Johdatus todennäköisyyslaskentaan

Joukko-oppi

Joukko-oppi

Joukko-opin peruskäsitteet

Joukko-opin perusoperaatiot

Joukko-opin laskusäännöt

Funktiot

Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Boolen algebrat

σ-algebrat

Joukko-oppi: Mitä opimme?

- Tämän liitteen tavoitteena on esitellä **joukko-opin** peruskäsitteet ja -operaatiot laajuudessa, joka riittää suurelle osalle perusmatematiikkaa.
- Erityisesti **todennäköisyyslaskennassa** sovellettavaa joukko-opin osaa käsitellään liitteen kolmessa ensimmäisessä kappaleessa:
  - **Joukko-opin peruskäsitteet**
  - **Joukko-opin perusoperaatiot**
  - **Joukko-opin laskusäännöt**

  sekä kolmessa viimeisessä kappaleessa:
  - **Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia**
  - **Boolen algebrat**
  - σ**-algebrat**

Joukko-oppi

>> Joukko-opin peruskäsitteet

Joukko-opin perusoperaatiot

Joukko-opin laskusäännöt

Funktiot

Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Boolen algebrat

σ-algebrat

Joukko-opin peruskäsitteet

Avainsanat

Aksiomaattinen joukko-oppi
Alkio
Joukko
Joukkojen samuus
Joukkoon kuuluminen
Joukko-opin paradoksit
Joukko-opin relaatiot
Joukko-oppi
Joukon määritteleminen
Lukujoukot

Naiivi joukko-oppi
Numeroituva joukko
Osajoukko
Perusjoukko
Tyhjä joukko
Venn-diagrammi
Ylinumeroituva joukko
Äärellinen joukko
Ääretön joukko

Mitä opimme? – 1/2

- Tarkastelemme tässä kappaleessa joukko-opin *peruskäsitteitä* ja *-relaatioita* ns. **naiivin joukko-opin** muodostamassa kehikossa.
- Joukko-opin **peruskäsitteet** ovat **joukon** ja sen **alkioiden** käsitteet.
- Joukko-opissa on *kaksi* **perusrelaatioita**:

  (i) Joukon ja sen alkioiden välinen relaatio on **kuulua joukkoon**.

  (ii) Joukkojen välinen relaatio on **olla osajoukkona**.

Mitä opimme? – 2/2

- Opimme, että joukkoja ja niiden välisiä operaatioita on aina tarkasteltava jonkin *hyvin määritellyn* **perusjoukon** osajoukkoina.
- Perusjoukko muodostaa siis *kehikon*, jossa joukko-opin perusrelaatioita ja -operaatioita tarkastellaan.
- Näemme myös kuinka joukko-opin relaatioita ja operaatioita voidaan havainnollistaa **Venn-diagrammien** avulla.

Joukko ja sen alkiot 1/2

- **Joukko** on *kokoelma olioita*, joita kutsutaan joukon **alkioiksi**.
- Joukkoja merkitään tavallisesti isoilla kirjaimilla

$$A, B, \ldots , S, \ldots , X, \ldots$$

  ja joukon alkioita pienillä kirjaimilla

$$a, b, \ldots , s, \ldots , x, \ldots$$

- Joukko A on **hyvin määritelty**, jos *jokaisesta* oliosta s voidaan sanoa *onko se joukon* A *alkio vai ei*.
- Joukko on *hyvin määritelty*, jos *sen alkiot tunnetaan*.

Joukko ja sen alkiot 2/2

- Merkitään **joukon ja sen alkioiden välistä relaatiota** seuraavasti:

  $$s \in A$$

  ja sanotaan:

  s on joukon A alkio

  tai

  s kuuluu joukkoon A

- Vastaavasti merkitään sitä, että *s ei ole joukon A alkio* eli *s ei kuulu joukkoon A* seuraavasti:

  $$s \notin A$$

Joukon määritteleminen

- Joukko määritellään tavallisesti kuvailemalla sen *alkioiden ominaisuudet*.
- Joukon alkioiden ominaisuudet määrittelevä lause kirjoitetaan tavallisesti lainausmerkkien väliin:

A = ”Joukon A alkioiden ominaisuudet määrittelevä lause”

Joukon määritteleminen: Esimerkkejä

- Määritellään seuraavat joukot:

  A = ”Kansanedustajien joukko”

  B = ”Teknilliseen korkeakouluun vuonna 2000 hyväksytyjen uusien opiskelijoiden joukko”

  C = ”Rahanheiton tulosvaihtoehtojen joukko”

  D = ”Lottoarvonnan tulosvaihtoehtojen joukko”

  E = ”Yhtälön $\sin(x) = 0$ ratkaisujen joukko, kun x on reaaliluku”

  F = ”Yhtälön $x^2 = -1$ ratkaisujen joukko, kun x on kompleksiluku”

Joukon määritteleminen ehtolauseiden avulla

- Joukon alkioiden määrittelevät ominaisuudet kuvaillaan tavallisesti antamalla *ehto*, joka alkioiden on toteutettava.
- Oletetaan, että olio s on joukon A alkio eli

  $$s \in A,$$

  jos oliota s koskeva ehtolause $\mathcal{P}(s)$ on *tosi*.
- Tällöin joukko A voidaan määritellä kirjoittamalla

  $$A = \{ s \mid \mathcal{P}(s) \}$$

Joukon määritteleminen ehtolauseiden avulla: Esimerkki 1/2

- Olkoon A niiden reaalilukuparien (x, y) joukko, jotka toteuttavat ehdon
  $$x^2 + y^2 = 1$$
- Joukko A on siis origokeskisen yksikkösäteisen ympyrän kehän pisteiden joukko tasossa.
- Joukko A voidaan määritellä kirjoittamalla
  $$A = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 1 \right\}$$
  jossa $\mathbb{R}$ on reaalilukujen joukko.

Joukon määritteleminen ehtolauseiden avulla: Esimerkki 2/2

- Esimerkiksi lukupari

$$\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\in A=\left\{(x,y)\,\middle|\, x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},\ x^2+y^2=1\right\}$$

koska

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=1$$

- Sen sijaan lukupari

$$(1,1)\notin A=\left\{(x,y)\,\middle|\, x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},\ x^2+y^2=1\right\}$$

koska

$$1^2+1^2=1+1=2\neq 1$$

Äärelliset joukot

- Jos joukko on **äärellinen**, se voidaan määritellä *luettelemalla* sen alkiot.
- Olkoot joukon A alkiot $s_1 , s_2 , \dots , s_n$, jolloin siis

$$s_1 , s_2 , \dots , s_n \in A$$

- Joukko A voidaan määritellä kirjoittamalla

$$A = \{s_1 , s_2 , \dots , s_n\}$$

Äärelliset joukot: Esimerkkejä

- Olkoon A *rahanheiton tulosvaihtoehtojen joukko*.
- Rahanheiton tuloksena on joko Kruuna tai Klaava.
- Joukko A voidaan määritellä kirjoittamalla

$$A = \{\text{Kruuna, Klaava}\}$$

- Olkoon B *nopanheiton tulosvaihtoehtojen joukko*.
- Nopanheiton tuloksena on jokin silmäluvuista 1, 2, 3, 4, 5 tai 6.
- Joukko B voidaan määritellä kirjoittamalla

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Numeroituvasti äärettömät joukot 1/2

- Jos joukon alkiot *voidaan järjestää jonoon*, joukkoa sanotaan **numeroituvaksi**.
- *Äärelliset* joukot ovat aina numeroituvia.
- *Äärettömiä* numeroituvia joukkoja kutsutaan **numeroituvasti äärettömiksi**.
- Esimerkkejä:

  Voidaan osoittaa, että *luonnollisten lukujen joukko* $\mathbb{N}$, *kokonaislukujen joukko* $\mathbb{Z}$ ja *rationaalilukujen joukko* $\mathbb{Q}$ ovat kaikki numeroituvasti äärettömiä ja siten *yhtä mahtavia*.

Numeroituvasti äärettömät joukot 2/2

- Numeroituvasti äärettömät joukot määritellään usein *luettelemalla* joukon alkioiden muodostamasta jonosta *muutama ensimmäisen alkio*.
- Esimerkkejä:

$\{1, 2, 3, \ldots\}$ = *positiivisten kokonaislukujen* eli *luonnollisten lukujen* joukko $\mathbb{N}$

$\{1, 3, 5, \ldots\}$ = *parittomien* positiivisten kokonaislukujen joukko

$\{2, 4, 6, \ldots\}$ = *parillisten* positiivisten kokonaislukujen joukko

Ylinumeroituvat joukot

- Jos joukko on *ääretön* ja sen alkioita *ei voida järjestää jonoon*, joukkoa sanotaan **ylinumeroituvaksi**.
- Esimerkki:

  Voidaan osoittaa, että reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on ylinumeroituva ja siten *mahtavampi* kuin luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$.

Joukon käsite ja joukon määritteleminen: Kommentteja

- Tässä esityksessä joukko on määritelty *kokoelmana joukon alkioiksi sanottuja olioita*.
- Tämä *naiivin joukko-opin* määritelmä joukolle *ei ole* matemaattisesti täsmällinen, koska se on *kehämääritelmä*:

  Kokoelma ~ Joukko

- Joukon käsitteen epätäsmällisestä määritelmästä seuraa se, että *naiivissa joukko-opissa* on mahdollista määritellä joukkoja, joilla on *ristiriitaisia* ominaisuuksia.

Joukko-opin paradoksit 1/2

- Joukot eivät ole yleensä itsensä alkioita.
- Olkoon Z kaikkien niiden joukkojen joukko, jotka eivät ole itsensä alkiota:

$$Z = \{ X \mid X \notin X \}$$

- Kysymys: Onko joukko Z itsensä alkio vai ei?
- Kysymykseen voidaan antaa kaksi vastausta, joihin kumpaankin sisältyy *ristiriita*:
  (i) Jos Z *on* joukon Z alkio, Z *ei kuuluu* joukkoon Z joukon Z määritelmän mukaan.
  (ii) Jos Z *ei ole* joukon Z alkio, Z *kuuluu* joukkoon Z joukon Z määritelmän mukaan.
- Joukon Z määritelmästä johdettua *ristiriitaa* kutsutaan *Russellin paradoksiksi*.

Joukko-opin paradoksit 2/2

- *Naiivissa joukko-opissa* voidaan johtaa useita erilaisia *paradokseja*.
- Paradoksit perustuvat siihen, että naiivissa joukko-opissa voidaan *määritellä* joukkoja, joilla on *ristiriitaisia ominaisuuksia*.
- Tämä merkitsee sitä, että naiivi joukko-oppi suhtautuu *liian vapaamielisesti* joukkojen määrittelemiseen.
- Paradokseja *ei synny*, jos ristiriitaisilla ominaisuuksilla varustettujen joukkojen määritteleminen *estetään*.
- Ristiriitaisilla ominaisuuksilla varustettujen joukkojen määritteleminen saadaan estetyksi kehittämällä joukko-oppi *aksiomaattiseksi järjestelmäksi*.

Naiivi *vs* aksiomaattinen joukko-oppi

- Naiivin joukko-opin ongelmat voidaan välttää kehittämällä joukko-oppi *aksiomaattiseksi järjestelmäksi*.
- Naiivi joukko-oppi riittää kuitenkin perustaksi kaikissa joukko-opin *tavanomaisissa sovelluksissa* ja siksi tässä esityksessä ei käytetä aksiomaattista esitystapaa.

Joukkojen samuus

- Joukot ovat **samat**, jos niillä on samat alkiot.
- Siten joukot A ja B ovat samat, jos jokaiselle oliolle s pätee:

$$s \in A \Leftrightarrow s \in B$$

- Merkitään sitä, että joukot A ja B ovat samat seuraavasti:

$$A = B$$

Joukkojen samuus: Esimerkki

- Olkoon A yhtälön $x^2 = 4$ ratkaisujen joukko reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 = 4 \right\}$$

- Olkoon

$$B = \{-2, +2\}$$

- Tällöin

$$A = B$$

Osajoukko

- *Joukko B on joukon A* **osajoukko** eli *joukko B sisältyy joukkoon A*, jos jokainen joukon *B* alkio kuuluu joukkoon *A* eli

$$s \in B \Rightarrow s \in A$$

- *Merkitään* sitä, että joukko *B* on joukon *A* osajoukko seuraavasti:

$$B \subset A \text{ tai } A \supset B$$

Osajoukko-relaatio

- *Olla osajoukko* on **kahden joukon välinen relaatio**.
- Jos joukko B *ei ole* joukon A osajoukko, merkitään

$$B \not\subset A$$

- Tällöin joukossa B on *ainakin yksi alkio*, joka ei kuulu joukkoon A.
- Jos A ja B ovat kaksi mielivaltaista joukkoa, kummankaan ei tarvitse olla toisen osajoukko.

Aito osajoukko

- Joukko B on joukon A **aito osajoukko**, jos

$$B \subset A$$

mutta

$$B \neq A$$

- Tällöin jokainen joukon B alkio kuuluu joukkoon A, mutta joukossa A on ainakin yksi alkio, joka ei kuulu joukkoon B.

