Johdatus todennäköisyyslaskentaan

Diskreettejä jakaumia

Diskreettejä jakaumia

Diskreetti tasainen jakauma

Bernoulli-jakauma

Binomijakauma

Geometrinen jakauma

Negatiivinen binomijakauma

Hypergeometrinen jakauma

Poisson-jakauma

Diskreettejä jakaumia
Mitä opimme? – 1/3

- Tutustumme tässä luvussa seuraaviin **diskreetteihin todennäköisyysjakaumiin**:
  - **Diskreetti tasainen jakauma**
  - **Bernoulli-jakauma**
  - **Binomijakauma**
  - **Geometrinen jakauma**
  - **Negatiivinen binomijakauma**
  - **Hypergeometrinen jakauma**
  - **Poisson-jakauma**

Diskreettejä jakaumia
Mitä opimme? – 2/3

- Tarkastelun kohteena ovat seuraavat jakaumien ominaisuudet:
  (i) **Jakauman määrittely**
  (ii) **Pistetodennäköisyysfunktio**
  (iii) **Odotusarvo**, **varianssi** ja **standardipoikkeama**
  (iv) **Kuvaaja**
- Tarkastelemme myös *jakaumien välisiä yhteyksiä*.
- Tarkasteltavien jakaumien **odotusarvot** *johdetaan* suoraan odotusarvon määritelmään nojautuen.
- Todennäköisyysjakauman **momentit** saadaan kuitenkin yleensä kätevimmin johdetuksi käyttämällä hyväksi jakauman **momentit generoivaa funktiota**; ks. lukua **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio**.

Diskreettejä jakaumia
Mitä opimme? – 3/3

- Tarkastelemme **Bernoulli-jakauman**, **binomijakauman** ja **Poisson-jakauman** tapauksessa myös ko. jakaumaa noudattavien *riippumattomien* satunnaismuuttujien **summan** jakaumaa.
- Lisätietoja riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauman määräämisestä: ks. lukua **Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat**.
- Huomautus:

  Tarkoitamme *satunnaismuuttujien riippumattomuudella* sitä, että yhdenkään satunnaismuuttujan saamat arvot eivät riipu siitä, mitä arvoja muut satunnaismuuttujat saavat; käsite täsmennetään luvussa **Kaksiulotteiset todennäköisyysjakaumat**.

Diskreettejä jakaumia
Esitiedot

- Esitiedot: ks. seuraavia lukuja:

  Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

  Jakaumien tunnusluvut

Diskreettejä jakaumia
Lisätiedot

- **Todennäköisyysjakaumien momenttien** määräämistä tarkastellaan luvussa

  Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio

- **Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauman** määräämistä tarkastellaan luvussa

  Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

Diskreettejä jakaumia

>> **Diskreetti tasainen jakauma**

Bernoulli-jakauma

Binomijakauma

Geometrinen jakauma

Negatiivinen binomijakauma

Hypergeometrinen jakauma

Poisson-jakauma

Diskreetti tasainen jakauma

Avainsanat

Diskreetti tasainen jakauma

Odotusarvo

Pistetodennäköisyysfunktio

Standardipoikkeama

Varianssi

Diskreetti tasainen jakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio 1/2

- Olkoon X *diskreetti satunnaismuuttuja*, jonka mahdolliset arvot ovat

$$x_1, x_2, \dots , x_n$$

- Oletetaan, että satunnaismuuttujan X mahdollisiin arvoihin $x_1, x_2, \dots , x_n$ liittyvät todennäköisyydet ovat *yhtä suuria*:

$$\Pr(X = x_k) = \frac{1}{n}, \; k = 1, 2, \dots, n$$

- Huomautus:

  Diskreetti tasainen jakauma liittyy sellaisiin otosavaruuksiin, joissa alkeistapaukset ovat *symmetrisiä*.

Diskreetti tasainen jakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio 2/2

- Satunnaismuuttujan X **pistetodennäköisyysfunktio** on

$$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{1}{n}, \; x = x_k$$
$$k = 1, 2, \ldots, n$$

- Sanomme, että satunnaismuuttuja X noudattaa **diskreettiä tasaista jakaumaa**.
- Huomautus:

Funktio $f(x)$ määrittelee todennäköisyysjakauman, koska

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Odotusarvo, varianssi ja standardipoikkeama

- Diskreetin tasaisen jakauman **odotusarvo**:

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

- Diskreetin tasaisen jakauman **varianssi**:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2$$

- Diskreetin tasaisen jakauman **standardipoikkeama**:

$$\mathrm{D}(X) = \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2}$$

Odotusarvon ja varianssin johto

- Suoraan diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvon ja varianssin määritelmistä saadaan:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \mu \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k f(x_k) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \overline{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{D}^2(X) = \sigma^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2 f(x_k) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2
\end{aligned}
$$

Odotusarvon ominaisuuksia

- Diskreetin tasaisen jakauman odotusarvo

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \bar{x}$$

on satunnaismuuttujan X mahdollisten arvojen $x_1, x_2, \ldots , x_n$ **aritmeettinen keskiarvo**.

Diskreetti tasainen jakauma

Odotusarvon ja varianssin laskeminen: Esimerkki

- Olkoon satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyysfunktio

$$f(k) = \Pr(X = k) = p_k = 1/6\ ,\ k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- Odotusarvo:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{6} k f(k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k \\ &= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5\end{aligned}$$

- Varianssi:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^2(X) &= \sum_{k=1}^{6}(k-\mathrm{E}(x))^2 f(k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}(k-\mathrm{E}(x))^2 \\ &= \frac{1}{6}\left[(1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + \cdots + (6-3.5)^2\right] = \frac{35}{12} \approx 2.917\end{aligned}$$

- Standardipoikkeama:

$$\mathrm{D}(X) = \sqrt{2.917} \approx 1.708$$

Pistetodennäköisyysfunktion kuvaaja

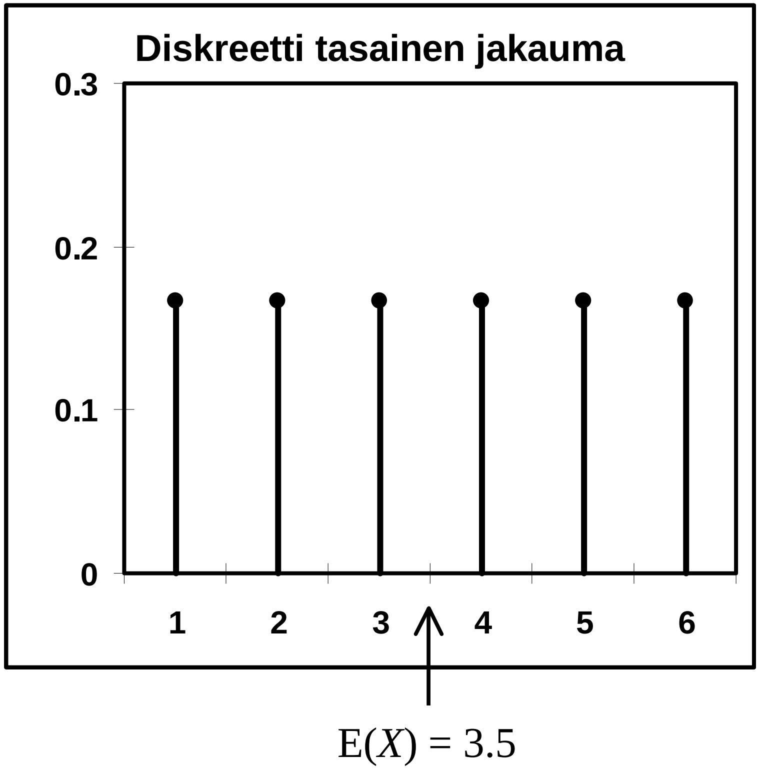
- Kuva oikealla esittää diskreetin tasaisen jakauman

$$f(x) = \frac{1}{6}\,,\ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

pistetodennäköisyysfunktiota.

- Jakauman *odotusarvo*:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = 3.5$$



Diskreettejä jakaumia

Diskreetti tasainen jakauma

\>> Bernoulli-jakauma

Binomijakauma

Geometrinen jakauma

Negatiivinen binomijakauma

Hypergeometrinen jakauma

Poisson-jakauma

Bernoulli-jakauma

Avainsanat

Bernoulli-jakauma

Bernoulli-koe

Odotusarvo

Pistetodennäköisyysfunktio

Standardipoikkeama

Varianssi

Bernoulli-jakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio 1/2

- Olkoon A otosavaruuden S *tapahtuma* ja $\Pr(A) = p$.
- Tällöin tapahtuman A *komplementtitapahtuman* A^c *todennäköisyys* on

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A) = 1 - p = q$$

- Määritellään *diskreetti satunnaismuuttuja* X:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{jos tapahtuma } A \text{ sattuu} \\ 0, & \text{jos tapahtuma } A \text{ ei satu} \end{cases}$$

- Tällöin satunnaismuuttujan X *jakauma* on

$$\Pr(X = 1) = p$$

$$\Pr(X = 0) = 1 - p = q$$

Bernoulli-jakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio 2/2

- Satunnaismuuttujan X **pistetodennäköisyysfunktio** on

$$f(x) = \Pr(X = x) = p^x q^{1-x} \text{ , } 0 < p < 1 \text{ , } q = 1 - p$$

$$x = 0,1$$

- Sanomme, että satunnaismuuttuja X noudattaa **Bernoulli-jakaumaa parametrinaan** $\boldsymbol{p}$.
- Merkintä:

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

- Huomautus:

Funktio $f(x)$ määrittelee todennäköisyysjakauman, koska

$$f(0) + f(1) = q + p = 1$$

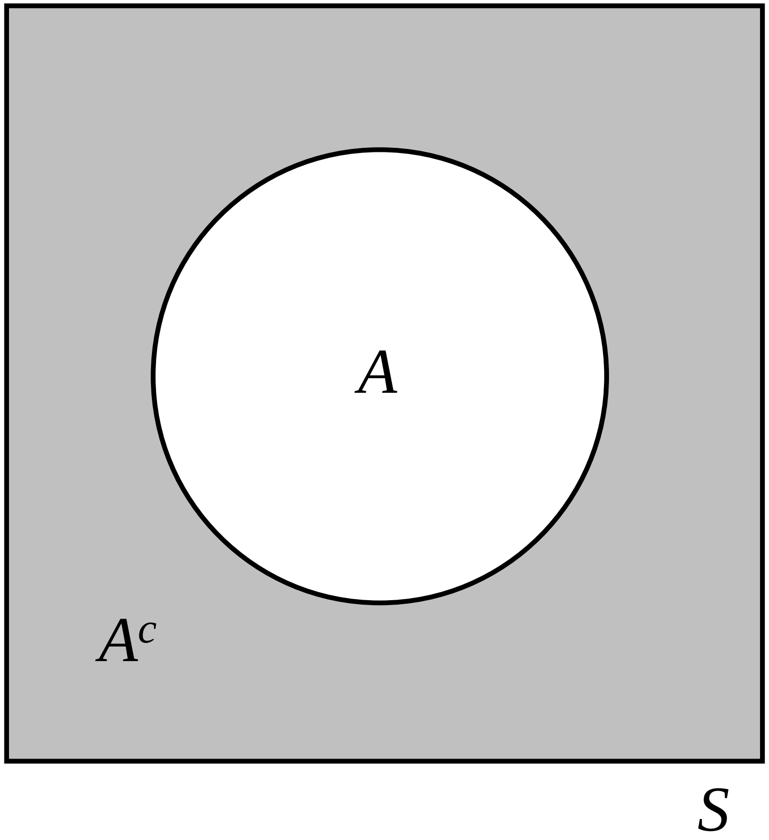
Komplementtitapahtuman todennäköisyys

- Olkoon

  $\Pr(A) = p$

- Tällöin

  $\Pr(A^c)$
  $= 1 - \mathrm{P}(A)$
  $= 1 - p$
  $= q$



Odotusarvo, varianssi ja standardipoikkeama

- Olkoon

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

- **Odotusarvo**:

$$\text{E}(X) = p$$

- **Varianssi** ja **standardipoikkeama**:

$$\text{Var}(X) = \text{D}^2(X) = pq$$

$$\text{D}(X) = \sqrt{pq}$$

Odotusarvon ja varianssin johto

- Suoraan diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvon ja varianssin määritelmistä saadaan:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= 1\times \Pr(X=1) + 0\times \Pr(X=0) \\
&= 1\times p + 0\times q \\
&= p \\
\mathrm{E}(X^2) &= 1^2\times \Pr(X=1) + 0^2\times \Pr(X=0) \\
&= 1\times p + 0\times q \\
&= p \\
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 \\
&= p - p^2 \\
&= p(1-p) \\
&= pq
\end{aligned}$$

