

---

Johdatus todennäköisyyslaskentaan  
**Todennäköisyyden aksioomat**

# Todennäköisyyden aksioomat

---

**Todennäköisyyden määrittelemine**

**Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa**

**Suhteellinen frekvenssi, klassinen todennäköisyys ja ehdollinen todennäköisyys**

**Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa**

# Todennäköisyyden aksioomat:

## Mitä opimme? – 1/2

---

- Todennäköisyydelle voidaan esittää seuraavat kolme *naiivia määritelmää*:
  - (i) **Empiirisen todennäköisyyden** määritelmä.
  - (ii) **Klassisen todennäköisyyden** määritelmä.
  - (iii) Todennäköisyys on tapahtuman sattumisen mahdollisuuden **mitta**.
- Yksikään määritelmistä (i)-(iii) ei kuitenkaan täytä *hyvän matemaattisen määritelmän* tunnusmerkkejä.
- Siksi tässä luvussa tarkastellaan **todennäköisyyden aksiomaattista määrittelemistä**.
- **Kolmogorovin aksioomien** mukaan todennäköisyys on **positiivinen, täydellisesti additiivinen ja normeerattu mitta**.

# Todennäköisyyden aksioomat:

## Mitä opimme? – 2/2

---

- Todennäköisyyden aksiomaattinen käsittely on jaettu tässä luvussa kahteen osaan:
  - (i) Todennäköisyys ja **äärelliset otosavaruudet**.
  - (ii) Todennäköisyys ja **äärettömät otosavaruudet**.
- Useimmat todennäköisyyslaskennan peruslaskusäännöistä voidaan **todistaa** *äärellisten otosavaruuksien muodostamassa kehikossa*.
- Tässä luvussa näytetään myös millä tavalla **todennäköisyyden naiivit määritelmät** sekä **ehdollisen todennäköisyyden käsite** voidaan – sopivasti tulkittuina – *sisällyttää* Kolmogorovin aksioomien muodostamaan kehikkoon.

# Todennäköisyyden aksioomat: Esitiedot

---

- Esitiedot: ks. seuraavia lukuja:

**Todennäköisyys ja sen määritteleminen**

**Todennäköisyyden peruslaskusäännöt**

# Todennäköisyyden aksioomat

---

## >> Todennäköisyyden määrittelemine

**Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa**

**Suhteellinen frekvenssi, klassinen todennäköisyys ja ehdollinen todennäköisyys**

**Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa**

# Todennäköisyyden määritteleminen

---

## *Avainsanat*

**Empiirinen todennäköisyys**

**Frekvenssi**

**Klassinen todennäköisyys**

**Kolmogorovin aksioomat**

**Mitta**

**Satunnaiskoe**

**Suhteellinen frekvenssi**

**Suotuisa tulosvaihtoehto**

**Tapahtuma**

**Tilastollinen stabiliteetti**

**Tulosvaihtoehto**

## Todennäköisyyden naiivit määritelmät

---

- Luvussa Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet **todennäköisyydelle** on esitetty kolme *naiivia määritelmää*:
  - (i) Tapahtuman **empiirinen todennäköisyys** on tapahtuman (tilastollisesti stabiili) *suhteellinen frekvenssi*.
  - (ii) Tapahtuman **klassinen todennäköisyys** on tapahtumalle *suotuisien tulosvaihtoehtojen suhteellinen frekvenssi*.
  - (iii) Todennäköisyys on tapahtuman *sattumisen mahdollisuuden mitta*.



# Todennäköisyyden naiivit määritelmät: Kommentteja

---

- Kuten näemme, yksikään todennäköisyyden naiiveista määritelmistä (i)-(iii) ei täytä *hyvän matemaattisen määritelmän* tunnusmerkkejä.

# Todennäköisyyden määrittäminen

## Empiirinen todennäköisyys

---

- *Toistetaan* jotakin *satunnaiskoetta*  $n$  kertaa.
- Oletetaan, että tapahtuma  $A$  sattuu koetoistojen aikana  $f$  kertaa.
- Jos tapahtuman  $A$  *suhteellinen frekvenssi*

$$\frac{f}{n}$$

lähestyy jotakin kiinteätä lukua  $p$  koetoistojen lukumäärän  $n$  kasvaessa rajatta, on  $p$  tapahtuman  $A$  **empiirinen todennäköisyys**.

## Todennäköisyyden määrittelemisen

# Empiirinen todennäköisyys:

### Esimerkki 1/3

---

- Eräessä *kyselytutkimuksessa* selvitettiin miten suomalaiset suhtautuvat Suomen mahdolliseen NATO-jäsenyyteen.
- Tutkimus perustui *satunnaisotokseen*, johon poimittiin *arpomalla*  
1800  
suomalaista.
- *Otoksessa*  
1080  
henkilöä ilmoitti vastustavansa NATO-jäsenyyttä.

# Todennäköisyyden määrittelemisen

## Empiirinen todennäköisyys:

### Esimerkki 2/3

---

- Tutkimusta voidaan kuvata satunnaisilmiönä seuraavalla tavalla:

*Satunnaiskoe:*

Yhden suomalaisen poimiminen arpomalla otokseen

*Koetoistojen lukumäärä (otoskoko):*

$$n = 1800$$

*Tapahtuma A:*

Otokseen poimittu suomalainen vastusti Suomen NATO-jäsenyyttä.

Tapahtuman *A* frekvenssi koetoistojen joukossa:

$$f = 1080$$

Tapahtuman *A* suhteellinen frekvenssi:

$$\frac{f}{n} = \frac{1080}{1800} = 0.6$$

## Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki 3/3

---

- Jos otoksen poiminnassa käytettiin arvontaa, voidaan olettaa, että tapahtuman  $A$  suhteellinen frekvenssi säilyy *stabiilina*, jos *otoskoko kasvatetaan* tai *otantaa toistetaan*.
- Jos oletus tapahtuman  $A$  suhteellisen frekvenssin stabiiliudesta pätee, havaittua suhteellista frekvenssiä 0.6 on järkevää kutsua *todennäköisyydeksi*, että satunnaisesti valittu suomalainen vastustaa Suomen NATO-jäsenyyttä.
- Siten tapahtuman  $A$  *empiirinen todennäköisyys* on
$$\Pr(A) = 0.6$$
otoksesta saatujen tietojen perusteella.

## Empiirinen todennäköisyys: Kommentteja

---

- Empiirisen todennäköisyyden määritelmä edellyttää sitä, että tapahtuman suhteellinen frekvenssi käyttäytyy koetoistojen lukumäärän kasvaessa *tilastollisesti stabiilisti*.
- Empiiristä todennäköisyyttä *ei voida liittää* sellaisiin satunnaisilmiöihin, joista *ei ole havaintoja*.
- Tapahtuman empiiristä todennäköisyyttä *ei voida määrätä kokeellisesti*, koska äärettömän monen koetoiston tekeminen ei ole käytännössä mahdollista.
- Mikään *ei takaa*, että empiirisen todennäköisyyden määritelmässä esiintyvä raja-arvo *on olemassa*.

## Todennäköisyyden määritteleminen

# Klassinen todennäköisyys

---

- Tarkastellaan satunnaiskoetta, johon liittyy  $n$  yhtä *todennäköistä tulosvaihtoehtoa*.
- Tarkastellaan ko. satunnaiskokeessa *tapahtumaa*  $A$ , johon liittyy  $k$  yhtä *todennäköistä tulosvaihtoehtoa*, joita sanotaan tapahtumalle  $A$  *suotuisiksi*.
- Tapahtuman  $A$  **klassinen todennäköisyys** on tapahtumalle *suotuisien tulosvaihtoehtojen suhteellinen frekvenssi*

$$\frac{k}{n}$$

# Todennäköisyyden määrittelemisen

## Klassinen todennäköisyys:

### Esimerkki

---

- Heitetään kahta virheetöntä noppaa.

- Mikä on tapahtuman

$A = \text{”Silmälukujen summaksi saadaan 11 tai 12”}$

todennäköisyys?

- Kahden virheettömän nopan heitossa mahdolliset *tulosvaihtoehdot* muodostuvat  $6 \times 6 = 36$  lukuparista

$(i, j)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

joiden kaikkien todennäköisyys on  $1/36$ .

- Tapahtumalle  $A$  *suotuisia tulosvaihtoehtoja* on 3 kpl:

$(5,6)$ ,  $(6,5)$ ,  $(6,6)$

- Siten tapahtuman  $A$  *klassinen todennäköisyys* on

$$\Pr(A) = \frac{k}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$



# Klassinen todennäköisyys: Kommentteja

---

- Klassisen todennäköisyyden määritelmä soveltuu vain sellaisten satunnaisilmiöiden tapahtumille, joissa tulosvaihtoehdot ovat yhtä todennäköisiä eli *symmetrisiä*.
- Klassisen todennäköisyyden määritelmää ei voida soveltaa sellaisiin satunnaiskokeisiin, joilla on *äärettömän monta* tulosvaihtoehtoa.

## Todennäköisyyden määrittelemisen

# Todennäköisyys *mittana*

---

- **Todennäköisyyttä** voidaan kutsua **mitaksi**, joka mittaa satunnaisilmiön tapahtumavaihtoehtojen *sattumisen mahdollisuuksia*.
- *Venn-diagrammien* käyttö todennäköisyyslaskennan peruslaskutoimitusten havainnollistamisessa perustuu juuri siihen, että *todennäköisyydellä on mittana samantapaiset ominaisuudet kuin pinta-alamitalla*.

## Todennäköisyys *mittana*: Kommentteja

---

- Todennäköisyyden kutsuminen mitaksi sisältää *jotakin hyvin olennaista* todennäköisyyden luonteesta.
- Todennäköisyydellä on samantapaiset ominaisuudet kuin esimerkiksi *pinta-ala-* tai *tilavuusmitalla* paitsi, että tapahtuman todennäköisyydellä on ylärajana varman tapahtuman todennäköisyys 1.
- Todennäköisyyden kutsuminen sattumisen mahdollisuuden mitaksi on kuitenkin *kehämääritelmä*:  
*Sattumisen mahdollisuus* tarkoittaa suunnilleen samaa kuin *todennäköisyys*.

## Todennäköisyyden aksiomaattinen määrittely 1/2

---

- Yksikään todennäköisyyden naiiveista määritelmistä *ei täyty* hyvän matemaattisen määritelmän tunnusmerkkejä.
- Matemaattisesti kelvollisen yleisen määritelmän todennäköisyydelle esitti venäläinen matemaatikko A. N. Kolmogorov 1930-luvun alussa.
- *Kolmogorovin aksiomien* mukaan todennäköisyyslaskenta on *matemaattisen mittateorian* osa.
- Todennäköisyyden naiivit määritelmät voidaan sijoittaa – sopivasti muotoiltuina – Kolmogorovin aksiomajärjestelmään todennäköisyyden käsitteen *tulkintoina* tai *kuvauksina*.

