristisen funktion avulla; ks. lukuja **Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat** ja **Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet**.

Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio: Mitä opimme? − 2/2

- Johdamme tässä luvussa *tavallisimpien* **diskreettien** ja **jatkuvien todennäköisyysjakaumien** (ks. lukuja **Diskreettejä jakaumia** ja **Jatkuvia jakaumia**) *momenttiemäfunktiot*.
- Lisäksi näytämme, miten käsiteltyjen jakaumien **odotusarvot** ja **varianssit** (ks. lukua **Jakaumien tunnusluvut**) johdetaan momentti-emäfunktion avulla.
- On syytä huomata, että *kaikilla todennäköisyysjakaumilla ei ole momenttiemäfunktiota*, mutta *kaikille jakaumille voidaan määrätä karakteristinen funktio* ja siksi kaikissa pitemmälle menevissä todennäköisyyslaskennan ja matemaattisen tilastotieteen esityksissä sovelletaan karakteristista funktiota.
- Tässä luvussa esitellään myös *tärkeimmät* **karakteristisen funktion** *ominaisuudet*.

Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio: Esitiedot

- Esitiedot: ks. seuraavia lukuja:

  Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

  Jakaumien tunnusluvut

  Diskreettejä jakaumia

  Jatkuvia jakaumia

  Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio: Lisätiedot

- Momenttiemäfunktiota sovelletaan *riippumattomien* satunnais-muuttujien **summien** jakaumien määräämiseen luvussa

  Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

- Momenttiemäfunktiota sovelletaan **keskeisen raja-arvolauseen** todistamiseen luvussa

  Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet

Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio

>> Momenttiemäfunktio

Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

Jatkuvien jakaumien momenttiemäfunktioita

Karakteristinen funktio

Momenttiemäfunktio

Avainsanat

Momentit generoiva funktio

Momentti

Momenttiemäfunktio

Odotusarvo

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Taylorin sarja

Momenttiemäfunktion määritelmä

- Olkoon X *satunnaismuuttuja*.
- Oletetaan, että *odotusarvo*

  $$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

  on olemassa kaikille

  $$t \in (-h, +h)$$

  jossa $h > 0$ on vakio.
- Tällöin funktiota $m_X(t)$ kutsutaan satunnaismuuttujan X ja sen jakauman **momenttiemäfunktioksi** eli **momentit generoivaksi funktioksi**.

Momenttiemäfunktion määritelmä: Kommentteja 1/2

- Satunnaismuuttujan momenttiemäfunktio eli momentit generoiva funktio *ei välttämättä ole olemassa*.
- Momenttiemäfunktion

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

olemassaolo tarkoittaa sitä, että odotusarvo

$$\mathrm{E}(e^{tX})$$

on *äärellinen*.

Momenttiemäfunktion määritelmä: Kommentteja 2/2

- Satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

riippuu vain argumentista t.

- Jos satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio $m_X(t)$ on olemassa, niin

$$m_X(0) = \mathrm{E}(e^0) = \mathrm{E}(1) = 1$$

Diskreettien satunnaismuuttujien momenttiemäfunktio

- Olkoon X *diskreetti satunnaismuuttuja*, jonka *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x)$$

- Jos satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio on olemassa, niin se saadaan kaavalla

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f(x)$$

Jatkuvien satunnaismuuttujien momenttiemäfunktio

- Olkoon X *jatkuva satunnaismuuttuja*, jonka *tiheysfunktio* on

$$f(x)$$

- Jos satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio on olemassa, niin se saadaan kaavalla

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

Momenttiemäfunktion yksikäsitteisyys

- Jos satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio

  $$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

  on olemassa jossakin pisteen $t = 0$ ympäristössä, **se on yksikäsitteinen** ja **määrää täysin satunnaismuuttujan** X **todennäköisyysjakauman**.
- Tämä merkitsee seuraavaa:

  Jos satunnaismuuttujilla U ja V on *sama momentti-emäfunktio*, satunnaismuuttujat U ja V noudattavat *samaa todennäköisyysjakaumaa*.

Momenttiemäfunktion yksikäsitteisyys: Seuraus 1/2

- Momenttiemäfunktion *yksikäsitteisyyttä* käytetään usein hyväksi todennäköisyyslaskennan ja matemaattisen tilastotieteen lauseiden todistuksissa seuraavalla kalvolla esitettävässä tilanteessa.

Momenttiemäfunktion yksikäsitteisyys: Seuraus 2/2

- *Tehtävänä on selvittää, mikä on satunnaismuuttujan U jakauma.*
- Oletetaan, että satunnaismuuttujan U momenttiemäfunktio

$$m_U(t)$$

yhtyy pisteen $t = 0$ ympäristössä satunnaismuuttujan V momenttiemäfunktioon

$$m_V(t)$$

jonka todennäköisyysjakauma *tunnetaan*.
- Tällöin momenttiemäfunktion yksikäsitteisyydestä seuraa, että **satunnaismuuttuja U noudattaa samaa jakaumaa kuin satunnaismuuttuja V**.

