Ilkka Mellin

Todennäköisyyslaskenta

Osa 1: Todennäköisyys ja sen laskusäännöt

Verkot ja todennäköisyyslaskenta

Verkot ja todennäköisyyslaskenta

>> Puudiagrammit todennäköisyyslaskennassa: Johdanto

Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

Toimintaverkot

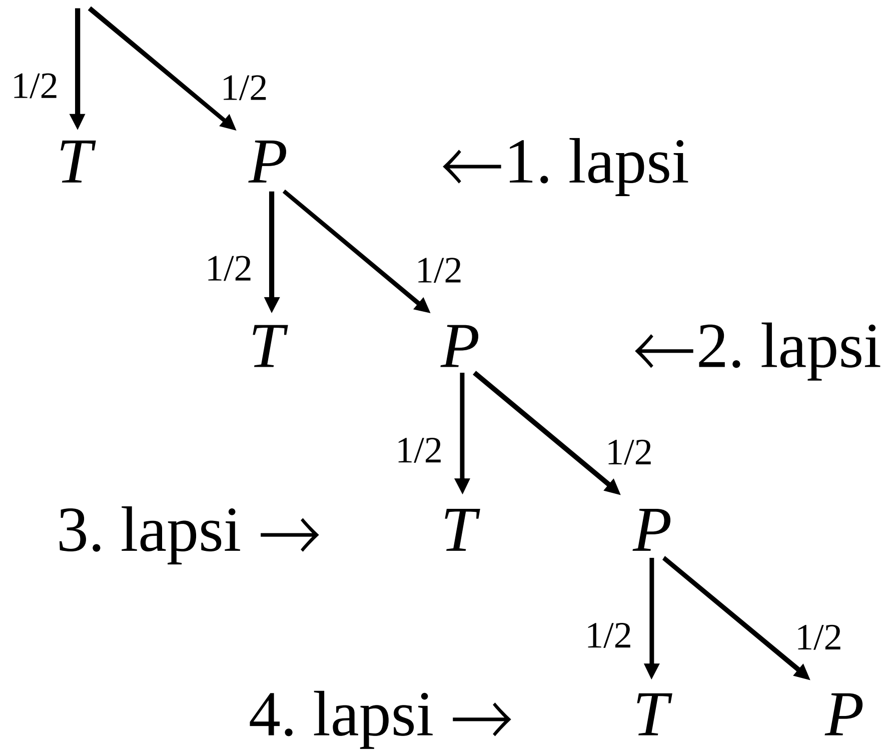
Esimerkki: Lastenhankkimisstrategian onnistumisen todennäköisyys 1/6

- Tehdään lasten syntymisestä seuraavat (yksinkertaistavat) oletukset:
  - (i) Lapset syntyvät aina yksi kerrallaan.
  - (ii) Syntyvän lapsen sukupuoli *ei riipu* aikaisemmin syntyneiden lasten sukupuolesta.
  - (iii) Pr(Poika) = Pr(Tyttö) = 1/2.
- Eräs pariskunta haluaa saada *tytön*, mutta *ei halua* hankkia *neljää lasta enempää*.
- Pariskunta päättää käyttää lasten hankkimisessa seuraavaa *strategiaa*:
  - (i) Lapsia hankitaan *kunnes* saadaan tyttö.
  - (ii) Lapsia ei kuitenkaan hankita *neljää enempää*.
- Jos siis neljäskin lapsi on poika, pariskunta on *epäonnistunut* strategiassaan.
- Mikä on todennäköisyys, että pariskunta *onnistuu* strategiassaan?

Esimerkki: Lastenhankkimisstrategian onnistumisen todennäköisyys 2/6

- Pariskuntaa kohtaavia *tapahtumavaihtoehtoja vastaava puudiagrammi* on esitetty oikealla.
- Puudiagrammissa:

  T = Tyttö ja *P* = Poika
- Diagrammin vasemmanpuoleiset *särmät* johtavat strategian onnistumiseen.
- Diagrammin oikeanpuoleiset *särmät* johtavat strategian epäonnistumiseen.
- Jokaisen särmän *todennäköisyys* = 1/2.



Puudiagrammit todennäköisyyslaskennassa: Johdanto
Esimerkki: Lastenhankkimisstrategian onnistumisen todennäköisyys 3/6

- Olkoon

  A = Pariskunta onnistuu strategiassaan

  T_i = i. lapsi on tyttö

  P_i = i. lapsi on poika

  T = Syntyy tyttö

  P = Syntyy poika

- Tapahtumat T_1, T_2, T_3, T_4 muodostavat joukon A *osituksen*:

  $$A = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \,, \quad T_i \cap T_j = \varnothing \,, \; i \neq j$$

Esimerkki: Lastenhankkimisstrategian onnistumisen todennäköisyys 4/6

- Tapahtumien T_i ja P_i todennäköisyydet $\Pr(T_i)$ ja $\Pr(P_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ voidaan määrätä *rekursiivisesti*.
- Riippumattomien tapahtumien *tulosäännön* nojalla:

$$\Pr(T_1) = \Pr(T) = \frac{1}{2} = \Pr(P_1)$$

$$\Pr(T_2) = \Pr(T \cap P_1) = \Pr(T)\Pr(P_1) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \Pr(P_2)$$

$$\Pr(T_3) = \Pr(T \cap P_2) = \Pr(T)\Pr(P_2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \Pr(P_3)$$

$$\Pr(T_4) = \Pr(T \cap P_3) = \Pr(T)\Pr(P_3) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{16} = \Pr(P_4)$$

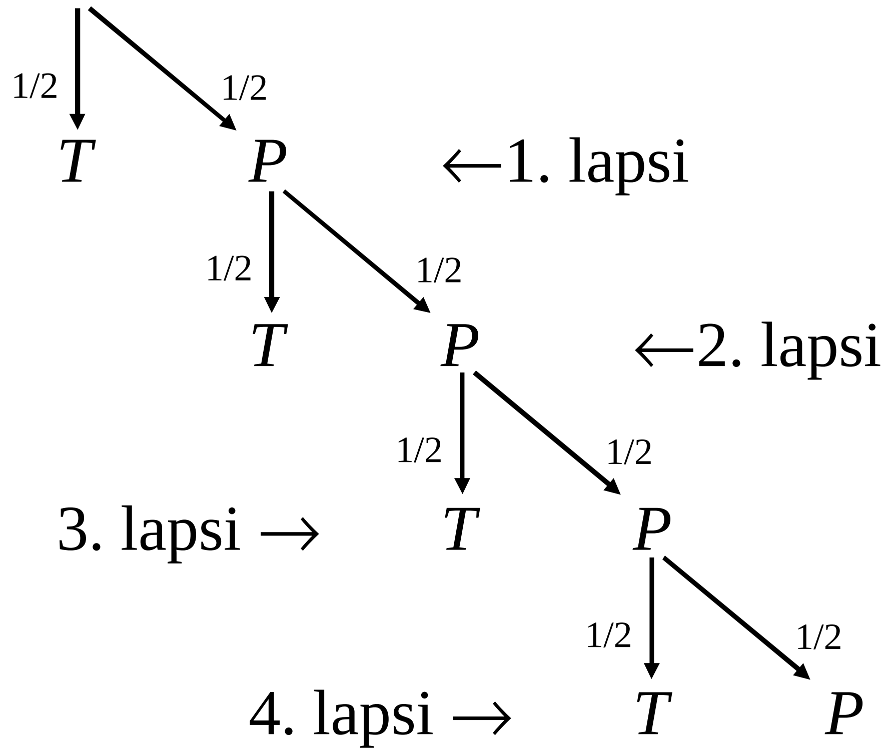
Esimerkki: Lastenhankkimisstrategian onnistumisen todennäköisyys 5/6