Odotusarvon ja varianssin ominaisuuksia

- Olkoon

  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

- Bernoulli-jakauman odotusarvo

  $\text{E}(X) = p$

  yhtyy tapahtuman A todennäköisyyteen $\Pr(A) = p$.

- Bernoulli-jakauman varianssi

  $\text{Var}(X) = pq = p(1-p) = p - p^2$

  saavuttaa maksiminsa

  $1/4$

  kun $p = q = 1/2$.

Pistetodennäköisyysfunktion kuvaaja

- Kuva oikealla esittää Bernoulli-jakauman

  Bernoulli(0.8)

  pistetodennäköisyysfunktiota

  $$f(x) = p^x q^{1-x}$$

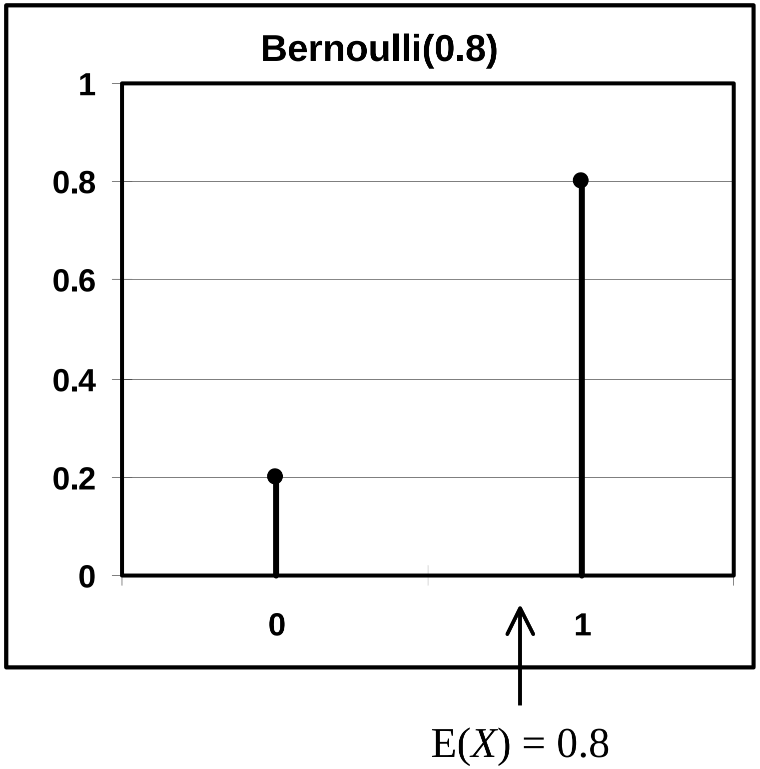
  $$p = 0.8\,,\ q = 1 - p$$

  pisteissä

  $x = 0, 1$

- Jakauman *odotusarvo*:

  $$\mathrm{E}(X) = p = 0.8$$



Bernoulli-jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma 1/2

- Olkoot

$$X_1, X_2, \dots , X_n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat *samaa Bernoulli-jakaumaa* parametrilla p:

$$X_1, X_2, \dots , X_n \perp$$

$$X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p) \, , \, i = 1, 2, \dots , n$$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots , X_n$ **summa**

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

noudattaa binomijakaumaa parametrilla (n , p):

$$Y \sim \mathrm{Bin}(n , p)$$

Bernoulli-jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma 2/2

- Tulos perustellaan luvussa **Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat.**
- Huomautuksia:
  - Kaikilla Bernoulli-jakaumilla on oltava *sama* tapahtuman A todennäköisyyttä kuvaava parametri p.
  - Tarkoitamme *satunnaismuuttujien riippumattomuudella* sitä, että yhdenkään satunnaismuuttujan saamat arvot eivät riipu siitä, mitä arvoja muut satunnaismuuttujat saavat; käsite täsmennetään luvussa **Kaksiulotteiset todennäköisyysjakaumat**.

Bernoulli-kokeet ja diskreetit todennäköisyysjakaumat 1/2

- Toistetaan *toisistaan riippumatta samaa Bernoulli-koetta* ja tarkastellaan tapahtuman A sattumista toistojen aikana:

(i) **Binomijakauma** saadaan määräämällä todennäköisyys sille, että tapahtuma A sattuu x kertaa, kun koetta toistetaan n kertaa.

(ii) **Geometrinen jakauma** saadaan määräämällä todennäköisyys sille, että tapahtuma A sattuu ensimmäisen kerran x. koetoistossa.

(iii) **Negatiivinen binomijakauma** saadaan määräämällä todennäköisyys sille, että tapahtuma A sattuu r. kerran x. koetoistossa.

Bernoulli-kokeet ja diskreetit todennäköisyysjakaumat 2/2

- **Poisson-jakauma** voidaan johtaa binomijakauman raja-arvona, kun koetoistojen lukumäärän annetaan tiettyjen ehtojen vallitessa kasvaa rajatta.

  Siten Poisson-jakauma kuvaa *harvinaisten* tapahtumien todennäköisyyksiä *pitkissä* toistokoesarjoissa.

Diskreettejä jakaumia

Diskreetti tasainen jakauma
Bernoulli-jakauma
>> Binomijakauma
Geometrinen jakauma
Negatiivinen binomijakauma
Hypergeometrinen jakauma
Poisson-jakauma

Binomijakauma

Avainsanat

Binomijakauma
Bernoulli-jakauma
Bernoulli-koe
Odotusarvo
Otanta takaisinpanolla
Pistetodennäköisyysfunktio
Standardipoikkeama
Varianssi

Binomijakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio 1/3

- Toistetaan *samaa* Bernoulli-koetta n kertaa, jossa n on *kiinteä*, *etukäteen päätetty* luku.
- Oletetaan, että koetoistot ovat *riippumattomia*.
- Tarkastellaan otosavaruuden S tapahtuman A sattumista koetoistojen aikana.
- Oletetaan, että

$$\Pr(A) = p$$

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A) = 1 - p = q$$

- Määritellään *diskreetti satunnaismuuttuja* X:

$X =$ Tapahtuman A esiintymisten lukumäärä n-kertaisessa Bernoulli-kokeessa

Binomijakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio 2/3

- Satunnaismuuttujan X **pistetodennäköisyysfunktio** on

$$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \;, 0 < p < 1 \,, q = 1 - p$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

- Sanomme, että satunnaismuuttuja X noudattaa **binomijakaumaa parametreinaan *n* ja *p***.
- Merkintä:

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$

Binomijakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio 3/3

- Huomautus:

Funktio $f(x)$ määrittelee todennäköisyysjakauman, koska *binomikaavan* mukaan

$$\sum_{x=0}^{n} f(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

Siten binomijakauman *pistetodennäköisyydet*

$$p_x = f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \text{ , } x = 0,1,2,\ldots,n$$

toteuttavat yhtälön

$$p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = 1$$

Binomijakauma
Pistetodennäköisyysfunktion johto 1/2

- Toistetaan *samaa* Bernoulli-koetta n kertaa.
- Oletetaan, että koetoistot ovat *riippumattomia* ja tarkastellaan tapahtuman A sattumista koetoistojen aikana.
- Oletetaan, että toistokoesarjan tuloksena saadaan tapahtumajono

$$A\ A\ A^c\ A\ A^c\ \ldots\ A$$

jossa on x kpl tapahtumia A ja $(n-x)$ kpl tapahtumia A^c .

- Koska

$$\Pr(A) = p$$

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A) = 1 - p = q$$

tarkasteltavan tapahtumajonon todennäköisyydeksi saadaan *riippumattomien tapahtumien tulosäännön* nojalla

$$ppqpq\ \ldots\ p = p^x q^{n-x}$$

Pistetodennäköisyysfunktion johto 2/2

- *Erilaisia* jonoja, joissa on x kpl tapahtumia A ja $(n - x)$ kpl tapahtumia A^c, on

$$\binom{n}{x} \text{ kpl}$$

- *Erilaiset* tapahtumajonot ovat *toisensa poissulkevia*.
- *Toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön* mukaan todennäköisyys saada sellainen jono, jossa on x kpl tapahtumia A ja $(n - x)$ kpl tapahtumia A^c saadaan laskemalla *erilaisten* tällaisten jonojen todennäköisyydet yhteen.
- Siten kysytyksi todennäköisyydeksi saadaan

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \; q = 1 - p$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Odotusarvo, varianssi ja standardipoikkeama

- Olkoon

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$

- **Odotusarvo**:

$$\mathrm{E}(X) = np$$

- **Varianssi** ja **standardipoikkeama**:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = npq$$

$$\mathrm{D}(X) = \sqrt{npq}$$

Odotusarvon johto 1/2

- Olkoon

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$

- Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) = \sum_{x=0}^{n} xf(x) &= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x} \\
&= np
\end{aligned}$$

Odotusarvon johto 2/2

- Kalvon 1/2 yhtälöketjun viimeinen yhtälö perustuu siihen, että

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1}(1-p)^{n-x} = 1$$

- Tämä seuraa siitä, että summassa lasketaan yhteen *kaikki* binomijakauman

  $\mathrm{Bin}(n-1, p)$

  pistetodennäköisyydet

$$f(x) = \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1}(1-p)^{n-x}$$

Odotusarvon ja varianssin ominaisuuksia

- Olkoon

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$

- Binomijakauman odotusarvo

$$\mathrm{E}(X) = np$$

on suoraan verrannollinen sekä *toistokeiden lukumäärään* n että *tapahtuman A todennäköisyyteen* $\Pr(A) = p$.

- Binomijakauman varianssi

$$\mathrm{Var}(X) = npq = np(1 - p)$$

saavuttaa maksiminsa

$$n/4$$

kun $p = q = 1/2$.

