
Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto

Kokonaistodennäköisyyden kaava

Bayesin kaava

Kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavojen systeemiteoreettinen tulkinta

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Mitä opimme?

- Tarkastelemme tässä luvussa kahta hyödyllistä todennäköisyyslaskennan kaavaa, **kokonaistodennäköisyyden kaavaa** ja **Bayesin kaavaa**.
- Molemmille kaavoille esitetään todistus, mutta lisäksi kaavoja motivoidaan *sovellusesimerkkien* avulla.
- Bayesin kaavan yhteydessä määritellään ns. *Bayeslaisessa tilastotieteessä* keskeiset **priori-todennäköisyyden** ja **posteriori-todennäköisyyden** käsitteet.
- Sekä kokonaistodennäköisyyden kaavalle että Bayesin kaavalle esitetään myös **systemiteoreettiset** tulkinnat.

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Esitiedot

- Esitiedot: ks. seuraavia lukuja:
 - Todennäköisyys ja sen määritteleminen**
 - Todennäköisyyden peruslaskusäännöt**

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava

- >> Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto
- Kokonaistodennäköisyyden kaava
- Bayesin kaava
- Kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavojen systeemiteoreettinen tulkinta

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto

Avainsanat

Bayesin kaava

Ehdollinen todennäköisyys

Indusoitu ositus

Kokonaistodennäköisyyden kaava

Laadunvalvonta

Ositus

Toisensa poissulkevat tapahtumat

Tulosääntö

Yhteenlaskusääntö

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto

Esimerkki laadunvalvonnasta 1/10

- Ruuvitehtaalla on kaksi konetta A ja B, joilla tehdään samanlaisia ruuveja.
- A- ja B-koneen valmistamat ruuvit sekoitetaan ja pakataan laatikoihin.
- Koska A-kone toimii hitaammin, laatikoihin tulee A- ja B-koneiden valmistamia ruuveja *suhteessa 3:5*.
- Osa kummankin koneen valmistamista ruuveista on *viallisia*:
 - (i) 5 % A-koneen valmistamista ruuveista on viallisia.
 - (ii) 8 % B-koneen valmistamista ruuveista on viallisia.

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto

Esimerkki laadunvalvonnasta 2/10

- Valitaan *satunnaisesti* laatikollinen ruuveja tutkittavaksi.
- Poimitaan valitusta laatikosta *satunnaisesti* 1 ruuvi tutkittavaksi.
- Kysymyksiä:
 - (i) Mikä on todennäköisyys, että poimittu *ruuvi on viallinen*?
 - (ii) Mikä on todennäköisyys, että ruuvin on valmistanut A-kone, *jos ruuvi osoittautuu vialliseksi*?
 - (iii) Mikä on todennäköisyys, että ruuvin on valmistanut B-kone, *jos ruuvi osoittautuu vialliseksi*?

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto

Esimerkki laadunvalvonnasta 3/10

- Merkintöjä:

Otosavaruus S muodostuu laatikollisesta ruuveja

Tapahtuma A = ”Ruuvien on valmistanut A-kone”

Tapahtuma B = ”Ruuvien on valmistanut B-kone”

Tapahtuma V = ”Ruuvi on viallinen”

- **Seuraavat todennäköisyydet tunnetaan:**

$$\Pr(A) = 3/8 \quad \Pr(V|A) = 0.05$$

$$\Pr(B) = 5/8 \quad \Pr(V|B) = 0.08$$

- **Seuraavia todennäköisyyksiä kysytään:**

$$\Pr(V)$$

$$\Pr(A|V)$$

$$\Pr(B|V)$$

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto

Esimerkki laadunvalvonnasta 4/10

- Tapahtumat A ja B muodostavat *otosavaruuden* S **osituksen**:

- (i) A ja B ovat *epätyhjiä*:

$$A \neq \emptyset \text{ ja } B \neq \emptyset$$

- (ii) A ja B ovat *pistevieraita*:

$$A \cap B = \emptyset$$

- (iii) Joukkojen A ja B *yhdisteenä* saadaan *perusjoukko* S :