- Strategian *onnistumisen todennäköisyydeksi* saadaan toisensa poissulkevien tapahtumien *yhteenlaskusäännön* nojalla:

$$
\begin{aligned}
\Pr(A) &= \Pr(T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4) \\
&= \Pr(T_1) + \Pr(T_2) + \Pr(T_3) + \Pr(T_4) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \\
&= \frac{15}{16}
\end{aligned}
$$

Esimerkki: Lastenhankkimisstrategian onnistumisen todennäköisyys 6/6

- Todennäköisyydet
  1/2, 1/4, 1/8, 1/16
  saadaan määräämällä *loppu-pisteisiin T vievien reittien todennäköisyydet.*
- Reittien todennäköisyydet saadaan *reitin muodostavien särmien* todennäköisyyksien *tulona.*
- Strategian onnistumisen todennäköisyys
  15/16
  saadaan laskemalla *loppu-pisteisiin T vievien reittien todennäköisyydet yhteen.*



Verkot ja todennäköisyyslaskenta

Puudiagrammit todennäköisyyslaskennassa: Johdanto

>> Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

Toimintaverkot

Puudiagrammien käyttö todennäköisyyslaskennassa

- Periaatteessa jokainen *alkeistodennäköisyyslaskennan* tehtävä voidaan ratkaista käyttämällä apuna ns. **puudiagrammeja**.
- Jos tehtävän satunnaisilmiötä osataan kuvata puudiagrammilla, tehtävän ratkaisemisessa tarvittavat **puutodennäköisyydet** saadaan määrätyksi käyttämällä kahta yksinkertaista laskusääntöä, **tulosääntöä** ja **yhteenlaskusääntöä**.

Puudiagrammin konstruointi 1/2

- Satunnaisilmiötä voidaan kuvata **puudiagrammilla**, jos ilmiö osataan esittää seuraavassa muodossa:

  (i) Ilmiöllä on yksi **alkutila** ja yksi tai useampia **loppu-tiloja**.

  (ii) Ilmiö koostuu *vaihtoehtoisista* **tapahtumajonoista**.

  (iii) Tapahtumajonoissa edetään **vaiheittain** *tapahtumasta toiseen* lähtien ilmiön alkutilasta ja päätyen johonkin ilmiön lopputiloista.

  (iv) Jokaisessa **vaiheessa** kohdataan yksi tai useampia **tapahtumavaihtoehtoja**, joista yksi *realisoituu* ja johtaa *uusin* tapahtumavaihtoehtoihin.

Puudiagrammin konstruointi 2/2

- Satunnaisilmiötä vastaavan **puudiagrammin konstruointi**:

  (i) Asetetaan puun **juuri** vastaamaan ilmiön *alkutilaa*.

  (ii) Asetetaan puun **loppupisteet** (”oksien kärjet”) vastaamaan ilmiön *lopputiloja*.

  (iii) Asetetaan puun **pisteet** (”oksien haarautumiskohdat”) vastaamaan ilmiön *tapahtumia*.

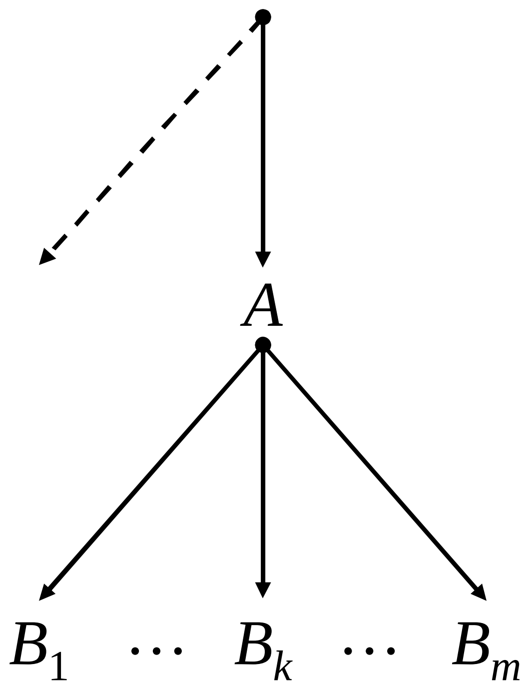
  (iv) Viedään puun jokaisesta pisteestä **särmä** (”oksa”) kaikkiin sellaisiin pisteisiin, joita vastaavat *tapahtumavaihtoehdot* ovat ilmiön *siinä vaiheessa mahdollisia*.

  (v) Liitetään jokaiseen pisteestä *lähtevään* särmään *siinä vaiheessa* mahdollisten **tapahtumavaihtoehtojen todennäköisyydet**.

Puudiagrammin konstruointi: Esimerkki 1/3

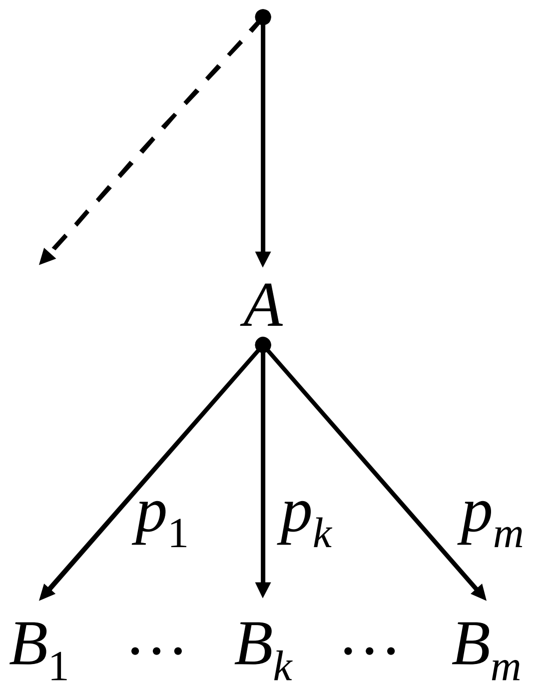
- Puudiagrammin konstruointia voidaan havainnollistaa viereisellä kaaviolla.
- Tarkastellaan satunnais-ilmiötä *vaiheessa*, jossa tapahtuma A on sattunut.
- Olkoot A:n sattumisen jälkeen *mahdolliset tapahtumavaihtoehdot*

  B_i , $i = 1, 2, \dots , m$



Puudiagrammin konstruointi: Esimerkki 2/3

- Viedään pisteestä A *särmä* jokaiseen pisteistä
  B_i , $i = 1, 2, \ldots , m$
- Liitetään jokaiseen särmään
  (A, B_i) , $i = 1, 2, \ldots , m$
  ehdollinen todennäköisyys
  $p_i = \Pr(B_i \mid \dot{A})$
  jossa $\dot{A}$ on tapahtumajono, joka on tuonut pisteeseen A.