Momenttiemäfunktio ja satunnaismuuttujan momentit

- Olkoon

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio eli momentit generoiva funktio.

- Momentit generoivalla funktiolla $m_X(t)$ on *kaikkien kertalukujen derivaatat* pisteessä $t = 0$ ja

$$\left.\frac{d^k m_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = \mathrm{E}(X^k) = \alpha_k \ , k = 1,2,3,\ldots$$

jossa

$$\alpha_k = \mathrm{E}(X^k)$$

on satunnaismuuttujan X ***k*. (origo-) momentti**.

Momenttiemäfunktio ja satunnaismuuttujan momentit: Perustelu

- Olkoon

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

satunnaismuuttujan X momentit generoiva funktio.

- Tällöin

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^k m_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0} &= \frac{d^k}{dt^k}\mathrm{E}(e^{tX})\Big|_{t=0} \\
&= \mathrm{E}\left(\frac{d^k}{dt^k}e^{tX}\right)\Bigg|_{t=0} \\
&= \mathrm{E}(X^k e^{tX})\Big|_{t=0} \\
&= \mathrm{E}(X^k) \\
&= \alpha_k
\end{aligned}$$

Momenttiemäfunktio ja satunnaismuuttujan momenttien määrääminen

- Satunnaismuuttujan ja sen jakauman momentit voidaan *johtaa kätevästi* käyttämällä hyväksi jakauman momentit generoivan funktion derivaattoja; ks. edellisiä kalvoja.

Momenttiemäfunktio ja satunnaismuuttujan odotusarvo ja varianssi

- Satunnaismuuttujan X **odotusarvo** μ, **2. momentti** α_2 ja **varianssi** σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = \alpha_1 = \mathrm{E}(X) = \left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

$$\alpha_2 = \mathrm{E}(X^2) = \left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

Momenttiemäfunktion Taylorin sarjakehitelmä

- Olkoon

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio.

- Momenttiemäfunktio $m_X(t)$ voidaan kehittää **Taylorin sarjaksi**

$$m_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathrm{E}(X^k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \alpha_k$$

jossa

$$\alpha_k = \mathrm{E}(X^k)$$

on satunnaismuuttujan X *k. momentti*.

Momenttiemäfunktion Taylorin sarjakehitelmä: Johto

- Olkoon

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio.

- Kehitetään eksponenttifunktio e^{tX} *Taylorin sarjaksi*:

$$e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!}$$

- Ottamalla tästä sarjakehitelmästä odotusarvo saadaan:

$$\begin{aligned} m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) &= \mathrm{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathrm{E}(X^k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \alpha_k \end{aligned}$$

Momenttiemäfunktion Taylorin sarjakehitelmä ja satunnaismuuttujan momentit

- Olkoon

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \mathrm{E}(X^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \alpha_j$$

satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktion *Taylorin sarjakehitelmä*.

- Derivoidaan tämä sarjakehitelmä termeittäin t:n suhteen:

$$\frac{d^k m_X(t)}{dt^k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \mathrm{E}(X^{j+k}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \alpha_{j+k} \ , k = 1,2,3,\ldots$$

- Valitsemalla tässä $t = 0$, saadaan edellä esitetty tulos:

$$\left.\frac{d^k m_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = \mathrm{E}(X^k) = \alpha_k \ , k = 1,2,3,\ldots$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktio

- Olkoot

$$X_1, X_2, \ldots , X_n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden *momenttiemäfunktiot* ovat

$$m_1(t), m_2(t), \ldots , m_n(t)$$

- Tällöin **summan**

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

momenttiemäfunktio on satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots , X_n$ momenttiemäfunktioiden *tulo*:

$$m_X(t) = m_1(t)m_2(t) \cdots m_n(t)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktio: Perustelu 1/2

- Olkoot

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden *momenttiemäfunktiot* ovat

$$m_1(t), m_2(t), \ldots, m_n(t)$$

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

- Käytämme hyväksi sitä, että *riippumattomien satunnaismuuttujien tulon odotusarvo on tulon tekijöiden odotusarvojen tulo* (ks. lukua **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat**).

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktio: Perustelu 2/2

- Siten

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= \mathrm{E}[\exp(tX)] \\
&= \mathrm{E}[\exp(t(X_1 + X_2 + \cdots + X_n))] \\
&= \mathrm{E}[\exp(tX_1 + tX_2 + \cdots + tX_n)] \\
&= \mathrm{E}[\exp(tX_1)\exp(tX_2)\cdots\exp(tX_n)] \\
&= \mathrm{E}[\exp(tX_1)]\,\mathrm{E}[\exp(tX_2)]\cdots\mathrm{E}[\exp(tX_n)] \\
&= m_{X_1}(t)m_{X_2}(t)\cdots m_{X_n}(t)
\end{aligned}
$$

Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio

Momenttiemäfunktio

>> Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

Jatkuvien jakaumien momenttiemäfunktioita

Karakteristinen funktio

Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

Avainsanat

Diskreettejä jakaumia:

- **Bernoulli-jakauma**
- **Binomijakauma**
- **Diskreetti tasainen jakauma**
- **Geometrinen jakauma**
- **Negatiivinen binomijakauma**
- **Poisson-jakauma**

Momentit generoiva funktio
Momentti
Momenttiemäfunktio
Odotusarvo
Varianssi

Diskreettejä todennäköisyysjakaumia 1/2

- Tarkastelemme seuraavien *diskreettien todennäköisyys-jakaumien* **momenttiemäfunktioita** eli **momentit generoivia funktioita**:
  - **Diskreetti tasainen jakauma**
  - **Bernoulli-jakauma**
  - **Binomijakauma**
  - **Geometrinen jakauma**
  - **Negatiivinen binomijakauma**
  - **Poisson-jakauma**
- *Lisätietoja* diskreeteistä todennäköisyysjakaumista: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia.**

Diskreettejä todennäköisyysjakaumia 2/2

- Jokaisen tarkasteltavan jakauman **momenttiemäfunktiolle** esitetään *johto*.
- Johdettua momenttiemäfunktioita sovelletaan jakauman **odotusarvon**, **2. momentin** ja **varianssin** *määräämiseen*.

Diskreetti tasainen jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **diskreettiä tasaista jakaumaa**.
- Tällöin sen *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{1}{n}\,,\ x = x_k$$
$$k = 1, 2, \ldots, n$$

jossa $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ on reaaliakselin *erillisten* pisteiden muodostama joukko.

- Diskreetin tasaisen jakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{tx_k}$$

Diskreetti tasainen jakauma: Momenttiemäfunktion johto

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *diskreettiä tasaista jakaumaa*, niin sen *momenttiemäfunktio* on

$$
\begin{aligned}
m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) &= \sum_x e^{tx} f(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} e^{tx_k} f(x_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} e^{tx_k} \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{tx_k}
\end{aligned}
$$

Diskreetti tasainen jakauma: Odotusarvo ja varianssi 1/2

- Diskreetin tasaisen jakauman *momenttiemäfunktio* on

$$m_X(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{tx_k}$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k e^{tx_k}\right|_{t=0} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 e^{tx_k}\right|_{t=0} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Diskreetti tasainen jakauma: Odotusarvo ja varianssi 2/2

- Siten diskreetin tasaisen jakauman *odotusarvo* μ, 2. *momentti* α_2 ja *varianssi* σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \alpha_1 = \left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \overline{x}$$

$$\alpha_2 = \mathrm{E}(X^2) = \left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2$$

Bernoulli-jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **Bernoulli-jakaumaa** Ber(p).
- Tällöin sen *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x) = p^x q^{1-x}\ ,\ 0 < p < 1\ ,\ q = 1 - p$$
$$x = 0,1$$

- Bernoulli-jakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = q + pe^t$$

Bernoulli-jakauma: Momenttiemäfunktion johto

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *Bernoulli-jakaumaa* Ber(p), niin sen *momenttiemäfunktio* on

$$\begin{aligned} m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) &= \sum_x e^{tx} f(x) \\ &= e^{t\times 0} \times \Pr(X=0) + e^{t\times 1} \times \Pr(X=1) \\ &= q + pe^t \end{aligned}$$

Bernoulli-jakauma: Odotusarvo ja varianssi 1/2

- Bernoulli-jakauman Ber(p) *momenttiemäfunktio* on

$$m_X(t) = q + pe^t$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left. pe^t \right|_{t=0} = p$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{d^2m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left. pe^t \right|_{t=0} = p$$

Bernoulli-jakauma: Odotusarvo ja varianssi 2/2

- Siten Bernoulli-jakauman Ber(p) *odotusarvo* μ, 2. *momentti* α_2 ja *varianssi* σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \alpha_1 = \left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = p$$

$$\alpha_2 = \mathrm{E}(X^2) = \left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = p$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 &= p - p^2 \\ &= pq\end{aligned}$$

Binomijakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **binomijakaumaa** Bin(n, p).
- Tällöin sen *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \text{ , } 0 < p < 1 \text{ , } q = 1 - p$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

- Binomijakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = (q + pe^t)^n$$

Binomijakauma: Momenttiemäfunktion johto 1

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *binomijakaumaa* Bin(n, p), niin sen *momenttiemäfunktio* on

$$
\begin{aligned}
m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) &= \sum_x e^{tx} f(x) \\
&= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x} \\
&= (q + pe^t)^n
\end{aligned}
$$