Tyhjä joukko

- Joukko on **tyhjä**, jos siihen ei kuulu yhtään alkiota.
- Merkitään tyhjää joukkoa symbolilla

$$\varnothing$$

- Jos joukko $\varnothing$ on tyhjä, *ei ole olemassa* yhtään oliota s, jolle

$$s \in \varnothing$$

- Tyhjä joukko $\varnothing$ on *jokaisen* joukon osajoukko eli mielivaltaiselle joukolle A pätee:

$$\varnothing \subset A$$

Perusjoukko

- Sekaannuksien välttämiseksi joukkoja sekä niiden välisiä relaatioita ja operaatioita on aina syytä tarkastella *hyvin määritellyssä* **perusjoukossa**.
- Merkitsemme perusjoukkoa usein kirjaimella

$$S$$

- Tällöin kaikille tarkasteltaville joukoille A, B, … pitää päteä:

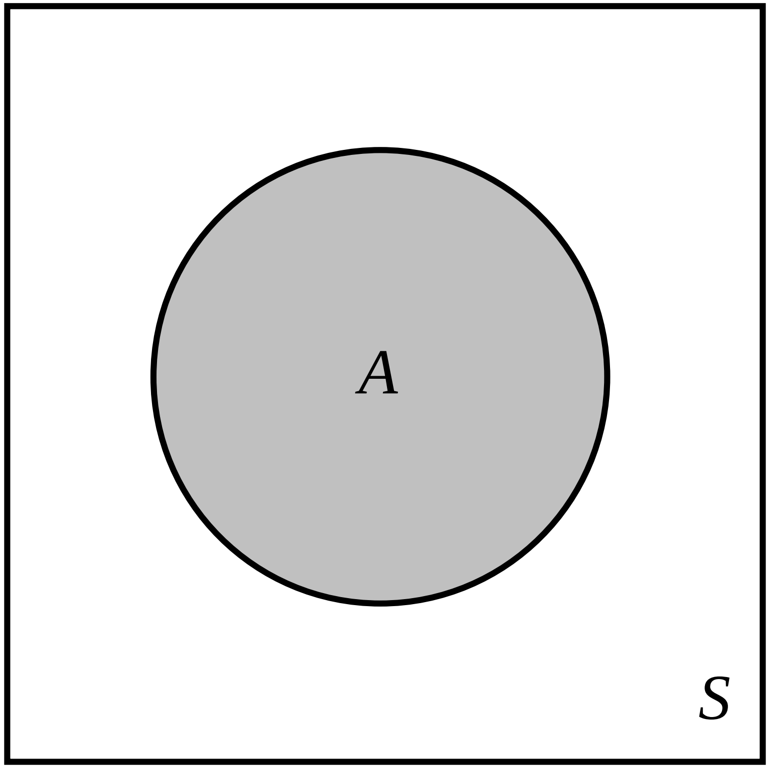
$$A \subset S,\ B \subset S,\ \ldots$$

Perusjoukon määrittelemisen merkitys: Esimerkki

- *Perusjoukon eksplisiittinen tai implisiittinen määritteleminen on sekaannuksien välttämiseksi välttämätöntä*.
- Jos kirjoitetaan
  $$A = \left\{ x \middle| x^2 = -1 \right\}$$
  ei voida olla varmoja siitä, mikä joukko A on.
- Jos kirjoitetaan
  $$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x^2 = -1 \right\}$$, jossa $\mathbb{R}$ on reaalilukujen joukko
  $$C = \left\{ x \in \mathbb{C} \middle| x^2 = -1 \right\}$$, jossa $\mathbb{C}$ on kompleksilukujen joukko
  tiedetään, että
  $$B = \varnothing$$
  ja
  $C = \{-i, +i\}$, jossa $i = \sqrt{-1}$

Venn-diagrammi

- Joukko-opin operaatioita ja laskusääntöjä voidaan havainnollistaa ns. **Venn-diagrammien** avulla.
- Olkoon tarkasteltava joukko A perusjoukon S osajoukko.
- *Perusjoukkoa* S kuvataan suorakaiteella.
- *Joukkoa* $A \subset S$ kuvataan suorakaiteen osa-alueella.
- Tavallisesti tarkasteltava joukko A *varjostetaan*.



Venn-diagrammi: Kommentteja

- Joukko-opin laskusäännön *havainnollistus Venn-diagrammin avulla ei sisällä* säännön *todistusta*.
- Venn-diagrammien avulla voidaan havainnollistaa kätevästi myös *todennäköisyyslaskennan* perus-laskusääntöjä.

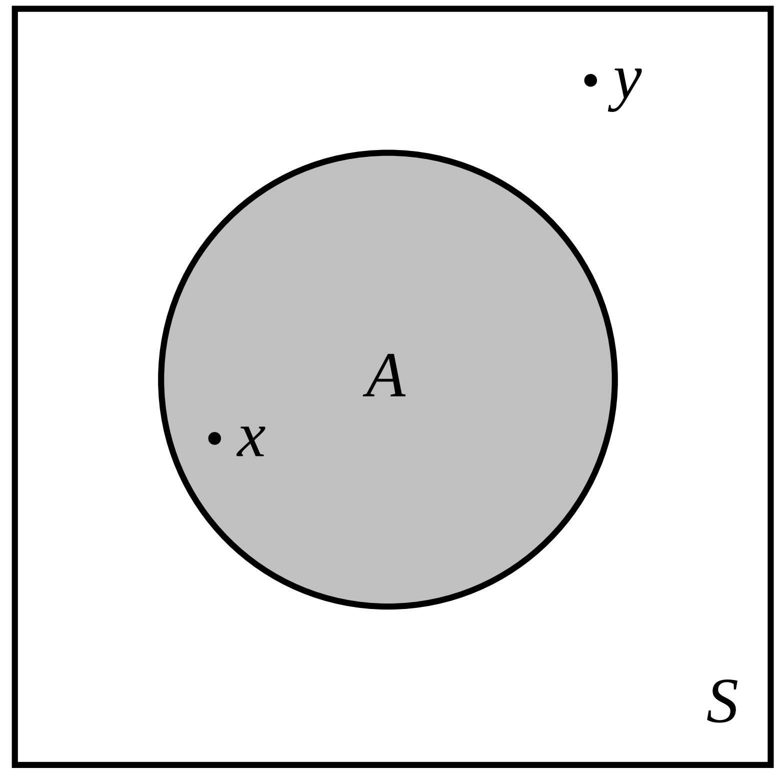
Venn-diagrammi: Joukkoon kuuluminen

- Olkoot x ja y perusjoukon S *alkioita* ja olkoon A perusjoukon S *osajoukko*:

  $x \in S, y \in S, A \subset S$

- Viereinen Venn-diagrammi kuvaa tilannetta, jossa alkio x *kuuluu* joukkoon A, mutta alkio y *ei kuulu*:

  $x \in A, y \notin A$



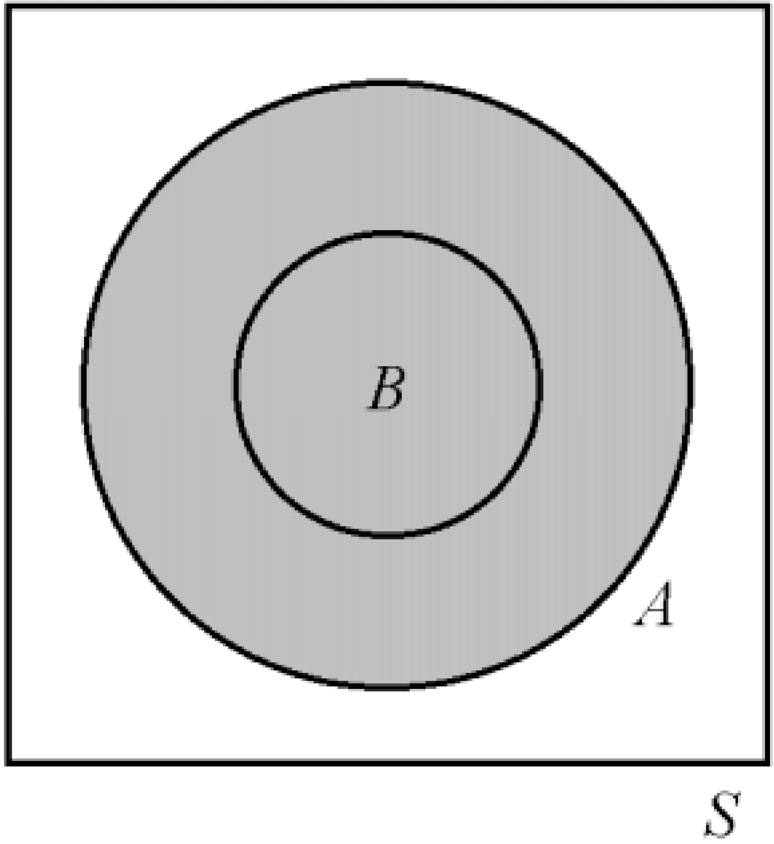
Venn-diagrammi: Osajoukkona oleminen

- Olkoot joukot A ja B perusjoukon S osajoukkoja:

  $A \subset S$ ja $B \subset S$

- Viereinen Venn-diagrammi kuvaa tilannetta, jossa joukko B on joukon A (aito) *osajoukko*:

  $B \subset A$



Lukujoukot 1/2

- Tavalliset *lukujoukot*:

Luonnollisten lukujen joukko:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Kokonaislukujen joukko:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$$

Rationaalilukujen joukko:

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \,\middle|\, q = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Reaalilukujen joukko:

$$\mathbb{R}$$

Lukujoukot 2/2

Kompleksilukujen joukko:

$$\mathbb{C} = \left\{ z \,\middle|\, z = x + iy,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1} \right\}$$

- Huomautus:

  Joukot $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Q}$ ovat *numeroituvasti äärettömiä* ja *yhtä mahtavia*, kun taas joukot $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ ovat *ylinumeroituvia* ja siten *mahtavampia* kuin luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$.

Lukujoukkojen keskinäiset suhteet

- Lukuja tarkasteltaessa *perusjoukkona* käytetään tavallisesti *kompleksilukujen joukkoa* $\mathbb{C}$, koska lukujoukkojen välillä on seuraavat (aidot) osajoukkorelaatiot:

  $$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

  ja lisäksi yksikään seuraavista *laskutoimituksista* ei vie kompleksilukujen joukon *ulkopuolelle*:

  – yhteenlasku
  – vähennyslasku
  – kertolasku
  – jakolasku
  – juurenotto

Joukko-oppi

Joukko-opin peruskäsitteet

\>> Joukko-opin perusoperaatiot

Joukko-opin laskusäännöt

Funktiot

Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Boolen algebrat

σ-algebrat

Joukko-opin perusoperaatiot

Avainsanat

Erotus

Joukko

Joukko-opin perusoperaatiot

Komplementti

Leikkaus

Pistevieraat joukot

Symmetrinen erotus

Yhdiste eli unioni

Mitä opimme?

- Tarkastelemme tässä kappaleessa seuraavia joukko-opin *perusoperaatioita*:

  (i) Joukon **komplementtijoukon** muodostaminen.

  (ii) Kahden joukon **yhdisteen** eli **unionin** muodostaminen.

  (iii) Kahden joukon **leikkauksen** muodostaminen.

  (iv) Kahden joukon **erotuksen** muodostaminen.

  (v) Kahden joukon **symmetrisen erotuksen** muodostaminen.