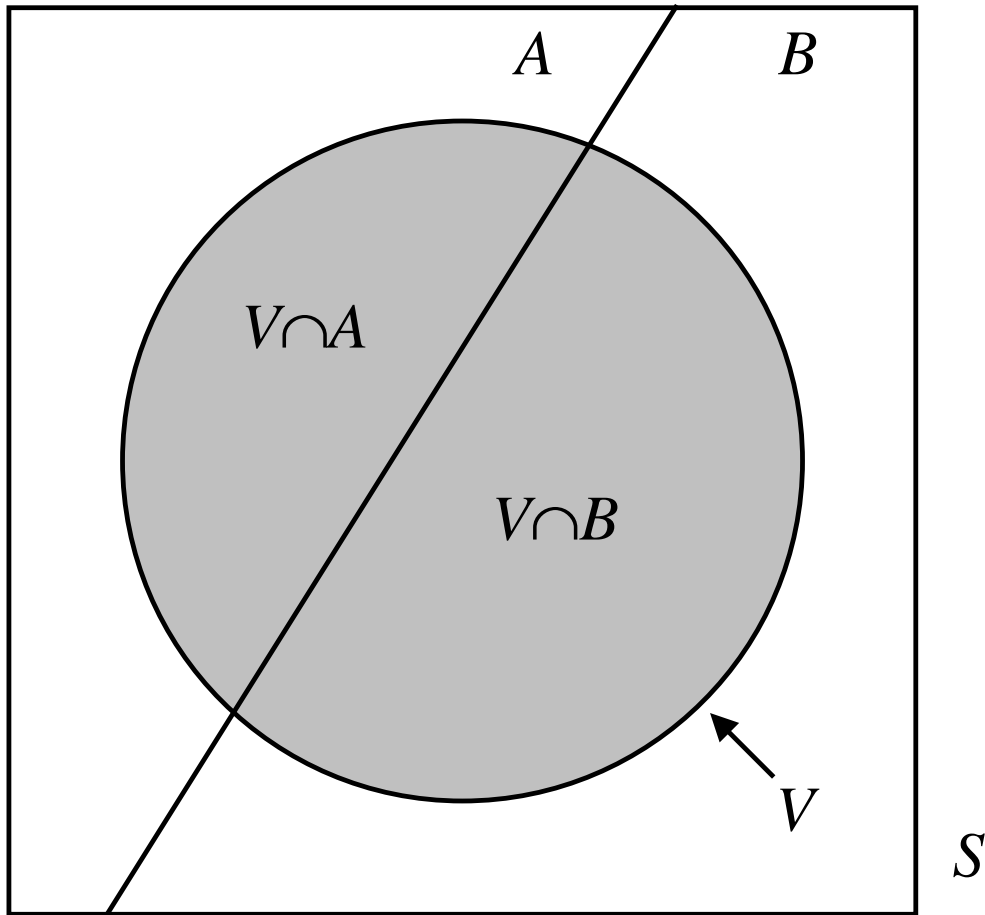
$$S = A \cup B$$

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto

Esimerkki laadunvalvonnasta 5/10

- Ositus $S = A \cup B$ **indusoi osituksen** tapahtumaan V , millä tarkoitetaan seuraavaa:
 - (i) Jos V on epätyhjä eli $V \neq \emptyset$, ainakin toinen joukoista $V \cap A$ ja $V \cap B$ on *epätyhjä*:
$$V \cap A \neq \emptyset \text{ tai } V \cap B \neq \emptyset$$
 - (ii) $V \cap A$ ja $V \cap B$ ovat *pistevieraita*:
$$(V \cap A) \cap (V \cap B) = \emptyset$$
koska $A \cap B = \emptyset$
 - (iii) Joukkojen $V \cap A$ ja $V \cap B$ *yhdisteenä* saadaan joukko V :
$$V = (V \cap A) \cup (V \cap B)$$

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto
Esimerkki laadunvalvonnasta 6/10



Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto

Esimerkki laadunvalvonnasta 7/10

- Toisensa poissulkevien tapahtumien **yhteenlaskusäännön** mukaan:

$$\Pr(V) = \Pr(V \cap A) + \Pr(V \cap B) \quad (1)$$

- **Yleisen tulosäännön** mukaan:

$$\Pr(V \cap A) = \Pr(A)\Pr(V|A) \quad (2)$$

$$\Pr(V \cap B) = \Pr(B)\Pr(V|B) \quad (3)$$

- Sijoittamalla lausekkeet (2) ja (3) kaavaan (1) saadaan todennäköisyydeksi, että satunnaisesti poimittu ruuvi on viallinen:

$$\begin{aligned} \Pr(V) &= \Pr(A)\Pr(V|A) + \Pr(B)\Pr(V|B) \\ &= (3/8) \times 0.05 + (5/8) \times 0.08 \\ &= 0.06875 \\ &= 6.875 \% \end{aligned}$$

- Todennäköisyyden $\Pr(V)$ lauseketta sanotaan **kokonais-**
todennäköisyyden kaavaksi.