Binomijakauma: Momenttiemäfunktion johto 2

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *binomijakaumaa* Bin(n, p), niin se voidaan esittää *riippumattomien*, *samaa Bernoulli-jakaumaa* Ber(p) noudattavien satunnaismuuttujien

  $$X_1, X_2, \dots , X_n$$

  summana:

  $$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

- Koska *riippumattomien satunnaismuuttujien summan momentti-emäfunktio on summan tekijöiden momenttiemäfunktioiden tulo* (ks. kappaletta Momenttiemäfunktio), niin

  $$\begin{aligned} m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) &= m_1(t) \times m_2(t) \times \cdots \times m_n(t) \\ &= (q + pe^t) \times (q + pe^t) \times \cdots \times (q + pe^t) \\ &= (q + pe^t)^n \end{aligned}$$

Binomijakauma: Odotusarvo ja varianssi 1/2

- Binomijakauman Bin(n, p) *momenttiemäfunktio* on

$$m_X(t) = (q + pe^t)^n$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = n(q+pe^t)^{n-1}pe^t\Big|_{t=0} = np$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{d^2m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left[n(n-1)(q+pe^t)^{n-2}pe^t pe^t + n(q+pe^t)^{n-1}pe^t\right]\Big|_{t=0}$$

$$= npe^t(q+pe^t)^{n-2}\left[(n-1)pe^t + (q+pe^t)\right]\Big|_{t=0}$$

$$= np + n(n-1)p^2$$

Binomijakauma: Odotusarvo ja varianssi 2/2

- Siten binomijakauman Bin(n, p) *odotusarvo* μ, 2. *momentti* α_2 ja *varianssi* σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \alpha_1 = \left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = np$$

$$\alpha_2 = \mathrm{E}(X^2) = \left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = np + n(n-1)p^2$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 &= np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 \\ &= npq\end{aligned}$$

Geometrinen jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **geometrista jakaumaa** Geom(p).
- Tällöin sen *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x) = q^{x-1}p \,,\; 0 < p < 1 \,,\; q = 1 - p$$
$$x = 1, 2, 3, \ldots$$

- Geometrisen jakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}$$

Geometrinen jakauma: Momenttiemäfunktion johto

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *geometrista jakaumaa* Geom(p), niin sen *momenttiemäfunktio* on

$$
\begin{aligned}
m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) &= \sum_x e^{tx} f(x) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} pq^{x-1} \\
&= pe^t \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx-t} q^{x-1} \\
&= pe^t \sum_{x=1}^{\infty} (qe^t)^{x-1} \\
&= \frac{pe^t}{1-qe^t}
\end{aligned}
$$

Geometrinen jakauma: Odotusarvo ja varianssi 1/3

- Geometrisen jakauman Geom(p) *momenttiemäfunktio* on

$$m_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{pe^t(1-qe^t) - pe^t(-qe^t)}{(1-qe^t)^2}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{pe^t}{(1-qe^t)^2}\right|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{p}$$

Geometrinen jakauma: Odotusarvo ja varianssi 2/3

- Geometrisen jakauman Geom(p) *momenttiemäfunktio* on

$$m_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{pe^t(1-qe^t)^2 - pe^t \cdot 2(1-qe^t)(-qe^t)}{(1-qe^t)^4}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{pe^t(1+qe^t)}{(1-qe^t)^3}\right|_{t=0}$$

$$= \frac{1+q}{p^2}$$

Geometrinen jakauma: Odotusarvo ja varianssi 3/3

- Siten geometrisen jakauman Geom(p) *odotusarvo* μ, 2. *momentti* α_2 ja *varianssi* σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \alpha_1 = \left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{p}$$

$$\alpha_2 = \mathrm{E}(X^2) = \left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{1+q}{p^2}$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{q}{p^2}$$

Negatiivinen binomijakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **negatiivista binomijakaumaa** NegBin(r, p).
- Tällöin sen *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{x-1}{r-1} q^{x-r} p^r \; , 0 < p < 1 \, , q = 1 - p$$

$$r = 1, 2, 3, \ldots ; x = r, r+1, r+2, \ldots$$

- Negatiivisen binomijakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = \frac{(pe^t)^r}{(1-qe^t)^r}$$

Negatiivinen binomijakauma: Momenttiemäfunktion johto

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *negatiivista binomijakaumaa* NegBin(r, p), niin sen *momenttiemäfunktio* on

$$
\begin{aligned}
m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) &= \sum_x e^{tx} f(x) \\
&= \sum_{x=r}^{\infty} e^{tx} \binom{x-1}{r-1} q^{x-r} p^r \\
&= (pe^t)^r \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \binom{r+x-1}{r-1} q^x \\
&= (pe^t)^r (1-qe^t)^{-r} \\
&= \frac{(pe^t)^r}{(1-qe^t)^r}
\end{aligned}
$$