## Todennäköisyyden aksiomaattinen määrittely 2/2

---

- Seuraavissa kappaleissa tarkastellaan todennäköisyyden *aksiomaattista määrittelyä*.
- Tarkastelu on jaettu kahteen osaan:
  - (i) Todennäköisyyden määrittely **äärellisissä** otosavaruuksissa.
  - (ii) Todennäköisyyden määrittely **äärettömissä** otosavaruuksissa.
- Samalla tarkastellaan todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen *todistamista* aksiomista lähtien.

# Todennäköisyyden aksioomat

---

**Todennäköisyyden määrittelemine**

**>> Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa**  
**Suhteellinen frekvenssi, klassinen todennäköisyys ja ehdollinen todennäköisyys**

**Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa**

# Todennäköisyyden määrittelemisen

## Todennäköisyyden aksiomat

### äärellisissä otosavaruuksissa

---

#### *Avainsanat*

Additiivisuus  
Alkeistapahtuma  
Boolean algebra  
Erotus  
Joukkoperhe  
Komplementtitapahtuma  
Leikkaus  
Mitta  
Otosavaruus  
Perusjoukko  
Tapahtuma  
Tapahtuma-algebra  
Todennäköisyyden aksiomat

Todennäköisyys  
Todennäköisyyskenttä  
Todennäköisyyslaskennan  
laskusääntöjen todistaminen  
– Komplementtitapahtuman  
todennäköisyys  
– Mahdottoman tapahtuman  
todennäköisyys  
– Osajoukon todennäköisyys  
– Yleinen yhteenlaskusääntö  
Yhdiste  
Äärellinen otosavaruus

## Boolean algebra:

### Määritelmä 1/2

---

- Olkoon  $S$  joukko.
- Olkoon  $F$  *jokin* joukon  $S$  osajoukkojen muodostama **joukkoperhe**.
- Jos siis joukko  $A$  on joukkoperheen  $F$  alkio, niin  $A$  on joukon  $S$  osajoukko:

$$A \in F \Rightarrow A \subset S$$



## Boolean algebra:

### Määritelmä 2/2

---

- Joukkoperhe  $F$  on **Boolean algebra**, jos
  - (i) *Tyhjä joukko*  $\emptyset$  on joukkoperheen  $F$  alkio:
$$\emptyset \in F$$
  - (ii) Jos joukko  $A$  on joukkoperheen  $F$  alkio, niin sen *komplementti*  $A^c$  on joukkoperheen  $F$  alkio:
$$A \in F \Rightarrow A^c \in F$$
  - (iii) Jos joukot  $A$  ja  $B$  ovat joukkoperheen  $F$  alkioita, niin niiden *yhdiste*  $A \cup B$  on joukkoperheen  $F$  alkio:
$$A \in F, B \in F \Rightarrow A \cup B \in F$$

# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Boolean algebrat ja joukko-opin operaatiot 1/2

---

- Olkoon  $F$  joukossa  $S$  määritelty *Boolean algebra*.

- Olkoot

$$A \in F \text{ ja } B \in F$$

- Suoraan Boolean algebran *aksioomien mukaan tyhjä joukko*  $\emptyset$ , *komplementtijoukot*  $A^c$  ja  $B^c$  sekä *yhdiste*  $A \cup B$  kuuluvat joukkoperheeseen  $F$ :

$$\emptyset, A^c, B^c, A \cup B \in F$$

- Lisäksi voidaan osoittaa, että *perusjoukko*  $S$ , *leikkaus*  $A \cap B$  sekä *erotukset*  $A \setminus B$  ja  $B \setminus A$  kuuluvat joukkoperheeseen  $F$ :

$$S, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A \in F$$

# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Boolean algebrat ja joukko-opin operaatiot 2/2

---

- Boolean algebrat ovat siis *suljettuja* tavanomaisten joukko-opin operaatioiden suhteen.
- Tällä tarkoitetaan siitä, että tavanomaiset joukko-opin operaatiot *eivät vie Boolean algebran ulkopuolelle*:

Jos Boolean algebran  $F$  joukkoihin sovelletaan *korkeintaan äärellinen määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita *komplementti, yhdiste, leikkaus ja erotus*, niin tuloksena saatavat joukot kuuluvat edelleen Boolean algebraan  $F$ .

# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Joukko-opin operaatiot

---

- Olkoon  $F$  joukossa  $S$  määritelty Boolean algebra.
- *Todistetaan* seuraavat joukko-opin tulokset:
  - (i) Joukko  $S \in F$
  - (ii) Jos  $A \in F, B \in F$ , niin  $A \cap B \in F$
  - (iii) Jos  $A \in F, B \in F$ , niin  $A \setminus B \in F$

## Joukko-opin operaatiot:

### Perusjoukko 1/2

---

- Olkoon  $F$  joukossa  $S$  määritelty Boolean algebra.
- Tällöin *perusjoukko*  $S$  kuuluu joukkoperheeseen  $F$  :

$$S \in F$$

# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Joukko-opin operaatiot:

### Perusjoukko 2/2

---

- Väite seuraa, siitä että

$$S = \emptyset^c$$

- Todistetaan siis, että

$$\emptyset^c \in F$$

- Aksiooman (i) mukaan

$$\emptyset \in F$$

- Aksiooman (ii) mukaan

$$\emptyset^c = S \in F$$

## Joukko-opin operaatiot:

### Leikkausjoukko 1/2

---

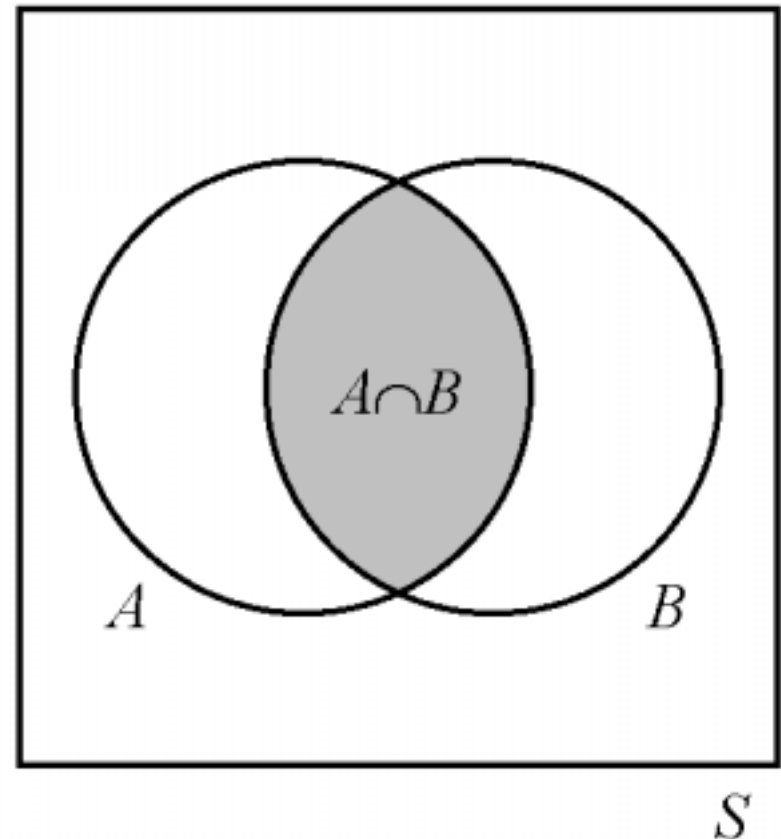
- Olkoon  $F$  joukossa  $S$  määritelty Boolean algebra.

- Olkoot

$$A \in F, B \in F$$

- Tällöin joukkojen  $A$  ja  $B$  leikkaukselle pätee:

$$A \cap B \in F$$



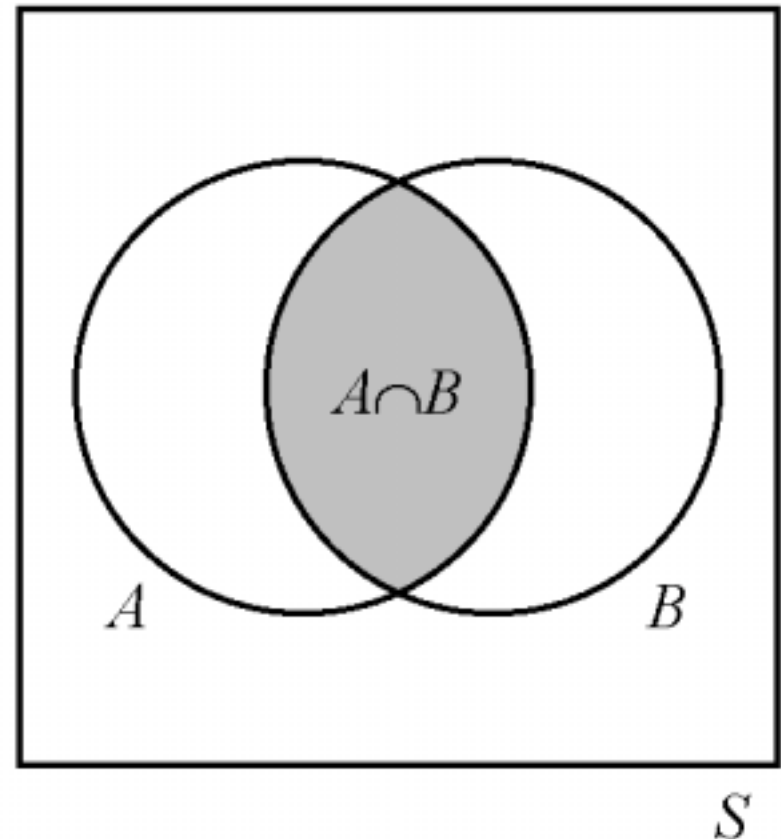
# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Joukko-opin operaatiot:

### Leikkausjoukko 2/2

---

- Väite seuraa siitä, että *DeMorganin lain* mukaan
$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$$
- Todistetaan siis, että
$$A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$$
- Aksiooman (ii) mukaan
$$A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}, B^c \in \mathcal{F}$$
- Aksiooman (iii) mukaan
$$A^c \in \mathcal{F}, B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \cup B^c \in \mathcal{F}$$
- Vihdoin aksiooman (ii) mukaan
$$A^c \cup B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$$

