Ilkka Mellin

Todennäköisyyslaskenta

Osa 2: Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

>> **Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat**

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Lineaarimuunnoksen jakauma

- Olkoon X *jatkuva satunnaismuuttuja*, jonka *tiheysfunktio* on

$$f_X(x)$$

- Muodostetaan satunnaismuuttujan X *lineaarimuunnos*

$$Y = a + bX$$

jossa a ja $b \neq 0$ ovat *vakioita*.

- Satunnaismuuttujan Y **tiheysfunktio** on

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Lineaarimuunnoksen jakauma: Kommentti

- Satunnaismuuttujan X *lineaarimuunnoksen*

  $Y = a + bX$ (a ja $b \neq 0$ *vakioita*)

  jakauma on siis aina *samaa tyyppiä* kuin satunnais-muuttujan X jakauma.

Lineaarimuunnoksen jakauma: Todistus 1/4

- Olkoon *jatkuvan satunnaismuuttujan* X *tiheysfunktio* $f_X(x)$.
- Olkoon

  $$Y = a + bX$$

  jossa a ja $b \neq 0$ ovat *vakioita*.
- Muodostetaan ensin satunnaismuuttujan Y *kertymäfunktio*, josta satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktio* saadaan derivoimalla.
- Jaetaan tarkastelu *kahteen osaan*:

  (i) $b > 0$

  (ii) $b < 0$

Lineaarimuunnoksen jakauma: Todistus 2/4

- Jos $b > 0$, satunnaismuuttujan $Y = a + bX$ *kertymäfunktio* on

$$F_Y(y) = \Pr(Y \le y) = \Pr(a + bX \le y)$$
$$= \Pr\left(X \le \frac{y-a}{b} \right)$$
$$= F_X\left(\frac{y-a}{b} \right)$$

- Derivoimalla satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktioksi* saadaan

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-a}{b} \right)$$
$$= \frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-a}{b} \right)$$

Lineaarimuunnoksen jakauma: Todistus 3/4

- Jos $b < 0$, satunnaismuuttujan $Y = a + bX$ *kertymäfunktio* on

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \Pr(Y \le y) &= \Pr(a + bX \le y) \\ &= \Pr\left(X \ge \frac{y-a}{b} \right) \\ &= 1 - \Pr\left(X \le \frac{y-a}{b} \right) \\ &= 1 - F_X\left(\frac{y-a}{b} \right) \end{aligned}$$

- Derivoimalla satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktioksi* saadaan

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) &= -\frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-a}{b} \right) \\ &= -\frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-a}{b} \right) \end{aligned}$$

Lineaarimuunnoksen jakauma: Todistus 4/4

- Kalvoilla 2/4 ja 3/4 johdetut kaavat satunnaismuuttujan Y tiheysfunktiolle $f_Y(y)$ voidaan yhdistää yhdeksi kaavaksi:

  Satunnaismuuttujan $Y = a + bX$ *tiheysfunktio* on kaikille $b \neq 0$:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Välillä (0,1) jatkuvaa tasaista jakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *jatkuvaa tasaista jakaumaa* (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) välillä (0,1):

  $X \sim \text{Uniform}(0,1)$

- Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

  $$f_X(x) = 1\,,\ 0 \le x \le 1$$

- Olkoon

  $Y = a + bX$ (a ja $b > 0$ *vakioita*)

- Satunnaismuuttujan Y tiheysfunktioksi saadaan

  $$f_Y(y) = \frac{1}{b}\,,\ a \le y \le a + b$$

- Siten Y noudattaa **jatkuvaa tasaista jakaumaa** välillä (a, $a + b$):

  $Y \sim \text{Uniform}(a, a + b)$

Standardoitua normaalijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *standardoitua normaalijakaumaa* (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**):

  $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$

- Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}$$

- Olkoon

  $Y = a + bX$ (a ja $b \neq 0$ *vakioita*)

- Satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktioksi* saadaan

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-a}{b}\right)^2\right\}$$

- Siten Y noudattaa **normaalijakaumaa** parametrein a ja b^2 :

  $Y \sim \mathrm{N}(a, b^2)$

Normaalijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *normaalijakaumaa* parametrein μ ja σ^2 (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**):

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

- Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

- Olkoon

$$Y = a + bX \text{ (} a \text{ ja } b \neq 0 \textit{ vakioita}\text{)}$$

- Satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktioksi* saadaan

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{y-a-b\mu}{b\sigma} \right)^2 \right\}$$

- Siten Y noudattaa **normaalijakaumaa** parametrein $a + b\mu$ ja $b^2\sigma^2$:

$$Y \sim \mathrm{N}(a + b\mu, b^2\sigma^2)$$

Monotonisten muunnosten jakaumat

- Olkoon X *jatkuva satunnaismuuttuja*, jonka *tiheysfunktio* on

$$f_X(x)$$

- Muodostetaan satunnaismuuttujan X *muunnos*

$$Y = h(X)$$

jossa funktio h on *aidosti monotoninen* ja *jatkuvasti derivoituva*.