Negatiivinen binomijakauma: Odotusarvo ja varianssi 1/3

- Negatiivisen binomijakauman NegBin(r, p) *momenttiemäfunktio* on

$$m_X(t) = \frac{(pe^t)^r}{(1-qe^t)^r}$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{r(pe^t)^{r-1}pe^t(1-qe^t)^r - (pe^t)^r r(1-qe^t)^{r-1}(-qe^t)}{(1-qe^t)^{2r}}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{r(pe^t)^r}{(1-qe^t)^{r+1}}\right|_{t=0}$$

$$= \frac{r}{p}$$

Negatiivinen binomijakauma: Odotusarvo ja varianssi 2/3

- Negatiivisen binomijakauman NegBin(r, p) *momenttiemäfunktio* on

$$m_X(t) = \frac{(pe^t)^r}{(1-qe^t)^r}$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{r^2(pe^t)^{r-1}pe^t(1-qe^t)^{r+1} - r(pe^t)^r(r+1)(1-qe^t)^r(-qe^t)}{(1-qe^t)^{2r+2}}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{r(pe^t)^r(r+qe^t)}{(1-qe^t)^{r+2}}\right|_{t=0}$$

$$= \frac{r^2+rq}{p^2}$$

Negatiivinen binomijakauma: Odotusarvo ja varianssi 3/3

- Siten negatiivisen binomijakauman NegBin(r, p) *odotusarvo* μ, 2. *momentti* α_2 ja *varianssi* σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \alpha_1 = \left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{r}{p}$$

$$\alpha_2 = \mathrm{E}(X^2) = \left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{r^2 + rq}{p^2}$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{r^2 + rq}{p^2} - \frac{r^2}{p^2}$$

$$= \frac{rq}{p^2}$$

Poisson-jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **Poisson-jakaumaa** Poisson(λ).
- Tällöin sen *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \lambda > 0$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots$$

- Poisson-jakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Poisson-jakauma: Momenttiemäfunktion johto

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *Poisson-jakaumaa* Poisson(λ), niin sen *momenttiemäfunktio* on

$$
\begin{aligned}
m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) &= \sum_x e^{tx} f(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \\
&= e^{\lambda(e^t - 1)}
\end{aligned}
$$

Poisson-jakauma: Odotusarvo ja varianssi 1/2

- Poisson-jakauman Poisson(λ) *momenttiemäfunktio* on

$$m_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = e^{\lambda(e^t-1)}\lambda e^t\Big|_{t=0} = \lambda e^{t+\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0} = \lambda$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \lambda e^{t+\lambda(e^t-1)}(1+\lambda e^t)\Big|_{t=0} = \lambda + \lambda^2$$

Poisson-jakauma: Odotusarvo ja varianssi 2/2

- Siten Poisson-jakauman Poisson(λ) *odotusarvo* μ, 2. *momentti* α_2 ja *varianssi* σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \alpha_1 = \left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \lambda$$

$$\alpha_2 = \mathrm{E}(X^2) = \left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \lambda$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 &= \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 \\ &= \lambda\end{aligned}$$

Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio

Momenttiemäfunktio

Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

>> Jatkuvien jakaumien momenttiemäfunktioita

Karakteristinen funktio

Jatkuvien jakaumien momenttiemäfunktioita

Avainsanat

- **Jatkuvia jakaumia:**
  - **Eksponenttijakauma**
  - **Jatkuva tasainen jakauma**
  - **Normaalijakauma**

Momentit generoiva funktio
Momentti
Momenttiemäfunktio
Odotusarvo
Varianssi

Jatkuvia todennäköisyysjakaumia 1/2

- Tarkastelemme seuraavien *jatkuvien todennäköisyys-jakaumien* **momenttiemäfunktioita** eli **momentit generoivia funktioita**:
  - **Jatkuva tasainen jakauma**
  - **Eksponenttijakauma**
  - **Normaalijakauma**
- *Lisätietoja* jatkuvista todennäköisyysjakaumista: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Jatkuvia todennäköisyysjakaumia 2/2

- Jokaisen tarkasteltavan jakauman **momenttiemäfunktiolle** esitetään *johto*.
- Johdettua momenttiemäfunktioita sovelletaan jakauman **odotusarvon**, **2. momentin** ja **varianssin** *määräämiseen*.

Jatkuva tasainen jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **jatkuvaa tasaista jakaumaa** Uniform(a, b).
- Tällöin sen *tiheysfunktio* on

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\,,\ a \le x \le b$$

- Jatkuvan tasaisen jakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$$

Jatkuva tasainen jakauma: Momenttiemäfunktion johto

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *jatkuva tasaista jakaumaa* Uniform(a, b), niin sen *momenttiemäfunktio* on

$$
\begin{aligned}
m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx \\
&= \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_a^b \\
&= \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}
\end{aligned}
$$