Puudiagrammin konstruointi: Esimerkki 3/3

- Koska A:n sattumisen jälkeen *ei ole muita mahdollisia tapahtuma-vaihtoehtoja* kuin

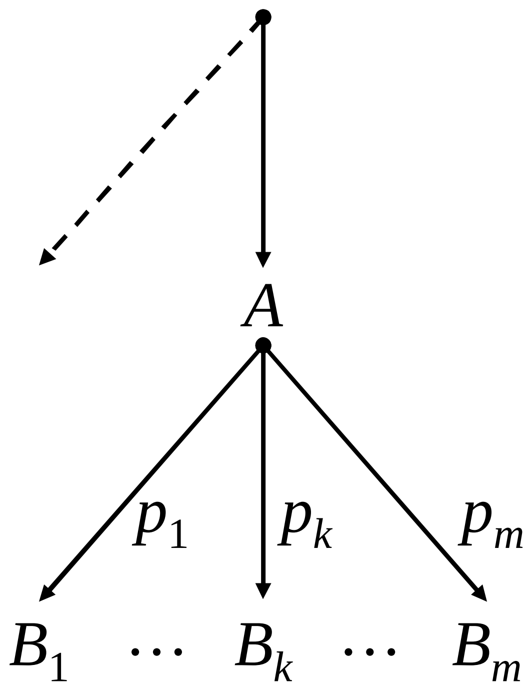
  B_i , $i = 1, 2, \ldots , m$,

  niin todennäköisyyksien

  p_i , $i = 1, 2, \ldots , m$

  pitää toteuttaa ehto

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m} \Pr(B_i \mid A) = 1$$



Puudiagrammin konstruointi: Kommentteja

- Puudiagrammi *piirretään* tavallisesti *joko* niin, että sen alkupiste on ylhäällä ja loppupisteet ovat alhaalla *tai* niin, että sen alkupiste on vasemmalla ja loppupisteet ovat oikealla.
- Useat puun pisteet voivat vastata *samaa* tapahtumaa.
- Mistä tahansa puun pisteestä *lähtevien särmien* todennäköisyyksien summa on 1.

Puutodennäköisyydet

- **Puutodennäköisyydellä** tarkoitetaan todennäköisyyttä päästä *puun alkupisteestä yhden tai useamman muun puun pisteen määräämään yhdistettyyn tapahtumaan*.
- *Pisteen todennäköisyys* saadaan määräämällä alkupisteestä ko. pisteeseen vievän *reitin todennäköisyys*.
- *Reitin todennäköisyys* saadaan soveltamalla reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksiin **tulosääntöä**.
- *Usean pisteen määräämän yhdistetyn tapahtuman todennäköisyys* saadaan soveltamalla ko. pisteisiin vievien reittien todennäköisyyksiin **yhteenlaskusääntöä**.

Puutodennäköisyydet: Tulosääntö 1/4

- *Reitin todennäköisyys* saadaan määräämällä reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksien *tulo*.
- Sääntöä kutsutaan **puutodennäköisyyksien tulosäännöksi**.
- Tulosäännön perustelu:

(1) Reitti on *tapahtumajono*, jonka muodostavat reitin pisteet.

(2) Reitin muodostava tapahtumajono sattuu, jos *jokainen jonon tapahtumista sattuu*.

(3) Todennäköisyyslaskennan *yleisen tulosäännön mukaan* reitin todennäköisyys saadaan määräämällä reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksien *tulo*.

Puutodennäköisyydet: Tulosääntö 2/4

- Olkoon

$$L, A_1\ , A_2\ , A_3\ , \ldots\ , A_k$$

yksi niistä vaihtoehtoisista *tapahtumajonoista*, joista satunnaisilmiö muodostuu.

- Tällöin parit

$$(L\ , A_1), (A_1\ , A_2), (A_2\ , A_3), \ldots\ , (A_{k-1}\ , A_k\ )$$

muodostavat satunnaisilmiön *alkutilasta* L satunnaisilmiön (*loppu*-) *tilaan* A_k *vievän reitin särmät*.

Puutodennäköisyydet: Tulosääntö 3/4

- Liitetään reitin

$$(L\ , A_1), (A_1\ , A_2), (A_2\ , A_3), \ldots , (A_{k-1}\ , A_k)$$

särmiin *todennäköisyydet* seuraavalla tavalla:

$$(L\ , A_1) \quad \rightarrow \Pr(A_1) = p_1$$

$$(A_1\ , A_2) \quad \rightarrow \Pr(A_2 | A_1) = p_2$$

$$(A_2\ , A_3) \quad \rightarrow \Pr(A_3 | A_1 \cap A_2) = p_3$$

$$\ldots$$

$$(A_{k-1}\ , A_k) \quad \rightarrow \Pr(A_k | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k-1}) = p_k$$

Puutodennäköisyydet: Tulosääntö 4/4

- Reitin

  $$(L\ , A_1), (A_1\ , A_2), (A_2\ , A_3), \ldots , (A_{k-1}\ , A_k)$$

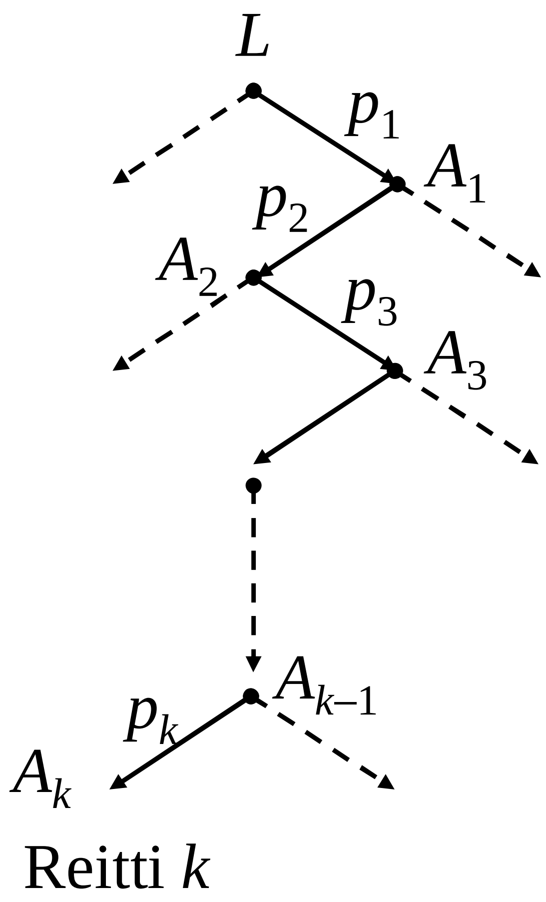
  todennäköisyys on **yleisen tulosäännön** nojalla:

  $$\begin{aligned}&\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k)\\ &\quad = \Pr(A_1) \times \Pr(A_2 | A_1) \times \Pr(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \\ &\qquad \cdots \times \Pr(A_k | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k-1})\\ &\quad = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_k\end{aligned}$$