Pistetodennäköisyysfunktion kuvaaja

- Kuva oikealla esittää Binomi-jakauman

  Bin(12, 1/3)

  pistetodennäköisyysfunktiota

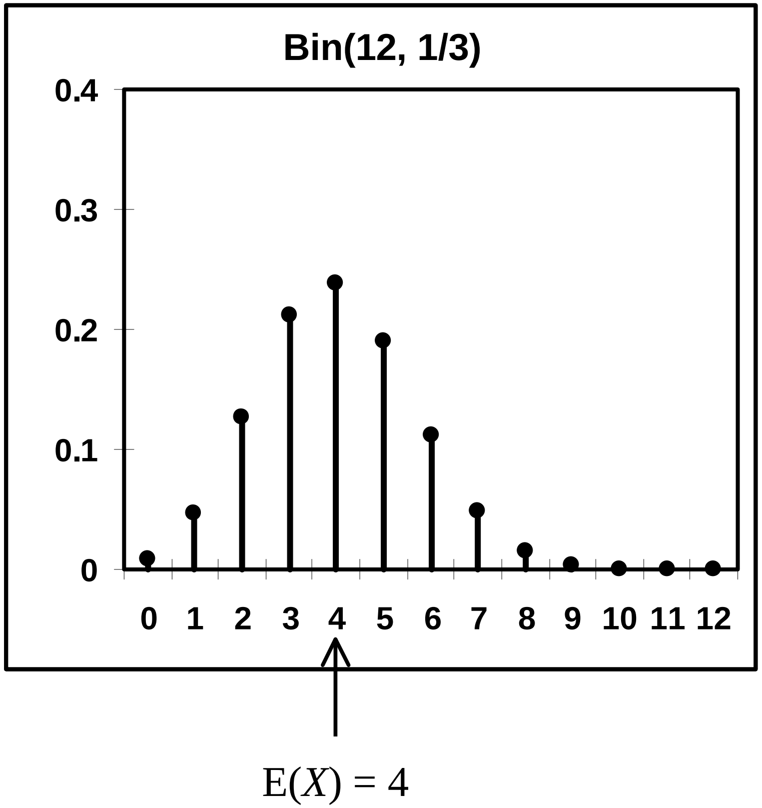
  $$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

  $$n = 12\,,\ p = 1/3\,,\ q = 1 - p$$

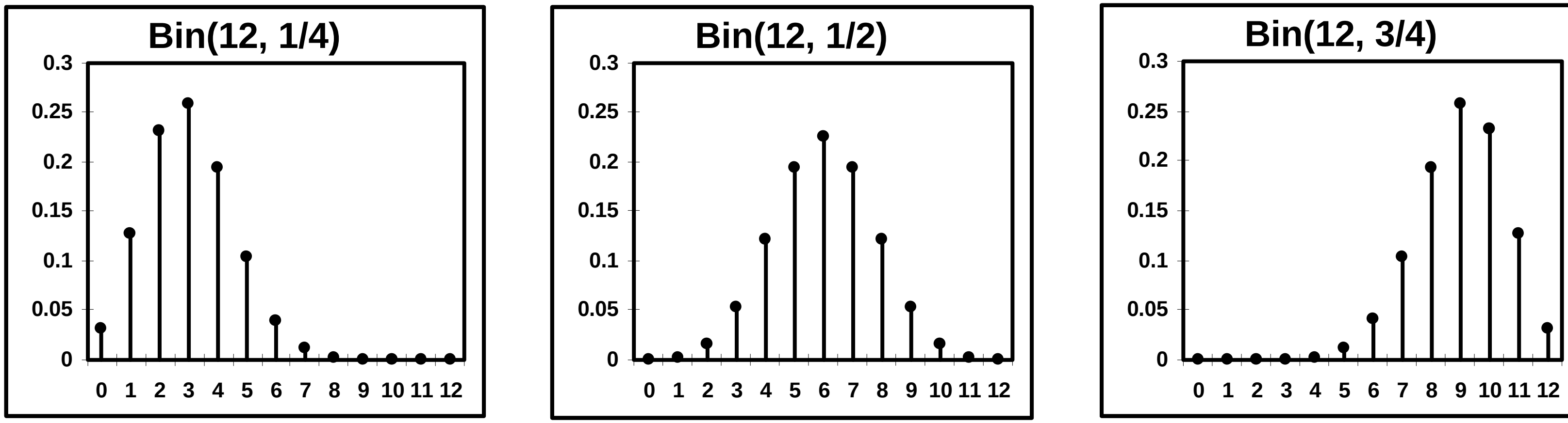
  pisteissä

  $x = 0, 1, 2, \ldots, 12$
- Jakauman *odotusarvo*:

  $$\mathrm{E}(X) = np = 4$$



Pistetodennäköisyysfunktion kuvaaja: Tapaukset $p < 1/2$, $p = 1/2$, $p > 1/2$



- $p < 1/2$: Binomijakauma on *vino oikealle*.
- $p = 1/2$: Binomijakauma on *symmetrinen*.
- $p > 1/2$: Binomijakauma on *vino vasemmalle*.

Binomijakauma ja Bernoulli-jakauma 1/3

- Toistetaan *samaa* Bernoulli-koetta n kertaa, jossa n on *kiinteä*, *etukäteen päätetty* luku.
- Oletetaan, että koetoistot ovat *riippumattomia* ja tarkastellaan tapahtuman A sattumista koetoistojen aikana.
- Oletetaan, että

$$\Pr(A) = p$$

$$\Pr(A^c) = 1 - p = q$$

Binomijakauma ja Bernoulli-jakauma 2/3

- Määritellään *diskreetit satunnaismuuttujat* X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$:

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ jos } A \text{ tapahtuu kokeessa } i \\ 0, \text{ jos } A \text{ ei tapahdu kokeessa } i \end{cases}$$

- Tällöin

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p), \; i = 1, 2, \ldots , n.$$

- Määritellään *diskreetti satunnaismuuttuja* X :

$$X = \text{Tapahtuman } A \text{ esiintymisten lukumäärä } n\text{-kertaisessa Bernoulli-kokeessa}$$

- Tällöin

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

Binomijakauma ja Bernoulli-jakauma 3/3

- Selvästi

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

koska luku 1 esiintyy summassa $\sum X_i$ *täsmälleen* yhtä monta kertaa kuin tapahtuma A sattuu n:n koetoiston aikana.

- Tämä merkitsee sitä, että *binomijakautunut satunnaismuuttuja* voidaan esittää *riippumattomien Bernoulli-jakautuneiden satunnaismuuttujien summana*.
- Huomautus:

  Binomi- ja Bernoulli-jakauman yhteyttä voidaan käyttää apuna binomijakauman *odotusarvon* ja *varianssin* määräämisessä; ks. >.

Binomijakauman odotusarvon ja varianssin johto sekä Bernoulli-jakauma 1/2

- Olkoot X_i , $i = 1,2, \ldots , n$ *riippumattomia* satunnaismuuttujia, jotka noudattavat *samaa Bernoulli-jakaumaa* parametrilla p:

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n \perp$$

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p), \; i = 1,2, \ldots , n$$

- Olkoon

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Tällöin

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

- Huomautus:

  Tarkoitamme *satunnaismuuttujien riippumattomuudella* sitä, että yhdenkään satunnaismuuttujan saamat arvot eivät riipu siitä, mitä arvoja muut satunnaismuuttujat saavat; käsite täsmennetään luvussa **Kaksiulotteiset todennäköisyysjakaumat**.

Binomijakauman odotusarvon ja varianssin johto sekä Bernoulli-jakauma 2/2

- Satunnaismuuttujan $X = \sum X_i$ *odotusarvo* on

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

koska *satunnaismuuttujien summan odotusarvo on satunnais-muuttujien odotusarvojen summa*.

- Satunnaismuuttujan $X = \sum X_i$ *varianssi* on

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{D}^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}^2(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$$

koska *riippumattomien satunnaismuuttujien summan varianssi on satunnaismuuttujien varianssien summa*.

Binomijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma 1/2

- Olkoot

$$X_1, X_2, \ldots , X_k$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat *binomijakaumia* parametrein $(n_1 , p), (n_2 , p), \ldots , (n_k , p)$:

$$X_1, X_2, \ldots , X_k \perp$$

$$X_i \sim \text{Bin}(n_i , p) , i = 1, 2, \ldots , k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots , X_k$ **summa**

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

noudattaa binomijakaumaa parametrein $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k , p)$:

$$Y \sim \text{Bin}(n_1 + n_2 + \cdots + n_k , p)$$

Binomijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma 2/2

- Tulos perustellaan luvussa **Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat.**
- Huomautuksia:
  - Kaikilla binomijakaumilla on oltava *sama* tapahtuman A todennäköisyyttä kuvaava parametri p, mutta sen sijaan toistokokeiden lukumäärää kuvaava parametri saa vaihdella jakaumasta toiseen.
  - Tarkoitamme *satunnaismuuttujien riippumattomuudella* sitä, että yhdenkään satunnaismuuttujan saamat arvot eivät riipu siitä, mitä arvoja muut satunnaismuuttujat saavat; käsite täsmennetään luvussa **Kaksiulotteiset todennäköisyysjakaumat**.

Binomijakauma ja otanta takaisinpanolla 1/5

- Olkoon perusjoukon S alkioiden lukumäärä

$$n(S) = N$$

- *Poimitaan* perusjoukosta S *satunnaisesti osajoukko* B, jonka alkioiden lukumäärä on

$$n(B) = n$$

käyttämällä poiminnassa *otantaa takaisinpanolla*.

Binomijakauma ja otanta takaisinpanolla 2/5

- **Otanta takaisinpanolla**:

  (i) Perusjoukosta S poimitaan alkiot osajoukkoon B yksi kerrallaan *arpomalla*.

  (ii) Jokainen poimittu alkio **palautetaan** ennen seuraavan alkion arpomista *takaisin* perusjoukkoon S.

  (iii) *Jokaisella perusjoukon S alkiolla* on *jokaisessa arvonnassa sama todennäköisyys*

  $$1/N$$

  tulla poimituksi osajoukkoon B.

- Osajoukko B muodostaa **yksinkertaisen satunnais-otoksen** perusjoukosta S.

Binomijakauma ja otanta takaisinpanolla 3/5

- Otannassa takaisinpanolla arvonta voidaan toteuttaa seuraavalla tavalla:

  (1) Pannaan *uurnaan* jokaista perusjoukon S alkiota vastaava arpalippu.

  (2) *Sekoitetaan* arvat huolellisesti.

  (3) *Nostetaan* uurnasta arpalippu, jota vastaava alkio valitaan otokseen B.

  (4) **Palautetaan** nostettu arpalippu uurnaan.

  (5) Palataan vaiheeseen (2), kunnes haluttu otoskoko n on saavutettu.

Binomijakauma ja otanta takaisinpanolla 4/5

- Huomautuksia otannasta takaisinpanolla:
  - (i) Jokaisen perusjoukon S *alkion todennäköisyys* tulla valituksi otokseen *säilyy samana* koko poiminnan ajan.
  - (ii) Jokaisella perusjoukon S samankokoisella *osajoukolla* on *sama* todennäköisyys tulla valituksi otokseksi.
  - (iii) Sama perusjoukon S alkio voi tulla valituksi *useita kertoja* otokseen.