Jatkuva tasainen jakauma: Odotusarvo ja varianssi 1/3

- Jatkuvan tasaisen jakauman Uniform(a, b) *momenttiemäfunktio* on

$$m_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{(be^{bt} - ae^{at})t(b-a) - (e^{bt} - e^{at})(b-a)}{t^2(b-a)^2}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{(be^{bt} - ae^{at})t - (e^{bt} - e^{at})}{t^2(b-a)}\right|_{t=0}$$

$$= \frac{a+b}{2}$$

Jatkuva tasainen jakauma: Odotusarvo ja varianssi 2/3

- Jatkuvan tasaisen jakauman Uniform(a, b) *momenttiemäfunktio* on

$$m_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}$$

$$= \left\{ \frac{[(b^2 e^{bt} - a^2 e^{at})t + (be^{bt} - ae^{at}) - (be^{bt} - ae^{at})]t^2(b-a)}{t^4(b-a)^2} \right.$$

$$\left. \left. - \frac{[(be^{bt} - ae^{at})t - (e^{bt} - e^{at})]2t(b-a)}{t^4(b-a)^2} \right\} \right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{(b^2 e^{bt} - a^2 e^{at})t^2 - 2(be^{bt} - ae^{at})t + 2(e^{bt} - e^{at})}{t^3(b-a)}\right|_{t=0} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

Jatkuva tasainen jakauma: Odotusarvo ja varianssi 3/3

- Siten jatkuvan tasaisen jakauman Uniform(a, b) *odotusarvo* μ, 2. *momentti* α_2 ja *varianssi* σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \alpha_1 = \left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{a+b}{2}$$

$$\alpha_2 = \mathrm{E}(X^2) = \left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

Eksponenttijakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **eksponenttijakaumaa** $\mathrm{Exp}(\lambda)$.
- Tällöin sen *tiheysfunktio* on

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \; , \lambda > 0 \; , x \geq 0$$

- Eksponenttijakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

Eksponenttijakauma: Momenttiemäfunktion johto

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *eksponenttijakaumaa* $\text{Exp}(\lambda)$, niin sen *momenttiemäfunktio* on

$$
\begin{aligned}
m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x} dx \\
&= \lambda \left[\frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda} \right]_0^{\infty} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - t}
\end{aligned}
$$

Eksponenttijakauma: Odotusarvo ja varianssi 1/2

- Eksponenttijakauman Exp(λ) *momenttiemäfunktio* on

$$m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}\right|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Eksponenttijakauma: Odotusarvo ja varianssi 2/2

- Siten eksponenttijakauman Exp(λ) *odotusarvo* μ, 2. *momentti* α_2 ja *varianssi* σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \alpha_1 = \left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\alpha_2 = \mathrm{E}(X^2) = \left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}$$

Normaalijakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **normaalijakaumaa** $\mathrm{N}(\mu,\, \sigma^2)$.
- Tällöin sen *tiheysfunktio* on

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right\},\, -\infty < \mu < +\infty\,,\, \sigma > 0$$

$$-\infty < x < +\infty$$

- Normaalijakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = \exp(\mu t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2)$$

Normaalijakauma: Momenttiemäfunktion johto

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *normaalijakaumaa* $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, niin sen *momenttiemäfunktio* on

$$
\begin{aligned}
m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} dx \\
&= \exp(\mu t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2) \\
&\qquad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[x-2(\mu+\sigma^2 t)]^2\right\} dx \\
&= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}
\end{aligned}
$$

Normaalijakauma: Odotusarvo ja varianssi 1/2

- Normaalijakauman N(μ, σ^2) *momenttiemäfunktio* on

$$m_X(t) = \exp(\mu t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2)$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left. e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}(\mu + \sigma^2 t)\right|_{t=0} = \mu$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\left[e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}(\mu + \sigma^2 t)^2 + e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\sigma^2 \right]\right|_{t=0}$$

$$= \mu^2 + \sigma^2$$

Normaalijakauma: Odotusarvo ja varianssi 2/2

- Siten normaalijakauman N(μ, σ^2) *odotusarvo* μ, 2. *momentti* α_2 ja *varianssi* σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \alpha_1 = \left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \mu$$

$$\alpha_2 = \mathrm{E}(X^2) = \left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \mu^2 + \sigma^2$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 &= \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 \\ &= \sigma^2\end{aligned}$$

Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio

Momenttiemäfunktio

Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

Jatkuvien jakaumien momenttiemäfunktioita

>> Karakteristinen funktio

Karakteristinen funktio

Avainsanat

Fourier-muunnos

Karakteristinen funktio

Odotusarvo

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Taylorin sarja

Karakteristisen funktion määritelmä

- Olkoon X *satunnaismuuttuja*.
- Tällöin odotusarvo

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) \, , \, i = \sqrt{-1}$$

on satunnaismuuttujan X ja sen jakauman **karakteristinen funktio**.

Karakteristisen funktion määritelmä: Kommentteja

- Satunnaismuuttujan karakteristinen funktio *on* – toisin kuin sen momenttiemäfunktio – *aina olemassa*.
- Karakteristisen funktion

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) , i = \sqrt{-1}$$

olemassaolo tarkoittaa sitä, että odotusarvo

$$\mathrm{E}(e^{itX})$$

on *äärellinen*.

- Satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) , i = \sqrt{-1}$$

riippuu vain argumentista t.