Puutodennäköisyydet: Tulosäännön havainnollistus

- *Puutodennäköisyyksien tulosääntöä* voidaan havainnollistaa viereisellä *puudiagrammilla*.
- Reitin k todennäköisyys on puutodennäköisyyksien tulosäännön mukaan

  $\Pr(\text{Reitti } k) = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k$



Puutodennäköisyydet: Yhteenlaskusääntö 1/2

- Jos useita (loppu-) tiloja yhdistetään yhdeksi tapahtumaksi, näin saadun *yhdistetyn tapahtuman* todennäköisyys saadaan määräämällä ko. tiloihin vievien reittien todennäköisyyksien *summa*.
- Sääntöä kutsutaan **puutodennäköisyyksien yhteenlaskusäännöksi**.
- Yhteenlaskusäännön perustelu:

  (1) Puun eri pisteisiin vievät reitit ovat *toisensa poissulkevia*.

  (2) *Toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan* useista (loppu-) pisteistä yhdistämällä saatavan tapahtuman todennäköisyys saadaan määräämällä ko. pisteisiin vievien reittien todennäköisyyksien *summa*.

Puutodennäköisyydet: Yhteenlaskusääntö 2/2

- Yhdistetään satunnaisilmiön (*loppu*-) *tilat* B_1 , B_2 , … , B_k *yhdeksi tapahtumaksi*

  $$C = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$$

- Olkoot *tiloja* B_1 , B_2 , … , B_k vastaavat *reitit*

  Reitti 1, Reitti 2, … , Reitti k

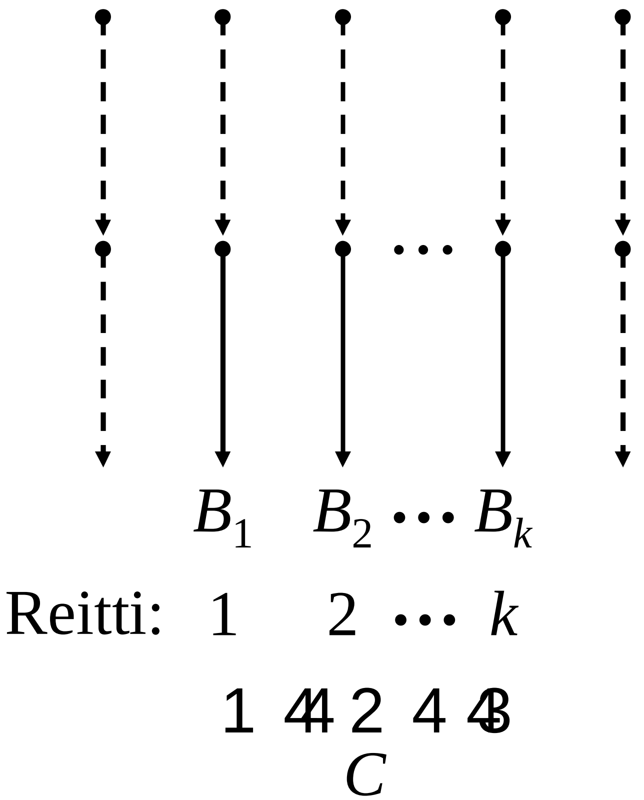
- Koska puun eri pisteisiin vievät reitit ovat *toisensa poissulkevia*, tapahtuman C todennäköisyys on **toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön** nojalla:

  $$\begin{aligned}\Pr(C) &= \Pr(\text{Reitti 1 } \textit{tai} \text{ Reitti 2 } \textit{tai} \ldots \textit{tai} \text{ Reitti } k) \\ &= \Pr(\text{Reitti 1}) + \Pr(\text{Reitti 2}) + \cdots + \Pr(\text{Reitti } k)\end{aligned}$$

Puutodennäköisyydet: Yhteenlaskusäännön havainnollistus

- *Puutodennäköisyyksien yhteenlaskusääntöä* voidaan havainnollistaa viereisellä *puu-diagrammilla*:

$$
\begin{aligned}
\Pr(C) = \ & \Pr(\text{Reitti } 1) \\
& + \Pr(\text{Reitti } 2) \\
& \cdots \\
& + \Pr(\text{Reitti } k)
\end{aligned}
$$



Puuverkkojen käyttö päätöstilanteissa: Esimerkki 1/6

- Tarkastellaan seuraavaa **päätöstilannetta**.
- *Munuaistaudissa* potilaan munuaiset lopettavat vähitellen toimintansa, mikä johtaa potilaan kuolemaan.
- Oletetaan, että potilas voisi vapaasti valita hoidoksi joko *dialyysin* (munuaiskoneen) tai *munuaisensiirron*.
- *Kumpi hoidoista potilaan kannattaa valita*, jos hoitojen tuloksista on käytettävissä seuraavalla kalvolla esitetyt tiedot?

Puuverkkojen käyttö päätöstilanteissa: Esimerkki 2/6

- Dialyysipotilaat:
  - 68 % elää 5:n vuoden kuluttua
  - 32 % on kuollut 5:n vuoden kuluttua
- Munuaisensiirtopotilaat:
  - 48 %:lla siirretty munuainen toimii normaalisti ja potilas elää 5:n vuoden kuluttua
  - 43 %:lla siirretty munuainen ei toimi kunnolla ja he joutuvat dialyysiin
    - 42 % näistä potilaista elää 5:n vuoden kuluttua
    - 58 % näistä potilaista on kuollut 5:n vuoden kuluttua
  - 9 % kuolee siirron aiheuttamiin komplikaatioihin

Puuverkkojen käyttö päätöstilanteissa: Esimerkki 3/6

- Merkitään:

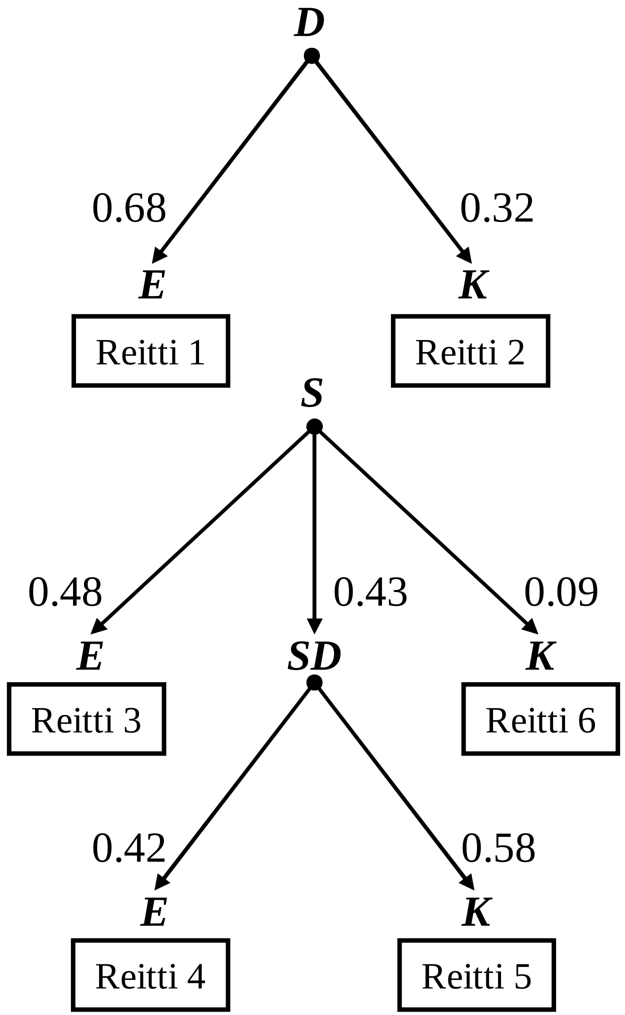
  D = ”Potilasta hoidetaan dialyysilla”
  S = ”Potilaalle tehdään munuaisensiirto”
  SD = ”Siirtopotilas joutuu dialyysiin”
  E = ”Potilas elää 5 vuoden kuluttua”
  K = ”Potilas on kuollut 5 vuoden kuluttua”

- Hoitotulokset voidaan esittää seuraavina *ehdollisina todennäköisyyksinä*:

  $\Pr(E|D) = 0.68$ $\Pr(K|D) = 0.32$
  $\Pr(E|S) = 0.48$ $\Pr(SD|S) = 0.43$ $\Pr(K|S) = 0.09$
  $\Pr(E|SD) = 0.42$ $\Pr(K|SD) = 0.58$

Puuverkkojen käyttö päätöstilanteissa: Esimerkki 4/6

- Potilaalle tarjolla olevia vaihtoehtoja voidaan kuvata viereisellä *diagrammilla*, joka koostuu kahdesta *puudiagrammista*.
- Jos potilas haluaa *maksimoida* todennäköisyyden olla elossa 5:n vuoden kuluttua, hänen on *verrattava* reitin 1 määräämän tapahtuman todennäköisyyttä reittien 3 ja 4 määräämän yhdistetyn tapahtuman todennäköisyyteen.



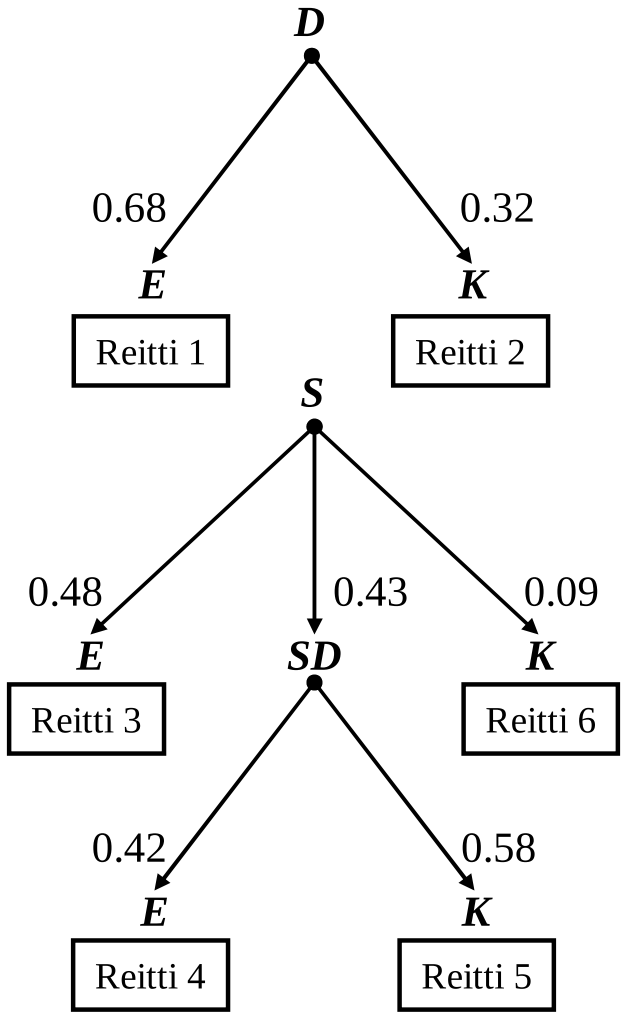
Puuverkkojen käyttö päätöstilanteissa: Esimerkki 5/6

- Reitin 1 määräämän tapahtuman todennäköisyys:

  Pr(Reitti 1) = 0.68
- Reitin 3 määräämän tapahtuman todennäköisyys:

  Pr(Reitti 3) = 0.48
- Reitin 4 määräämän tapahtuman todennäköisyys on *puutodennäköisyyksien tulosäännön* mukaan:

  Pr(Reitti 4)
  $= 0.43\times0.42$
  $= 0.1806$



Puuverkkojen käyttö päätöstilanteissa: Esimerkki 6/6

- Reittien 3 ja 4 määräämän yhdistetyn tapahtuman toden-näköisyys on *puutodennäköi-syyksien yhteenlaskusäännön* mukaan:

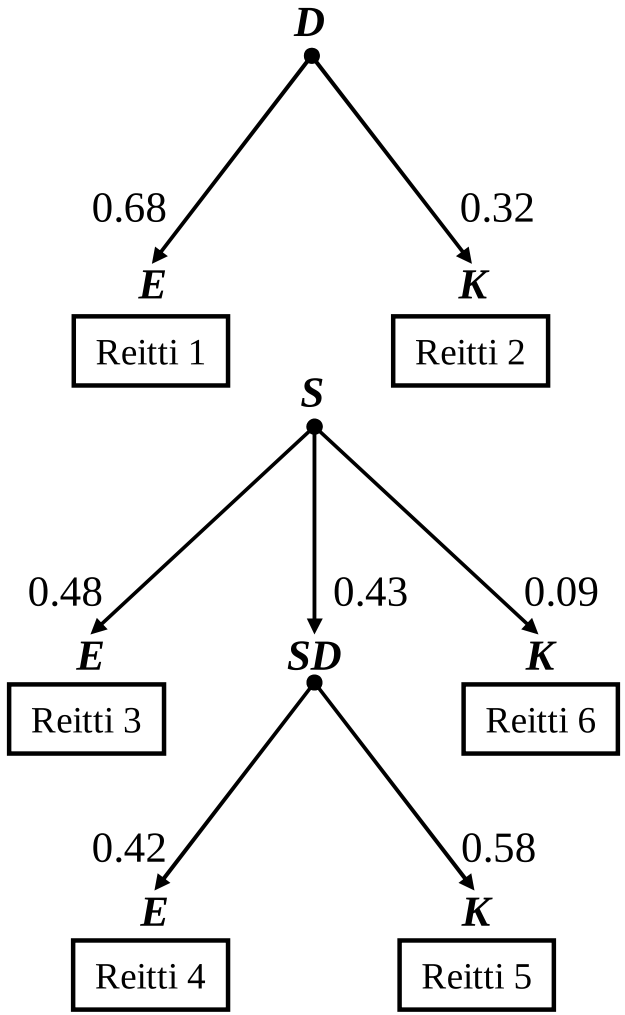
  Pr(Reitti 3 *tai* Reitti 4)

  = 0.48 + 0.1806
  = 0.6606

- Koska

  Pr(Reitti 3 *tai* Reitti 4) = 0.6606 < Pr(Reitti 1) = 0.68

  potilaan kannattaa valita dialyysi.