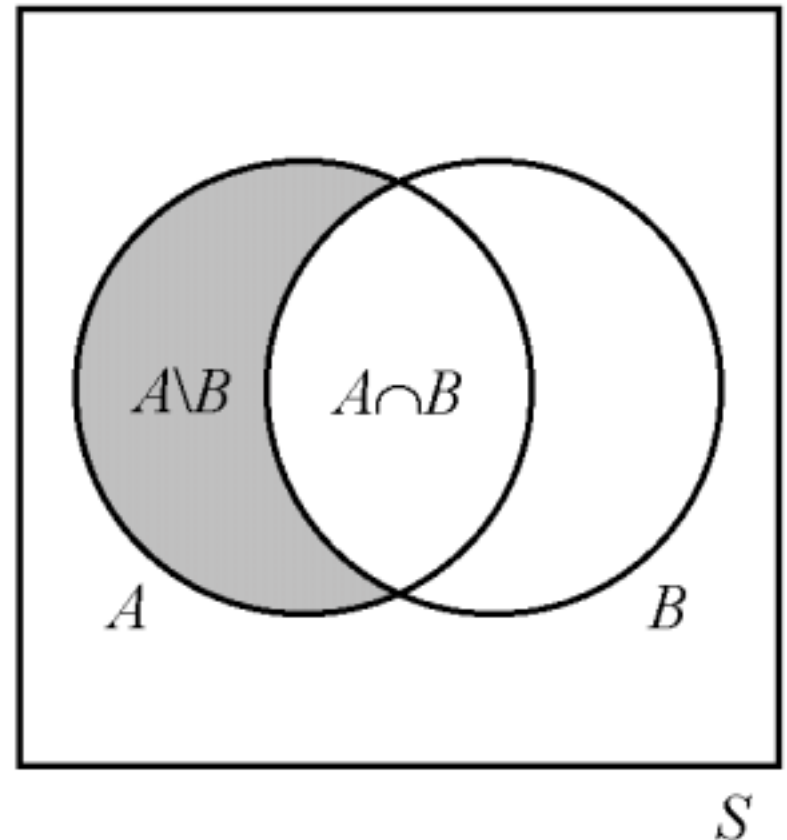




## Joukko-opin operaatiot: Erotusjoukko 1/2

---

- Olkoon  $F$  joukossa  $S$  määritelty Boolean algebra.
- Olkoot  $A \in F, B \in F$
- Tällöin joukkojen  $A$  ja  $B$  erotukselle pätee:  
 $A \setminus B \in F$



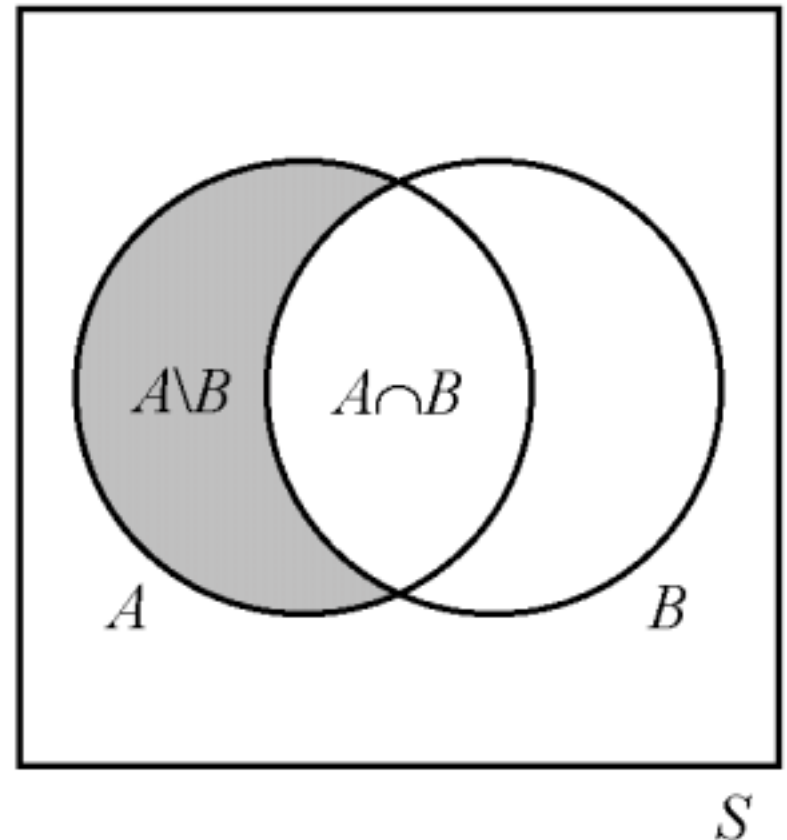
# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Joukko-opin operaatiot:

### Erotusjoukko 2/2

---

- Väite seuraa siitä, että
$$A \setminus B = A \cap B^c$$
- Todistetaan siis, että
$$A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathcal{F}$$
- Aksiooman (ii) mukaan
$$B \in \mathcal{F} \Rightarrow B^c \in \mathcal{F}$$
- Leikkausjoukkoa koskevan tuloksen mukaan
$$A \in \mathcal{F}, B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathcal{F}$$



# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Boolean algebra:

### Esimerkki

---

- Olkoon  $S$  mielivaltainen joukko.

- Olkoon

$$A \subset S$$

mielivaltainen joukon  $S$  osajoukko.

- Tällöin joukkoperhe

$$F = \{\emptyset, A, A^c, S\}$$

muodostaa Boolean algebran joukossa  $S$ , koska

(i)  $\emptyset \in F$

(ii)  $B \in F \Rightarrow B^c \in F$

(iii)  $B \in F, C \in F \Rightarrow B \cup C \in F$

Tässä  $B$  ja  $C$  voivat olla mitkä tahansa kaksi joukoista  $\emptyset, A, A^c, S$ .

# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Boolean algebra tapahtuma-algebrana 1/2

---

- Olkoon  $F$  otosavaruudessa  $S$  määritelty *Boolean algebra*.
- Kutsutaan Boolean algebraan  $F$  kuuluvia otosavaruuden  $S$  osajoukkoja **tapahtumiksi**.
- Jos siis  $A \in F$ , niin  $A \subset S$  ja  $A$  on tapahtuma.
- Kutsutaan Boolean algebraan  $F$  kuuluvien otosavaruuden  $S$  osajoukkojen alkioita **alkeistapahtumiksi**.
- Jos siis

$$s \in A \in F$$

jollekin  $A \in F$ , niin  $s$  on alkeistapahtuma.

# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Boolean algebra tapahtuma-algebrana 2/2

---

- Olkoon  $F$  otosavaruudessa  $S$  määritelty *Boolean algebra*.
- Olkoot otosavaruuden  $S$  osajoukot  $A$  ja  $B$  tapahtumia eli  
 $A \in F$  ja  $B \in F$
- Tällöin siis myös  
 $A^c$ ,  $B^c$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$   
ovat tapahtumia.
- Siten otosavaruuden tapahtumista voidaan johtaa *uusia tapahtumia* soveltamalla niihin tavanomaisia joukko-opin operaatioita.

# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Äärelliset otosavaruudet

---

- Olkoon  $S$  äärellinen otosavaruus, jossa on  $n$  alkiota.

- Olkoon

$$F = \{A \mid A \subset S\}$$

otosavaruuden  $S$  kaikkien osajoukkojen perhe, joten joukkoperheessä  $F$  on

$$n(F) = 2^n$$

alkiota.

- Otosavaruuden  $S$  kaikkien osajoukkojen perhe  $F$  muodostaa *triviaalin Boolean algebran* joukossa  $S$ .

# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Todennäköisyyden aksioomat 1/2

---

- Olkoon  $S$  äärellinen otosavaruus ja  $F$  jokin sen osajoukkojen muodostama *Boolean algebra*.
- Olkoon  $\Pr$  joukkofunktio, joka liittää jokaiseen Boolean algebraan  $F$  kuuluvaan otosavaruuden  $S$  osajoukkoon  $A$  reaaliluvun  $\Pr(A)$ .
- Jos siis  $A \in F$ , niin  $\Pr(A) \in \mathbb{R}$ .

# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Todennäköisyyden aksioomat 2/2

---

- Joukkofunktio  $\Pr$  on **todennäköisyys**, jos

(i)  $\Pr(S) = 1$

(ii)  $0 \leq \Pr(A) \leq 1$  kaikille  $A \in \mathcal{F}$

(iii)  $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow$

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$



## Todennäköisyyden aksioomat:

### Kommentteja 1/2

---

- *Äärellisen otosavaruuden todennäköisyyden aksioomien (i)-(iii) mukaan todennäköisyys  $\Pr$  on positiivinen, äärellisesti additiivinen ja normeerattu **mitta**.*
- Aksioomat (i) ja (ii), *normeeraus ja positiivisuus:*  
$$A \subset S \Rightarrow 0 \leq \Pr(A) \leq \Pr(S) = 1$$
- Aksiooma (iii), *äärellinen additiivisuus:*  
$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$
- Aksiooma (iii) on *toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusääntö*.

## Todennäköisyyden aksioomat:

### Kommentteja 2/2

---

- Aksioomien (i)-(iii) olennaisena sisältönä on siis se, että *todennäköisyys on mitta* matematiikan tarkoittamassa mielessä.
- Todennäköisyyslaskentaa voidaan pitää matemaattisen *mittateorian* osana.
- Aksioomien (i)-(iii) mukaan todennäköisyysmitalla on samat ominaisuudet kuin *pinta-alamitalla* paitsi, että todennäköisyysmitta on *normeerattu* niin, että sen yläraja on 1.

# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Tapahntumien todennäköisyydet äärellisessä otosavaruudessa

---

- Äärellisen otosavaruuden tapahtumista voidaan muodostaa *uusia tapahtumia* soveltamalla *Boolean algebran aksioomia* ja niistä johdettuja joukko-opin laskusääntöjä.
- Uusien tapahtumien *todennäköisyydet* saadaan soveltamalla *äärellisen otosavaruuden todennäköisyyden aksioomia* ja niistä johdettuja todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä.

# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Äärelliset todennäköisyyskentät

---

- Kolmikko

$(S, F, \text{Pr})$

muodostaa **äärellisen todennäköisyyskentän**, jos seuraavat ehdot pätevät:

- (i) *Otosavaruus*  $S$  on äärellinen.
- (ii) Joukkoperhe  $F$  on jokin joukon  $S$  osajoukkojen muodostama *Boolean algebra*.
- (iii) Joukkofunktio  $\text{Pr}$  on Boolean algebraan  $F$  kuuluville otosavaruuden  $S$  osajoukoille määritelty äärellisen otosavaruuden *todennäköisyysmitta*.

# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen todistaminen

---

- *Todistetaan* seuraavat todennäköisyyslaskennan laskusäännöt todennäköisyyden aksioomista lähtien:
  - (i) **Mahdottoman tapahtuman** todennäköisyys.
  - (ii) **Komplementtitapahtuman** todennäköisyys.
  - (iii) **Osajoukon** todennäköisyys.
  - (iv) **Yleinen yhteenlaskusääntö**.

# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Mahdottoman tapahtuman todennäköisyys

---

- Olkoon  $S$  äärellinen otosavaruus.
- Olkoon  $\emptyset$  *mahdoton tapahtuma*.
- Tällöin

$$\Pr(\emptyset) = 0$$

# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Mahdottoman tapahtuman todennäköisyys: Perustelu

---

- Olkoon  $F$  otosavaruuden  $S$  osajoukoille määritelty Boolean algebra.
- Olkoon  $\emptyset$  *mahdoton tapahtuma*.
- Tällöin

$$\emptyset \in F$$

- Joukot  $\emptyset$  ja  $S$  muodostavat otosavaruuden  $S$  *osituksen*:

$$\emptyset \cup S = S$$

$$\emptyset \cap S = \emptyset$$

- Todennäköisyyden *aksioomien* (i) ja (iii) mukaan

$$1 = \Pr(S) = \Pr(\emptyset \cup S) = \Pr(\emptyset) + \Pr(S) = \Pr(\emptyset) + 1$$

josta välttämättä seuraa

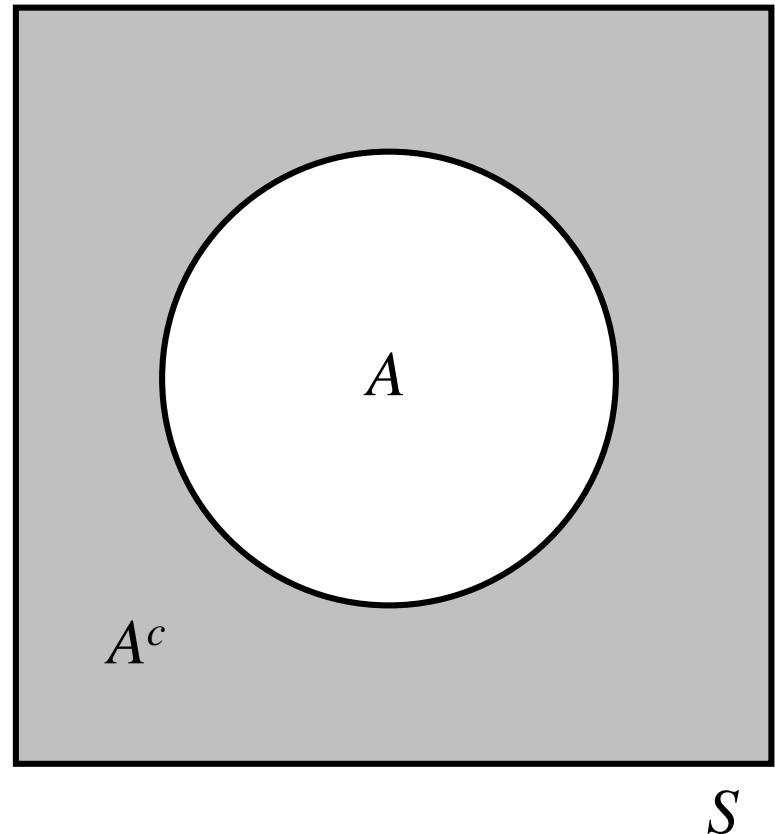
$$\Pr(\emptyset) = 0$$

# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Komplementtitapahtuman todennäköisyys

- Olkoon  $A$  äärellisen otosavaruuden  $S$  tapahtuma.
- Tällöin tapahtuman  $A$  komplementtitapahtuman  $A^c$  todennäköisyydelle pätee:

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$$





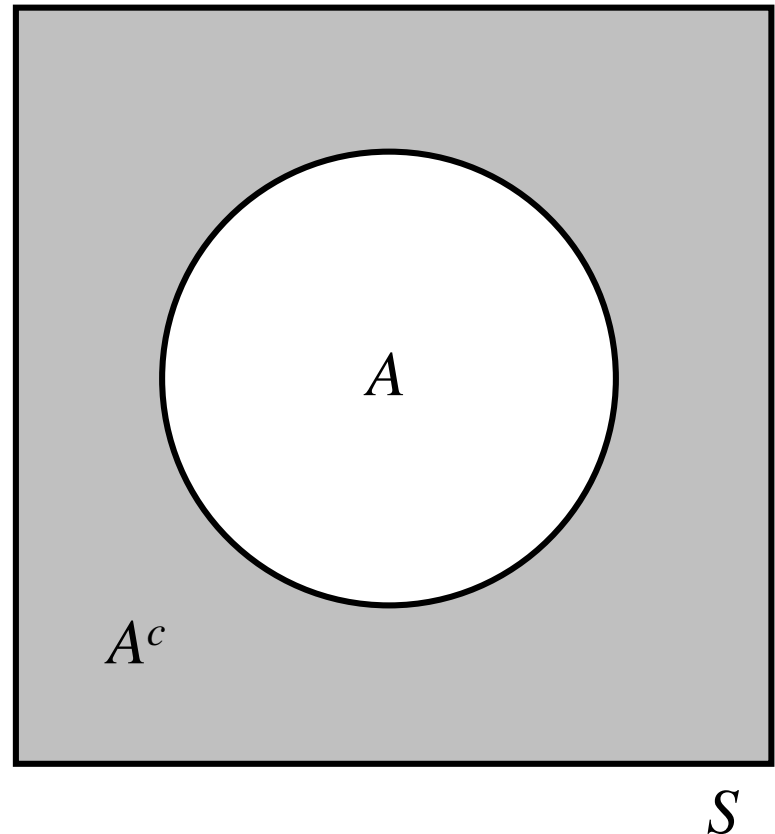
# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Komplementtitapahtuman todennäköisyys:

### Perustelu 1/2

---

- Olkoon  $F$  otosavaruuden  $S$  osajoukoille määritelty Boolean algebra.
- Väite:  
 $A \in F \Rightarrow \Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$
- Boolean algebran aksiooman (ii) mukaan  
 $A \in F \Rightarrow A^c \in F$
- Joukot  $A$  ja  $A^c$  muodostavat otosavaruuden  $S$  osituksen:  
 $A \cup A^c = S$   
 $A \cap A^c = \emptyset$



# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Komplementtitapahtuman todennäköisyys: Perustelu 2/2

---

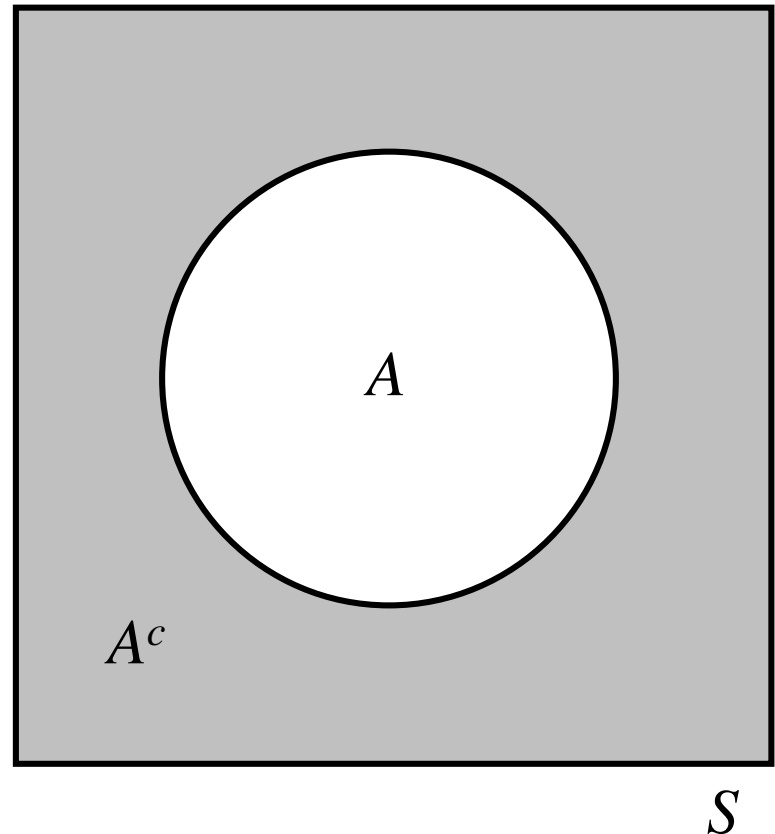
- Todennäköisyyden *aksiomien* (i) ja (iii) mukaan

$$1 = \Pr(S)$$

$$= \Pr(A \cup A^c)$$

$$= \Pr(A) + \Pr(A^c)$$

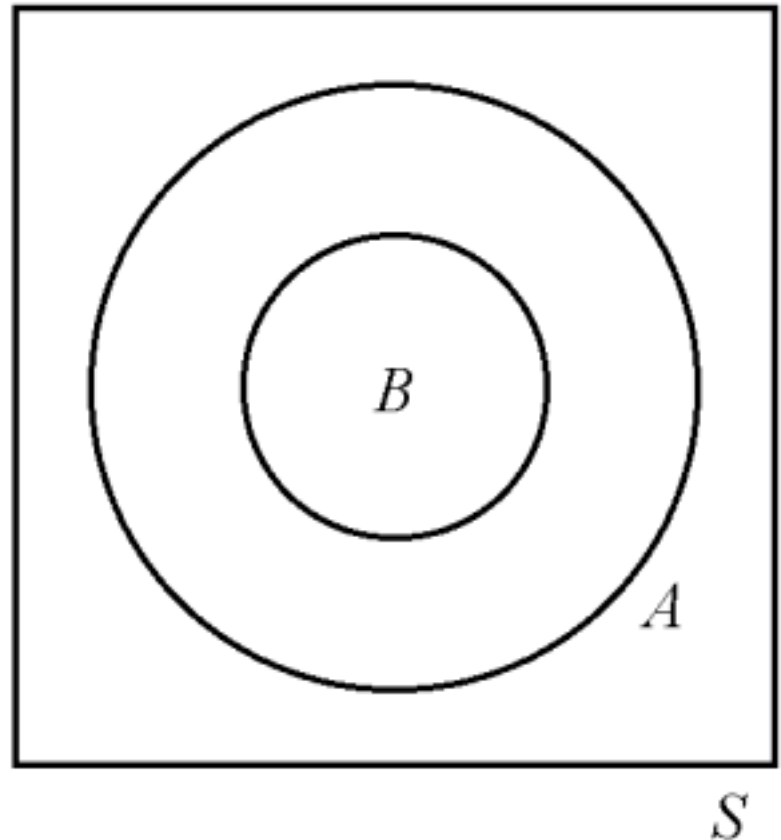
josta väite seuraa.



# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Osajoukon todennäköisyys

- Olkoot  $A$  ja  $B$  äärellisen otosavaruuden  $S$  tapahtumia.
- Olkoon  $B \subset A$ .
- Tällöin pätee:  
$$\Pr(B) \leq \Pr(A)$$



# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Osajoukon todennäköisyys:

### Perustelu 1/2

---

- Olkoon  $\mathcal{F}$  otosavaruuden  $S$  osajoukoille määritelty Boolean algebra.