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto

Esimerkki laadunvalvonnasta 8/10

- **Ehdollisen todennäköisyyden** määritelmän perusteella

$$\Pr(A|V) = \Pr(V \cap A) / \Pr(V) \quad (4)$$

$$\Pr(B|V) = \Pr(V \cap B) / \Pr(V) \quad (5)$$

- **Yleisen tulosäännön** mukaan

$$\Pr(V \cap A) = \Pr(V|A)\Pr(A) \quad (6)$$

$$\Pr(V \cap B) = \Pr(V|B)\Pr(B) \quad (7)$$

- Edellä on todettu, että

$$\Pr(V) = \Pr(A)\Pr(V|A) + \Pr(B)\Pr(V|B) \quad (8)$$

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto

Esimerkki laadunvalvonnasta 9/10

- Sijoittamalla lausekkeet (6) ja (8) kaavaan (4) saadaan **ehdolliseksi todennäköisyydeksi** $\Pr(A|V)$:

$$\begin{aligned}\Pr(A|V) &= \frac{\Pr(V \cap A)}{\Pr(V)} \\ &= \frac{\Pr(A) \Pr(V|A)}{\Pr(A) \Pr(V|A) + \Pr(B) \Pr(V|B)} \\ &= \frac{\frac{3}{8} \times 0.05}{\frac{3}{8} \times 0.05 + \frac{5}{8} \times 0.08} = \frac{3}{11} = 0.27\end{aligned}$$

- Ehdollisen todennäköisyyden $\Pr(A|V)$ lauseketta sanotaan **Bayesin kaavaksi**.

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto

Esimerkki laadunvalvonnasta 10/10

- Sijoittamalla lausekkeet (7) ja (8) kaavaan (5) saadaan **ehdolliseksi todennäköisyydeksi** $\Pr(B|V)$:

$$\begin{aligned}\Pr(B|V) &= \frac{\Pr(V \cap B)}{\Pr(V)} \\ &= \frac{\Pr(B) \Pr(V|B)}{\Pr(A) \Pr(V|A) + \Pr(B) \Pr(V|B)} \\ &= \frac{\frac{5}{8} \times 0.08}{\frac{3}{8} \times 0.05 + \frac{5}{8} \times 0.08} = \frac{8}{11} = 0.73\end{aligned}$$

- Ehdollisen todennäköisyyden $\Pr(B|V)$ lauseketta sanotaan **Bayesin kaavaksi**.

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto

>> Kokonaistodennäköisyyden kaava

Bayesin kaava

Kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavojen systeemiteoreettinen tulkinta

Kokonaistodennäköisyyden kaava

Avainsanat

Indusoitu ositus

Kokonaistodennäköisyyden kaava

Ositus

Riippumattomuus

Toisensa poissulkevat tapahtumat

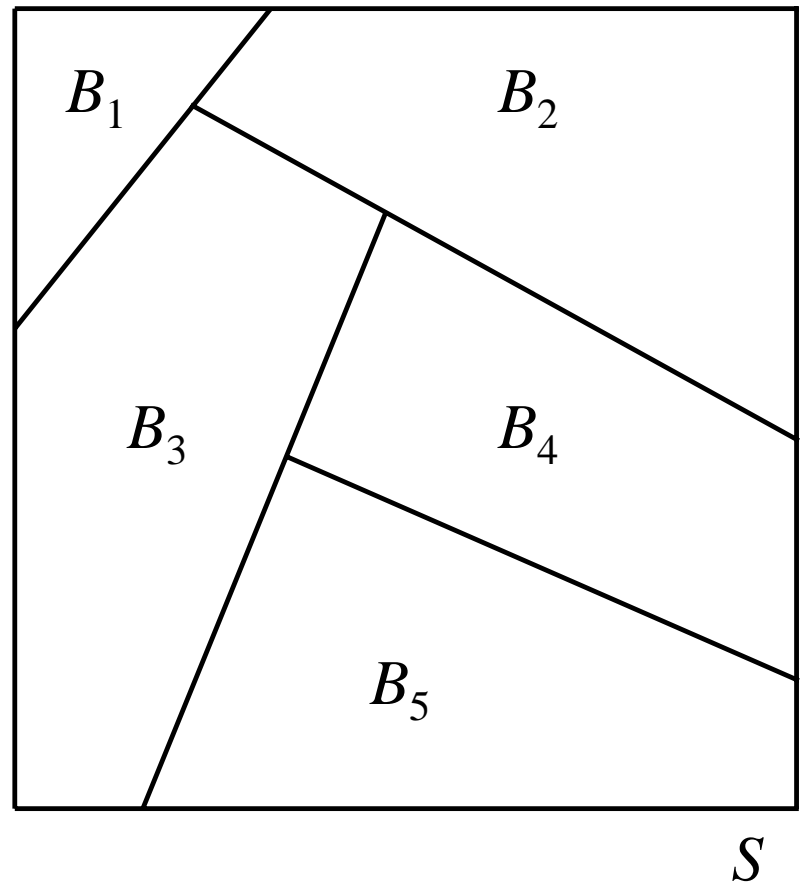
Tulosääntö

Yhteenlaskusääntö

Kokonaistodennäköisyyden kaava

Otosavaruuden ositus

- *Otosavaruuden S osajoukot B_1, B_2, \dots, B_n muodostavat otosavaruuden S osituksen toisensa pois-sulkeviin tapahtumiin, jos*
 - $B_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, n$
 - $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$
 - $S = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$



Otosavaruuden ositus: Kommentteja

- Otosavaruuden S ositus B_1, B_2, \dots, B_n muodostaa avaruuden S alkioiden *luokkajaon*, koska:
 - (i) Joukot B_1, B_2, \dots, B_n ovat *epätyhjiä*.
 - (ii) Joukot B_1, B_2, \dots, B_n ovat *pareittain pistevieraita*.
 - (iii) $S = \cup B_i$
- Jos tapahtumat B_1, B_2, \dots, B_n muodostavat otosavaruuden S osituksen, *täsmälleen yksi* tapahtumista B_1, B_2, \dots, B_n sattuu aina, kun se satunnaisilmiö, jonka tulosvaihtoehtoja otosavaruus S kuvaa, esiintyy.