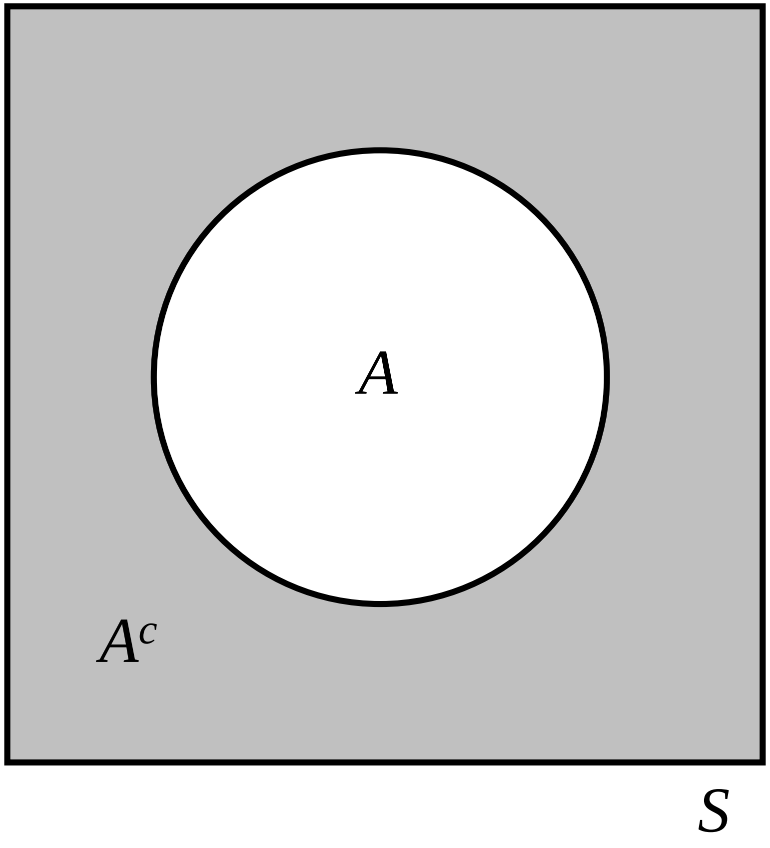
Komplementtijoukko

- Olkoon $A \subset S$ perusjoukon S osajoukko.
- Joukon A **komplementti-joukko** eli **komplementti**

  A^c

  on niiden perusjoukon S alkioiden joukko, jotka *eivät kuulu joukkoon A*:

  $A^c = \{s \in S \mid s \notin A\}$



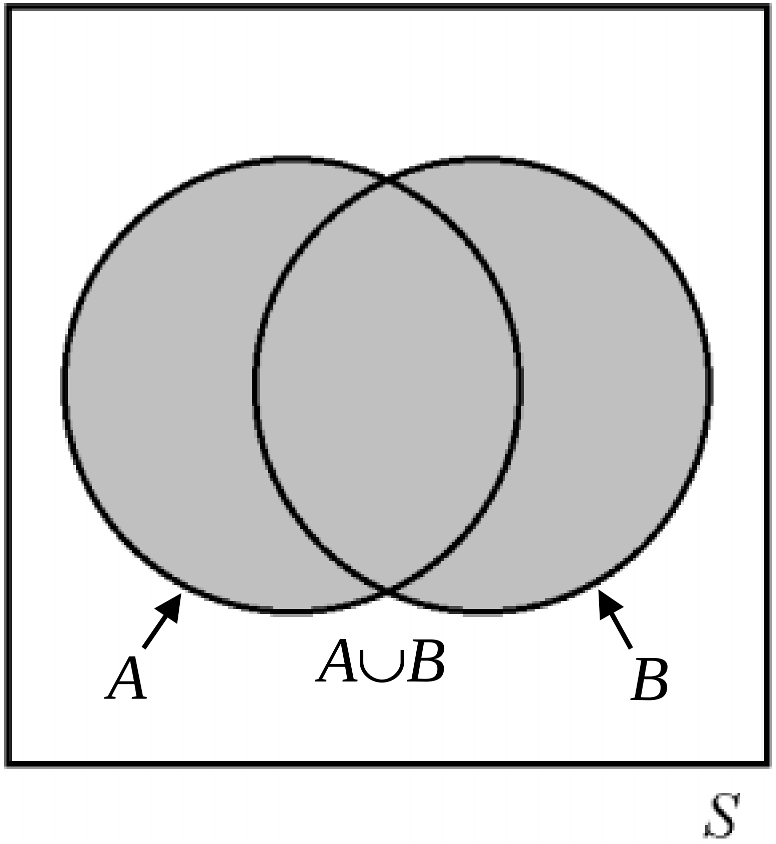
Yhdiste eli unioni

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ perusjoukon S osajoukkoja.
- Joukkojen A ja B **yhdiste** eli **unioni**

  $A \cup B$

  on niiden perusjoukon S alkioiden joukko, jotka *kuuluvat joukkoon A tai joukkoon B tai molempiin*:

  $A \cup B$
  $= \{s \in S \mid s \in A \text{ tai } s \in B\}$



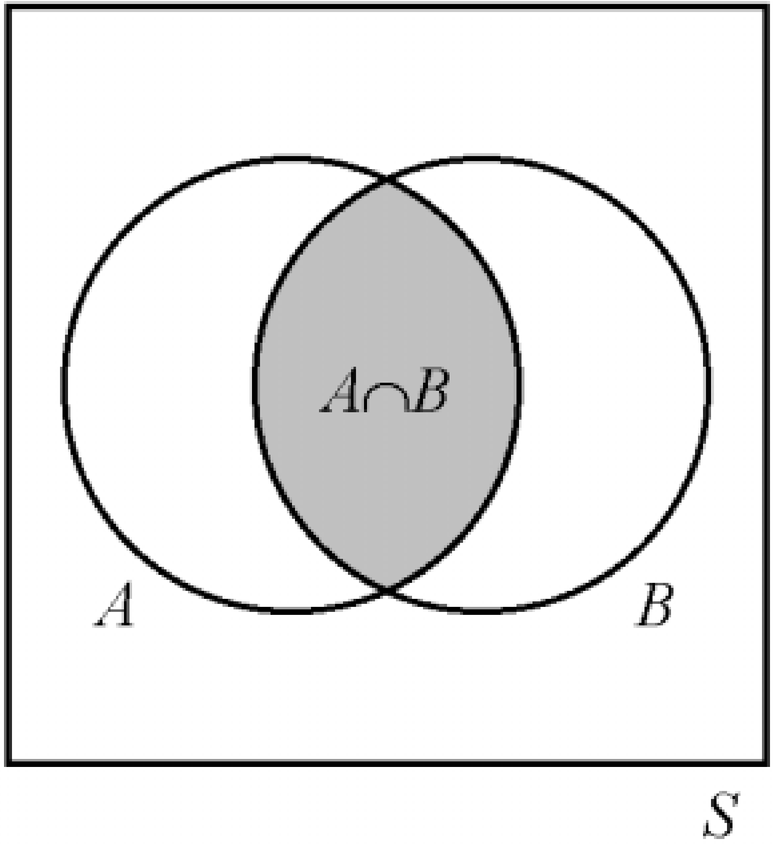
Leikkaus

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ perusjoukon S osajoukkoja.
- Joukkojen A ja B **leikkaus**

  $A \cap B$

  on niiden perusjoukon S alkioiden joukko, jotka *kuuluvat joukkoon A ja joukkoon B*:

  $A \cap B$
  $= \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \in B\}$

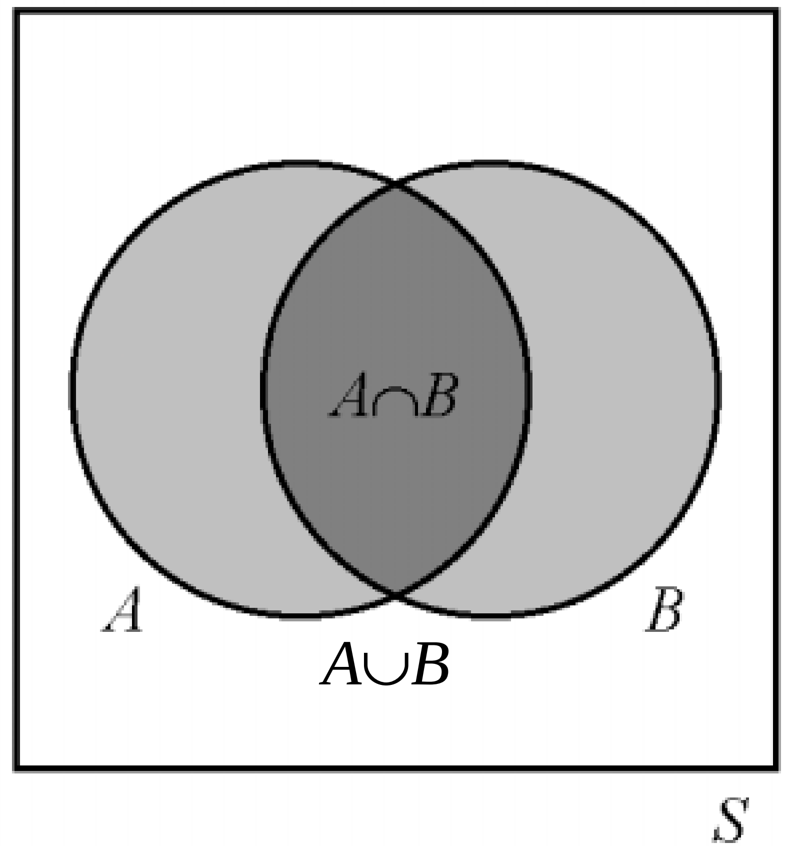


Joukko-opin perusoperaatiot
Yhdiste ja leikkaus

- Joukkojen A ja B *yhdiste* $A \cup B$ voidaan esittää joukon A ja joukon B komplementtien leikkauksen komplementtina:

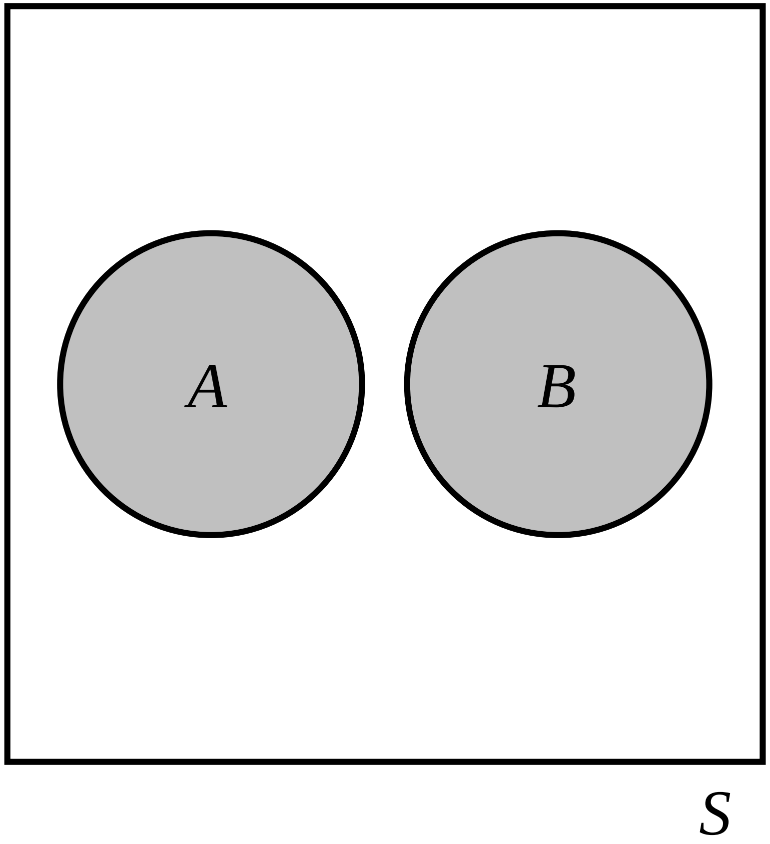
  $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$
- Joukkojen A ja B *leikkaus* $A \cap B$ voidaan esittää joukon A ja joukon B komplementtien yhdisteen komplementtina:

  $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$



Pistevieraat joukot

- Jos joukoilla A ja B *ei ole yhteisiä alkioita*, sanotaan, että joukot A ja B ovat **pistevieraita**.
- Joukot A ja B ovat pistevieraita, jos ja vain jos
  $A \cap B = \varnothing$



Pistevieraat joukot: Esimerkki eduskunnasta

- Kansanedustaja ei voi olla kahden puolueen jäsen.
- Määritellään perusjoukko:

  S = ”Kansanedustajien joukko”

- Määritellään Kokoomuspuolueen ja Vasemmistoliiton kansanedustajien joukot:

  $K = \{s \in S \mid s \text{ on Kokoomuspuolueen kansanedustaja}\}$

  $V = \{s \in S \mid s \text{ on Vasemmistoliiton kansanedustaja}\}$

- Tällöin joukot K ja V ovat pistevieraita:

  $K \cap V = \varnothing$

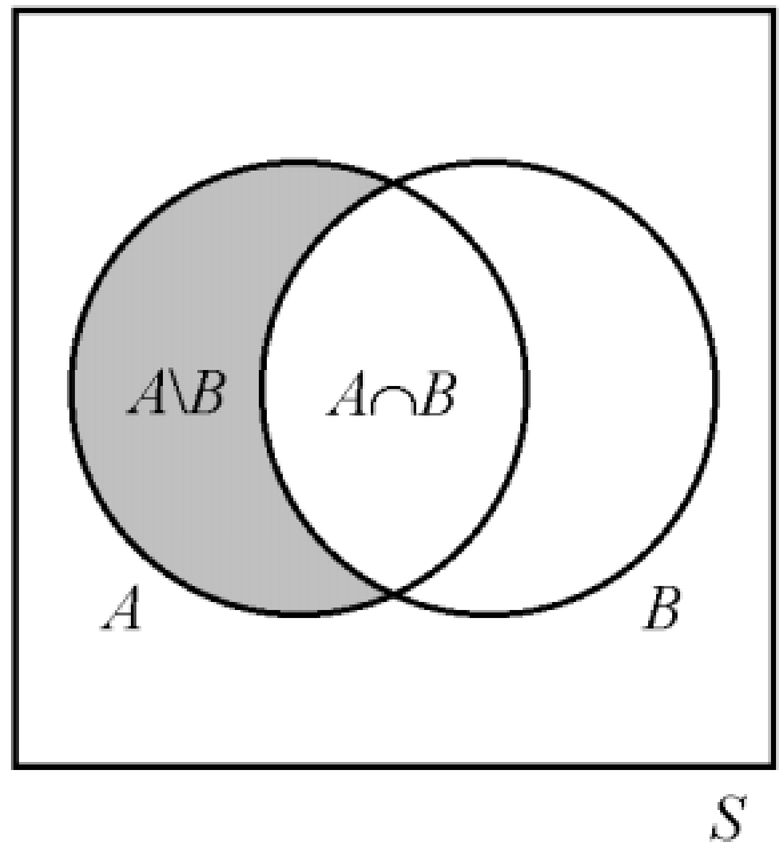
Erotus 1/2

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ perusjoukon S osajoukkoja.
- Joukkojen A ja B **erotus**