Karakteristinen funktio ja momenttiemäfunktio

- *Jos* satunnaismuuttujan X *momenttiemäfunktio*

  $$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

  tunnetaan, saadaan sen karakteristinen funktio

  $$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) \, , \, i = \sqrt{-1}$$

  momenttiemäfunktiosta sijoituksella

  $$t \rightarrow it \, , \, i = \sqrt{-1}$$

Karakteristisen funktion ominaisuuksia

- Olkoon

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) \,,\ i = \sqrt{-1}$$

satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio.

- Aina pätee:

(i) $\varphi_X(0) = \mathrm{E}(e^0) = \mathrm{E}(1) = 1$

(ii) $|\varphi_X(t)| \le 1$ kaikille $t \in (-\infty, +\infty)$.

(iii) $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi}_X(t)$

jossa merkintä $\overline{z}$ tarkoittaa kompleksiluvun z *konjugaattia*.

(iv) $\varphi_X(t)$ on *tasaisesti jatkuva* kaikille $t \in (-\infty, +\infty)$.

Diskreettien satunnaismuuttujien karakteristinen funktio

- Olkoon X *diskreetti satunnaismuuttuja*, jonka *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_X(x) = \Pr(X = x)$$

- Satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio saadaan kaavalla

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) = \sum_x e^{itx} f_X(x)\,,\ i = \sqrt{-1}$$

Jatkuvien satunnaismuuttujien karakteristinen funktio

- Olkoon X *jatkuva satunnaismuuttuja*, jonka *tiheysfunktio* on

$$f_X(x)$$

- Satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio saadaan kaavalla

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x)dx \, , \, i = \sqrt{-1}$$

Karakteristinen funktio

Inversioteoreema 1/2

- Olkoon

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x)$$

satunnaismuuttujan X *kertymäfunktio* ja

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) \, , \, i = \sqrt{-1}$$

sen *karakteristinen funktio*.

- Oletetaan, että

$$(a - h, a + h)$$

sellainen reaaliakselin väli, että kertymäfunktio $F_X(x)$ on *jatkuva välin päätepisteissä*.

Karakteristinen funktio

Inversioteoreema 2/2

- Tällöin

$$
\begin{aligned}
&F_X(a+h) - F_X(a-h) \\
&\quad = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{+T} \frac{\sin(ht)}{t} e^{-ita} \varphi_X(t)\,dt
\end{aligned}
$$

Inversioteoreema: Kommentteja

- *Jos* jakauman *karakteristinen funktio tunnetaan*, *voidaan* jakauman *kertymäfunktio määrätä* inversioteoreemassa määritellyn rajaprosessin avulla.
- Myös **karakteristisen funktion yksikäsitteisyys** voidaan todistaa inversioteoreeman avulla.

Inversioteoreema ja jatkuvat jakaumat 1/2

- Olkoon

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) \text{ , } i = \sqrt{-1}$$

satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio.

- Oletetaan, että

$$|\varphi_X(t)|$$

on *integroituva* kaikille $t \in (-\infty, +\infty)$.

- Tällöin satunnaismuuttuja X on *jatkuva* ja sen *tiheysfunktio* $f_X(x)$ saadaan kaavalla

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt \text{ , } i = \sqrt{-1}$$

Inversioteoreema ja jatkuvat jakaumat 2/2

- Huomaa, että *jatkuvan satunnaismuuttujan X* karakteristinen funktio

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x)dx \text{ , } i = \sqrt{-1}$$

on satunnaismuuttujan X tiheysfunktion **Fourier-muunnos** ja

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t)dt \text{ , } i = \sqrt{-1}$$

on sen **käänteinen Fourier-muunnos**.

Karakteristisen funktion yksikäsitteisyys

- Satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX})\,,\; i = \sqrt{-1}$$

on **yksikäsitteinen** ja **määrää täysin satunnais-muuttujan** X **todennäköisyysjakauman**.

- Tämä merkitsee seuraavaa:

Jos satunnaismuuttujilla U ja V on *sama karakteristinen funktio*, satunnaismuuttujat U ja V noudattavat *samaa todennäköisyysjakaumaa*.

Karakteristisen funktion yksikäsitteisyys: Seuraus 1/2

- Karakteristisen funktion *yksikäsitteisyyttä* käytetään usein hyväksi todennäköisyyslaskennan ja matemaattisen tilastotieteen lauseiden todistuksissa seuraavalla kalvolla esitettävässä tilanteessa.

Karakteristisen funktion yksikäsitteisyys: Seuraus 2/2

- *Tehtävänä on selvittää, mikä on satunnaismuuttujan U jakauma*.
- Oletetaan, että satunnaismuuttujan *U* karakteristinen funktio

$$\varphi_U(t)$$

yhtyy satunnaismuuttujan *V* karakteristiseen funktioon

$$\varphi_V(t)$$

jonka todennäköisyysjakauma *tunnetaan*.
- Tällöin karakteristisen funktion yksikäsitteisyydestä seuraa, että **satunnaismuuttuja *U* noudattaa samaa jakaumaa kuin satunnaismuuttuja *V***.