Verkot ja todennäköisyyslaskenta

Puudiagrammit todennäköisyyslaskennassa: Johdanto

Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

>> Toimintaverkot

Systeemi ja sen toimintatodennäköisyys

- Tehtävänä on määrätä sellaisen **systeemin toimintatodennäköisyys**, joka koostuu **komponenteista**, jotka on kytketty joko **sarjaan** tai **rinnan**.
- Tehdään komponenteista seuraavat oletukset:

(i) Jokaisen komponentin toimintatodennäköisyys *tunnetaan*.

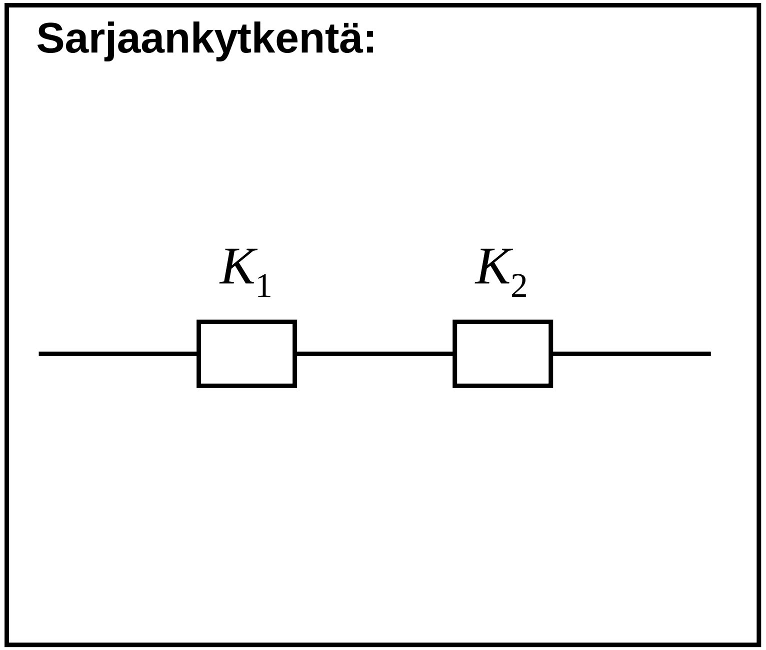
(ii) Jokaisen komponentin toiminta (tai toimimattomuus) on *riippumatonta* muiden komponenttien toiminnasta.

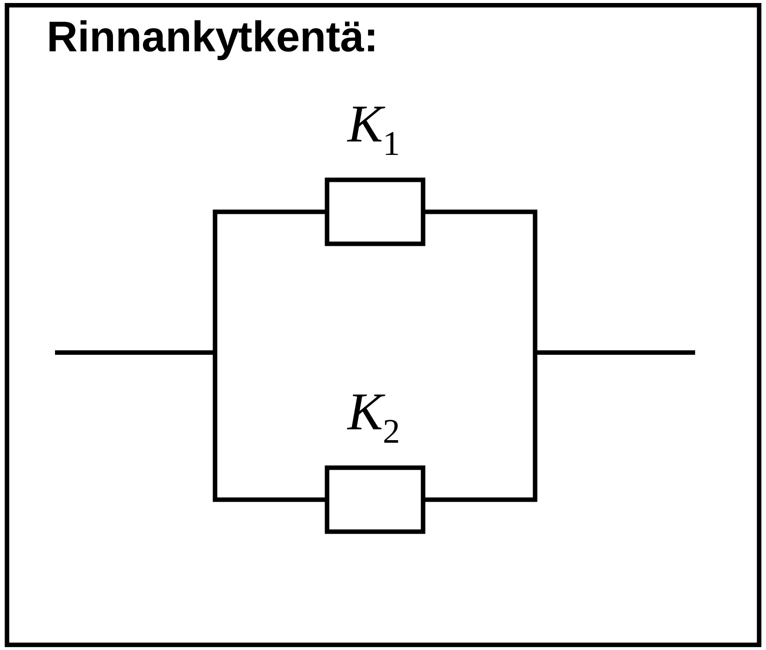
Systeemit ja toimintaverkot

- Sarjaan ja rinnan kytketyistä komponenteista koostuvia systeemejä voidaan kuvata **toimintaverkoilla**.
- Sarjaan- ja rinnankytkennöistä koostuvien toiminta-verkkojen toimintatodennäköisyys voidaan *palauttaa* sarjaan- ja rinnankytkentöjen toimintatodennäköisyyksiin.

Sarjaankytkentä ja rinnankytkentä

- *Toimintaverkot* koostuvat sarjaan- ja rinnankytkennöistä.
- Alla olevat *kytkentäkaaviot* esittävät kahden komponentin K_1 ja K_2 muodostamia sarjaan- ja rinnankytkentöjä.





Sarjaankytkennän toiminta

- Merkitään

  T = Komponentti *toimii*
  F = Komponentti *ei toimi*

- Komponenttien K_1 ja K_2 *sarjaankytkentä* toimii, jos K_1 toimii *ja* K_2 toimii:

K_1	K_2	K_1 ja K_2
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Rinnankytkennän toiminta

- Merkitään

  T = Komponentti *toimii*
  F = Komponentti *ei toimi*

- Komponenttien K_1 ja K_2 *rinnankytkentä* toimii, jos K_1 toimii *tai* K_2 toimii *tai* molemmat toimivat:

K_1	K_2	K_1 tai K_2
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Toimintaverkot