Otosavaruuden osituksen indusoima ositus

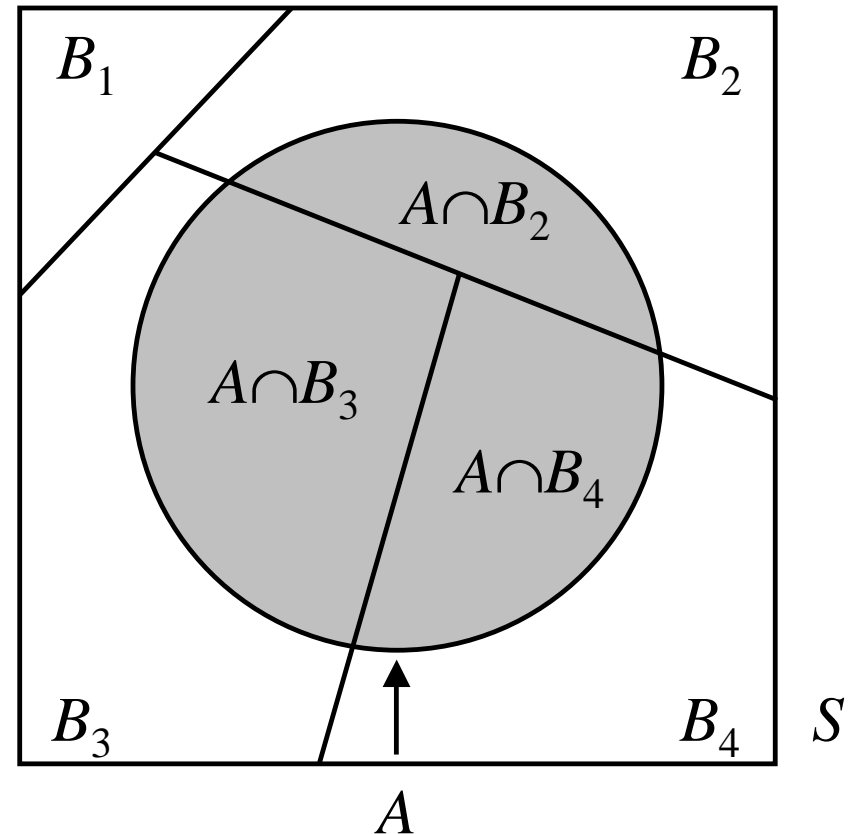
- Olkoon $A \subset S$, $A \neq \emptyset$ otosavaruuden S osajoukko.
- Olkoon B_1, B_2, \dots, B_n otosavaruuden S ositus.
- Ositus B_1, B_2, \dots, B_n **indusoi osituksen** joukkoon

A :