  $A \setminus B$

  on niiden perusjoukon S alkioiden joukko, jotka *kuuluvat joukkoon A, mutta eivät kuulu joukkoon B*:

  $A \setminus B$
  $= \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \notin B\}$



Erotus 2/2

- Joukkojen A ja B *erotus* $A \setminus B$ voidaan esittää joukon A ja joukon B komplementin leikkauksena:

  $A \setminus B = A \cap B^c$

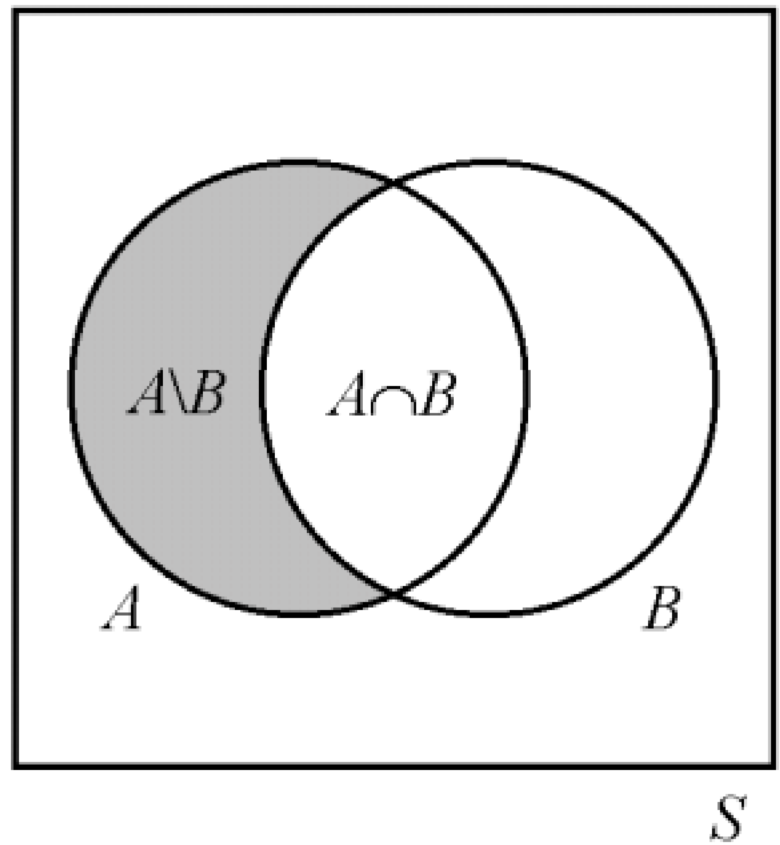
- Perustelu:

  $s \in A \setminus B \Leftrightarrow$

  $s \in A$ ja $s \notin B \Leftrightarrow$

  $s \in A$ ja $s \in B^c \Leftrightarrow$

  $s \in A \cap B^c$



Komplementti ja erotus

- Joukon A *komplementti* A^c voidaan esittää perusjoukon S ja joukon A erotuksena:

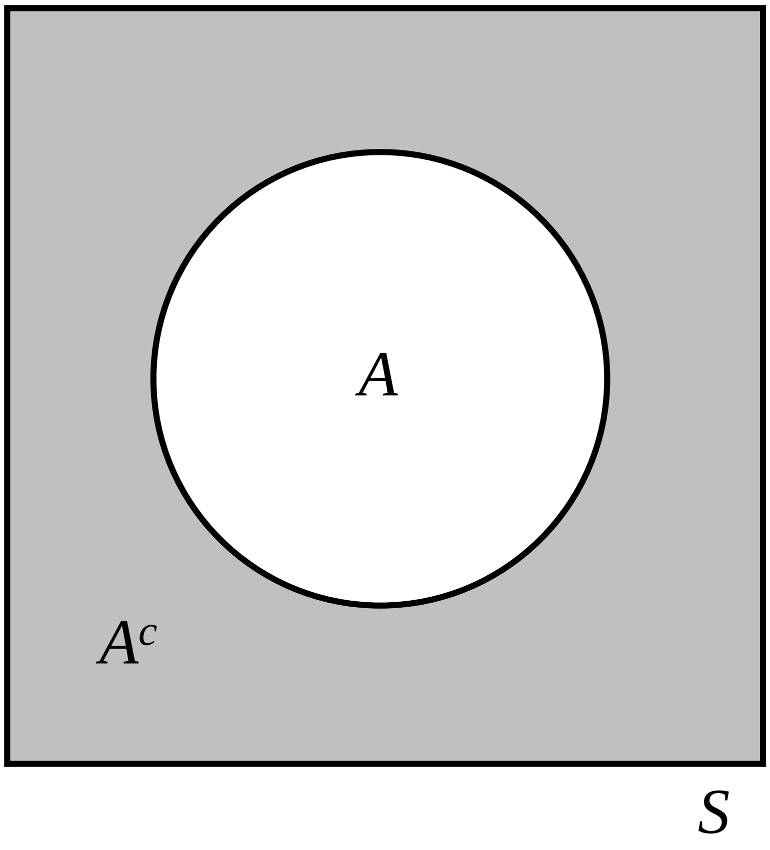
  $A^c = S \setminus A$

- Perustelu:

  $s \in A^c \Leftrightarrow$

  $s \in S$ ja $s \notin A \Leftrightarrow$

  $s \in S \setminus A$



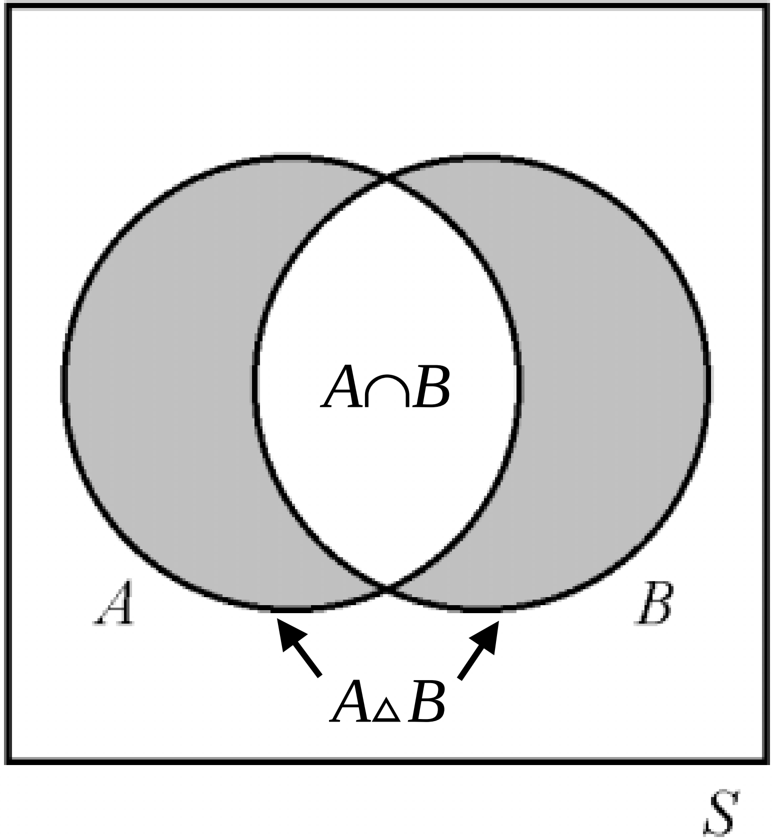
Symmetrinen erotus 1/3

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ perusjoukon S osajoukkoja.
- Joukkojen A ja B **symmetrinen erotus**

  $A \triangle B$

  on niiden perusjoukon S alkioiden joukko, jotka *kuuluvat joukkoon A tai joukkoon B, mutta eivät molempiin*:

  $$A \triangle B = \left\{ s \in S \,\middle|\, s \in A \text{ tai } s \in B, \text{ mutta } s \notin A \cap B \right\}$$



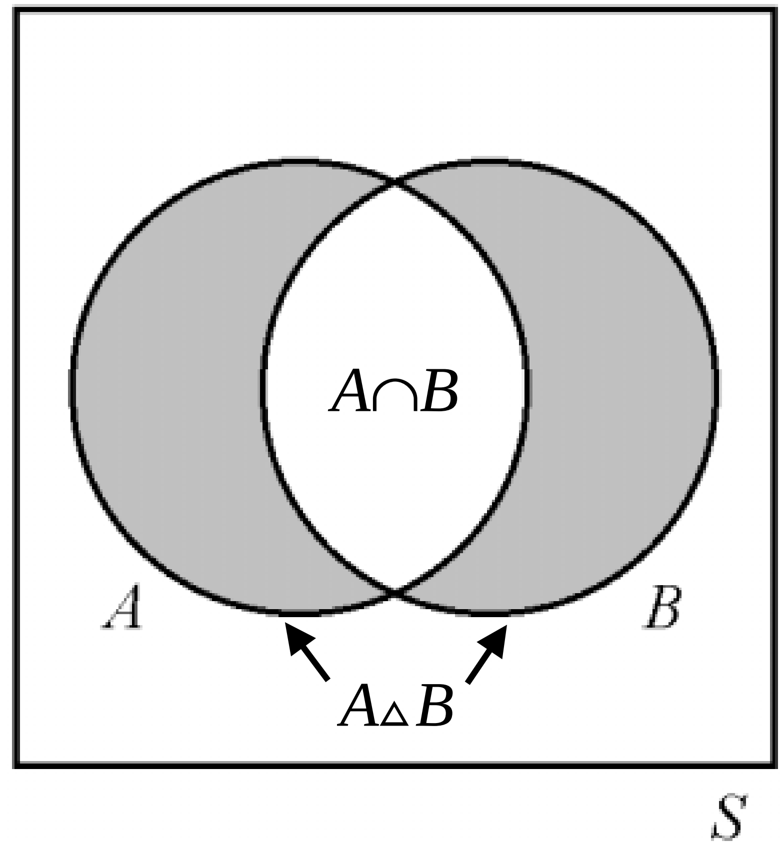
Symmetrinen erotus 2/3

- Joukkojen A ja B *symmetrinen erotus* voidaan esittää joukkojen A ja B yhdisteen ja leikkauksen erotuksena:

  $$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

- Perustelu:

  $s \in A \triangle B \Leftrightarrow$
  $s \in A$ tai $s \in B$, mutta $s \notin A \cap B \Leftrightarrow$
  $s \in A \cup B$, mutta $s \notin A \cap B \Leftrightarrow$
  $s \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$



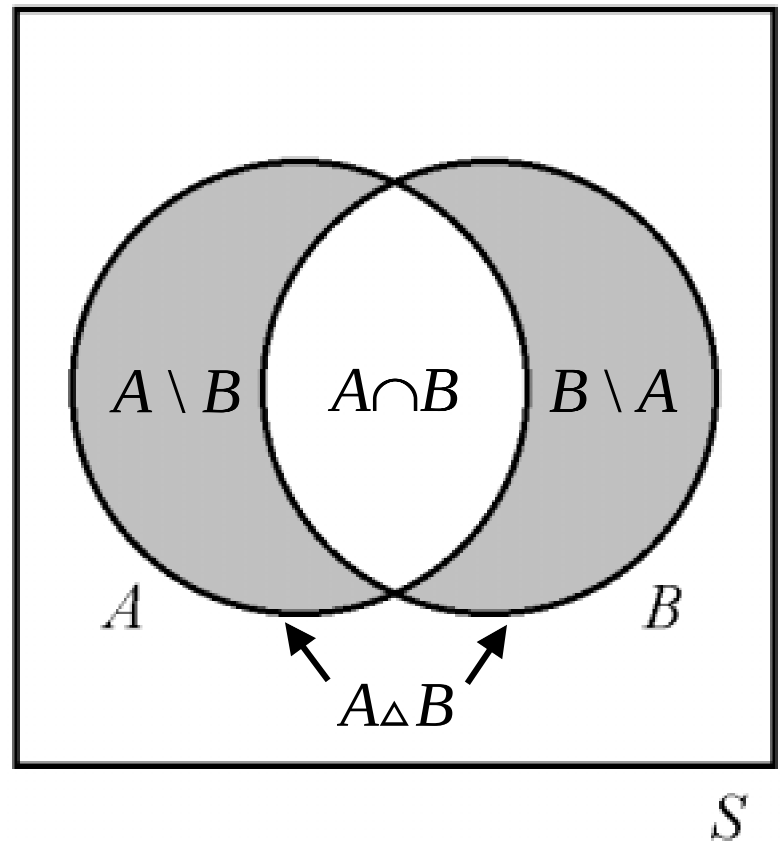
Symmetrinen erotus 3/3

- Joukkojen A ja B *symmetrinen erotus* voidaan esittää joukkojen A ja B erotuksen ja joukkojen B ja A erotuksen yhdisteenä:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- Perustelu:

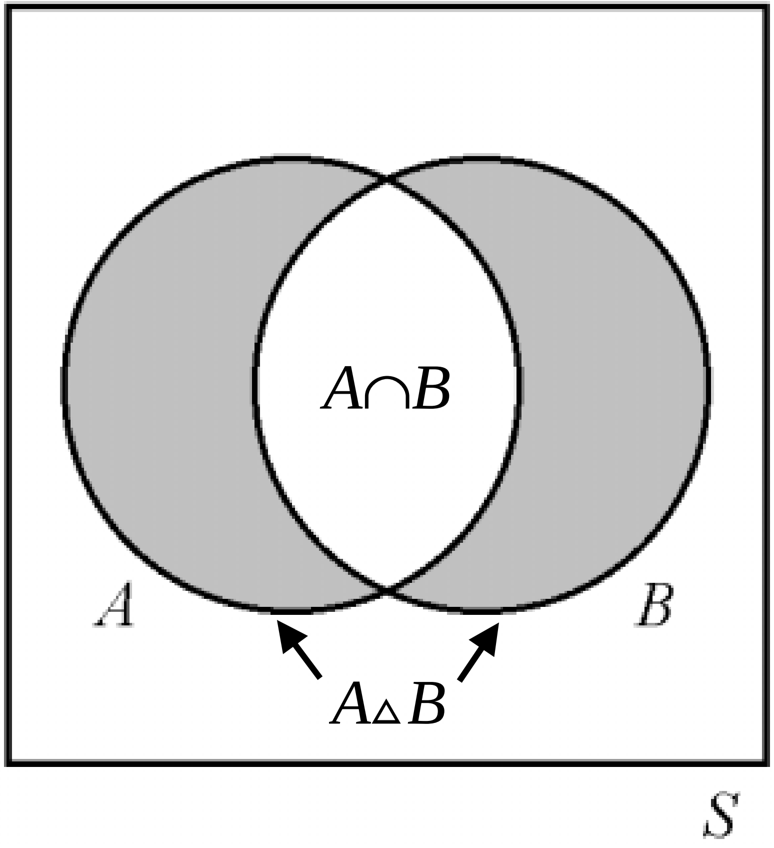
$$\begin{aligned}
&s \in A \triangle B \Leftrightarrow \\
&s \in A \text{ tai } s \in B, \text{ mutta } s \notin A \cap B \Leftrightarrow \\
&s \in A, \text{ mutta } s \notin B \text{ tai} \\
&\qquad\qquad s \in B, \text{ mutta } s \notin A \Leftrightarrow \\
&s \in A \setminus B \text{ tai } s \in B \setminus A \Leftrightarrow \\
&s \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)
\end{aligned}$$



Yhdiste *vs* symmetrinen erotus 1/2

- Huomaa joukkojen A ja B *yhdisteen* ja *symmetrisen erotuksen* ero:

$$A \cup B$$
$$= \{ s \in S \mid s \in A \text{ tai } s \in B \}$$
$$A \vartriangle B$$
$$= \{ s \in S \mid s \in A \text{ tai } s \in B, \text{ mutta } s \notin A \cap B \}$$



Yhdiste *vs* symmetrinen erotus 2/2

- Yhdisteen määritelmän mukaan:

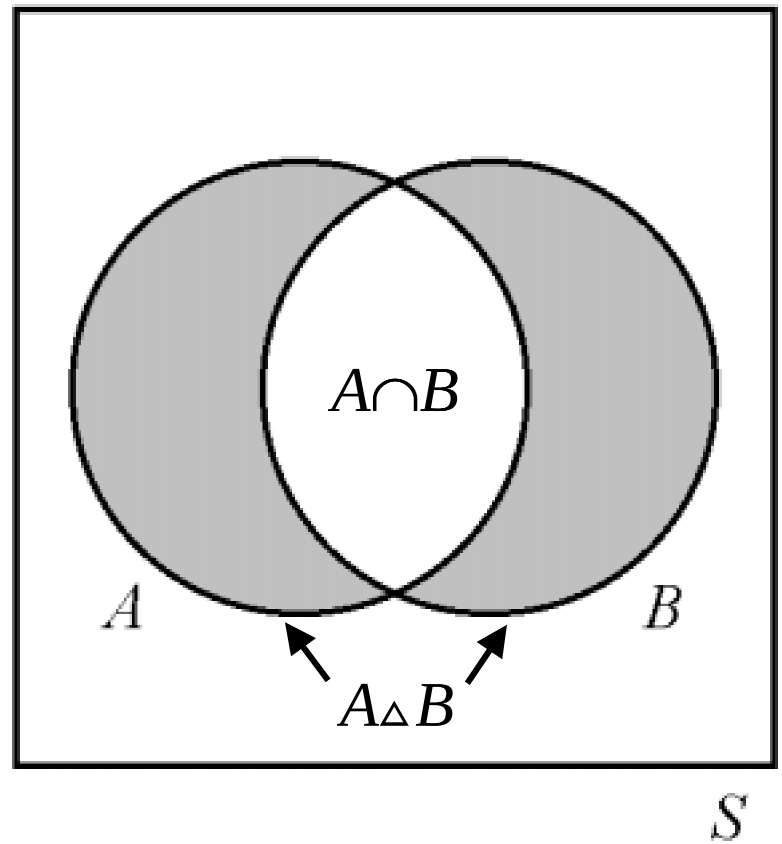
  $s \in A \cup B \Leftrightarrow s \in A$ tai $s \in B$

  Yhdisteessä perusjoukon S alkio s on *joko* joukon A alkio *tai* joukon B alkio *tai molempien* alkio.

- Symmetrisen erotuksen määritelmän mukaan:

  $s \in A \triangle B \Leftrightarrow s \in A$ tai $s \in B$,
  mutta $s \notin A \cap B$

  Symmetrisessä erotuksessa perusjoukon S alkio s on *joko* joukon A alkio *tai* joukon B alkio, *mutta ei molempien* alkio.



Yhdiste pistevieraiden joukkojen yhdisteenä

- Joukkojen A ja B *yhdiste* voidaan esittää seuraavilla tavoilla *pareittain piste-vieraiden* joukkojen

  $A \setminus B$, $B \setminus A$ ja $A \cap B$

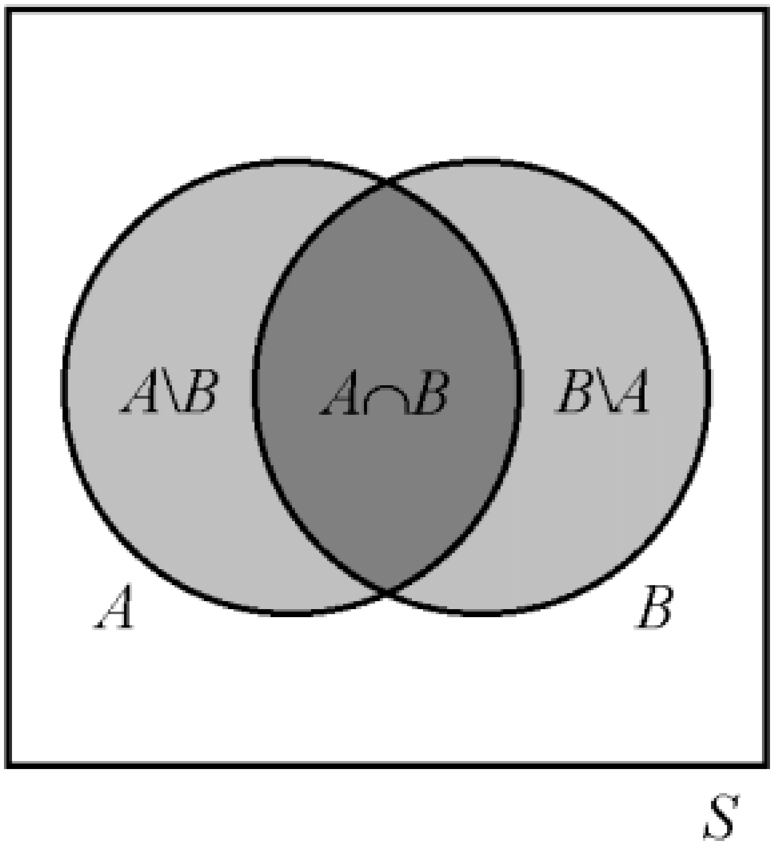
  yhdisteenä:

  $A \cup B$

  $= A \cup (B \setminus A)$

  $= B \cup (A \setminus B)$

  $= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$



Joukko-oppi

Joukko-opin peruskäsitteet

Joukko-opin perusoperaatiot

>> Joukko-opin laskusäännöt

Funktiot

Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Boolen algebrat

σ-algebrat

Joukko-opin laskusäännöt

Avainsanat

- **Assosiatiivisuus**
- **De Morganin lait**
- **Distributiivisuus**
- **Idempotenttisuus**
- **Identiteetti-lait**
- **Joukko**
- **Joukkojen algebra**
- **Joukko-opin operaatio**
- **Kommutatiivisuus**
- **Komplementti-lait**
- **Osajoukko-relaatio**

Mitä opimme?

- Olemme koonneet tähän kappaleeseen tärkeimmät **osajoukkorelaation ominaisuudet** sekä **laskusäännöt joukko-opin perusoperaatioille**.

Osajoukko-relaation ominaisuudet

- Kaikille joukoille A, B, C pätee:

(1) $A \subset A$

(2) $A \subset B$ ja $B \subset A \Rightarrow A = B$

(3) $A \subset B$ ja $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Joukko-opin operaatiot ja osajoukko-relaatio 1/3

- Kaikille joukoille A, B pätee:

(4a) $A \subset (A \cup B)$

(4b) $B \subset (A \cup B)$

(5a) $(A \cap B) \subset A$

(5b) $(A \cap B) \subset B$

(6) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

Joukko-opin operaatiot ja osajoukko-relaatio 2/3

- Kaikille joukoille A, B pätee:

(7a) $(A \setminus B) \subset A$

(7b) $(B \setminus A) \subset B$

(8) $(A \triangle B) \subset (A \cup B)$

(9a) $(A \setminus B) \subset (A \triangle B)$

(9b) $(B \setminus A) \subset (A \triangle B)$

Joukko-opin operaatiot ja osajoukko-relaatio 3/3

- Kaikille joukoille A, B pätee:

(10) $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$

(11) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

(12) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

(13) $A \subset B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$

(14) $A \subset B \Rightarrow A \cup (B \setminus A) = B$

(15) $A \subset B \Rightarrow (A \vartriangle B) = B \setminus A$

Joukkojen algebran säännöt 1/3

- Kaikille joukoille A, B, C pätee:

Idempotenttisuus

(1a) $A \cup A = A$

(1b) $A \cap A = A$

Assosiatiivisuus

(2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(2b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Kommutatiivisuus

(3a) $A \cup B = B \cup A$

(3b) $A \cap B = B \cap A$

Joukkojen algebran säännöt 2/3

- Kaikille joukoille A, B, C pätee:

Distributiivisuus

(4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Identiteetti-lait

(5a) $A \cup \varnothing = A$

(5b) $A \cap S = A$, jossa A on *perusjoukon* S osajoukko

(6a) $A \cup S = S$, jossa A on *perusjoukon* S osajoukko

(6b) $A \cap \varnothing = \varnothing$

Joukkojen algebran säännöt 3/3

- Kaikille joukoille A, B pätee:

Komplementti-lait

(7a) $A \cup A^c = S$, jossa A on *perusjoukon* S osajoukko

(7b) $A \cap A^c = \varnothing$

(8a) $(A^c)^c = A$

(8b) $S^c = \varnothing$ ja $\varnothing^c = S$, jossa S on *perusjoukko*

De Morganin lait

(9a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(9b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Joukko-oppi

Joukko-opin peruskäsitteet
Joukko-opin perusoperaatiot
Joukko-opin laskusäännöt
>> Funktiot
Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat
Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia
Boolen algebrat
σ-algebrat

Funktiot

Avainsanat

Alkukuva

Arvoalue

Bijektio

Funktio eli kuvaus

Funktioiden samuus

Funktioiden yhdistäminen

Funktion arvo

Identtinen funktio

Injektio

Kuva

Käänteisalkio

Käänteisfunktio

Määrittelyalue

Surjektio

Vakiofunktio

Yhdistetty funktio

Mitä opimme?

- Tarkastelemme tässä kappaleessa **funktion** ja **käänteisfunktion** määrittelemistä sekä **funktioiden yhdistämistä**.

Funktio eli kuvaus

- Olkoon f *sääntö*, joka *liittää jokaiseen* joukon A alkioon *yksikäsitteisen* joukon B alkion.
- Tällöin sanotaan, että f on **funktio** eli **kuvaus** joukosta A joukkoon B.
- Jos f on funktio joukosta A joukkoon B, merkitään

$$f : A \to B$$

tai

$$A \xrightarrow{\quad f \quad} B$$

Kuva

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

  $$f : A \to B$$

- Jos funktio f *liittää* joukon A alkioon a joukon B alkion b, merkitään

  $$f(a) = b$$

  tai

  $$a \xrightarrow{f} f(a) = b$$

  ja sanotaan, että funktio f *kuvaa* joukon A alkion a joukon B alkiolle b.

- Alkiota $f(a) = b \in B$ kutsutaan on alkion $a \in A$ **kuvaksi** kuvauksessa f.