Sarjaan- ja rinnankytkentöjen toimintatodennäköisyydet 1/2

- Määritellään *tapahtumat* A_1 ja A_2:

$$A_1 = \text{"Komponentti } K_1 \text{ toimii"}$$

$$A_2 = \text{"Komponentti } K_2 \text{ toimii"}$$

- Olkoot tapahtumien A_1 ja A_2 *todennäköisyydet*:

$$\Pr(A_1) = p_1$$

$$\Pr(A_2) = p_2$$

- *Sarjaankytkennän toimintatodennäköisyys* on

$$\Pr(A_1 \cap A_2)$$

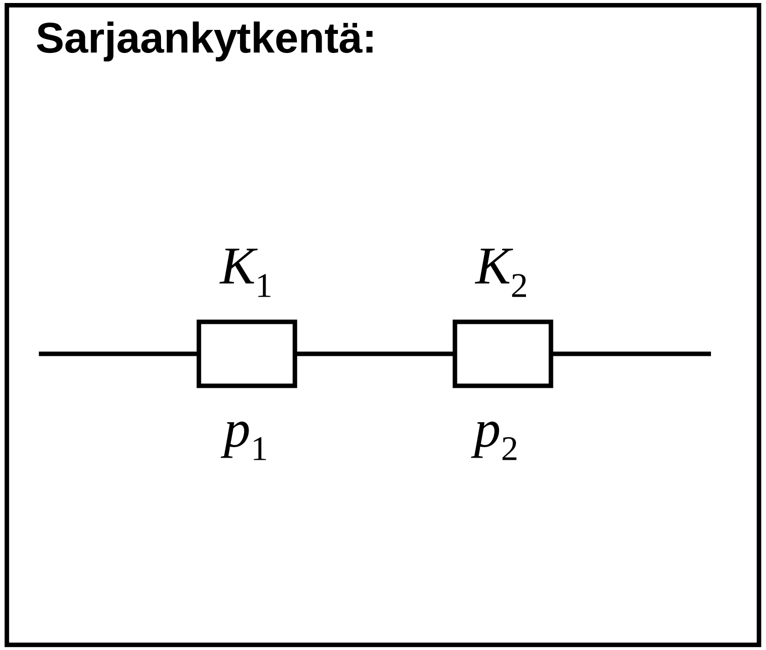
- *Rinnankytkennän toimintatodennäköisyys* on

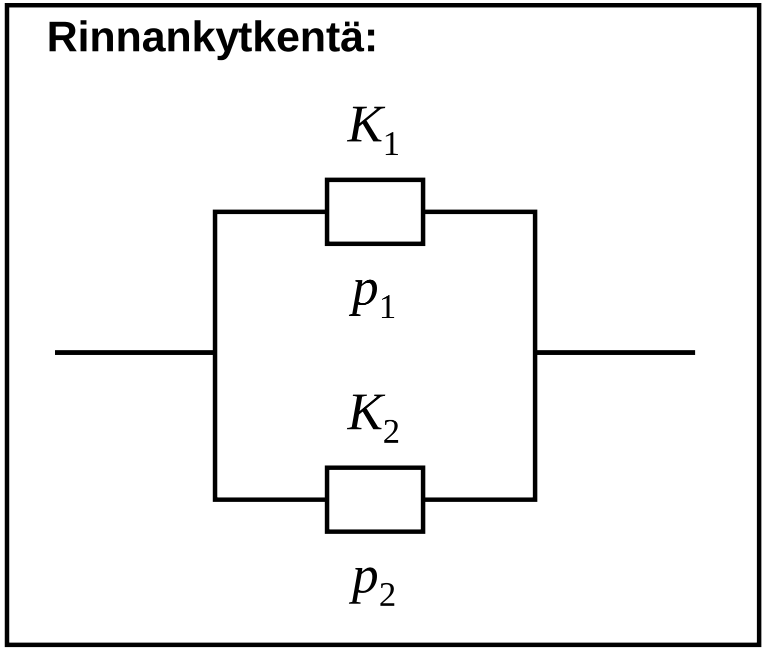
$$\Pr(A_1 \cup A_2)$$

Toimintaverkot

Sarjaan- ja rinnankytkentöjen toimintatodennäköisyydet 2/2

- Määrätään komponenttien K_1 ja K_2 muodostamien *sarjaan*- ja *rinnankytkentöjen toimintatodennäköisyydet komponenttien* K_1 ja K_2 *toimintatodennäköisyyksien* avulla.





Sarjaankytkennän toimintatodennäköisyys 1/2

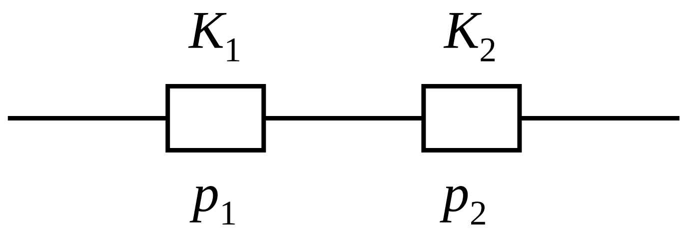
- Oletetaan, että toimintaverkko koostuu komponenteista K_1 ja K_2, jotka on kytketty *sarjaan*.
- Olkoot

  $\Pr(K_1 \text{ toimii}) = p_1$
  $\Pr(K_2 \text{ toimii}) = p_2$
- Oletetaan, että tapahtumat

  ”K_1 toimii”
  ”K_2 toimii”

  ovat *riippumattomia*.

Sarjaankytkentä:

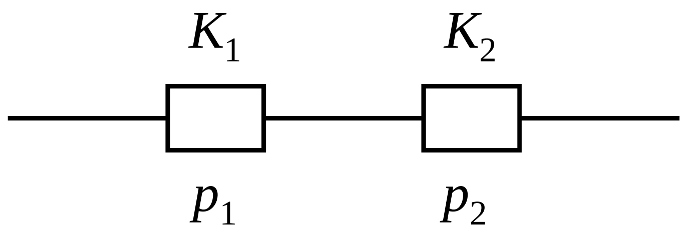


Sarjaankytkennän toimintatodennäköisyys 2/2

- Riippumattomien tapahtumien tulosäännön perusteella *sarjaankytkennän toimintatodennäköisyys* on

  Pr(K_1 toimii *ja* K_2 toimii) $= p_1 p_2$

Sarjaankytkentä:



Rinnankytkennän toimintatodennäköisyys 1/2

- Oletetaan, että toimintaverkko koostuu komponenteista K_1 ja K_2, jotka on kytketty *rinnan*.
- Olkoot

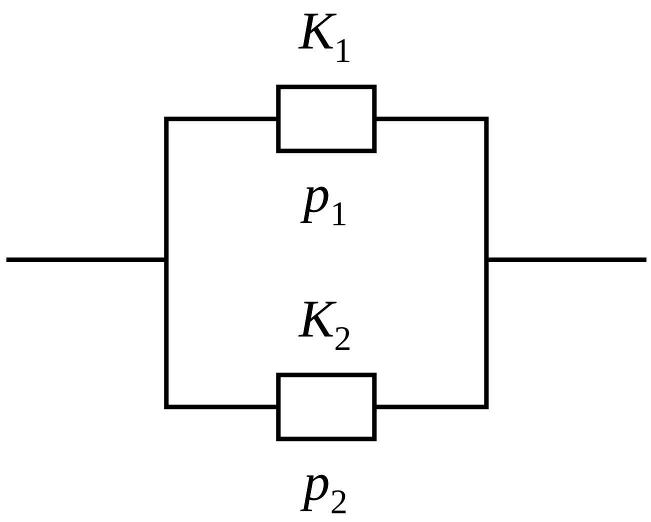
$$\Pr(K_1 \text{ toimii}) = p_1$$
$$\Pr(K_2 \text{ toimii}) = p_2$$

- Oletetaan, että tapahtumat

”K_1 toimii”
”K_2 toimii”

ovat *riippumattomia*.