$$(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset, i \neq j$$

ja

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$

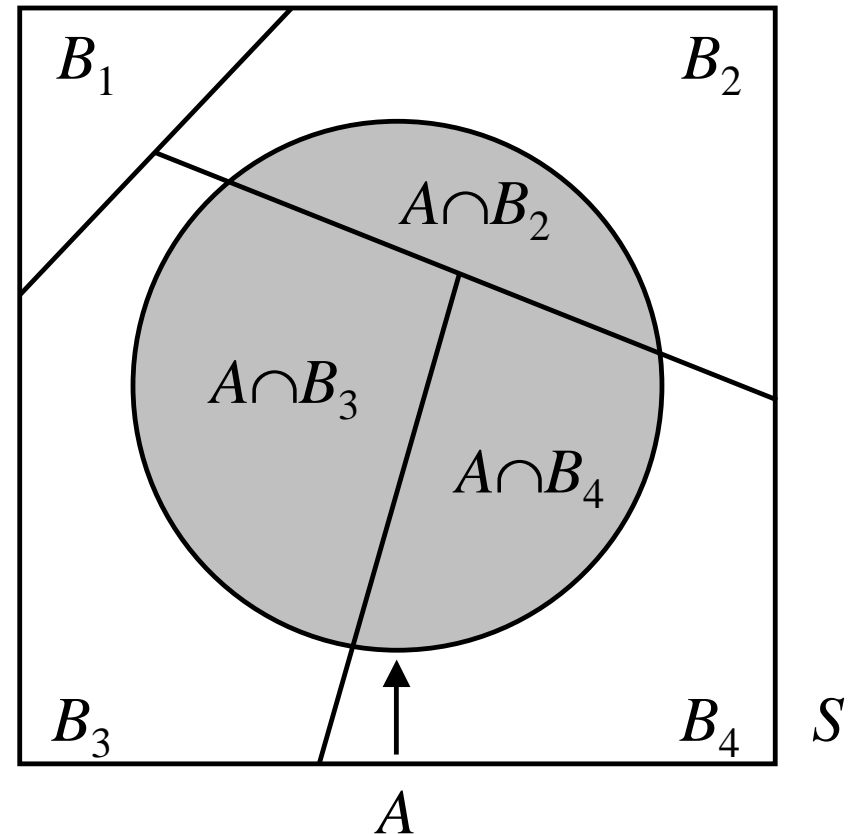


Kokonaistodennäköisyyden kaava:

Määritelmä 1/2

- Olkoon $A \subset S$, $A \neq \emptyset$ otosavaruuden S osajoukko.
- Olkoon B_1, B_2, \dots, B_n otosavaruuden S ositus.
- Olkoon $(A \cap B_1), (A \cap B_2), \dots, (A \cap B_n)$ osituksen B_1, B_2, \dots, B_n indusoima ositus joukkoon A .
- Yhteenlaskusäännön perusteella

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^n \Pr(A \cap B_i) \quad (1)$$



Kokonaistodennäköisyyden kaava:

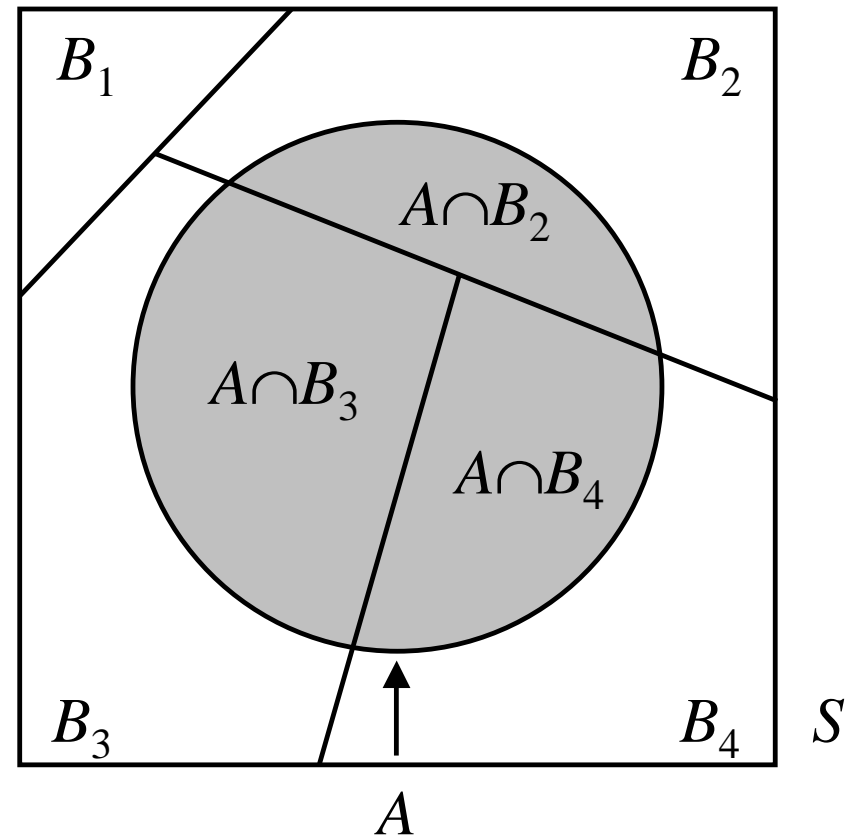
Määritelmä 2/2

- *Yleisen tulosäännön* perusteella

$$\Pr(A \cap B_i) = \Pr(B_i) \Pr(A|B_i)$$
$$i = 1, 2, \dots, n$$

- Sijoittamalla nämä lausekkeet kaavaan (1), saadaan **kokonaistodennäköisyyden** kaava

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^n \Pr(B_i) \Pr(A|B_i)$$



Kokonaistodennäköisyyden kaava: Kommentteja

- *Kokonaistodennäköisyyden kaava* ilmaisee otosavaruuden S osajoukon A todennäköisyyden $\Pr(A)$ otosavaruuden S osituksen B_1, B_2, \dots, B_n määräämien todennäköisyyksien $\Pr(B_i)$ ja ehdollisten todennäköisyyksien $\Pr(A|B_i)$ avulla.
- Kokonaistodennäköisyyden kaava on käyttökelpoinen sellaisissa tilanteissa, joissa todennäköisyydet $\Pr(B_i)$ ja ehdolliset todennäköisyydet $\Pr(A|B_i)$ ovat *tunnettuja*.