Binomijakauma ja otanta takaisinpanolla 5/5

- Olkoon A perusjoukon osajoukko, jonka alkioiden lukumäärä on

$$n(A) = r$$

- Tällöin todennäköisyys poimia alkio joukosta A on

$$\Pr(A) = p = \frac{r}{N}$$

- Otannassa takaisinpanolla otokseen poimittujen A-tyyppisten alkioiden lukumäärä X on diskreetti satunnaismuuttuja, joka noudattaa *binomijakaumaa parametreilla* n ja p:

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$

Diskreettejä jakaumia

Diskreetti tasainen jakauma
Bernoulli-jakauma
Binomijakauma
>> Geometrinen jakauma
Negatiivinen binomijakauma
Hypergeometrinen jakauma
Poisson-jakauma

Geometrinen jakauma

Avainsanat

Geometrinen jakauma

Bernoulli-koe

Odotusarvo

Pistetodennäköisyysfunktio

Standardipoikkeama

Varianssi

Geometrinen jakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio 1/2

- Toistetaan *samaa* Bernoulli-koetta.
- Oletetaan, että koetoistot ovat *riippumattomia*.
- Tarkastellaan otosavaruuden S tapahtuman A sattumista koetoistojen aikana.
- Oletetaan, että

$$\Pr(A) = p$$

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A) = 1 - p = q$$

- Määritellään *diskreetti satunnaismuuttuja* X:

$X =$ Tehtyjen Bernoulli-kokeiden lukumäärä,
kun A sattuu *ensimmäisen* kerran

Geometrinen jakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio 2/2

- Satunnaismuuttujan X **pistetodennäköisyysfunktio** on

$$f(x) = \Pr(X = x) = q^{x-1}p \,,\ 0 < p < 1 \,,\ q = 1 - p$$

$$x = 1, 2, 3, \ldots$$

- Sanomme, että satunnaismuuttuja X noudattaa **geometrista jakaumaa parametrinaan *p***.
- Merkintä:

$$X \sim \mathrm{Geom}(p)$$

- Huomautus:

Funktio $f(x)$ määrittelee todennäköisyysjakauman, koska *geometrisen sarjan summan kaavan* mukaan

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1}p = p\sum_{x=0}^{\infty} q^{x} = p\frac{1}{1-q} = p\frac{1}{p} = 1$$

Pistetodennäköisyysfunktion johto 1/2

- Toistetaan *samaa* Bernoulli-koetta.
- Oletetaan, että koetoistot ovat *riippumattomia* ja tarkastellaan tapahtuman A sattumista koetoistojen aikana.
- Tarkastellaan toistokoesarjaa, jossa tapahtuma A sattuu ensimmäisen kerran x:nnessä kokeessa.
- Toistokoesarjan tuloksena on tällöin ollut tapahtumajono

  $$A^c\ A^c\ A^c \ldots A^c\ A$$

  jossa on *ensin* sattunut $(x-1)$ kpl tapahtumia A^c ja *sitten* tapahtuma A.

Pistetodennäköisyysfunktion johto 2/2

- Koska

  $\Pr(A) = p$

  $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A) = 1 - p = q$

  tarkasteltavan tapahtumajonon todennäköisyydeksi saadaan *riippumattomien tapahtumien tulosäännön* nojalla

  $$qqq \cdots qp = q^{x-1} p$$

  $$x = 1, 2, 3, \ldots$$

  mikä on kysytty todennäköisyys.

Odotusarvo, varianssi ja standardipoikkeama

- Olkoon

$$X \sim \mathrm{Geom}(p)$$

- **Odotusarvo**:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$$

- **Varianssi** ja **standardipoikkeama**:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \frac{q}{p^2}$$

$$\mathrm{D}(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

Geometrinen jakauma
Odotusarvon johto 1/4

- Olkoon

$$X \sim \text{Geom}(p)$$

- Satunnaismuuttujan X *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = q^{x-1}p \;,\; q = 1 - p$$
$$x = 1, 2, 3, \ldots$$

- Pistetodennäköisyyksien $f(x)$, x = 1, 2, 3, … *summa* on

$$S(p) = \sum_{x=1}^{\infty} f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} p = 1$$

- Satunnaismuuttujan X *odotusarvo* on

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} p$$

Geometrinen jakauma
Odotusarvon johto 2/4

- Summan $S(p)$ derivaatta muuttujan p suhteen on

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S(p)}{\partial p} &= \sum_{x=1}^{\infty}\left[-(x-1)(1-p)^{x-2}p+(1-p)^{x-1}\right] \\
&= -\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-2}p \\
&\qquad +\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-2}p+\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1} \\
&= -\frac{1}{1-p}\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}p \\
&\qquad +\frac{1}{1-p}\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1}p+\frac{1}{p}\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1}p
\end{aligned}
$$

Odotusarvon johto 3/4

- Ottamalla huomioon yhtälöt

$$\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1}p = S(p) = 1$$

$$\sum_{x=1}^{\infty}x(1-p)^{x-1}p = \mathrm{E}(X)$$

saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}\frac{\partial S(p)}{\partial p} &= -\frac{1}{1-p}\mathrm{E}(X) + \frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} \\ &= -\frac{1}{1-p}\mathrm{E}(X) + \frac{1}{p(1-p)} \\ &= 0\end{aligned}$$

Odotusarvon johto 4/4

- Geometrisen jakauman odotusarvo E(x) toteuttaa siis yhtälön

$$-\frac{1}{1-p}\mathrm{E}(X)+\frac{1}{p(1-p)}=0$$

- Siten *geometrisen jakauman odotusarvo* on

$$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{p}$$

Odotusarvon ominaisuuksia

- Olkoon

$$X \sim \text{Geom}(p)$$

- Geometrisen jakauman odotusarvo

$$\text{E}(X) = \frac{1}{p}$$

on *kääntäen verrannollinen tapahtuman A todennäköisyyteen* $\Pr(A) = p$.

- Siten tapahtumaa A saa odottaa keskimäärin sitä *kauemmin* mitä *pienempi* on tapahtuman A todennäköisyys.

Geometrinen jakauma
Pistetodennäköisyysfunktion kuvaaja

- Kuva oikealla esittää geometrisen jakauman

  Geom(1/3)

  pistetodennäköisyysfunktiota

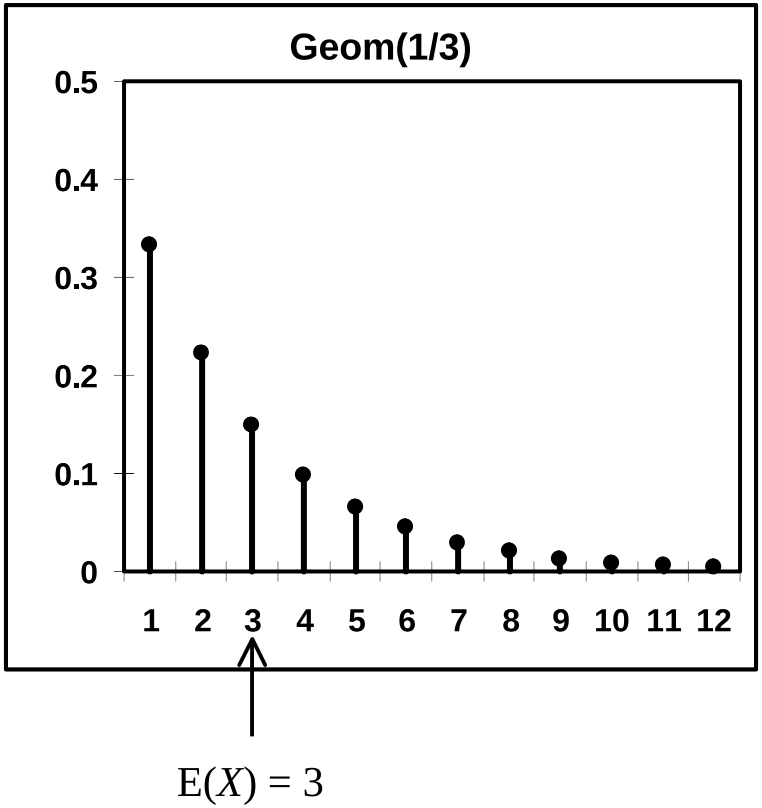
  $$f(x) = q^{x-1}p$$

  $$p = 1/3\,,\; q = 1-p$$

  pisteissä

  x = 1, 2, … , 12
- Jakauman *odotusarvo*:

  $$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p} = 3$$



Geometrisen jakauman unohtamisominaisuus

- Olkoon

$$X \sim \mathrm{Geom}(p)$$

- Tällöin

$$\Pr(X \geq a + b \mid X \geq a) = \Pr(X \geq 1 + b)$$

- Siten geometrisella jakaumalla on seuraava *unohtamis-ominaisuus*:

  Se, että tapahtuman A sattumista on jouduttu odottamaan a koetoistoa, *ei vaikuta* todennäköisyyteen joutua odottamaan b koetoistoa lisää.

Diskreettejä jakaumia

Diskreetti tasainen jakauma
Bernoulli-jakauma
Binomijakauma
Geometrinen jakauma
>> Negatiivinen binomijakauma
Hypergeometrinen jakauma
Poisson-jakauma

Negatiivinen binomijakauma

Avainsanat

- **Bernoulli-koe**
- **Geometrinen jakauma**
- **Negatiivinen binomijakauma**
- **Odotusarvo**
- **Pistetodennäköisyysfunktio**
- **Standardipoikkeama**
- **Varianssi**

Negatiivinen binomijakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio 1/2

- Toistetaan *samaa* Bernoulli-koetta.
- Oletetaan, että koetoistot ovat *riippumattomia*.
- Tarkastellaan otosavaruuden S tapahtuman A sattumista koetoistojen aikana.
- Oletetaan, että

$$\Pr(A) = p$$

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A) = 1 - p = q$$

- Määritellään *diskreetti satunnaismuuttuja* X:

$X =$ Tehtyjen Bernoulli-kokeiden lukumäärä, kun A sattuu r. kerran

Negatiivinen binomijakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio 2/2

- Satunnaismuuttujan X **pistetodennäköisyysfunktio** on

$$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{x-1}{r-1} q^{x-r} p^r \ , 0 < p < 1 \, , q = 1 - p$$

$$r = 1, 2, 3, \ldots \, ; \, x = r, r+1, r+2, \ldots$$

- Sanomme, että satunnaismuuttuja X noudattaa **negatiivista binomijakaumaa parametreinaan *r* ja *p***.
- Merkintä:

$$X \sim \mathrm{NegBin}(r, p)$$

Negatiivinen binomijakauma
Pistetodennäköisyysfunktion johto 1/3

- Toistetaan *samaa* Bernoulli-koetta.
- Oletetaan, että koetoistot ovat *riippumattomia* ja tarkastellaan tapahtuman A sattumista koetoistojen aikana.
- Tarkastellaan toistokoesarjaa, jossa tapahtuma A sattuu r. kerran x. kokeessa.
- Olkoon toistokoesarjan tuloksena ollut tapahtumajono

$$A\ A\ A^c\ A\ A^c\ \ldots\ A^c\ A$$

jossa on r kpl tapahtumia A ja $(x - r)$ kpl tapahtumia A^c ja, jossa tapahtuma A on *viimeisenä*.