Rinnankytkentä:



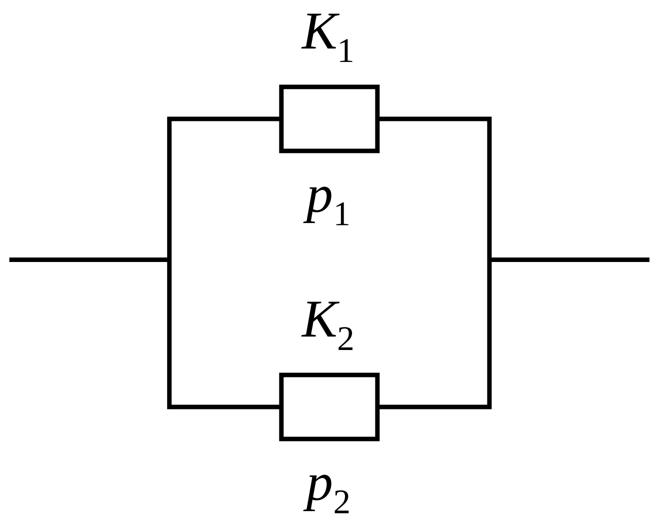
Rinnankytkennän toimintatodennäköisyys 2/2

- Yleisen yhteenlaskusäännön ja riippumattomien tapahtumien tulosäännön perusteella *rinnankytkennän toimintatodennäköisyys* on

Pr(K_1 toimii *tai* K_2 toimii)
= Pr(K_1 toimii)
+ Pr(K_2 toimii)
– Pr(K_1 toimii *ja* K_2 toimii)

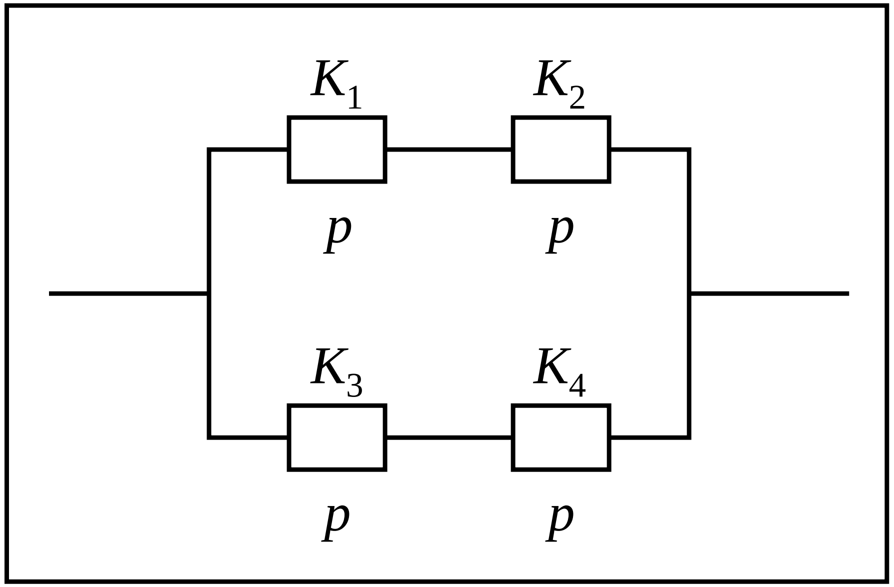
$= p_1 + p_2 - p_1 p_2$

Rinnankytkentä:



Esimerkki 1/3

- Oletetaan, että toimintaverkko koostuu 4:stä komponentista K_1, K_2, K_3, K_4 viereisen kaavion mukaisesti.
- Komponentit K_1 ja K_2 on kytketty *sarjaan*.
- Komponentit K_3 ja K_4 on kytketty *sarjaan*.
- Komponenttipari K_1 ja K_2 on kytketty *rinnan* komponentti-parin K_3 ja K_4 kanssa.



Esimerkki 2/3

- Olkoon

  $\Pr(K_i \text{ toimii}) = p,\ i = 1, 2, 3, 4$
- Oletetaan lisäksi, että yhdenkään komponentin toiminta *ei riipu* muiden komponenttien toiminnasta.
- Edellä esitetyn nojalla:

  $\Pr(K_1 \text{ toimii } \textit{ja } K_2 \text{ toimii})$

  $= p \times p = p^2$

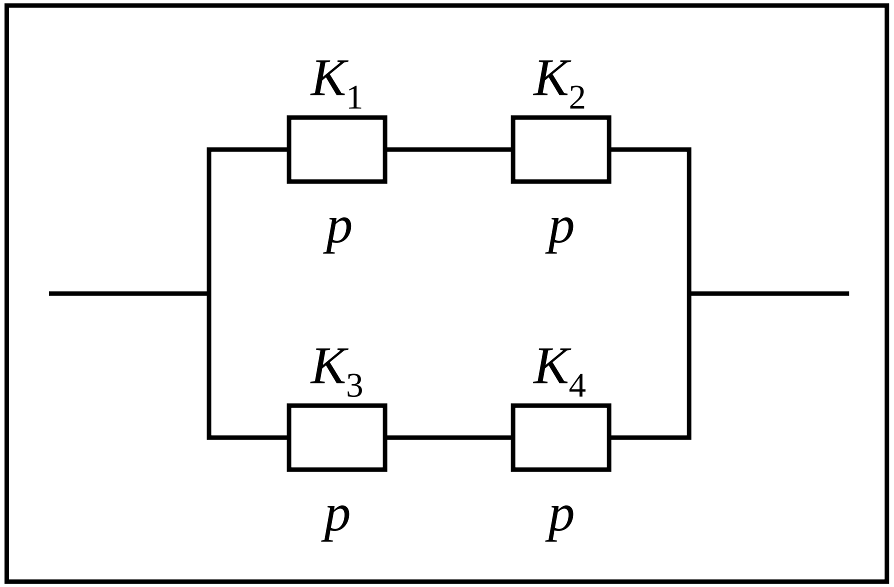
  $\Pr(K_3 \text{ toimii } \textit{ja } K_4 \text{ toimii})$

  $= p \times p = p^2$

  $\Pr(\text{Systeemi toimii})$

  $= p^2 + p^2 - p^2 \times p^2$

  $= 2p^2 - p^4$



Esimerkki 3/3

- Kuvio esittää esimerkin systeemin toimintatodennäköisyyttä

  $f(p) = 2p^2 - p^4$

  yksittäisen komponentin toimintatodennäköisyyden p funktiona.
- Kuviossa on myös suora $f(p) = p$.
- Kuviosta nähdään:

  (i) $f(p)$ on p:n *kasvava funktio*.

  (ii) Esimerkin systeemin toimintatodennäköisyys voi olla *suurempi*, *pienempi* tai *yhtä suuri* kuin yksittäisen komponentin toimintatodennäköisyys.