Riippumattomuus ja kokonaistodennäköisyyden kaava

- Jos tapahtuma A on *riippumaton* jokaisesta tapahtumasta B_1, B_2, \dots, B_n , kokonaistodennäköisyyden kaavasta *ei ole hyötyä* tapahtuman A todennäköisyyttä määrättäessä.

Kokonaistodennäköisyyden kaava

Riippumattomuus ja

kokonaistodennäköisyyden kaava: Perustelu

- Jos $A \perp B_i, i = 1, 2, \dots, n$ niin

$$\Pr(A \cap B_i) = \Pr(A) \Pr(B_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Tällöin

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \sum_{i=1}^n \Pr(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n \Pr(A) \Pr(B_i) \\ &= \Pr(A) \sum_{i=1}^n \Pr(B_i) \\ &= \Pr(A) \end{aligned}$$

koska

$$\sum_{i=1}^n \Pr(B_i) = 1$$

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto

Kokonaistodennäköisyyden kaava

>> Bayesin kaava

Kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavojen systeemiteoreettinen tulkinta

Bayesin kaava

Avainsanat

Bayesin kaava

Ehdollinen todennäköisyys

Indusoitu ositus

Kokonaistodennäköisyyden kaava

Käänteistodennäköisyys

Ositus

Posteriori-todennäköisyys

Priori-todennäköisyys

Riippumattomuus

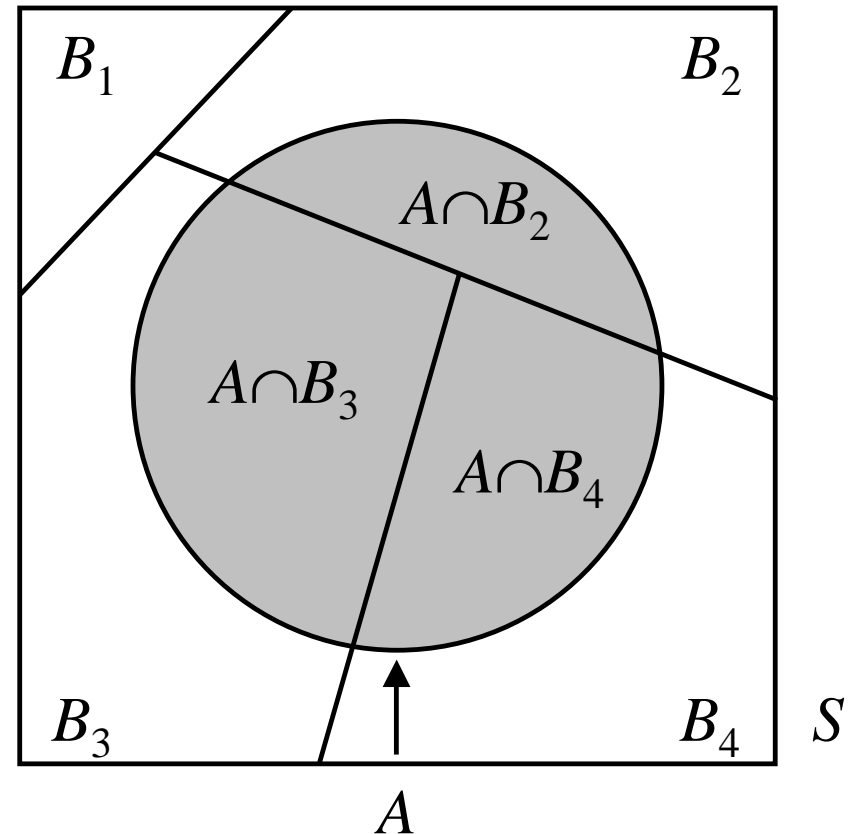
Bayesin kaava

Bayesin kaava:

Määritelmä 1/2

- Olkoon $A \subset S$, $A \neq \emptyset$ otosavaruuden S osajoukko.
- Olkoon B_1, B_2, \dots, B_n otosavaruuden S ositus.
- Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}\Pr(B_i | A) &= \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(A)} \\ &= \frac{\Pr(B_i) \Pr(A | B_i)}{\Pr(A)}\end{aligned}$$