Funktion arvo

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

$$f : A \to B$$

- Jos siis $a \in A$, niin $f(a) = b \in B$.
- Erityisesti siinä tapauksessa, että A ja B ovat *lukujoukkoja*, sanotaan, että funktio f saa **arvon** $f(a) = b$ *pisteessä* a.

Funktion määrittelyalue ja arvoalue

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

  $$f : A \to B$$

- Tällöin joukkoa A sanotaan funktion f **määrittelyalueeksi**.
- Niiden joukon B alkioiden joukkoa, jotka ovat jonkin määrittelyalueen A alkion *kuvia* kuvauksessa f, sanotaan funktion f **arvoalueeksi**.
- Funktion $f : A \to B$ *arvoalue* $f(A)$ voidaan määritellä seuraavalla tavalla:

  $$f(A) = \{b \in B \mid \text{On olemassa } a \in A \text{ siten, että } f(a) = b\}$$

- Funktion f: $A \to B$ arvoalue $f(A)$ on joukon B *osajoukko*:

  $$f(A) \subset B$$

Funktioiden samuus

- Olkoot f ja g kaksi funktiota, joilla on sama *määrittely-alue*.
- Funktiot f ja g ovat **samat**, jos ne saavat samat *arvot*.
- Olkoon siis funktioiden f ja g määrittelyalue A.
- Funktiot f ja g ovat *samat*, jos

$$f(a) = g(a)$$

kaikille $a \in A$.

- Jos funktiot f ja g ovat samat, kirjoitetaan

$$f = g$$

Surjektio

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

$$f : A \to B$$

- Funktio f on **surjektio**, jos joukon B *jokainen* alkio on jonkin joukon A alkion kuva eli funktion f *arvoalueena* on *koko* joukko B.
- Siten funktio $f : A \to B$ on *surjektio*, jos

$$f(A) = B$$

- Tällöin sanotaan, että funktio f *kuvaa joukon A joukolle B*.

Injektio

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

$$f : A \to B$$

- Funktio f on **injektio**, jos yksikään joukon B alkio *ei ole* kahden tai useamman joukon A alkion kuva.
- Siten funktio $f : A \to B$ on *injektio*, jos

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

tai yhtäpitävästi

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

Bijektio

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

  $$f : A \to B$$

- Funktio f on **bijektio** eli *kääntäen yksikäsitteinen kuvaus*, jos seuraavat kaksi ehtoa pätevät:

  (i) f on *surjektio*:

  $$f(A) = B$$

  (ii) f on *injektio*:

  $$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

  tai yhtäpitävästi:

  $$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

Identtinen funktio

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon A:

$$f : A \to A$$

- Funktio f on **identtinen funktio** tai **kuvaus** joukossa A, jos se kuvaa joukon A *jokaisen* alkion *itselleen*.
- Siten funktio $f : A \to A$ on *identtinen funktio* joukossa A, jos

$$f(a) = a$$

kaikille $a \in A$.

- Merkitsemme identtistä funktiota joukossa A usein seuraavasti:

$$1_A$$

Vakiofunktio

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

  $$f : A \rightarrow B$$

- Funktio f on **vakiofunktio** tai **-kuvaus**, jos se kuvaa joukon A *jokaisen* alkion *samalle* joukon B alkiolle.
- Siten funktio $f : A \rightarrow B$ on *vakiofunktio*, jos on olemassa $b \in B$ niin, että

  $$f(a) = b$$

  kaikille $a \in A$.

Funktioiden yhdistäminen 1/3

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

  $$f : A \to B$$

  ja g funktio joukosta B joukkoon C:

  $$g : B \to C.$$

- Kuvaus f liittää *jokaiseen* joukon A alkioon a *yksikäsitteisen* joukon B alkion b:

  $$a \in A \Rightarrow f(a) = b \in B$$

- Kuvaus g liittää *jokaiseen* joukon B alkioon b *yksikäsitteisen* joukon C alkion c:

  $$b \in B \Rightarrow g(b) = c \in C$$

Funktioiden yhdistäminen 2/3

- Soveltamalla kuvauksia f ja g peräkkäin saadaan *sääntö*, joka liittää *jokaiseen* joukon A alkioon a *yksikäsitteisen* joukon C alkion c.
- Jos siis $a \in A$, niin $f(a) = b \in B$.
- Soveltamalla kuvausta g joukon B alkioon $f(a) = b$ saadaan jokin joukon C alkio c:

$$g(f(a)) = g(b) = c \in C$$

- Tätä *kuvausten yhdistämistä* voidaan kuvata seuraavalla kaaviolla:

$$a \xrightarrow{f} f(a) = b \xrightarrow{g} g(f(a)) = g(b) = c$$

Funktioiden yhdistäminen 3/3

- Olkoot siis $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ funktioita.
- Oletetaan, että $a \in A$.
- Tällöin

$$f(a) = b \in B$$

ja

$$g(f(a)) = g(b) = c \in C$$

- Määritellään funktioiden f ja g **yhdistetty funktio**

$$(g \circ f) : A \to C$$

kaavalla

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Funktioiden yhdistämissääntöjä 1/2

- Olkoon $f : A \to B$ funktio.
- Olkoot

$$1_A : A \to A$$

identtinen funktio joukossa A ja

$$1_B : B \to B$$

identtinen funktio joukossa B.

- Tällöin pätee:

$$f \circ 1_A = f$$

$$1_B \circ f = f$$

Funktioiden yhdistämissääntöjä 2/2

- Olkoot f: $A \rightarrow B$, g: $B \rightarrow C$ ja h: $C \rightarrow D$ funktioita.
- *Yhdistetään* funktiot f , g ja h seuraavilla tavoilla:

(i) Muodostetaan *ensin* yhdistetty funktio $g \circ f$ ja *sitten* yhdistetty funktio $h \circ (g \circ f)$.

(ii) Muodostetaan *ensin* yhdistetty funktio $h \circ g$ ja *sitten* yhdistetty funktio $(h \circ g) \circ f$.

- Näin muodostetut yhdistetyt funktiot ovat *samat*:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Käänteisalkio

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

$$f : A \to B$$

- Joukon A alkio a on joukon B alkion b **käänteisalkio** kuvauksessa f, jos $f(a) = b$.
- Joukon B alkiolla voi olla useita käänteisalkioita, mutta toisaalta kaikilla joukon B alkiolla ei ole välttämättä yhtään käänteisalkiota.
- Jos funktio f on *surjektio*, joukon B *jokaisella* alkiolla on käänteisalkio.
- Jos joukon B alkiolla on käänteisalkio ja funktio f on *injektio*, käänteisalkio on *yksikäsitteinen*.

Alkukuva

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

  $$f : A \rightarrow B$$

- Joukon B *osajoukon* D **alkukuva** kuvauksessa f on niiden joukon A alkioiden a joukko, jotka f *kuvaa* joukolle D.
- Jos siis $f : A \rightarrow B$ ja $D \subset B$, niin joukon D *alkukuva* $f^{-1}(D)$ kuvauksessa f voidaan määritellä seuraavalla tavalla:

  $$f^{-1}(D) = \left\{ a \in A \,\middle|\, f(a) = b \in D \right\}$$

- Joukon B osajoukon D *alkukuva* $f^{-1}(D)$ on joukon A *osajoukko*:

  $$f^{-1}(D) \subset A$$

- Joukon B osajoukon D *alkukuva* $f^{-1}(D)$ voi olla *tyhjä*.

Yhden alkion alkukuva

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

$$f : A \to B$$

- Joukon B *alkion* b **alkukuva** kuvauksessa f on niiden joukon A alkioiden a joukko, jotka f *kuvaa* alkiolle b.
- Jos siis $f : A \to B$ ja $b \in B$, niin alkion b *alkukuva* $f^{-1}(b)$ kuvauksessa f voidaan määritellä seuraavalla tavalla:

$$f^{-1}(b) = \left\{ a \in A \,\middle|\, f(a) = b \right\}$$

- Joukon B alkion b *alkukuva* $f^{-1}(b)$ on joukon A osajoukko:

$$f^{-1}(b) \subset A$$

- Joukon B alkion b *alkukuva* $f^{-1}(b)$ voi koostua *yhdestä* tai *useammasta* joukon A alkiosta tai voi olla *tyhjä*.

Käänteisfunktio 1/2

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

$$f : A \to B$$

- Tällöin joukon B alkion b *alkukuva*

$$f^{-1}(b) = \left\{ a \in A \,\middle|\, f(a) = b \right\}$$

kuvauksessa f on joukon A osajoukko, joka voi koostua *yhdestä* tai *useammasta* joukon A alkiosta tai voi olla *tyhjä*.

- Jos f on **bijektio**, joukon B *jokaisen* alkion b alkukuva $f^{-1}(b)$ koostuu *täsmälleen yhdestä joukon A alkiosta a*.
- Tällöin *jokaiseen* joukon B alkioon b voidaan liittää *yksikäsitteinen käänteisalkio* $f^{-1}(b) = a$.

Käänteisfunktio 2/2

- Olkoon siis f *bijektio* joukosta A joukkoon B:

  $$f : A \rightarrow B$$

- *Sääntö*, joka liittää *jokaiseen* joukon B alkioon b *yksikäsitteisen käänteisalkion*

  $$f^{-1}(b) = a$$

  määrittelee funktion f **käänteisfunktion** f^{-1} joukosta B joukkoon A:

  $$f^{-1} : B \rightarrow A$$

Käänteisfunktion ominaisuudet 1/2

- Oletetaan, että funktio

  $$f : A \to B$$

  on *bijektio*, jolloin funktiolla f on *käänteisfunktio*

  $$f^{-1} : B \to A$$

- Tällöin *yhdistetty funktio* $(f^{-1} \circ f)$ on *identtinen funktio* joukossa A ja *yhdistetty funktio* $(f \circ f^{-1})$ on *identtinen funktio* joukossa B:

  $$(f^{-1} \circ f) = 1_A$$

  $$(f \circ f^{-1}) = 1_B$$

Käänteisfunktion ominaisuudet 2/2

- Olkoot

$$f : A \to B$$

ja

$$g : B \to A$$

- Oletetaan, että *yhdistetty funktio*

$$(g \circ f) : A \to A$$

on *identtinen funktio* joukossa A ja *yhdistetty funktio*

$$(f \circ g) : B \to B$$

on *identtinen funktio* joukossa B.

- Tällöin g on funktion f *käänteisfunktio*: $g = f^{-1}$.

Joukko-oppi

Joukko-opin peruskäsitteet

Joukko-opin perusoperaatiot

Joukko-opin laskusäännöt

Funktiot

>> Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Boolen algebrat

σ-algebrat

Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

Avainsanat

Funktio

Funktion kuvaaja

Järjestetty pari

Karteesinen tulo

Tulojoukko

Yleistetyt karteesiset tulot

Mitä opimme?

- Tarkastelemme tässä kappaleessa **karteesisen tulon** määrittelemistä sekä **funktion kuvaajan** esittämistä karteesisen tulon määrittelemässä **tulojoukossa**.

Järjestetty pari

- Olioiden a ja b **järjestetty pari** on

  $$(a, b)$$

  jossa

  a = parin 1. alkio

  b = parin 2. alkio

- Järjestetyt parit (a, b) ja (c, d) ovat *samat*, jos

  $$a = c$$

  ja

  $$b = d$$

Tulojoukko

- Olkoot A ja B joukkoja.
- Joukkojen A ja B **tulojoukko** eli **karteesinen tulo** $A \times B$ muodostuu kaikista järjestetyistä pareista (a, b), joissa $a \in A$ ja $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Funktion kuvaaja

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

$$f : A \to B$$

- Funktion f **kuvaaja** f^* on kaikkien niiden järjestettyjen parien (a, b) joukko, joissa $a \in A$ ja $b = f(a)$:

$$f^* = \{(a, b) \mid a \in A, b = f(a)\}$$

- Siten funktion f *kuvaaja* f^* on tulojoukon $A \times B$ *osajoukko*:

$$f^* \subset A \times B$$

Funktion kuvaajan ominaisuudet

- Olkoon f funktio joukosta A joukkoon B:

$$f : A \to B$$

- Funktion f *kuvaajalla*

$$f^* = \{(a, b) \mid a \in A, b = f(a)\}$$

on seuraavat ominaisuudet:

(i) Jos $a \in A$ ja $f(a) = b$, niin järjestetty pari $(a, b) \in f^*$.

(ii) Jokainen $a \in A$ voi olla ensimmäisenä alkiona *vain yhdessä* joukkoon f^* kuuluvassa järjestetyssä parissa:

Jos $(a, b) \in f^*$ ja $(a, c) \in f^*$, niin $b = c$.

Funktio järjestettyjen parien joukkona 1/4

- Olkoon f^* joukkojen A ja B *karteesisen tulon*

  $$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

  osajoukko:

  $$f^* \subset A \times B$$

- Oletetaan, että joukolla f^* on seuraavat ominaisuudet:

  (i) Jos $a \in A$, niin *on olemassa* $b \in B$ siten, että järjestetty pari $(a, b) \in f^*$.

  (ii) Jokainen $a \in A$ voi olla ensimmäisenä alkiona *vain yhdessä* joukkoon f^* kuuluvassa järjestetyssä parissa:

  Jos $(a, b) \in f^*$ ja $(a, c) \in f^*$, niin $b = c$.