- Väite:

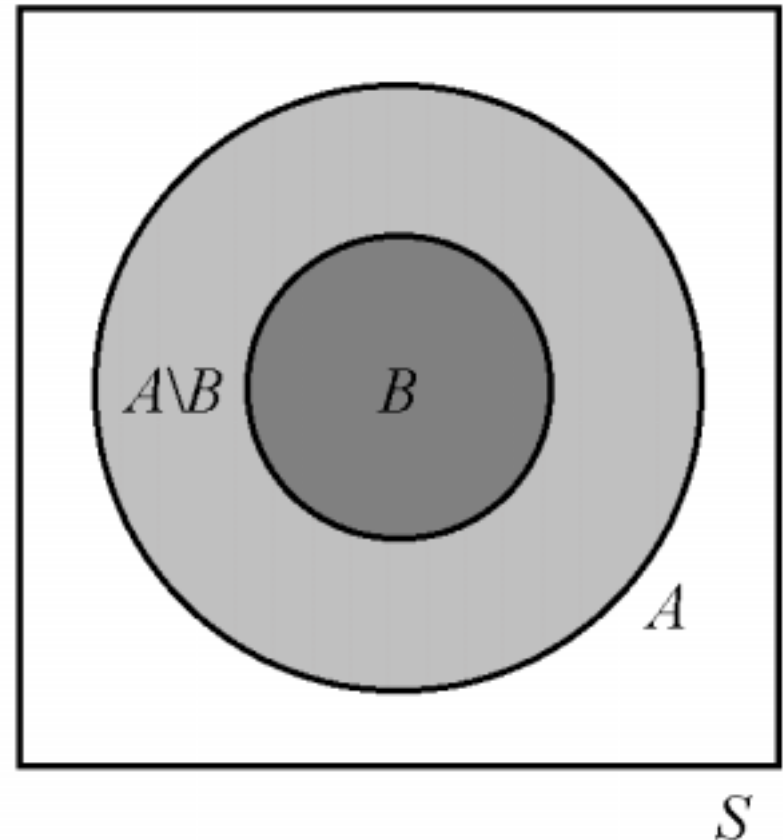
$$A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}, B \subset A \Rightarrow$$

$$\Pr(B) \leq \Pr(A)$$

- Leikkaus- tai erotusjoukkoa koskevan tuloksen mukaan

$$A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F} \Rightarrow$$

$$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$$



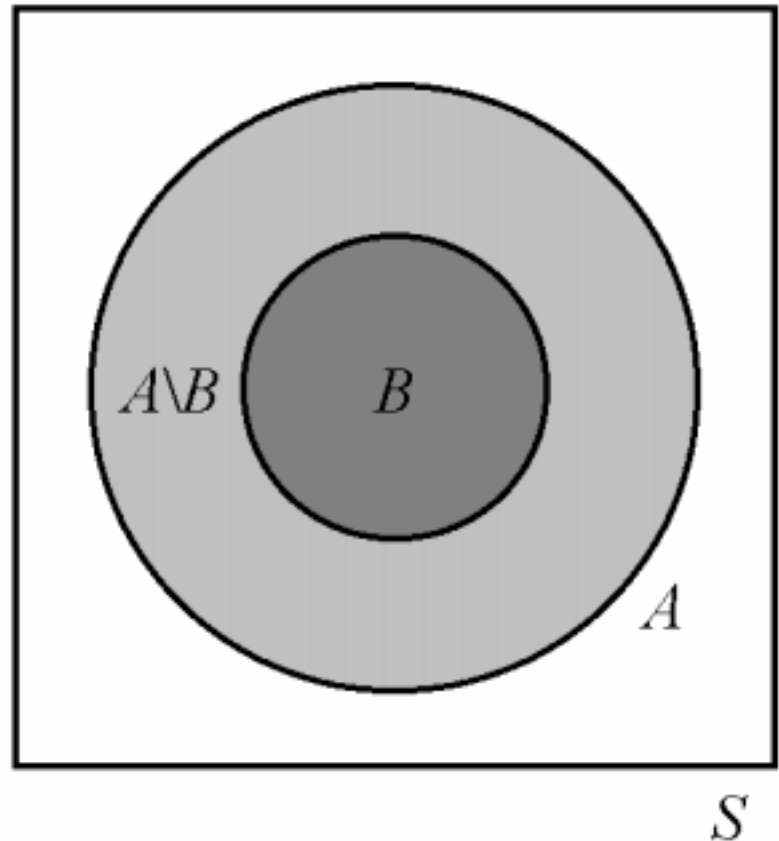
# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Osajoukon todennäköisyys:

### Perustelu 2/2

---

- Koska  $B \subset A$ , joukot  $B$  ja  $A \setminus B$  muodostavat joukon  $A$  osituksen:  
$$B \cup (A \setminus B) = A$$
$$B \cap (A \setminus B) = \emptyset$$
- Aksioomien (ii) ja (iii) mukaan  
$$\Pr(A) = \Pr(B) + \Pr(A \setminus B) \geq \Pr(B)$$
mikä oli väite.

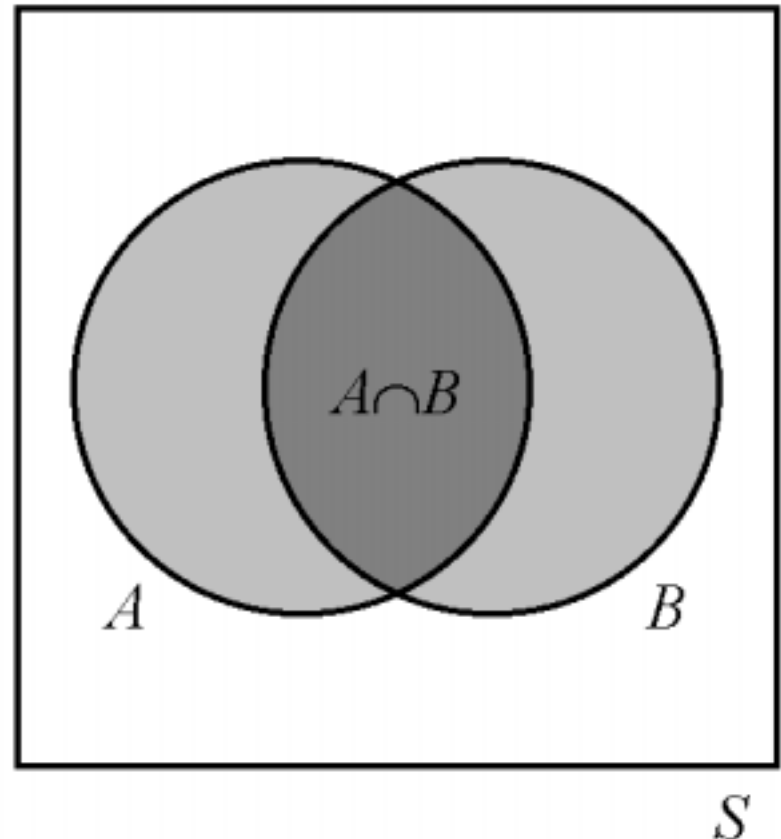


# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Yleinen yhteenlaskusääntö

- Olkoot  $A$  ja  $B$  äärellisen otosavaruuden  $S$  tapahtumia.
- Tällöin pätee *yleinen yhteenlaskusääntö*:

$$\begin{aligned} & \Pr(A \cup B) \\ &= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \end{aligned}$$

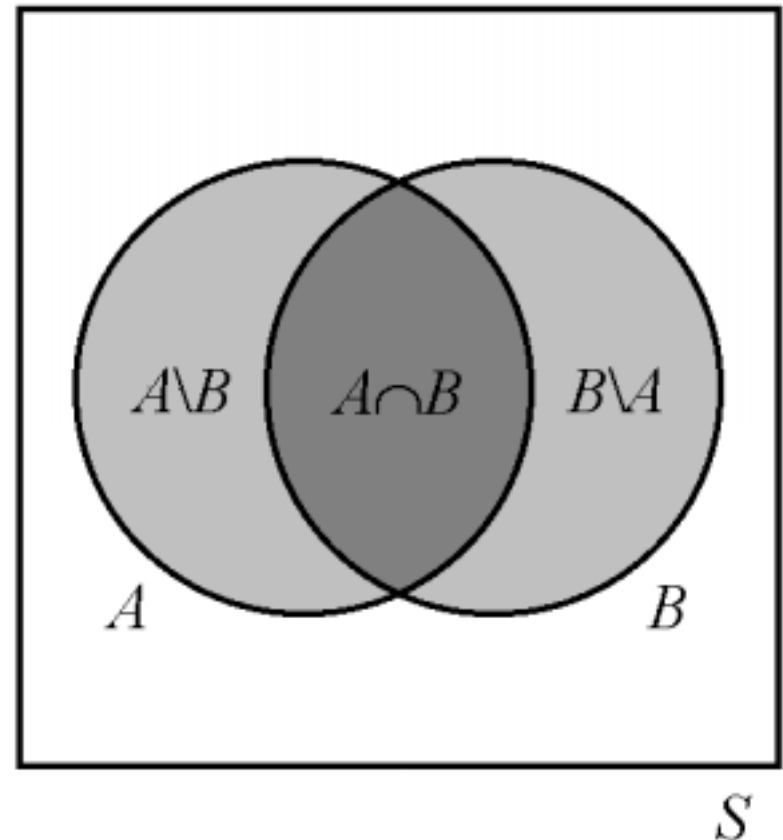


# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Yleinen yhteenlaskusääntö:

### Perustelu 1/3

- Olkoon  $F$  otosavaruuden  $S$  osajoukoille määritelty Boolean algebra.
- Väite:  
 $A \in F, B \in F \Rightarrow$   
 $\Pr(A \cup B)$   
 $= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$
- Boolean algebran aksiooman (iii) sekä leikkaus- ja erotusjoukkoja koskevien tuloksien mukaan  
 $A \in F, B \in F \Rightarrow$   
 $A \cup B \in F, A \cap B \in F$   
 $A \setminus B \in F, B \setminus A \in F$



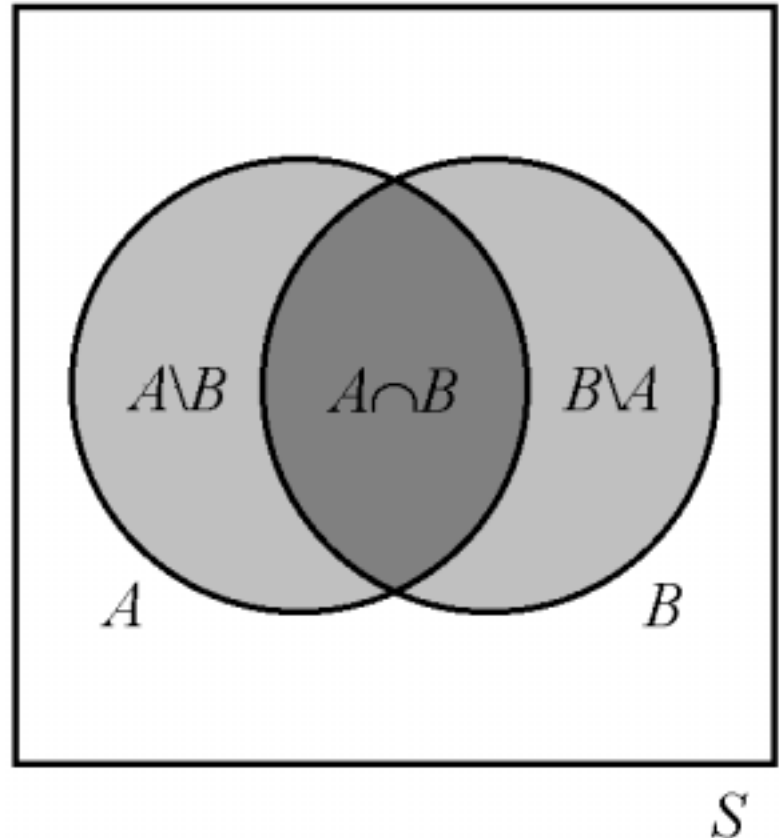
# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Yleinen yhteenlaskusääntö:

### Perustelu 2/3

---

- Joukot  $A$  ja  $B \setminus A$  muodostavat joukon  $A \cup B$  osituksen:
  - (1)  $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$   
 $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$
- Joukot  $A \cap B$  ja  $B \setminus A$  muodostavat joukon  $B$  osituksen:
  - (2)  $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$   
 $(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$