Pistetodennäköisyysfunktion johto 2/3

- Koska

$$\Pr(A) = p$$

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A) = 1 - p = q$$

tarkasteltavan tapahtumajonon todennäköisyydeksi saadaan *riippumattomien tapahtumien tulosäännön* nojalla

$$ppqpq \cdots qp = q^{x-r}p^r$$

- *Erilaisten* sellaisten jonojen, joissa on r kpl tapahtumia A ja $(x - r)$ kpl tapahtumia A^c ja joissa A on *viimeisenä*, lukumäärä on

$$\binom{x-1}{r-1}$$

Negatiivinen binomijakauma
Pistetodennäköisyysfunktion johto 3/3

- *Erilaiset* tapahtumajonot ovat *toisensa poissulkevia*.
- *Toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön* mukaan todennäköisyys saada sellainen jono, jossa on r kpl tapahtumia A ja $(x - r)$ kpl tapahtumia A^c ja jossa tapahtuma A on *viimeisenä*, saadaan laskemalla *erilaisten* tällaisten jonojen todennäköisyydet yhteen.
- Koska ko. jonojen lukumäärä on

$$\binom{x-1}{r-1}$$

saadaan kysytyksi todennäköisyydeksi

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} q^{x-r} p^r \ , \ q = 1 - p$$

$$r = 1, 2, 3, \ldots \ ; \ x = r, r+1, r+2 \ldots$$

Odotusarvo, varianssi ja standardipoikkeama

- Olkoon

$$X \sim \mathrm{NegBin}(r, p)$$

- **Odotusarvo**:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{r}{p}$$

- **Varianssi** ja **standardipoikkeama**:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \frac{rq}{p^2}$$

$$\mathrm{D}(X) = \frac{\sqrt{rq}}{p}$$

Negatiivinen binomijakauma

Odotusarvon johto 1/4

- Olkoon

$$X \sim \mathrm{NegBin}(r, p)$$

- Satunnaismuuttujan X *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} q^{x-r} p^r , \; q = 1 - p$$

$$x = r, r+1, r+2, \ldots$$

- Pistetodennäköisyyksien $f(x)$, $x = r, r + 1, r + 2, \ldots$ *summa* on

$$S(p) = \sum_{x=r}^{\infty} f(x) = \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r} p^r = 1$$

- Satunnaismuuttujan X *odotusarvo* on

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=r}^{\infty} x f(x) = \sum_{x=r}^{\infty} x \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r} p^r$$

Odotusarvon johto 2/4

- Summan $S(p)$ *derivaatta* muuttujan p suhteen on

$$\frac{\partial S(p)}{\partial p} = \sum_{x=r}^{\infty}\left[-(x-r)\binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r-1}p^{r} + r\binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}p^{r-1}\right]$$

$$= -\sum_{x=r}^{\infty} x\binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r-1}p^{r}$$

$$+r\sum_{x=r}^{\infty}\binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r-1}p^{r} + r\sum_{x=r}^{\infty}\binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}p^{r-1}$$

$$= -\frac{1}{1-p}\sum_{x=r}^{\infty} x\binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}p^{r}$$

$$+\frac{r}{1-p}\sum_{x=r}^{\infty}\binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-1}p^{r} + \frac{r}{p}\sum_{x=r}^{\infty}\binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}p^{r}$$

Negatiivinen binomijakauma

Odotusarvon johto 3/4

- Ottamalla huomioon yhtälöt

$$\sum_{x=r}^{\infty}\binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}p^{r} = S(p) = 1$$

$$\sum_{x=r}^{\infty}x\binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}p^{r} = \mathrm{E}(X)$$

saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}\frac{\partial S(p)}{\partial p} &= -\frac{1}{1-p}\mathrm{E}(X) + \frac{r}{1-p} + \frac{r}{p} \\ &= -\frac{1}{1-p}\mathrm{E}(X) + \frac{r}{p(1-p)} \\ &= 0\end{aligned}$$

Negatiivinen binomijakauma
Odotusarvon johto 4/4

- Negatiivisen binomijakauman odotusarvo E(x) toteuttaa siis yhtälön

$$-\frac{1}{1-p}\mathrm{E}(X)+\frac{r}{p(1-p)}=0$$

- Siten *negatiivisen binomijakauman odotusarvo* on

$$\mathrm{E}(X)=\frac{r}{p}$$

Odotusarvon ominaisuuksia

- Olkoon

$$X \sim \mathrm{NegBin}(r, p)$$

- Negatiivisen binomijakauman odotusarvo

$$\mathrm{E}(X) = \frac{r}{p}$$

on *suoraan verrannollinen lukuun r* ja *kääntäen verrannollinen tapahtuman A todennäköisyyteen* $\Pr(A) = p$.

- Siten r. tapahtumaa A saa odottaa keskimäärin sitä *kauemmin* mitä *suurempi* on r ja mitä *pienempi* on tapahtuman A todennäköisyys.

Negatiivinen binomijakauma
Pistetodennäköisyysfunktion kuvaaja

- Kuva oikealla esittää negatiivisen binomijakauman

  NegBin(3, 1/3)

  pistetodennäköisyysfunktiota

  $$f(x) = \binom{x-1}{r-1} q^{x-r} p^r$$

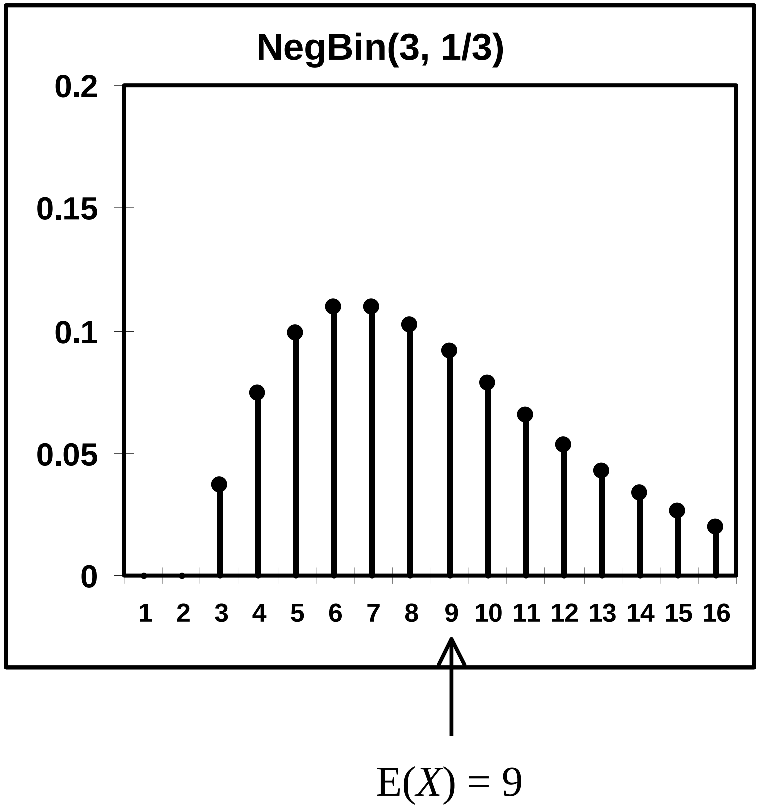
  $$r = 3\,,\ p = 1/3\,,\ q = 1 - p$$

  pisteissä

  $x = 3, 4, \ldots, 16$

- Jakauman *odotusarvo*:

  $$\mathrm{E}(X) = \frac{r}{p} = 9$$



Negatiivinen binomijakauma ja geometrinen jakauma

- Olkoon

$$X \sim \mathrm{NegBin}(r, p)$$

- Jos $r = 1$, niin satunnaismuuttuja X noudattaa **geometrista jakaumaa** Geom(p):

$$X \sim \mathrm{Geom}(p)$$

- Geometrinen jakauma on siten negatiivisen binomi-jakauman *erikoistapaus*.

Diskreettejä jakaumia

Diskreetti tasainen jakauma
Bernoulli-jakauma
Binomijakauma
Geometrinen jakauma
Negatiivinen binomijakauma
>> Hypergeometrinen jakauma
Poisson-jakauma

Hypergeometrinen jakauma

Avainsanat

Binomijakauma
Hypergeometrinen jakauma
Odotusarvo
Otanta ilman takaisinpanoa
Otantasuhde
Pistetodennäköisyysfunktio
Standardipoikkeama
Varianssi

Hypergeometrinen jakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio 1/3

- Olkoon perusjoukon S alkioiden lukumäärä

$$n(S) = N$$

- Tarkastellaan perusjoukon S *ositusta* joukkoihin A ja A^c .
- Oletetaan, että joukossa $A \subset S$ on

$$n(A) = r$$

alkiota.

- Tällöin joukon A komplementissa A^c on

$$n(A^c) = N - r$$

alkiota.

Hypergeometrinen jakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio 2/3

- Poimitaan perusjoukosta S *satunnaisesti* osajoukko B, jonka alkioiden lukumäärä on

  $$n(B) = n$$

  käyttämällä poiminnassa *otantaa ilman takaisinpanoa*.
- Määritellään *diskreetti satunnaismuuttuja* X:

  X = Osajoukkoon B tulleiden A:n alkioiden lukumäärä

Hypergeometrinen jakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio 2/2

- Satunnaismuuttujan X **pistetodennäköisyysfunktio** on

$$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{\dbinom{r}{x}\dbinom{N-r}{n-x}}{\dbinom{N}{n}}$$

$$\max[0, n-(N-r)] \leq x \leq \min(n, r)$$

- Sanomme, että satunnaismuuttuja X noudattaa **hypergeometrista jakaumaa parametreilla *N*, *r* ja *n***.
- Merkintä:

$$X \sim \mathrm{HyperGeom}(N, r, n)$$

Pistetodennäköisyysfunktion johto 1/4

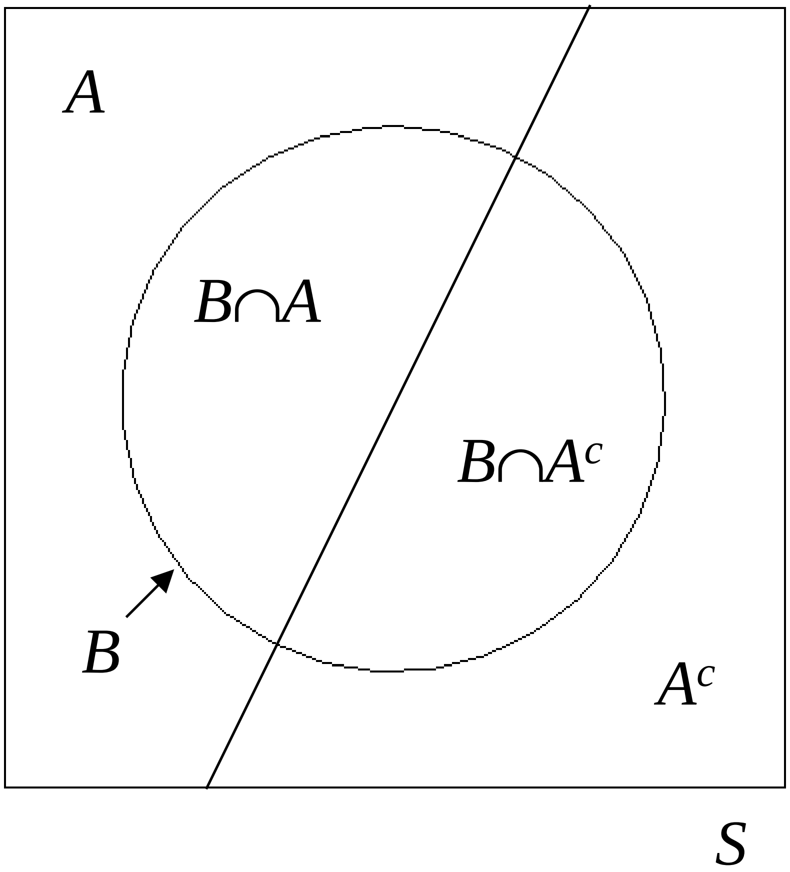
- Olkoon S otosavaruus ja

  $n(S) = N$
- Olkoon $A \subset S$
- Tällöin $\{A, A^c\}$ on otosavaruuden S *ositus*.
- Olkoon $n(A) = r$ ja $n(A^c) = N - r$
- Olkoon $B \subset S$ ja $n(B) = n$
- Otosavaruuden S ositus $\{A, A^c\}$ *indusoi* osituksen joukkoon B:

  $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$
- Olkoon

  $n(B \cap A) = x$

  $n(B \cap A^c) = n - x$



Pistetodennäköisyysfunktion johto 2/4

- N:n alkion joukosta S voidaan poimia n:n alkion osajoukko B

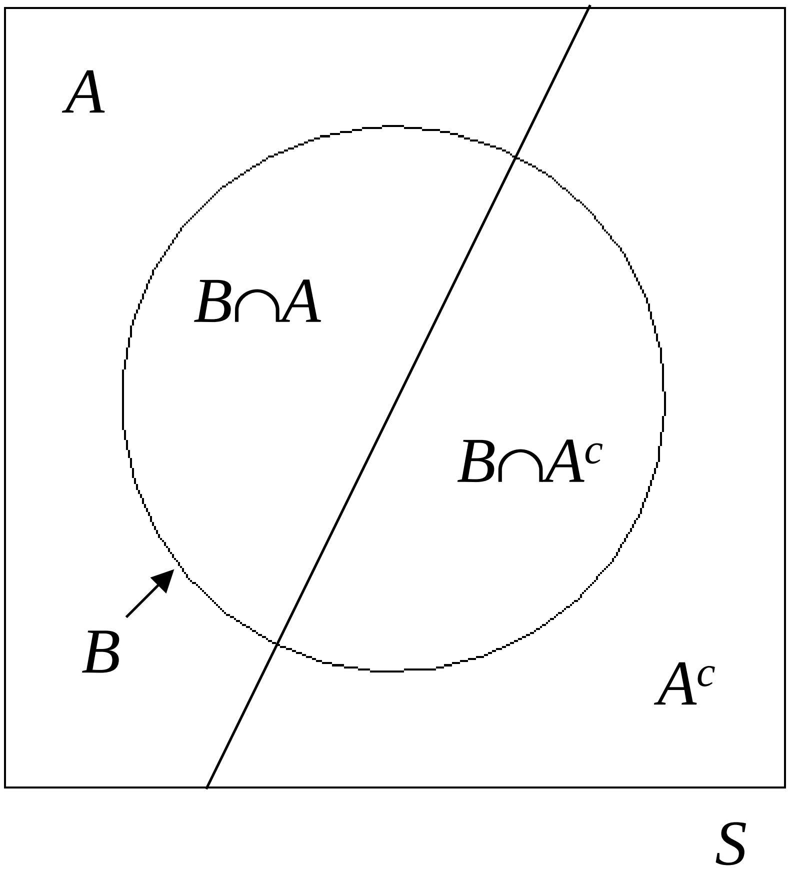
  $\binom{N}{n}$ eri tavalla.

- r:n alkion joukosta A voidaan poimia x alkiota

  $\binom{r}{x}$ eri tavalla.

- $(N-r)$:n alkion joukosta A^c voidaan poimia $n-x$ alkiota

  $\binom{N-r}{n-x}$ eri tavalla.

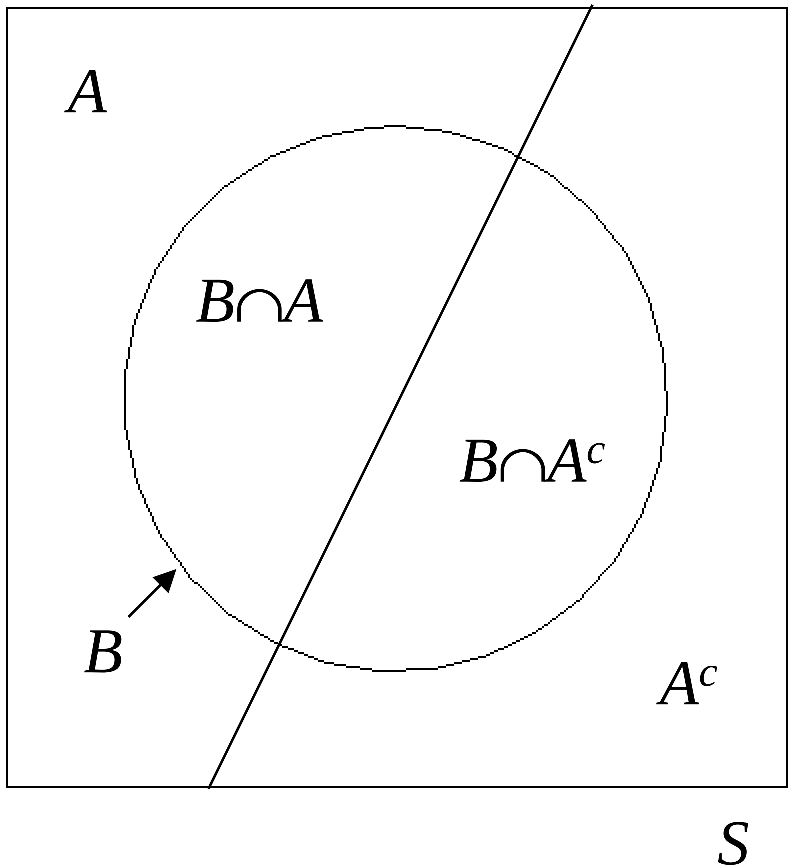


Pistetodennäköisyysfunktion johto 3/4

- r:n alkion joukosta A voidaan poimia x alkiota *riippumatta* siitä, mitkä $n - x$ alkiota poimitaan $(N - r)$:n alkion joukosta A^c.
- *Kertolaskuperiaatteen* nojalla n alkiota voidaan poimia joukosta S niin, että saadaan r alkiota joukosta A ja $(N - r)$ alkiota joukosta A^c

$$\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}$$

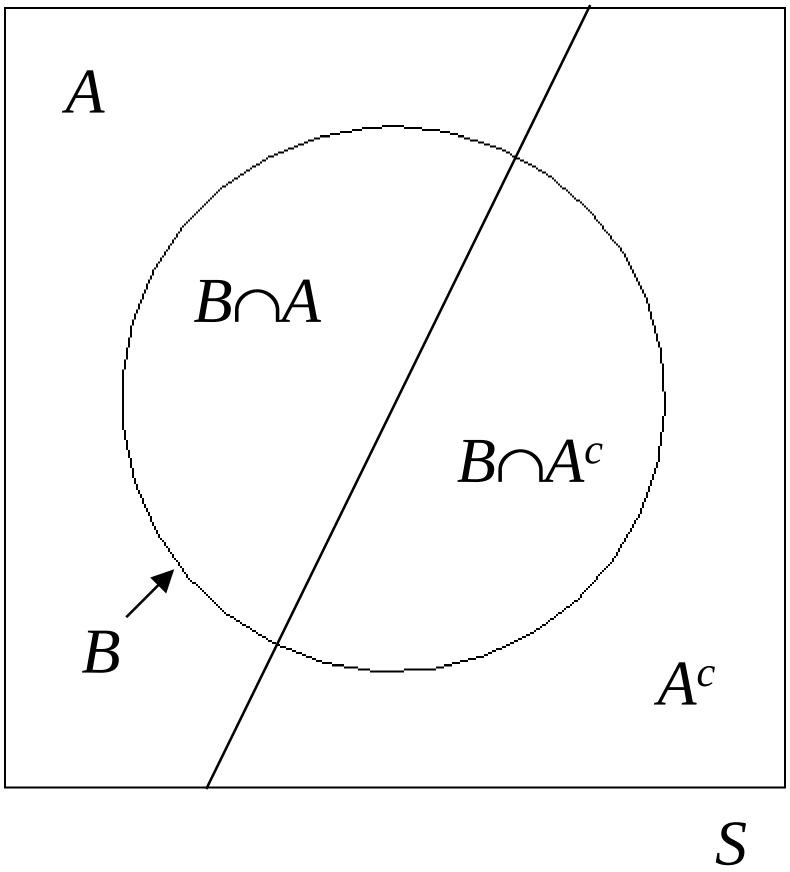
eri tavalla.



Pistetodennäköisyysfunktion johto 4/4

- Soveltamalla *klassisen todennäköisyyden* määritelmää saadaan:

$$\Pr(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$



Odotusarvo, varianssi ja standardipoikkeama

- Olkoon

$$X \sim \mathrm{HyperGeom}(N, r, n)$$

- **Odotusarvo**:

$$\mathrm{E}(X) = n\frac{r}{N}$$

- **Varianssi** ja **standardipoikkeama**:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = n\frac{r}{N}\left(1-\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$\mathrm{D}(X) = \sqrt{n\frac{r}{N}\left(1-\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

Odotusarvon johto 1/3

- Olkoon

$$X \sim \mathrm{HyperGeom}(N, r, n)$$

- Koska

$$x\binom{r}{x} = x\frac{r!}{x!(r-x)!} = r\frac{(r-1)!}{(x-1)!(r-x)!} = r\binom{r-1}{x-1}$$

niin

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=0}^{n} xf(x) = \sum_{x=0}^{n} x\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = r\sum_{x=1}^{n}\frac{\binom{r-1}{x-1}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Odotusarvon johto 2/3

- Koska

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N}{n} \cdot \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} = \frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}$$

niin

$$\mathrm{E}(X) = r\sum_{x=1}^{n} \frac{\binom{r-1}{x-1}\binom{N-r}{n-x}}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}} = \frac{nr}{N}\sum_{x=1}^{n} \frac{\binom{r-1}{x-1}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N-1}{n-1}} = \frac{nr}{N}$$

Odotusarvon johto 3/3

- Kalvon 2/3 yhtälöketjun viimeinen yhtälö perustuu siihen, että

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{\binom{r-1}{x-1}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N-1}{n-1}} = 1$$

- Tämä seuraa siitä, että summassa lasketaan yhteen *kaikki* hypergeometrisen jakauman

  HyperGeom(N – 1, r – 1, n – 1)

  pistetodennäköisyydet

$$f(x) = \frac{\binom{r-1}{x-1}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N-1}{n-1}}$$

Odotusarvon ja varianssin ominaisuuksia 1/3

- Olkoon

$$X \sim \text{HyperGeom}(N, r, n).$$

- Hypergeometrisen jakauman odotusarvo on

$$\mathrm{E}(X) = n\frac{r}{N}$$

- Odotusarvo on *suoraan verrannollinen* sekä perusjoukon *S osajoukon B* (= otos) *alkioiden lukumäärään* (= n) että *tyypin A alkioiden lukumäärään perusjoukossa S* (= r).
- Odotusarvo on *kääntäen verrannollinen perusjoukon S alkioiden lukumäärään* (= N).