Satunnaismuuttujan momentit ja karakteristisen funktion derivaatat 1/2

- Olkoon

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) \text{ , } i = \sqrt{-1}$$

satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio.

- Oletetaan, että satunnaismuuttujan X ***r*. (origo-) momentti**

$$\alpha_r = \mathrm{E}(X^r)$$

on olemassa.

- Tällöin karakteristinen funktio $\varphi_X(t)$ on *differentioituva kertalukuun r* ja

$$\alpha_k = \mathrm{E}(X^k) = \frac{1}{i^k} \cdot \left. \frac{d^k \varphi_X(t)}{dt^k} \right|_{t=0} \text{ , } i = \sqrt{-1} \text{ , } k = 1, 2, \ldots, r$$

Satunnaismuuttujan momentit ja karakteristisen funktion derivaatat 2/2

- Olkoon

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}),\ i = \sqrt{-1}$$

satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio.

- Oletetaan, että satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio $\varphi_X(t)$ on *differentioituva kertalukuun* r.
- Tällöin *kaikki momentit*

$$\alpha_k = \mathrm{E}(X^k),\ k = 1, 2, \ldots, r$$

ovat olemassa, jos r on *parillinen* ja *kaikki momentit*

$$\alpha_k = \mathrm{E}(X^k),\ k = 1, 2, \ldots, r-1$$

ovat olemassa, jos r on *pariton*.

Karakteristisen funktion derivaatat ja satunnaismuuttujan momentit: Johto

- Olkoon

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) \, , \, i = \sqrt{-1}$$

satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio.

- Jos $\mathrm{E}(X^k)$ on olemassa, niin

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^k \varphi_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0} &= \left.\frac{d^k}{dt^k}\mathrm{E}(e^{itX})\right|_{t=0} \\
&= \left.\mathrm{E}\left(\frac{d^k}{dt^k}e^{itX}\right)\right|_{t=0} \\
&= \left.\mathrm{E}(i^k X^k e^{tX})\right|_{t=0} \\
&= i^k \,\mathrm{E}(X^k) \\
&= i^k \alpha_k
\end{aligned}$$

Karakteristisen funktion derivaatat ja satunnaismuuttujan momentit 1/2

- Jos satunnaismuuttujan momentit ovat olemassa, niin ne voidaan *johtaa kätevästi* käyttämällä hyväksi jakauman karakteristisen funktion derivaattoja; ks. edellisiä kalvoja.

Karakteristisen funktion derivaatat ja satunnaismuuttujan momentit 2/2

- Satunnaismuuttujan X **odotusarvo** μ, **2. momentti** α_2 ja **varianssi** σ^2 saadaan seuraavista kaavoista:

$$\left.\frac{d\varphi_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = i\,\mathrm{E}(X) = i\alpha_1 = i\mu$$

$$\left.\frac{d^2\varphi_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = i^2\,\mathrm{E}(X^2) = -\alpha_2$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

jossa

$$i = \sqrt{-1}$$

Karakteristisen funktion Taylorin sarjakehitelmä

- Olkoon

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) \,,\; i = \sqrt{-1}$$

satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio.

- Oletetaan, että satunnaismuuttujan X ***r*. (origo-) momentti**

$$\alpha_r = \mathrm{E}(X^r)$$

on olemassa.

- Tällöin karakteristinen funktio $\varphi_X(t)$ voidaan kehittää **Taylorin sarjaksi**

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{r} \frac{(it)^k}{k!} \mathrm{E}(X^k) + o(t^r) = \sum_{k=0}^{r} \frac{(it)^k}{k!} \alpha_k + o(t^r)$$

jossa $o(t^r)/t^r \to 0$, kun $t \to 0$.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan karakteristinen funktio

- Olkoot

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden *karakteristiset funktiot* ovat

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$$

- Tällöin **summan**

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

karakteristinen funktio on satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ karakterististen funktioiden *tulo*:

$$\varphi_X(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)\cdots\varphi_n(t)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan karakteristinen funktio: Perustelu 1/2

- Olkoot

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden *momenttiemäfunktiot* ovat

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$$

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

- Käytämme hyväksi sitä, että *riippumattomien satunnaismuuttujien tulon odotusarvo on tulon tekijöiden odotusarvojen tulo* (ks. lukua **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat**).

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan karakteristinen funktio: Perustelu 2/2

- Siten

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \mathrm{E}[\exp(itX)] \\ &= \mathrm{E}[\exp(it(X_1 + X_2 + \cdots + X_n))] \\ &= \mathrm{E}[\exp(itX_1 + itX_2 + \cdots + itX_n)] \\ &= \mathrm{E}[\exp(itX_1)\exp(itX_2)\cdots\exp(itX_n)] \\ &= \mathrm{E}[\exp(itX_1)]\mathrm{E}[\exp(itX_2)]\cdots\mathrm{E}[\exp(itX_n)] \\ &= \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)\cdots\varphi_{X_n}(t)\end{aligned}$$