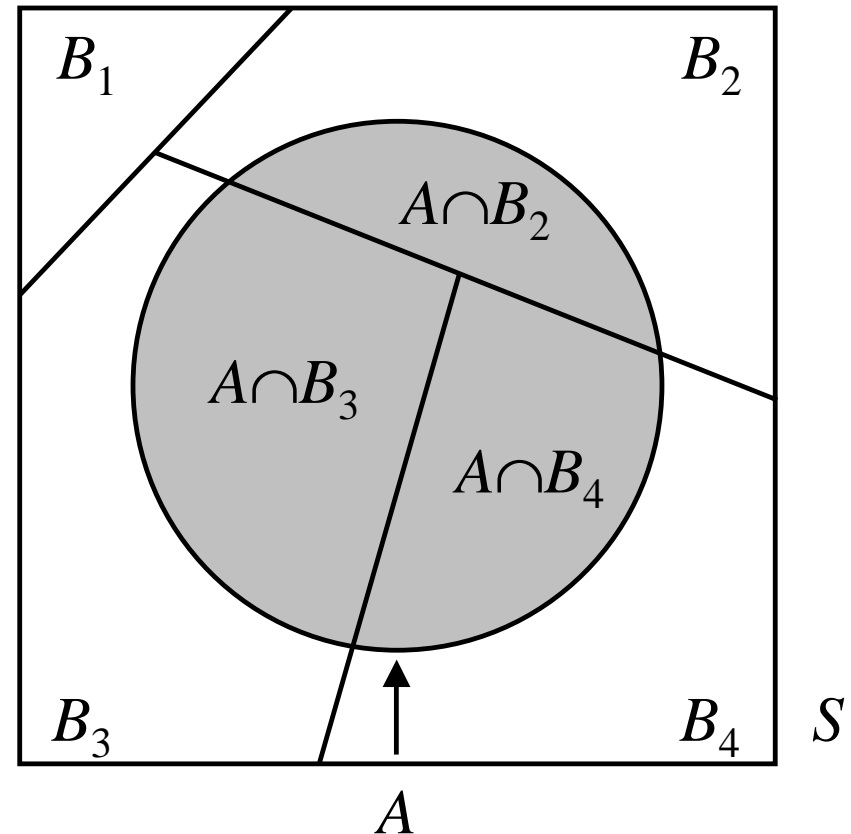
Bayesin kaava

Bayesin kaava:

Määritelmä 2/2

- Soveltamalla nimittäjään kokonaistodennäköisyyden kaavaa saadaan **Bayesin kaava**:

$$\Pr(B_i | A) = \frac{\Pr(B_i) \Pr(A | B_i)}{\sum_{i=1}^n \Pr(B_i) \Pr(A | B_i)}$$



Bayesin kaava: Kommentteja 1/3

- Bayesin kaavan todennäköisyyttä $\Pr(B_i)$ kutsutaan tavallisesti **priori-todennäköisyydeksi**.
prior (lat.), edeltävä, aikaisempi
- Todennäköisyyttä $\Pr(B_i)$ kutsutaan priori-todennäköisyydeksi, koska se kuvaa *ennakkokäsitystä* tapahtuman B_i todennäköisyydestä, *ennen kuin on saatu tietää, että tapahtuma A on sattunut*.

Bayesin kaava: Kommentteja 2/3

- Bayesin kaavan todennäköisyyttä $\Pr(B_i|A)$ kutsutaan tavallisesti **posteriori-todennäköisyyksiksi**.
posterior (lat.), jälkeen tuleva, myöhempi
- Todennäköisyyttä $\Pr(B_i|A)$ kutsutaan posteriori-todennäköisyydeksi, koska se kuvaa sitä *miten ennakkokäsitystä* tapahtuman B_i todennäköisyydestä *kannattaa muuttaa sen jälkeen, kun on saatu tietää, että tapahtuma A on sattunut*.
- Posteriori-todennäköisyyttä $\Pr(B_i|A)$ kutsutaan usein *käänteistodennäköisyydeksi*, koska se on ”käänteinen” *tunnettuun* todennäköisyyteen $\Pr(A|B_i)$ nähden.

Bayesin kaava: Kommentteja 3/3

- Bayesin kaava kertoo miten *ennakkokäsitystä* tapahtuman B_i todennäköisyydestä on järkevää *korjata sen jälkeen, kun tapahtuma A on havaittu*.
- Bayesin kaava kertoo miten *tietoa tapahtuman A sattumisesta voidaan käyttää hyväksi* tapahtuman B_i todennäköisyyden arvioinnissa.
- Bayesin kaava on käyttökelpoinen sellaisissa tilanteissa, joissa todennäköisyydet $\Pr(B_i)$ ja ehdolliset todennäköisyydet $\Pr(A|B_i)$ ovat *tunnettuja*.