Odotusarvon ja varianssin ominaisuuksia 2/3

- Olkoon perusjoukon S alkioiden lukumäärä

$$n(S) = N$$

- Olkoon joukon $A \subset S$ alkioiden lukumäärä

$$n(A) = r$$

- Poimitaan perusjoukosta S *otannalla ilman takaisinpanoa* osajoukko B, jonka alkioiden lukumäärä on

$$n(B) = n$$

- Tällöin *diskreetti satunnaismuuttuja*

$$X = \text{Osajoukkoon } B \text{ tulleiden } A\text{:n alkioiden lukumäärä}$$

noudattaa hypergeometrista jakaumaa parametreilla N, r, n:

$$X \sim \text{HyperGeom}(N, r, n)$$

Odotusarvon ja varianssin ominaisuuksia 3/3

- Todennäköisyys poimia *yksi* alkio joukosta A on

$$\Pr(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{r}{N} = p$$

- Hypergeometrisen jakauman *odotusarvo* voidaan kirjoittaa todennäköisyyden p avulla muotoon

$$\mathrm{E}(X) = np$$

- Hypergeometrisen jakauman *varianssi* voidaan kirjoittaa todennäköisyyden p avulla muotoon

$$\mathrm{D}^2(X) = np(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Pistetodennäköisyysfunktion kuvaaja

- Kuva oikealla esittää hypergeometrisen jakauman

  HyperGeom(100, 12, 20)

  pistetodennäköisyysfunktiota

$$f(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

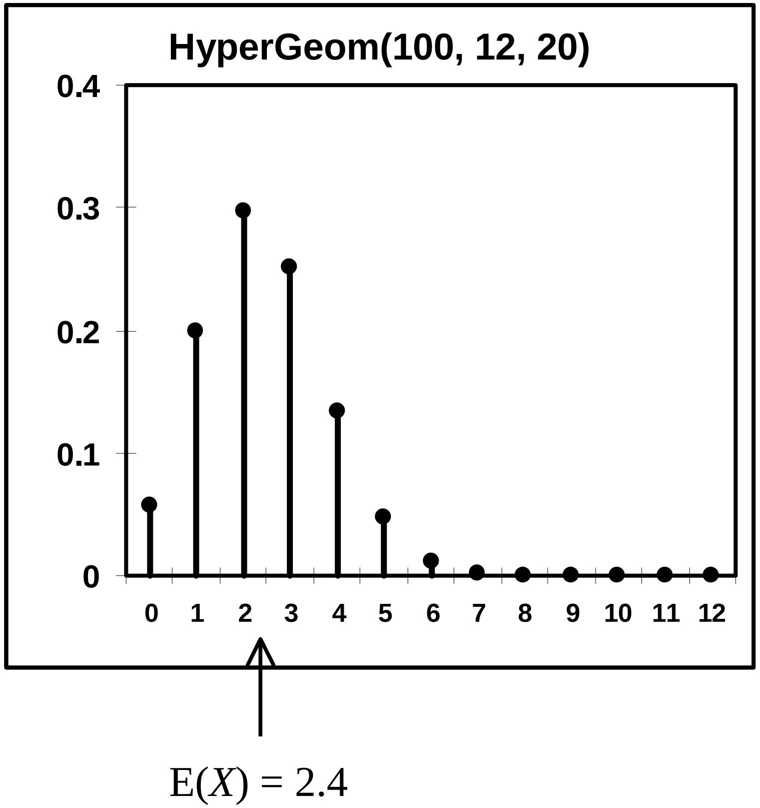
$$N = 100\,,\ r = 12\,,\ n = 20$$

  pisteissä

  $x = 0, 1, 2, \ldots , 12$

- Jakauman *odotusarvo*:

$$\mathrm{E}(X) = n\frac{r}{N} = 2.4$$



Hypergeometrinen jakauma ja otanta ilman takaisinpanoa 1/5

- Olkoon perusjoukon S alkioiden lukumäärä

$$n(S) = N$$

- *Poimitaan* perusjoukosta S *satunnaisesti osajoukko B*, jonka alkioiden lukumäärä on

$$n(B) = n$$

käyttämällä poiminnassa *otantaa ilman takaisinpanoa*.

Hypergeometrinen jakauma ja otanta ilman takaisinpanoa 2/5

- **Otanta ilman takaisinpanoa**:

  (i) Perusjoukosta *S* poimitaan alkiot osajoukkoon *B* yksi kerrallaan *arpomalla*.

  (ii) Poimittuja alkioita **ei palauteta** takaisin perusjoukkoon *S*.

  (iii) Kun otokseen poimitaan alkiota k, $k = 1, 2, \ldots , n$ *jokaisella perusjoukossa S jäljellä olevalla alkiolla on sama todennäköisyys*

  $$1/(N - k + 1)$$

  tulla poimituksi osajoukkoon *B*.

- Osajoukko *B* muodostaa **yksinkertaisen satunnais-otoksen** perusjoukosta *S*.

Hypergeometrinen jakauma ja otanta ilman takaisinpanoa 3/5

- Otannassa ilman takaisinpanoa arvonta voidaan toteuttaa seuraavalla tavalla:

  (1) Pannaan *uurnaan* jokaista perusjoukon *S* alkiota vastaava arpalippu.

  (2) *Sekoitetaan* arvat huolellisesti.

  (3) *Nostetaan* uurnasta arpalippu, jota vastaava alkio valitaan otokseen *B*.

  (4) **Ei palauteta** nostettua arpalippua uurnaan.

  (5) Palataan vaiheeseen (3), kunnes haluttu otoskoko *n* on saavutettu.

Hypergeometrinen jakauma ja otanta ilman takaisinpanoa 4/5

- Huomautuksia otannasta ilman takaisinpanoa:

(i) Perusjoukon S alkion todennäköisyys tulla valituksi otokseen *muuttuu* poiminnan aikana.

(ii) Jokaisella perusjoukon S samankokoisella *osajoukolla* on kuitenkin *sama* todennäköisyys tulla valituksi otokseksi.

(iii) Sama perusjoukon S alkio voi tulla valituksi *vain kerran* otokseen.

Hypergeometrinen jakauma ja otanta ilman takaisinpanoa 5/5

- Olkoon A perusjoukon S osajoukko, jonka alkioiden lukumäärä on

$$n(A) = r$$

- Todennäköisyys poimia *yksi* alkio joukosta A on

$$\Pr(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{r}{N} = p$$

- Otannassa takaisinpanolla otokseen, jonka koko on n, poimittujen A-tyyppisten alkioiden lukumäärä X on diskreetti satunnaismuuttuja, joka noudattaa *hypergeometristä jakaumaa parametreilla* N, r, n:

$$X \sim \text{HyperGeom}(N, r, n)$$

Hypergeometrinen jakauma *vs* binomijakauma 1/3

- Hypergeometrisen jakauman todennäköisyydet ovat lähellä binomitodennäköisyyksiä, jos *otantasuhde*

$$\frac{n}{N} \approx 0$$

- Otantasuhde ≈ 0, jos otoskoko n on *pieni* perusjoukon kokoon N nähden.

Hypergeometrinen jakauma *vs* binomijakauma 2/3

- Olkoon

$$X \sim \text{HyperGeom}(N, r, n)$$

- Merkitään $p = r/N$, jolloin $r = Np$.
- Siten

$$X \sim \text{HyperGeom}(N, Np, n)$$

- Annetaan $N \to +\infty$.
- Tällöin hypergeometrisen jakauman HyperGeom(N, Np, n) pistetodennäköisyydet *lähestyvät* binomijakauman Bin(n, p) pistetodennäköisyyksiä:

$$\lim_{N \to +\infty} f_{\text{HyperGeom}(N,Np,n)}(x) = f_{\text{Bin}(n,p)}(x) \text{ , } x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Hypergeometrinen jakauma *vs* binomijakauma 3/3

- Hypergeometrisen jakauman ja binomijakauman yhteys näkyy myös siinä, että jakaumilla on *sama* odotusarvo ja varianssit *eroavat vain multiplikatiivisella tekijällä*

$$\frac{N-n}{N-1}$$

jota sanotaan *äärellisen perusjoukon korjaustekijäksi*.

- Korjaustekijä vaikuttaa hypergeometrisen jakauman varianssiin sitä *vähemmän* mitä *pienempi* on otantasuhde n/N:

$$\frac{N-n}{N-1} \approx 1 \text{ , jos } \frac{n}{N} \approx 0$$

Otanta takaisinpanolla *vs* otanta ilman takaisinpanoa

- *Binomijakauma* muodostaa todennäköisyysmallin otannalle *takaisinpanolla*.
- *Hypergeometrinen* jakauma muodostaa todennäköisyys-mallin otannalle *ilman takaisinpanoa*.
- *Ero* otannan takaisinpanolla ja otannan ilman takaisin-panoa välillä *on merkityksetön*, jos *otantasuhde* n/N on *pieni* tai perusjoukko on *ääretön*.
- Käytännössä otanta tehdään lähes aina *ilman takaisin-panoa*, mutta *laskutoimituksissa* käytetään silti usein kaavoja, jotka perustuvat otantaan *takaisinpanolla*.
- Edellä esitetyn mukaan tästä johtuva *virhe on* kuitenkin yleensä *merkityksetön*.

Diskreettejä jakaumia

Diskreetti tasainen jakauma
Bernoulli-jakauma
Binomijakauma
Geometrinen jakauma
Negatiivinen binomijakauma
Hypergeometrinen jakauma
>> Poisson-jakauma

Poisson-jakauma

Avainsanat

Binomijakauma
Odotusarvo
Pistetodennäköisyysfunktio
Poisson-jakauma
Standardipoikkeama
Varianssi

Poisson-jakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio 1/3

- Toistetaan *samaa satunnaiskoetta*.
- Oletetaan, että toistot ovat toisistaan *riippumattomia*.
- Tarkastellaan jonkin *tapahtuman* A sattumista toistojen aikana.
- Oletetaan, että A-tapahtumien *keskimääräinen lukumäärä aika*- tai *tilavuusyksikköä* kohden on λ.
- Määritellään *diskreetti satunnaismuuttuja* X:

X = Tapahtuman A esiintymisten lukumäärä aika- tai tilavuusyksikköä kohden

Poisson-jakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio 2/3

- Jos tietyt oletukset pätevät (ks. >), satunnaismuuttujan X **pistetodennäköisyysfunktio** on muotoa

$$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \lambda > 0$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots$$

- Sanomme, että satunnaismuuttuja X noudattaa **Poisson-jakaumaa parametrinaan λ.**
- Merkintä:

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

Poisson-jakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio 3/3

- Huomautus:

Funktio $f(x)$ määrittelee todennäköisyysjakauman, koska *eksponenttifunktion määritelmän* mukaan

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

Pistetodennäköisyysfunktion johto 1/3

- Tarkastellaan jonkin tapahtuman A sattumista saman satunnaiskokeen toistojen aikana.
- Oletukset:

(1) Toistot ovat toisistaan *riippumattomia*.