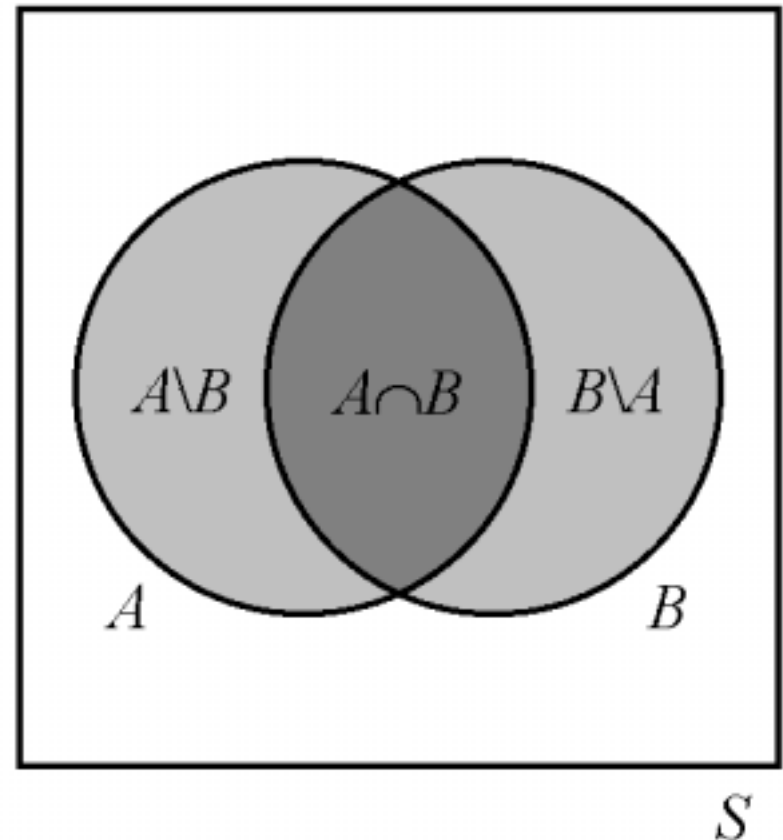
# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Yleinen yhteenlaskusääntö:

### Perustelu 3/3

---

- Osituksesta (1) ja *aksioomasta* (iii) seuraa:  
(3)  $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B \setminus A)$
- Osituksesta (2) ja *aksioomasta* (iii) seuraa:  
(4)  $\Pr(B) = \Pr(A \cap B) + \Pr(B \setminus A)$
- Ratkaisemalla  $\Pr(B \setminus A)$  yhtälöstä (4) ja sijoittamalla ratkaisu yhtälöön (3) saadaan väite:  
 $\Pr(A \cup B)$   
 $= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$



# Todennäköisyyden aksioomat

---

**Todennäköisyyden määrittelemine**

**Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa**

**>> Suhteellinen frekvenssi, klassinen todennäköisyys ja ehdollinen todennäköisyys**

**Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa**

# Suhteellinen frekvenssi, klassinen todennäköisyys ja ehdollinen todennäköisyys

---

## *Avainsanat*

Alkeistapahtuma  
Ehdollinen todennäköisyys  
Empiirinen todennäköisyys  
Frekvenssi  
Klassinen todennäköisyys  
Koetoisto  
Suhteellinen frekvenssi  
Suotuisa tulosvaihtoehto  
Symmetriset alkeistapahtumat  
Tapahtuma  
Todennäköisyyden aksioomat  
Todennäköisyyden frekvenssitulkinta  
Tulosvaihtoehto

## Suhteellinen frekvenssi ja klassinen todennäköisyys todennäköisyyksinä

---

- Osoitamme, että *suhteellinen frekvenssi* ja *klassinen todennäköisyys* toteuttavat – sopivasti määriteltyinä – äärellisen otosavaruuden todennäköisyyden aksioomat.
- Siten suhteellista frekvenssiä ja klassista todennäköisyyttä voidaan pitää todennäköisyyden *tulkintoina*.

## Suhteellinen frekvenssi: Määritelmä

---

- Olkoon  $S$  johonkin satunnaiskokeeseen liittyvä äärellinen *otosavaruus*.
- Olkoon  $A \subset S$  *tapahtuma* otosavaruudessa  $S$ .
- Toistetaan satunnaiskoetta  $n$  kertaa.
- Olkoon  $f_A$  tapahtuman  $A$  *frekvenssi* koetoistojen joukossa.
- Tällöin

$$\frac{f_A}{n}$$

on tapahtuman  $A$  **suhteellinen frekvenssi**.

## Suhteellinen frekvenssi on todennäköisyys

---

- Käytetään tapahtuman  $A$  suhteelliselle frekvenssille  $f_A/n$  merkintää:

$$\Pr_f(A) = \frac{f_A}{n}$$

- Suhteellinen frekvenssi  $\Pr_f(A)$  toteuttaa todennäköisyyden aksioomat (i)-(iii), joten **suhteellinen frekvenssi on todennäköisyys**.

# Suhteellinen frekvenssi on todennäköisyys: Perustelu 1/2

---

- Todistetaan, että suhteellinen frekvenssi  $\Pr_f(\cdot)$  toteuttaa todennäköisyyden aksioomat.
- Toistetaan satunnaiskoetta  $n$  kertaa.
- Aksioma (i):

Koska otosavaruus  $S$  on *varma tapahtuma* eli  $S$  sattuu jokaisessa koetoistossa, niin

$$f_S = n$$

Siten

$$\Pr_f(S) = f_S/n = n/n = 1$$

- Aksioma (ii):

Kaikille tapahtumille  $A \subset S$  pätee  $0 \leq f_A \leq n$ .

Siten

$$0 \leq \Pr_f(A) = f_A/n \leq 1$$

# Suhteellinen frekvenssi on todennäköisyys: Perustelu 2/2

---

- Aksioma (iii):

Jos tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat *toisensa poissulkevia* eli, jos  $A \cap B = \emptyset$ ,  
niin

$$f_{A \cup B} = f_A + f_B$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \Pr_f(A \cup B) &= \frac{f_{A \cup B}}{n} = \frac{f_A + f_B}{n} \\ &= \frac{f_A}{n} + \frac{f_B}{n} \\ &= \Pr_f(A) + \Pr_f(B) \end{aligned}$$



## Empiirinen todennäköisyys

---

- Jos tapahtuman  $A$  suhteellinen frekvenssi

$$\Pr_f(A) = \frac{f_A}{n}$$

lähestyy toistokokeiden lukumäärän  $n$  rajatta kasvaessa jotakin kiinteätä lukua  $p$ , sanotaan lukua  $p$  tapahtuman  $A$  **empiiriseksi todennäköisyydeksi**.

- Jos siis  $p$  on tapahtuman  $A$  empiirinen todennäköisyys, niin

$$\Pr_f(A) = \frac{f_A}{n} \rightarrow p, \text{ kun } n \rightarrow +\infty$$

## Todennäköisyyden frekvenssitulkinta

---

- Oletetaan, että tapahtuman  $A$  todennäköisyys on  $p$ .
- Toistetaan sitä satunnaiskoetta, johon tapahtuma  $A$  liittyy,  $n$  kertaa.
- **Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan** mukaan tapahtuman  $A$  suhteellinen frekvenssi

$$\Pr_f(A) = \frac{f_A}{n}$$

*vaihtelee satunnaisesti koetoistosta toiseen, mutta saa keskimäärin tapahtuman todennäköisyyttä  $p$  lähellä olevia arvoja.*

## Klassinen todennäköisyys: Määritelmä 1/2

---

- Olkoon  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  johonkin satunnaiskokeeseen liittyvä äärellinen *otosavaruus*, jossa on  $n = n(S)$  alkeistapahtumaa.
- Oletetaan, että otosavaruuden  $S$  alkeistapahtumat ovat *symmetrisiä* eli yhtä todennäköisiä.
- Tällöin

$$\Pr(s_i) = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n$$

- Olkoon  $A = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_k}\} \subset S$  *tapahtuma*, jossa on  $k = n(A)$  alkeistapahtumaa, joita sanotaan tapahtumalle  $A$  *suotuisiksi*.

## Klassinen todennäköisyys: Määritelmä 2/2

---

- Määritellään tapahtuman  $A$  **klassinen todennäköisyys**

$\Pr_c(A)$  kaavalla

$$\Pr_c(A) = \frac{k}{n}$$

jossa siis

$$k = n(A)$$

$$n = n(S)$$

- Klassinen todennäköisyys  $\Pr_c(A)$  toteuttaa todennäköisyyden aksioomat (i)-(iii), joten **klassinen todennäköisyys on todennäköisyys**.

# Klassisen todennäköisyyden määritelmä: Perustelu

---

- Olkoon

$$A = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_k}\} \subset S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

- Tällöin

$$A = \{s_{i_1}\} \cup \{s_{i_2}\} \cup \dots \cup \{s_{i_k}\}$$

ja lisäksi alkeistapahtumat

$$s_{i_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

ovat *pareittain toisensa poissulkevia*.

- Koska alkeistapahtumat  $s_1, s_2, \dots, s_n$  on oletettu *symmetrisiksi*, todennäköisyyden aksioomasta (iii) seuraa:

$$\Pr(A) = \Pr(s_{i_1}) + \Pr(s_{i_2}) + \dots + \Pr(s_{i_k}) = \underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{k \text{ kpl}} = \frac{k}{n} = \Pr_c(A)$$

# Klassinen todennäköisyys on todennäköisyys: Perustelu 1/2

---

- Todistetaan, että klassinen todennäköisyys  $\Pr_c(\cdot)$  toteuttaa todennäköisyyden aksioomat.

- Aksioma (i):

Koska  $n(S) = n$ , niin

$$\Pr_c(S) = n/n = 1$$

- Aksioma (ii):

Kaikille tapahtumille  $A \subset S$  pätee

$$0 \leq n(A) = k \leq n = n(S)$$

Siten

$$0 \leq \Pr_c(A) = k/n \leq 1$$

# Klassinen todennäköisyys on todennäköisyys: Perustelu 2/2

---

- Aksioma (iii):

Jos tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat *toisensa poissulkevia* eli, jos  $A \cap B = \emptyset$ ,  
niin

$$k_{A \cup B} = k_A + k_B$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \Pr_c(A \cup B) &= \frac{k_{A \cup B}}{n} = \frac{k_A + k_B}{n} \\ &= \frac{k_A}{n} + \frac{k_B}{n} \\ &= \Pr_c(A) + \Pr_c(B) \end{aligned}$$

## Ehdollinen todennäköisyys todennäköisyytenä

---

- Seuraavassa osoitetaan, että *ehdollinen todennäköisyys* toteuttaa äärellisen otosavaruuden todennäköisyyden aksioomat.
- Siten ehdollista todennäköisyyttä voidaan pitää todennäköisyyden käsitteen *laajenuksena*.