Riippumattomuus ja

Bayesin kaava

- Jos tapahtuma A on *riippumaton* jokaisesta tapahtumasta B_1, B_2, \dots, B_n , tieto tapahtuman A sattumisesta *ei muuta priori-todennäköisyyksiä* $\Pr(B_i)$:

Jos $A \perp B_1, B_2, \dots, B_n$, niin

$$\Pr(B_i | A) = \Pr(B_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto

Kokonaistodennäköisyyden kaava

Bayesin kaava

>> Kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavojen systeemiteoreettinen tulkinta

Kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavojen systeemiteoreettinen tulkinta

Avainsanat

Alkutila
Bayesin kaava
Ehdollinen todennäköisyys
Kokonaistodennäköisyyden kaava
Lopputila
Posteriori-todennäköisyys
Priori-todennäköisyys
Systeemi
Verkkodiagrammi
Välitila

Kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavojen systeemiteoreettinen tulkinta

Systemiteoreettinen tulkinta kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavoille 1/4

- Oletetaan, että **systemissä** on *alkutila* L , *välitilat* B_1, B_2, \dots, B_n ja yksi sen *lopputiloista* on A .
- Oletetaan, että *alkutilasta* L voidaan *päästä lopputilaan* A *vain käymällä jossakin välitiloista* B_1, B_2, \dots, B_n .
- Olkoot

$$\Pr(B_i) = \Pr(\text{Käydään välitilassa } B_i)$$

$$\Pr(A|B_i) = \Pr(\text{Välitilasta } B_i \text{ päästään lopputilaan } A)$$

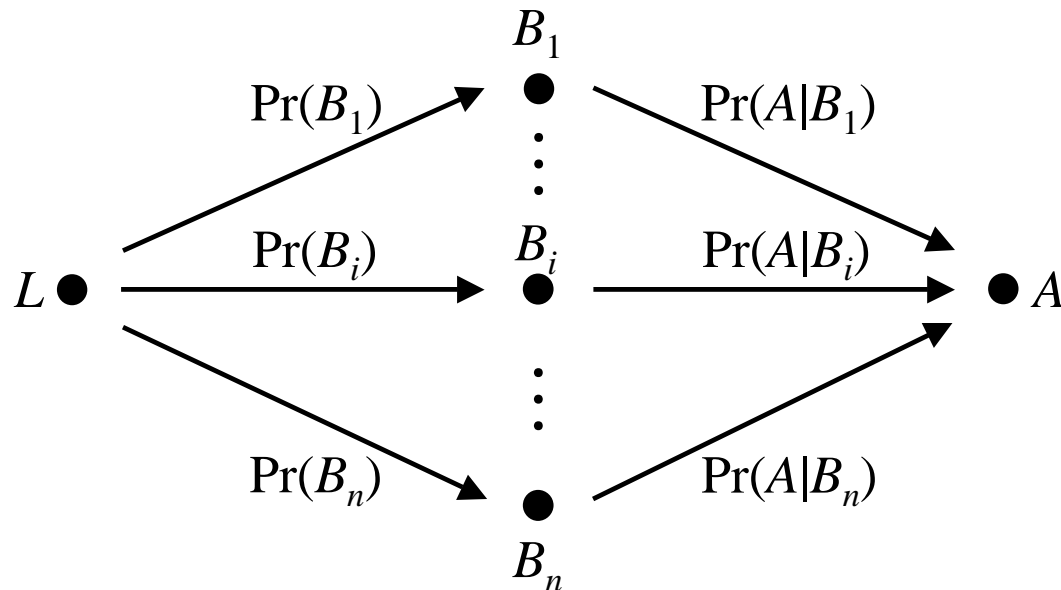
$$\Pr(A) = \Pr(\text{Päästään lopputilaan } A)$$

$$\Pr(B_i|A) = \Pr(\text{Lopputilaan } A \text{ tullaan välitilan } B_i \text{ kautta})$$

Kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavojen systeemiteoreettinen tulkinta

Systemiteoreettinen tulkinta kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavoille 2/4

- Systeemiä voidaan havainnollistaa seuraavalla **verkko-**diagrammilla:



Kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavojen systeemiteoreettinen tulkinta

Systemiteoreettinen tulkinta kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavoille 3/4

- **Kokonaistodennäköisyyden kaavan** mukaan

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^n \Pr(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n \Pr(B_i) \Pr(A|B_i)$$

- $\Pr(A)$ on todennäköisyys sille, että *päästään* lopputilaan A .
- Kokonaistodennäköisyyden kaavan mukaan todennäköisyys $\Pr(A)$ saadaan laskemalla yhteen alkutilasta L lopputilaan A välitilojen B_i , $i = 1, 2, \dots, n$ kautta kulkevien *reittien* todennäköisyydet

$$\Pr(A \cap B_i) = \Pr(B_i) \Pr(A|B_i)$$

Kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavojen systeemiteoreettinen tulkinta

Systemiteoreettinen tulkinta kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavoille 4/4

- **Bayesin kaavan** mukaan

$$\begin{aligned}\Pr(B_i|A) &= \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\sum_{i=1}^n \Pr(A \cap B_i)} \\ &= \frac{\Pr(B_i) \Pr(A|B_i)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(B_i) \Pr(A|B_i)}{\sum_{i=1}^n \Pr(B_i) \Pr(A|B_i)}\end{aligned}$$

- $\Pr(B_i|A)$ on siis *ehdollinen* todennäköisyys sille, että *on käyty* välitilassa B_i , kun *ehtotapahtumana* on se, että *on päästy* lopputilaan A .