(2) Pr(Yksi tapahtuma A *lyhyellä aikavälillä* dt) = νdt

(3) Aikaväli on dt on *niin lyhyt*, että todennäköisyys

Pr(k kpl tapahtumia A aikavälillä dt, $k > 1$)

on häviävän pieni eli kertaluokkaa $o(t)$.

- Merkitään:

$f(x; t)$ = Pr(x kpl tapahtumia A aikavälillä $[0, t]$)

Pistetodennäköisyysfunktion johto 2/3

- Oletusten (1)-(3) pätiessä aikavälillä

  $[0, t + dt]$

  voi sattua x kpl tapahtumia A kahdella *toisensa poissulkevalla tavalla* (tn = todennäköisyys):

  (1) x kpl tapahtumia A ajanhetkeen t mennessä; $tn = f(x; t)$
  Ei tapahtumia A aikavälillä dt; $tn = 1 - \nu dt$
  Lisäksi nämä ovat tapahtumina toisistaan *riippumattomia*.

  (2) $(x - 1)$ kpl tapahtumia A ajanhetkeen t mennessä; $tn = f(x - 1; t)$
  Yksi tapahtuma A aikavälillä dt; $tn = \nu dt$
  Lisäksi nämä ovat tapahtumina toisistaan *riippumattomia*.

Pistetodennäköisysfunktion johto 3/3

- *Riippumattomien tapahtumien tulosäännön* ja *toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön* mukaan
  $$f(x;\, t + dt) = f(x;\, t)(1 - \nu dt) + f(x - 1;\, t)\nu dt$$
- Saadaan *erotusosamäärä*
  $$\frac{f(x;t+dt) - f(x;t)}{dt} = \nu\left[f(x-1;t) - f(x;t)\right]$$
- Antamalla $dt \to 0$, saadaan (x:n suhteen) *differenssiyhtälö*
  $$\frac{df(x;t)}{dt} = \nu\left[f(x-1;t) - f(x;t)\right]$$
- Voidaan osoittaa, että tämän differenssiyhtälön *ratkaisu* on muotoa
  $$f(x) = \frac{e^{-\nu t}(\nu t)^x}{x!}\,,\ x = 0, 1, 2, \ldots$$
- Merkitsemällä $\nu t = \lambda$ saadaan *Poisson-jakauman pistetodennäköisyys-funktio*.

Odotusarvo, varianssi ja standardipoikkeama

- Olkoon

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

- **Odotusarvo**:

$$\text{E}(X) = \lambda$$

- **Varianssi** ja **standardipoikkeama**:

$$\text{Var}(X) = \text{D}^2(X) = \lambda$$

$$\text{D}(X) = \sqrt{\lambda}$$

Odotusarvon johto

- Olkoon

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

- Siten

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^{x}}{x!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

Poisson-jakauma

Pistetodennäköisyysfunktion kuvaaja

- Kuva oikealla esittää Poisson-jakauman

  Poisson(5)

  pistetodennäköisyysfunktiota

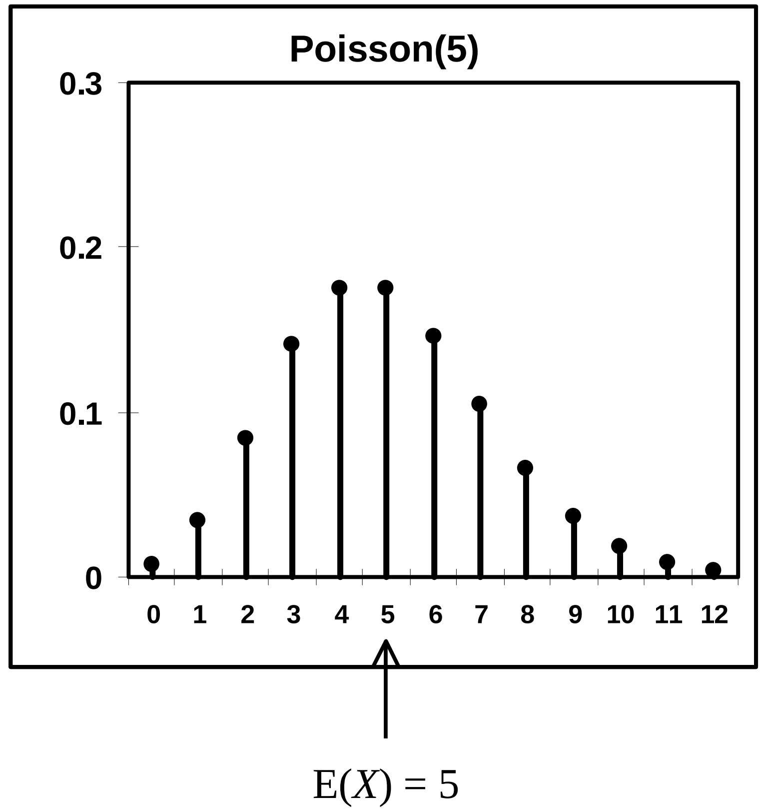
  $$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

  $$\lambda = 5$$

  pisteissä

  $x = 0, 1, 2, \ldots , 12$
- Jakauman *odotusarvo*:

  $$\mathrm{E}(x) = \lambda = 5$$



Poisson-jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma 1/2

- Olkoot

$$X_1, X_2, \dots , X_k$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat *Poisson-jakaumia* parametrein $\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_k$:

$$X_1, X_2, \dots , X_k \perp$$

$$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i) , i = 1, 2, \dots , k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots , X_k$ **summa**

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

noudattaa Poisson-jakaumaa parametrilla $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$:

$$Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)$$

Poisson-jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma 2/2

- Tulos perustellaan luvussa **Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat**.
- Huomautuksia:
  - Jokaisella Poisson-jakaumalla saa olla *eri* parametri.
  - Tarkoitamme *satunnaismuuttujien riippumattomuudella* sitä, että yhdenkään satunnaismuuttujan saamat arvot eivät riipu siitä, mitä arvoja muut satunnaismuuttujat saavat; käsite täsmennetään luvussa **Kaksiulotteiset todennäköisyysjakaumat**.

Binomijakauma ja Poisson-jakauma 1/3

- Binomitodennäköisyydet ovat lähellä Poisson-todennäköisyyksiä, jos n on suuri ja p on pieni.
- Siten Poisson-jakauma kuvaa *harvinaisten tapahtumien todennäköisyyksiä pitkissä toistokoesarjoissa*.

Binomijakauma ja Poisson-jakauma 2/3

- Olkoon

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$

- Olkoon $p = \lambda/n$, jolloin $\lambda = np$.
- Annetaan $n \to +\infty$ ja $p \to 0$ niin, että $np = \lambda$.
- Tällöin binomijakauman $\mathrm{Bin}(n, p)$ pistetodennäköisyydet *lähestyvät* Poisson-jakauman $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ pistetodennäköisyyksiä:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ np=\lambda}} f_{\mathrm{Bin}(n,p)}(x) = f_{\mathrm{Poisson}(\lambda)}(x)\ ,\ x = 0, 1, 2, \ldots$$

- Huomautus:

Ehto $np = \lambda$ voidaan korvata *lievemmällä* ehdolla $np \to \lambda$.

Binomijakauma ja Poisson-jakauma 3/3

- Poisson-jakauman ja binomijakauman välinen yhteys näkyy myös siinä, että jakaumien odotusarvot ovat lähellä toisiaan, jos *n* on *suuri* ja *p* on *pieni*:

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \lambda \approx np$$

- Tällöin myös jakaumien varianssit ovat lähellä toisiaan:

$$\mathrm{D}^2(X) = \mu = \lambda = np \approx npq$$

koska

$$p \approx 0 \Rightarrow q = 1 - p \approx 1$$

Binomijakauma ja Poisson-jakauma: Todistus 1/3

- Olkoon $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.
- Tällöin

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \; q = 1 - p \;, \; x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

- Oletetaan, että

$$n \to +\infty$$

ja samaan aikaan

$$p \to 0$$

niin, että

$$np = \lambda$$

jossa $\lambda > 0$ on *vakio*.

Binomijakauma ja Poisson-jakauma: Todistus 2/3

- Ottamalla huomioon, että $np = \lambda$ ja $q = 1 - p$, voimme kirjoittaa

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{n^x x!}(np)^x(1-p)^{n-x} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{n^x}\cdot\frac{\lambda^x}{x!}\cdot\frac{(1-p)^n}{(1-p)^x} \\
&= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\cdot\frac{\lambda^x}{x!}\cdot\frac{(1-p)^n}{(1-p)^x}
\end{aligned}
$$

Binomijakauma ja Poisson-jakauma: Todistus 3/3

- Kirjoitetaan

$$(1-p)^n = [(1-p)^{-1/p}]^{-np} = [(1-p)^{-1/p}]^{-\lambda}$$

- Luvun e määritelmän mukaan

(1) $$\lim_{p \to 0} [(1-p)^{-1/p}]^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

- Lisäksi pätee:

(2) $$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) = 1$$

(3) $$\lim_{p \to 0} (1-p)^x = 1$$

- Yhdistämällä tulokset (1), (2) ja (3) saadaan haluttu lopputulos:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0 \\ np = \lambda}} f_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

Poisson-prosessi

- Tarkastellaan jonkin tapahtuman A sattumista *jatkuvalla* aikavälillä, jonka pituus on t aikayksikköä.
- Määritellään *diskreetti satunnaismuuttuja* X:

X = Niiden tapahtumien lukumäärä, jotka sattuvat aikavälillä $[0, t]$

- Sopivin oletuksin (ks. edellä) satunnaismuuttuja X noudattaa **Poisson-jakaumaa parametrinaan** $\boldsymbol{\nu t}$:

$$X \sim \text{Poisson}(\nu t)$$

- Parametri νt kuvaa *tapahtumaintensiteettiä* eli *tapahtumien keskimääräistä lukumäärää aikavälillä, jonka pituus on t aikayksikköä*.

Poisson-prosessi ja eksponenttijakauma

- Olkoon

$$X \sim \text{Poisson}(\nu t)$$

- Määritellään *jatkuva satunnaismuuttuja Y*:

$$\begin{aligned} Y &= \text{Ensimmäisen tapahtuman sattumisaika} \\ &= \text{Tapahtumien väliaika} \end{aligned}$$

- Satunnaismuuttuja Y noudattaa **eksponenttijakaumaa parametrinaan** ν.

Ks. tarkemmin lukua **Jatkuvia jakaumia.**

Poisson-prosessi: Esimerkki

- Tarkastellaan *radioaktiivista hajoamista*.
- Olkoon satunnaismuuttuja

  X = aikavälillä $[0, t]$ hajoavien atomien lukumäärä
- Tällöin

  $X \sim \mathrm{Poisson}(\nu t)$

  jossa ν on *alkuainekohtainen* parametri, joka kuvaa *keskimäärin aikayksikköä kohden hajoavien atomien lukumäärää*.