Funktio järjestettyjen parien joukkona 2/4

- Tällöin f^* määrittelee *säännön*, joka liittää *jokaiseen* joukon A alkioon a *yksikäsitteisen* joukon B alkion b:
  - Ominaisuus (i) takaa sen, että *jokaiseen* joukon A alkioon a liittyy *jokin* joukon B alkio b.
  - Ominaisuus (ii) takaa sen, että joukon A alkioon a liittyvä joukon B alkio b on *yksikäsitteinen*.
- Siten f^* määrittelee *funktion* f joukosta A joukkoon B.

Funktio järjestettyjen parien joukkona 3/4

- Edellä esitetty merkitsee sitä, että jokaista funktiota

  $$f : A \to B$$

  vastaa kääntäen yksikäsitteisesti karteesisen tulon $A \times B$ osajoukko f^*, joka toteuttaa ehdot

  (i) Jos $a \in A$, niin *on olemassa* $b \in B$ siten, että järjestetty pari $(a, b) \in f^*$.

  (ii) Jos $(a, b) \in f^*$ ja $(a, c) \in f^*$, niin $b = c$.
- Siten funktiot ja ehdot (i) ja (ii) toteuttavat karteesisten tulojen osajoukot voidaan *samastaa*.
- Tämä merkitsee sitä, että ***funktiota* ja *sen kuvaajaa* ei normaalisti tarvitse erottaa toisistaan**.

Funktio järjestettyjen parien joukkona 4/4

- Funktiot voidaan siis määritellä myös seuraavalla tavalla:

  Karteesisen tulon

  $$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

  osajoukko f määrittelee *funktion* joukosta A joukkoon B, jos *jokainen* $a \in A$ on ensimmäisenä alkiona *täsmälleen yhdessä* joukkoon f kuuluvassa järjestetyssä parissa.

Yleistetty karteesinen tulo 1/2

- Olkoot

  $$A_1\ , A_2\ , \ldots\ , A_n$$

  joukkoja ja

  $$a_1\ , a_2\ , \ldots\ , a_n$$

  niiden alkioita siten, että

  $$a_1 \in A_1\ , a_2 \in A_2\ , \ldots\ , a_n \in A_n$$

- Kutsutaan alkioiden $a_1\ , a_2\ , \ldots\ , a_n$ järjestettyä jonoa

  $$(a_1\ , a_2\ , \ldots\ , a_n)$$

  n-tuppeliksi.

Yleistetty karteesinen tulo 2/2

- Joukkojen

  $$A_1 , A_2 , \ldots , A_n$$

  karteesinen tulo

  $$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

  on kaikkien joukkojen $A_1 , A_2 , \ldots , A_n$ alkioiden $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$ *n-tuppeleiden* eli järjestettyjen jonojen

  $$(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$$

  muodostama joukko:

  $$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$
  $$= \{(a_1 , a_2 , \ldots , a_n) \mid a_1 \in A_1 , a_2 \in A_2 , \ldots , a_n \in A_n \}$$

Joukko-oppi

Joukko-opin peruskäsitteet

Joukko-opin perusoperaatiot

Joukko-opin laskusäännöt

Funktiot

Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat

\>> Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Boolen algebrat

σ-algebrat

Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia

Avainsanat

Distribuutio-lait
Indeksoitu joukkoperhe
Joukkoperhe
Leikkaus
Ositus
Potenssijoukko
Yhdiste
Yhdistetty joukko-operaatio

Mitä opimme?

- Tarkastelemme tässä kappaleessa joukko-opin **perusoperaatioiden laajentamista** useamman kuin kahden joukon tapaukseen.
- Määrittelemme lisäksi seuraavat käsitteet:

(i) **Joukkoperhe**.

(ii) Joukon kaikkien osajoukkojen perhe eli **potenssijoukko**.

(iii) Joukon **ositus**.

Joukkoperheet

- *Joukkojen kokoelmaa* eli joukkoa, jonka alkiot ovat joukkoja kutsutaan tavallisesti **joukkoperheeksi**.
- Joukkoperhe on siis *joukkojen muodostama joukko*.

Potenssijoukko

- Olkoon joukko A perusjoukon S osajoukko.
- Joukon A *kaikkien* osajoukkojen muodostamaa joukko-perhettä kutsutaan joukon A **potenssijoukoksi**.
- Joukon A potenssijoukkoa merkitään seuraavasti:

$$2^A$$

- Joukon A potenssijoukko 2^A voidaan määritellä seuraavalla tavalla:

$$2^A = \left\{ C \,\middle|\, C \subset A \right\}$$

Potenssijoukko: Esimerkki

- Olkoon

$$A = \{1, 2, 3\}$$

- Tällöin joukon A potenssijoukko on

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

- Joukon A potenssijoukko 2^A on joukkoperhe, jonka alkioina ovat
  - tyhjä joukko
  - kaikki joukon A yhden alkion osajoukot
  - kaikki joukon A kahden alkion osajoukot
  - joukko A itse

Indeksoidut joukkoperheet

- Olkoon $\mathcal{A}$ jokin *joukkoperhe* eli joukkojen kokoelma.
- Olkoon I joukko.
- **Indeksoitu joukkoperhe** $\{A_i\}_{i\in I}$ on funktio

  $$f : I \rightarrow \mathcal{A}$$

  jossa joukkoa I kutsutaan *indeksijoukoksi*, joukon I alkiota *i indeksiksi* ja joukkoa $A_i \in \mathcal{A}$ *indeksoiduksi joukoksi*.

Indeksoidut joukkoperheet: Esimerkkejä

- Jos indeksijoukkona I on *luonnollisten lukujen joukko* $\mathbb{N}$, on indeksoitu joukkoperhe

$$\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$$

- Jos indeksijoukkona I on äärellinen joukko $\{1, 2, \ldots, n\}$ (n ensimmäistä positiivista kokonaislukua), on indeksoitu joukkoperhe

$$\{A_i\}_{i\in I} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

Yleistetyt joukko-operaatiot

- Olkoon $\{A_i\}_{i\in I}$ *indeksoitu joukkoperhe*.
- Joukkojen A_i , $i \in I$ **yhdiste**

  $$\bigcup_{i\in I} A_i$$

  on niiden alkioiden x joukko, jotka kuuluvat *ainakin yhteen* joukoista A_i , $i \in I$:

  $$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \text{On olemassa } i\in I \text{ siten, että } x\in A_i\}$$
- Joukkojen A_i , $i \in I$ **leikkaus**

  $$\bigcap_{i\in I} A_i$$

  on niiden alkioiden x joukko, jotka kuuluvat *jokaiseen* joukoista A_i , $i \in I$:

  $$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid x\in A_i \text{ kaikille } i\in I\}$$

Yleistetyt joukko-operaatiot: Erikoistapauksia 1

- Olkoon $\{A_i\}_{i\in I}$ *indeksoitu joukkoperhe*, jossa indeksijoukkona I on luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$.
- Joukkojen A_i , $i \in \mathbb{N}$ *yhdiste* voidaan määritellä muodossa

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid \text{On olemassa } A_i, i = 1, 2, 3, \ldots \text{ siten, että } x \in A_i\}$$

- Joukkojen A_i , $i \in \mathbb{N}$ *leikkaus* voidaan määritellä muodossa

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ kaikille } i = 1, 2, 3, \ldots\}$$

Yleistetyt joukko-operaatiot: Erikoistapauksia 2

- Olkoon $\{A_i\}_{i\in I}$ *indeksoitu joukkoperhe*, jossa indeksijoukkona I on äärellinen joukko $\{1, 2, \dots, n\}$.
- Joukkojen A_i , $i \in I$ *yhdiste* voidaan määritellä muodossa

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \text{On olemassa } A_i, i = 1, 2, \dots, n \text{ siten, että } x \in A_i\}$$

- Joukkojen A_i , $i \in I$ *leikkaus* voidaan määritellä muodossa

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ kaikille } i = 1, 2, \dots, n\}$$

Yleistetyt joukko-operaatiot ja distribuutiolait

- Olkoon $\{A_i\}_{i\in I}$ *indeksoitu joukkoperhe* ja B mielivaltainen joukko.
- Tällöin

$$B\cap\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=\bigcup_{i\in I}\left(B\cap A_i\right)$$

ja

$$B\cup\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)=\bigcap_{i\in I}\left(B\cup A_i\right)$$

Ositus

- Olkoon A perusjoukon S osajoukko.
- Olkoot B_i , $i \in I$ joukon A epätyhjiä osajoukkoja:

$$B_i \neq \varnothing \text{ , } i \in I.$$

- Joukot B_i , $i \in I$ muodostavat joukon A **osituksen**, jos seuraavat kaksi ehtoa pätevät:

(i) $\bigcup_{i \in I} B_i = A$

(ii) $B_i \cap B_j = \varnothing$, jos $i \neq j$

Joukko-oppi

Joukko-opin peruskäsitteet
Joukko-opin perusoperaatiot
Joukko-opin laskusäännöt
Funktiot
Tulojoukot ja funktioiden kuvaajat
Joukko-opin perusoperaatioiden laajennuksia
>> Boolen algebrat
σ-algebrat

Boolen algebrat

Avainsanat

Boolen algebra

Erotusjoukko

Joukko-opin operaatio

Joukkoperhe

Leikkausjoukko

Perusjoukko

Mitä opimme?

- Tarkastelemme tässä kappaleessa **Boolen algebroita**.
- Boolen algebran *aksioomat* muodostavat perustan joukko-opin aksiomaattiselle käsittelylle ja *joukko-opin peruslaskusäännöt voidaan todistaa Boolen algebran aksioomien avulla*.
- Boolen algebrat ovat *suljettuja* äärellisen monen tavanomaisen joukko-opin operaation suhteen.
- Boolen algebrat muodostavat teoreettisen perustan mm. *propositiologiikalle* ja *äärellisten todennäköisyyskenttien tapahtuma-algebralle*.

Boolen algebra: Määritelmä 1/2

- Olkoon S joukko.
- Olkoon F *jokin* joukon S osajoukkojen muodostama *joukkoperhe*.
- Jos siis joukko A on joukkoperheen F alkio, niin A on joukon S osajoukko:

$$A \in \mathsf{F} \Rightarrow A \subset S$$

Boolen algebra: Määritelmä 2/2

- Joukkoperhe F on **Boolen algebra**, jos

(i) $\varnothing \in \mathsf{F}$

(ii) $A \in \mathsf{F} \Rightarrow A^c \in \mathsf{F}$

(iii) $A \in \mathsf{F}, B \in \mathsf{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathsf{F}$

Boolen algebra ja joukko-opin operaatiot 1/2

- Olkoon F joukossa S määritelty *Boolen algebra*.
- Olkoot

$$A \in \mathsf{F} \text{ ja } B \in \mathsf{F}$$

- Boolen algebran aksioomien mukaan

$$\emptyset\,,\ A^c,\ B^c,\ A \cup B \in \mathsf{F}$$

- Lisäksi voidaan osoittaa, että

$$S\,,\ A \cap B\,,\ A \setminus B\,,\ B \setminus A \in \mathsf{F}$$

Boolen algebra ja joukko-opin operaatiot 2/2

- Boolen algebra on *suljettu* äärellisen monen tavanomaisen joukko-opin operaation suhteen.
- Tällä tarkoitetaan siitä, että tavanomaiset joukko-opin operaatiot *eivät vie Boolen algebran ulkopuolelle*:

  Jos Boolen algebran F joukkoihin sovelletaan *korkeintaan äärellinen määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita komplementti, yhdiste, leikkaus ja erotus, niin tuloksena saatavat joukot kuuluvat edelleen Boolen algebraan F .