# Ehdollinen todennäköisyys: Määritelmä

---

- Olkoon  $S$  johonkin satunnaiskokeeseen liittyvä äärellinen *otosavaruus*.
- Olkoot  $A \subset S$  ja  $C \subset S$  *tapahtumia* ja  $\Pr(C) \neq 0$ .
- Määritellään tapahtuman  $A$  **ehdollinen todennäköisyys**  $\Pr(A|C)$  kaavalla

$$\Pr(A|C) = \frac{\Pr(A \cap C)}{\Pr(C)}$$

- Ehdollinen todennäköisyys  $\Pr(A|C)$  toteuttaa todennäköisyyden aksioomat (i)-(iii), joten **ehdollinen todennäköisyys on todennäköisyys**.

# Ehdollinen todennäköisyys on todennäköisyys: Perustelu 1/3

---

- Todistetaan, että ehdollinen todennäköisyys  $\Pr(\cdot / \cdot)$  toteuttaa todennäköisyyden aksioomat.

- Aksioma (i):

Kaikille tapahtumille  $C \subset S$  pätee  $S \cap C = C$ .

Siten

$$\Pr(S|C) = \frac{\Pr(S \cap C)}{\Pr(C)} = \frac{\Pr(C)}{\Pr(C)} = 1$$

- Aksioma (ii):

Kaikille tapahtumille  $A \subset S$  ja  $C \subset S$  pätee  $A \cap C \subset C$ , joten

$$0 \leq \Pr(A \cap C) \leq \Pr(C).$$

Siten

$$0 \leq \Pr(A|C) = \frac{\Pr(A \cap C)}{\Pr(C)} \leq \frac{\Pr(C)}{\Pr(C)} = 1$$

# Ehdollinen todennäköisyys on todennäköisyys: Perustelu 2/3

---

- Aksioma (iii):

Kaikille joukoille  $A$ ,  $B$  ja  $C$  pätee *distribuutiolaki*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Jos tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat *toisensa poissulkevia* eli, jos  $A \cap B = \emptyset$ ,  
niin kaikille  $C \subset S$  pätee

$$(A \cap C) \cap (B \cap C) = \emptyset$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\Pr(A \cup B | C) &= \frac{\Pr((A \cup B) \cap C)}{\Pr(C)} \\ &= \frac{\Pr((A \cap C) \cup (B \cap C))}{\Pr(C)} \\ &= \frac{\Pr(A \cap C)}{\Pr(C)} + \frac{\Pr(B \cap C)}{\Pr(C)} \\ &= \Pr(A | C) + \Pr(B | C)\end{aligned}$$

# Todennäköisyyden aksioomat

---

**Todennäköisyyden määrittelemine**

**Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa**

**Suhteellinen frekvenssi, klassinen todennäköisyys ja ehdollinen todennäköisyys**

**>> Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa**

# Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

---

## *Avainsanat*

Alkeistapahtuma

Boolean algebra

Epämitallisuus

Jatkuvuusaksiooma

Joukkoperhe

Kolmogorovin aksioomat

Komplementtitapahtuma

Leikkaus

Mitallisuus

Mitta

Otosavaruus

$\sigma$ -algebra

Tapahtuma

Tapahtuma-algebra

Todennäköisyyskenttä

Täydellinen additiivisuus

Yhdiste

Ääretön otosavaruus

## Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

# Äärettömät otosavaruudet

---

- Äärellisille otosavaruuksille esitetyt aksioomat eivät sellaisenaan kelpaa *äärettömille otosavaruuksille*:
- Tämä johtuu seuraavista seikoista:
  - (i) *Äärettömän* otosavaruuden tapauksessa kaikki otosavaruuden osajoukot *eivät välttämättä kelpaa* tapahtumiksi.
  - (ii) *Äärellisen* otosavaruuden aksiooma (iii) on *äärettömän* otosavaruuden tapauksessa korvattava aksioomalla, joka sallii *äärettömän monen* pareittain toisensa poissulkevan tapahtuman tarkastelun.

## $\sigma$ -algebra:

### Määritelmä 1/2

---

- Olkoon  $S$  joukko.
- Olkoon  $F$  *jokin* joukon  $S$  osajoukkojen muodostama *joukkoperhe*.
- Jos siis joukko  $A$  on joukkoperheen  $F$  alkio, niin  $A$  on joukon  $S$  osajoukko:

$$A \in F \Rightarrow A \subset S$$



## $\sigma$ -algebra:

### Määritelmä 2/2

---

- Joukkoperhe  $F$  on  **$\sigma$ -algebra**, jos

(i) *Tyhjä joukko*  $\emptyset$  on joukkoperheen  $F$  alkio:

$$\emptyset \in F$$

(ii) Jos joukko  $A$  on joukkoperheen  $F$  alkio, niin sen *komplementti*  $A^c$  on joukkoperheen  $F$  alkio:

$$A \in F \Rightarrow A^c \in F$$

(iii) Jos joukot  $A_1, A_2, A_3, \dots$  ovat joukkoperheen  $F$  alkioita, niin niiden *yhdiste*  $\cup A_i$  on joukkoperheen  $F$  alkio:

$$A_1, A_2, A_3, \dots \in F \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$$

# Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

## $\sigma$ -algebrat ja joukko-opin operaatiot 1/2

---

- Olkoon  $F$  joukossa  $S$  määritelty  $\sigma$ -algebra.
- Olkoot

$$A_i \in F, i = 1, 2, 3, \dots$$

- Suoraan  $\sigma$ -algebran aksioomien mukaan joukkojen  $A_i$  komplementit ja niiden yhdiste  $\cup A_i$  ovat joukkoperheen  $F$  alkioita:

$$A_i^c \in F, i = 1, 2, 3, \dots \quad \text{ja} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$$

- Lisäksi voidaan osoittaa, että joukkojen  $A_i$  leikkaus  $\cap A_i$  on joukkoperheen  $F$  alkio:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$$

# Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

## $\sigma$ -algebrat ja joukko-opin operaatiot 2/2

---

- $\sigma$ -algebrat ovat siis *suljettuja* numeroituvan monen tavanomaisen joukko-opin operaation suhteen.
- Tällä tarkoitetaan siitä, että *numeroituva* määrä tavanomaisia joukko-opin operaatioita *ei vie*  $\sigma$ -algebran *ulkopuolelle*:

Jos  $\sigma$ -algebran  $F$  joukkoihin sovelletaan *korkeintaan numeroituva määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita *komplementti, yhdiste, leikkaus* ja *erotus*, niin tuloksena saatavat joukot kuuluvat edelleen  $\sigma$ -algebraan  $F$ .

# Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

## $\sigma$ -algebrat ja Boolean algebrat

---

- Jos joukon  $S$  osajoukkojen perhe  $F$  toteuttaa  $\sigma$ -algebran aksioomat, niin se toteuttaa myös *Boolean algebran* aksioomat.
- Jokainen Boolean algebran aksioomista johdettu *joukko-opin sääntö* pätee myös  $\sigma$ -algebroidille.

## Kolmogorovin aksioomat todennäköisyydelle 1/2

---

- Olkoon  $S$  otosavaruus ja  $\mathcal{F}$  jokin joukon  $S$  osajoukkojen *perhe*, joka muodostaa  $\sigma$ -algebran.
- Olkoon  $\Pr$  *joukkofunktio*, joka liittää jokaiseen  $\sigma$ -algebraan  $\mathcal{F}$  kuuluvaan otosavaruuden  $S$  osajoukkoon  $A$  reaaliluvun  $\Pr(A)$ .
- Jos siis  $A \in \mathcal{F}$ , niin  $\Pr(A) \in \mathbb{R}$ .

## Kolmogorovin aksioomat todennäköisyydelle 2/2

---

- Joukkofunktio  $\Pr$  on **todennäköisyys**, jos

(i)  $\Pr(S) = 1$

(ii)  $0 \leq \Pr(A) \leq 1$  kaikille  $A \in \mathcal{F}$

(iii)  $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$  ja  $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \Rightarrow$

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i)$$

## Kolmogorovin aksioomat:

### Kommentteja 1/2

---

- Kolmogorovin aksioomien (i)-(iii) mukaan *todennäköisyys*  $\Pr$  on *positiivinen, täydellisesti additiivinen ja normeerattu mitta*.

- Aksioomat (i) ja (ii), *normeeraus ja positiivisuus*:

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow 0 \leq \Pr(A) \leq \Pr(S) = 1$$

- Aksiooma (iii), *täydellinen additiivisuus*:

Jos  $A_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  ja  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , niin

$$\Pr(\cup A_i) = \sum \Pr(A_i)$$

- Aksiooma (iii) on *pareittain toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusääntö*.

# Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

## Kolmogorovin aksioomat:

### Kommentteja 2/2

---

- Aksioomien (i)-(iii) olennaisena sisältönä on siis se, että *todennäköisyys on mitta* matematiikan tarkoittamassa mielessä.
- Todennäköisyyslaskentaa voidaan pitää matemaattisen *mittateorian* osana.
- Aksioomien (i)-(iii) mukaan todennäköisyysmitalla on samat ominaisuudet kuin *pinta-alamitalla* paitsi, että todennäköisyysmitta on *normeerattu* niin, että sen yläraja on 1.



## Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

# Kolmogorovin aksioomat ja äärellisen otosavaruuden aksioomat

---

- Jos joukkofunktio  $P$  toteuttaa todennäköisyyden aksioomat *äärettömille otosavaruuksille*, niin se toteuttaa todennäköisyyden aksioomat myös *äärellisille otosavaruuksille*.
- Jokainen äärellisen otosavaruuden todennäköisyyden aksioomista johdettu *todennäköisyyden laskusääntö* pätee myös äärettömille otosavaruuksille.

## Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

### Mitallisuus 1/2

---

- Jos  $S$  on *äärellinen* otosavaruus, *kaikille* otosavaruuden  $S$  osajoukoille  $A \subset S$  voidaan *määritellä* todennäköisyys.
- Siten *äärellisen* otosavaruuden  $S$  tapauksessa *kaikki* otosavaruuden osajoukot  $A \subset S$  *kelpaavat* tapahtumiksi.
- Jos  $S$  on *ääretön* otosavaruus, *kaikille* otosavaruuden  $S$  osajoukoille  $A \subset S$  *ei voida välttämättä määritellä* todennäköisyyttä.
- Siten *äärettömän* otosavaruuden  $S$  tapauksessa *kaikki* otosavaruuden osajoukot  $A \subset S$  *eivät välttämättä kelpaa* tapahtumiksi.

## Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

### Mitallisuus 2/2

---

- Sellaisia otosavaruuden  $S$  osajoukkoja  $A \subset S$ , joille *voidaan* määritellä todennäköisyys sanotaan **mitallisiksi**.
- Sellaisia otosavaruuden  $S$  osajoukkoja  $A \subset S$ , joille *ei voida* määritellä todennäköisyyttä sanotaan **epämitallisiksi**.
- Voidaan osoittaa, että otosavaruuden  $S$  *mitallisten osajoukkojen perhe* muodostaa  $\sigma$ -algebran.

## Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

# Mitallisuus ja reaalilukujen joukko 1/2

---

- Jos otosavaruutena  $S$  on *reaalilukujen joukko*  $\mathbb{R}$ , mm. kaikki realiakselin *välit* sekä *avoimet* ja *suljetut joukot* ovat mitallisia ja kelpaavat tapahtumiksi.
- Voidaan osoittaa, että reaalilukujen joukolla  $\mathbb{R}$  on todennäköisyysmitan suhteen *epämitallisia osajoukkoja*, jotka eivät kelpaa tapahtumiksi.

# Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

## Mitallisuus ja reaalilukujen joukko 2/2

---

- *Kaikki* reaalilukujen joukon todennäköisyysmitan suhteen *mitalliset osajoukot* saadaan tyyppiä

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq b\}$$

olevista puoliavoimista väleistä soveltamalla niihin *korkeintaan numeroituva määrä* komplementti-, yhdiste- ja leikkausoperaatiota.

- Muotoa  $(-\infty, b]$  olevat reaaliakselin välit *virittävät* reaalilukujen joukon mitallisten osajoukkojen muodostaman  $\sigma$ -algebran.
- Tähän tulokseen perustuu *kertymäfunktion* keskeinen asema *matemaattisessa tilastotieteessä*; ks. lukua **Kertymäfunktio**.

# Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

## Tapahtumien todennäköisyydet äärettömässä otosavaruudessa

---

- Otosavaruuden mitallisista osajoukoista eli tapahtumista voidaan muodostaa *uusia* mitallisia osajoukkoja eli tapahtumia soveltamalla  $\sigma$ -algebran aksioomia ja niistä johdettuja joukko-opin sääntöjä.
- Uusien tapahtumien *todennäköisyydet* saadaan soveltamalla *Kolmogorovin aksioomia* ja niistä johdettuja todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä.

# Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

## Todennäköisyyskentät

---

- Kolmikko

$$(S, \mathcal{F}, \Pr)$$

muodostaa **todennäköisyyskentän**, jos seuraavat ehdot pätevät:

- (i)  $S$  on joukko.
- (ii) Joukkoperhe  $\mathcal{F}$  muodostaa  $\sigma$ -algebran joukossa  $S$ .
- (iii) Joukkofunktio  $\Pr$  on  $\sigma$ -algebraan  $\mathcal{F}$  kuuluville joukon  $S$  osajoukoille määritelty *todennäköisyysmitta*, joka toteuttaa Kolmogorovin aksioomat.

# Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

## Lause 1

---

- Olkoon  $(S, \mathcal{F}, \Pr)$  todennäköisyyskenttä ja  $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ .

Tällöin pätee:

- (i) Jos  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ , niin

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n)$$

- (ii) Jos  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ , niin

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n)$$



## Lause 1:

### Todistus kohdalle (i) – 1/4

---

- Määritellään

$$B_0 = A_0 = \emptyset$$

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$

$$B_3 = A_3 \setminus A_2$$

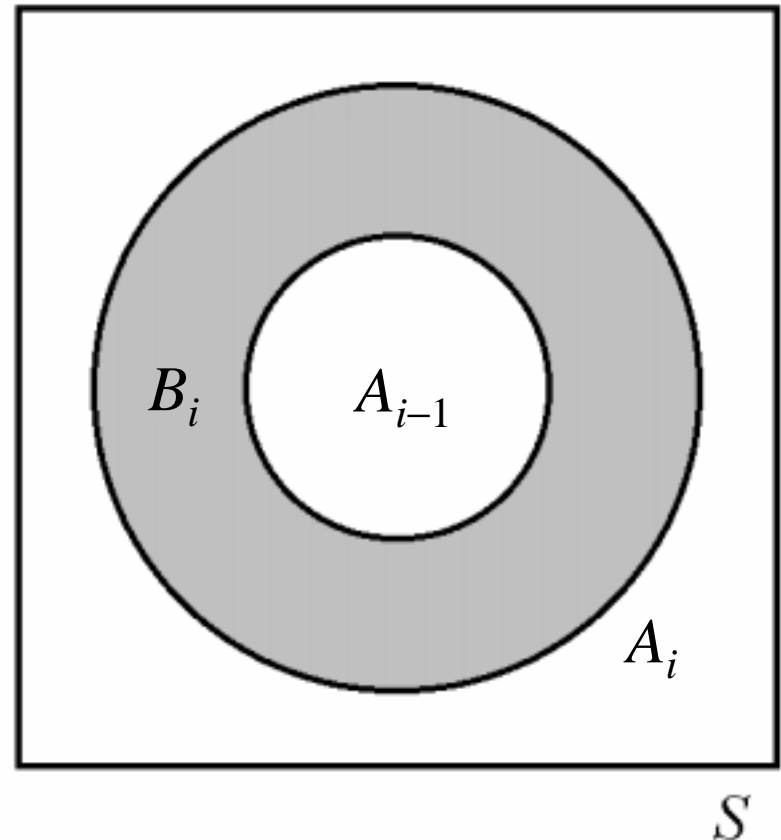
...

ja yleisesti

$$B_i = A_i \setminus A_{i-1} = A_i \cap A_{i-1}^c, i = 1, 2, 3, \dots$$

- Joukot  $B_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  ovat *pareittain toisensa poissulkevia*, koska oletuksen mukaan

$$A_{i-1} \subset A_i, i = 1, 2, 3, \dots$$



## Lause 1:

### Todistus kohdalle (i) – 2/4

---

- Oletuksesta

$$A_{i-1} \subset A_i, i = 1, 2, 3, \dots$$

seuraa:

$$\begin{aligned} \Pr(B_i) &= \Pr(A_i \setminus A_{i-1}) \\ &= \Pr(A_i) - \Pr(A_{i-1}) \end{aligned}$$

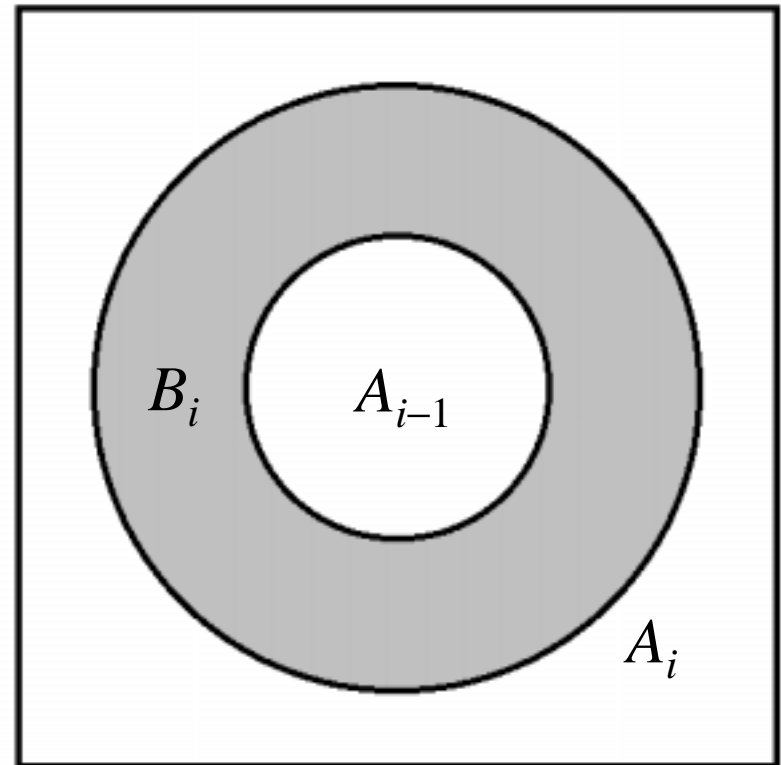
$$i = 1, 2, 3, \dots$$

- Lisäksi on selvää, että

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

- Siten

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$



## Lause 1:

### Todistus kohdalle (i) – 3/4

---

- Koska joukot  $B_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  ovat pareittain toisensa poissulkevia, *Kolmogorovin aksioomasta* (iii) seuraa:

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(B_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \Pr(B_i)$$

- Sijoittamalla tähän  $\Pr(B_i) = \Pr(A_i) - \Pr(A_{i-1})$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  saadaan

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \Pr(B_i) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \Pr(A_1) + \Pr(A_2) - \Pr(A_1) \right. \\ &\quad \left. + \Pr(A_3) - \Pr(A_2) \right. \\ &\quad \dots \\ &\quad \left. + \Pr(A_{n-1}) - \Pr(A_{n-2}) \right. \\ &\quad \left. + \Pr(A_n) - \Pr(A_{n-1}) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n) \end{aligned}$$

## Lause 1:

### Todistus kohdalle (i) – 4/4

---

- Yhdistämällä edellä johdetut tulokset saadaan lopulta:

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n)$$

## Lause 1:

### Todistus kohdalle (ii) – 1/3

---

- Määritellään

$$C_0 = S$$

$$C_1 = A_1^c$$

$$C_2 = A_2^c$$

$$C_3 = A_3^c$$

...

ja yleisesti

$$C_i = A_i^c, i = 1, 2, 3, \dots$$

- Oletuksesta  $A_{i-1} \supset A_i, i = 1, 2, 3, \dots$  seuraa:

$$C_{i-1} = A_{i-1}^c \subset A_i^c = C_i, i = 1, 2, 3, \dots$$

## Lause 1:

### Todistus kohdalle (ii) – 2/3

---

- Sovelletaan joukkoihin  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  Lauseen 1 kohtaa (i):

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(C_n)$$

- Koska  $C_i = A_i^c$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , niin

$$\Pr(C_i) = \Pr(A_i^c) = 1 - \Pr(A_i), i = 1, 2, 3, \dots$$

- *DeMorganin lain* mukaan

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)^c = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

- *Komplementtitapahtuman todennäköisyyden* kaavan mukaan

$$\Pr\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)^c\right] = 1 - \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)$$

## Lause 1:

### Todistus kohdalle (ii) – 3/3

---

- Yhdistämällä edellä johdetut tulokset saadaan lopulta:

$$\begin{aligned}\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \Pr\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)^c\right] \\ &= 1 - \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(C_n) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \Pr(A_n)\right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n)\end{aligned}$$

# Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

## Lause 2

---

- Olkoon  $(S, \mathcal{F}, \Pr)$  todennäköisyyskenttä ja  $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ .
- Jos  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \rightarrow \emptyset$ , niin

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n) = 0$$



## Lause 2: Todistus

---

- Jos  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \rightarrow \emptyset$ , niin

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$$

- Siten

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \Pr(\emptyset) = 0$$

- Lauseen 1 kohdan (ii) mukaan

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n)$$

- Yhdistämällä nämä tulokset saadaan:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n) = 0$$

## Lause 2 ja

## Kolmogorovin aksioomat

---

- Voidaan osoittaa, että Kolmogorovin aksiooma

$$(iii) \quad A_1, A_2, A_3, \dots \in F \text{ ja } A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \Rightarrow$$

$$\Pr(\cup A_i) = \sum \Pr(A_i)$$

on yhtäpitävä aksioomien

$$(iii)' \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow \Pr(A_1 \cup A_2) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2)$$

$$(iv) \quad A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \rightarrow \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n) = 0$$

kanssa.

- Aksioomaa (iv) kutsutaan usein todennäköisyyden **jatkuvuusaksioomaksi**.