Joukko-opin operaatiot

- Olkoon F joukossa S määritelty Boolen algebra.
- *Todistetaan* seuraavat *joukko-opin* tulokset:

(i) Joukko $S \in \mathsf{F}$

(ii) Jos $A \in \mathsf{F}$, $B \in \mathsf{F}$, niin $A \cap B \in \mathsf{F}$

(iii) Jos $A \in \mathsf{F}$, $B \in \mathsf{F}$, niin $A \setminus B \in \mathsf{F}$

Joukko-opin operaatiot: Perusjoukko 1/2

- Olkoon F joukossa S määritelty Boolen algebra.
- Tällöin *perusjoukko* S kuuluu joukkoperheeseen F :

$$S \in \mathsf{F}$$

Joukko-opin operaatiot: Perusjoukko 2/2

- Väite seuraa, siitä että

$$S = \varnothing^c$$

- Todistetaan siis, että

$$\varnothing^c \in \mathsf{F}$$

- Aksiooman (i) mukaan

$$\varnothing \in \mathsf{F}$$

- Aksiooman (ii) mukaan

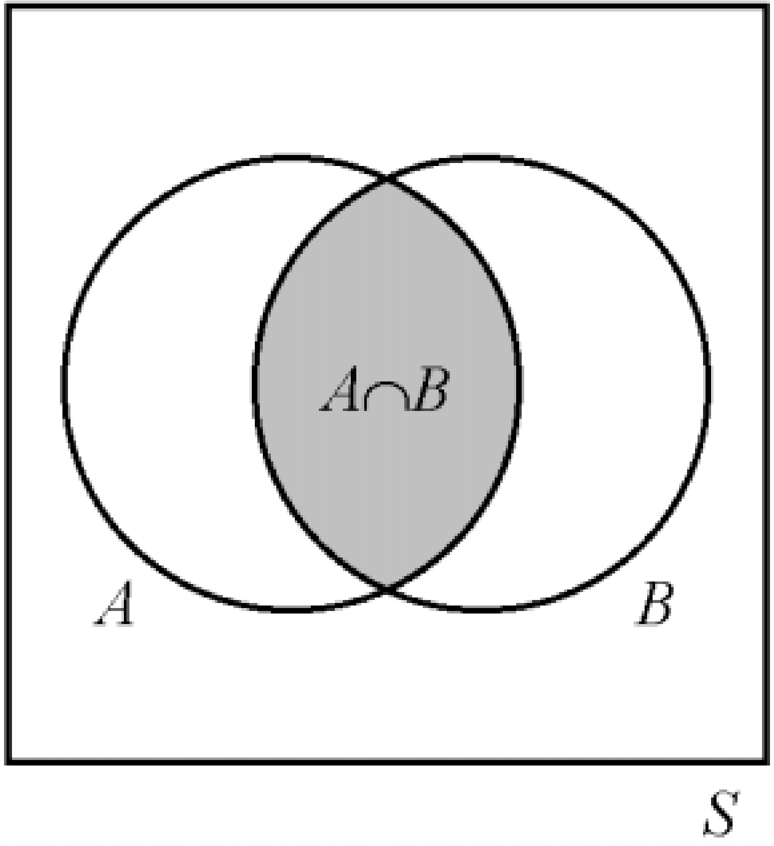
$$\varnothing^c = S \in \mathsf{F}$$

Joukko-opin operaatiot: Leikkausjoukko 1/2

- Olkoon F joukossa S määritelty Boolen algebra.
- Olkoot

  $A \in$ F, $B \in$ F
- Tällöin joukkojen A ja B *leikkaukselle* pätee:

  $A \cap B \in$ F



Joukko-opin operaatiot: Leikkausjoukko 2/2

- Väite seuraa siitä, että *DeMorganin lain* mukaan

  $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$

- Todistetaan siis, että

  $A \in \mathsf{F}, B \in \mathsf{F} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c \in \mathsf{F}$

- Aksiooman (ii) mukaan

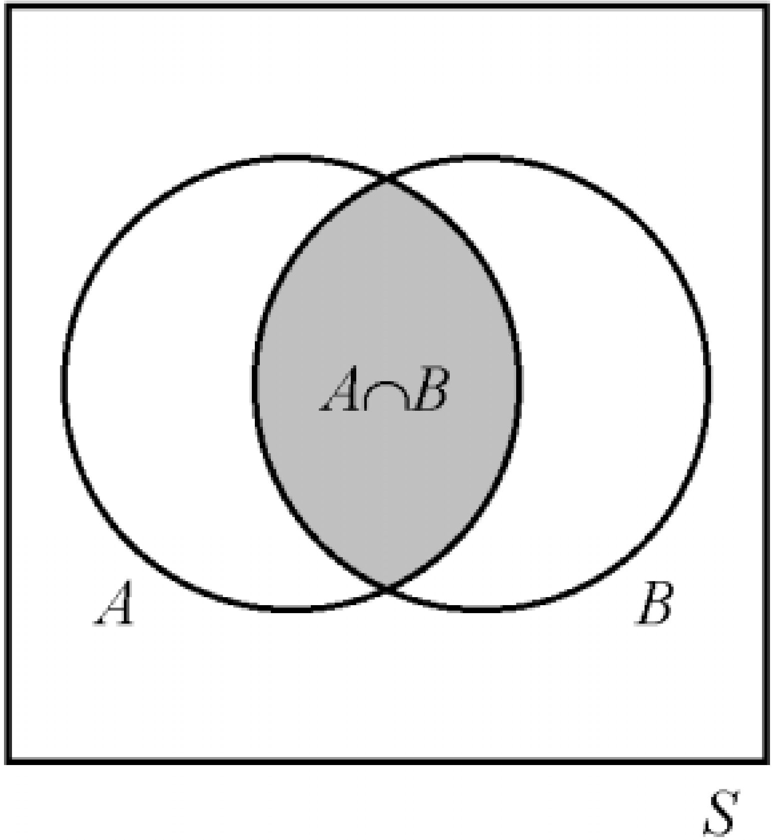
  $A \in \mathsf{F}, B \in \mathsf{F} \Rightarrow A^c \in \mathsf{F}, B^c \in \mathsf{F}$

- Aksiooman (iii) mukaan

  $A^c \in \mathsf{F}, B^c \in \mathsf{F} \Rightarrow A^c \cup B^c \in \mathsf{F}$

- Vihdoin aksiooman (ii) mukaan

  $A^c \cup B^c \in \mathsf{F} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c \in \mathsf{F}$

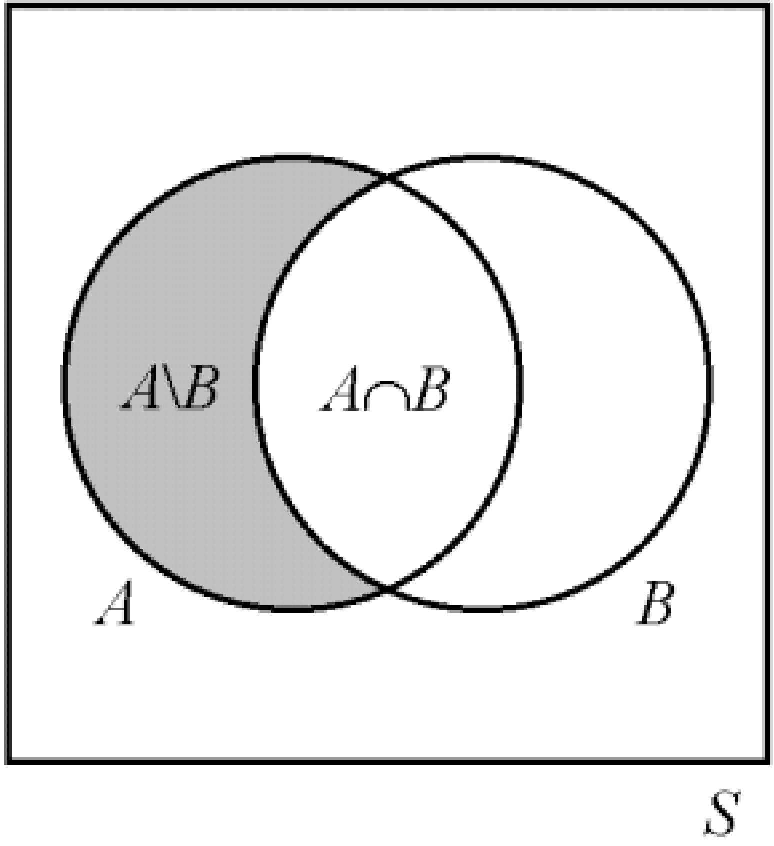


Joukko-opin operaatiot: Erotusjoukko 1/2

- Olkoon F joukossa S määritelty Boolen algebra.
- Olkoot

  $A \in$ F, $B \in$ F
- Tällöin joukkojen A ja B *erotukselle* pätee:

  $A \setminus B \in$ F



Joukko-opin operaatiot: Erotusjoukko 2/2

- Väite seuraa siitä, että

  $A \setminus B = A \cap B^c$

- Todistetaan siis, että

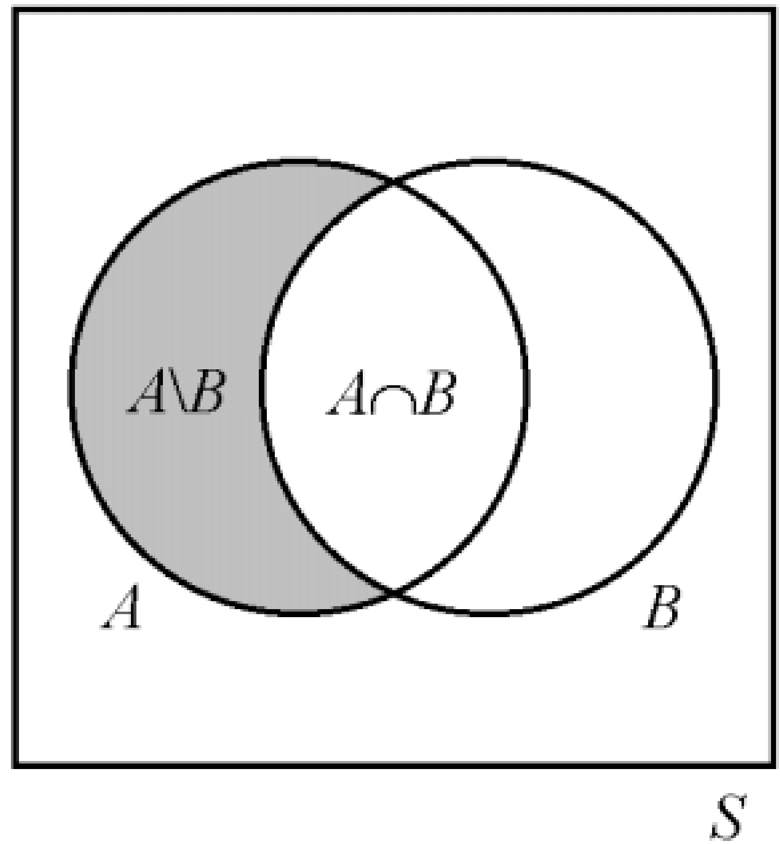
  $A \in \mathsf{F}, B \in \mathsf{F} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathsf{F}$

- Aksiooman (ii) mukaan

  $B \in \mathsf{F} \Rightarrow B^c \in \mathsf{F}$

- Leikkausjoukkoa koskevan tuloksen mukaan

  $A \in \mathsf{F}, B^c \in \mathsf{F} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathsf{F}$



Boolen algebra: Esimerkki

- Olkoon S mielivaltainen joukko.
- Olkoon

$$A \subset S$$

mielivaltainen joukon S osajoukko.

- Tällöin joukkoperhe

$$\mathsf{F} = \{\varnothing, A, A^c, S\}$$

muodostaa Boolen algebran joukossa S, koska

(i) $\varnothing \in \mathsf{F}$

(ii) $B \in \mathsf{F} \Rightarrow B^c \in \mathsf{F}$

(iii) $B \in \mathsf{F}, C \in \mathsf{F} \Rightarrow B \cup C \in \mathsf{F}$

Kohdissa (ii) ja (iii) joukot B ja C voivat olla mitkä tahansa joukoista $\varnothing, A, A^c, S$.

Joukko-oppi

σ-algebrat

Avainsanat

Boolen algebra

Joukko-opin operaatiot

Joukkoperhe

σ-algebra

Mitä opimme?

- Tarkastelemme tässä kappaleessa **σ-algebroita**.
- σ-algebrat ovat *Boolen algebroiden laajennuksia*.
- σ-algebrat ovat *suljettuja* numeroituvan monen tavanomaisen joukko-opin operaation suhteen.
- **Kaikki joukko-opin laskusäännöt, jotka voidaan johtaa Boolen algebran aksioomista pätevät myös σ-algebroille**.
- σ-algebrat muodostavat teoreettisen perustan mm. yleiselle *mittateorialle* ja siten myös *todennäköisyyslaskennalle*.

σ-algebran määritelmä 1/2

- Olkoon S joukko.
- Olkoon F *jokin* joukon S osajoukkojen muodostama *joukkoperhe*.
- Jos siis joukko A on joukkoperheen F alkio, niin A on joukon S osajoukko:

$$A \in \mathsf{F} \Rightarrow A \subset S$$

σ-algebran määritelmä 2/2

- Joukkoperhe $\mathcal{F}$ on **σ-algebra**, jos

(i) $\varnothing \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(iii) $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

σ-algebrat ja joukko-opin operaatiot 1/2

- Olkoon F joukossa S määritelty σ-*algebra*.
- Olkoot

$$A_i \in \mathsf{F}\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

- σ-algebran aksioomien mukaan

$$A_i^c \in \mathsf{F}\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{ja} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathsf{F}$$

- Lisäksi voidaan osoittaa, että

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathsf{F}$$

σ-algebrat ja joukko-opin operaatiot 2/2

- σ-algebra on *suljettu* numeroituvan monen tavanomaisen joukko-opin operaation suhteen.
- Tällä tarkoitetaan siitä, että *numeroituva* määrä tavan-omaisia joukko-opin operaatioita *ei vie σ-algebran ulko-puolelle*:

  Jos σ-algebran F joukkoihin sovelletaan *korkeintaan numeroituva määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita komplementti, yhdiste, leikkaus ja erotus, niin tuloksena saatavat joukot kuuluvat edelleen σ-algebraan F .

σ-algebrat *vs* Boolen algebrat

- Jos joukon S osajoukkojen perhe F toteuttaa σ-*algebran* aksioomat, niin se toteuttaa myös *Boolen algebran* aksioomat.
- Siten *jokainen* Boolen algebran aksioomista johdettu *joukko-opin sääntö* pätee myös σ-algebroille, mutta ei kääntäen.