- Satunnaismuuttujan Y **tiheysfunktio** on

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$$

Monotonisten muunnosten jakaumat: Todistus 1/5

- Olkoon *jatkuva satunnaismuuttujan* X *tiheysfunktio* $f_X(x)$.
- Olkoon

$$Y = h(X)$$

jossa h on *aidosti monotoninen* ja *jatkuvasti derivoituva* funktio.

- Tällöin satunnaismuuttujan Y *kertymäfunktio* on

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(h(X) \leq y)$$

- Jaetaan tarkastelu *kahteen osaan*:

(i) Funktio h on *aidosti kasvava*.

(ii) Funktio h on *aidosti vähenevä*.

Monotonisten muunnosten jakaumat: Todistus 2/5

- Oletetaan ensin, että funktio h on *aidosti kasvava*.
- Koska funktio h oletettiin aidosti kasvavaksi, sillä on *käänteisfunktio* h^{-1}, joka myös on aidosti kasvava.
- Siten satunnaismuuttujan Y *kertymäfunktio* on

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) &= \Pr(h(X) \leq y) \\
&= \Pr(h^{-1}(h(X)) \leq h^{-1}(y)) \\
&= \Pr(X \leq h^{-1}(y)) \\
&= F_X(h^{-1}(y))
\end{aligned}
$$

Monotonisten muunnosten jakaumat: Todistus 3/5

- Derivoimalla satunnaismuuttujan Y kertymäfunktion lauseke saadaan satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktioksi*

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X(h^{-1}(y))$$

$$= f_X(h^{-1}(y))\left(\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right)$$

- Koska funktion h käänteisfunktio h^{-1} oletettiin aidosti kasvavaksi, niin

$$\frac{dh^{-1}(y)}{dy} > 0$$

- Voimme siis kirjoittaa:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$$

Monotonisten muunnosten jakaumat: Todistus 4/5

- Jos funktio h on *aidosti vähenevä*, myös sen käänteisfunktio h^{-1} on aidosti vähenevä, jolloin

$$\frac{dh^{-1}(y)}{dy} < 0$$

- Tällöin

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) &= \Pr(h(X) \leq y) \\ &= \Pr(h^{-1}(h(X)) \geq h^{-1}(y)) \\ &= \Pr(X \geq h^{-1}(y)) \\ &= 1 - \Pr(X \leq h^{-1}(y)) \\ &= 1 - F_X(h^{-1}(y)) \end{aligned}$$

Monotonisten muunnosten jakaumat: Todistus 5/5

- Derivoimalla satunnaismuuttujan Y kertymäfunktion lauseke saadaan satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktioksi*

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}[1 - F_X(h^{-1}(y))]$$

$$= -f_X(h^{-1}(y))\left(\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right)$$

- Koska funktion h käänteisfunktio h^{-1} oletettiin aidosti väheneväksi, niin

$$\frac{dh^{-1}(y)}{dy} < 0$$

- Voimme siis tässäkin tapauksessa kirjoittaa:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$$

Lineaarimuunnos monotonisena muunnoksena

- Olkoon X *jatkuva satunnaismuuttuja*, jonka *tiheysfunktio* on

$$f_X(x)$$

- Muodostetaan satunnaismuuttujan X *lineaarimuunnos*

$$Y = a + bX$$

jossa a ja $b \neq 0$ ovat *vakioita*.

- Satunnaismuuttujan Y **tiheysfunktio** on

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Lineaarimuunnos monotonisena muunnoksena: Todistus

- Olkoon *jatkuvan satunnaismuuttujan X tiheysfunktio* $f_X(x)$.
- Olkoon

  $Y = a + bX$ (a ja $b \neq 0$ *vakioita*)
- Tällöin

$$y = h(x) = a + bx \,,\; b \neq 0$$

$$x = h^{-1}(y) = \frac{y-a}{b}$$

$$\frac{dh(x)}{dx} = b$$

joten

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Cauchyn jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *jatkuvaa tasaista jakaumaa* (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) välillä $(-\pi/2, +\pi/2)$:

$$X \sim \text{Uniform}(-\pi/2, +\pi/2)$$

- Muodostetaan satunnaismuuttujan X *muunnos*

$$Y = \tan(X)$$

- Satunnaismuuttujan Y **tiheysfunktio** on

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}$$

- Satunnaismuuttujan Y jakaumaa kutsutaan **Cauchyn jakaumaksi**.

Cauchyn jakauma: Tiheysfunktion johto 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *jatkuvaa tasaista jakaumaa* välillä $(-\pi/2, +\pi/2)$, jolloin sen *tiheysfunktio* on

  $$f_X(x) = 1/\pi \text{ , } -\pi/2 \le x \le +\pi/2$$

- Olkoon

  $$Y = h(X) = \tan(X)$$

- Muunnos

  $$y = h(x) = \tan(x)$$

  on *aidosti kasvava* ja sen käänteismuunnoksen

  $$x = h^{-1}(y) = \arctan(y)$$

  derivaatta on

  $$\frac{dh^{-1}(y)}{dy} = \frac{d\arctan(y)}{dy} = \frac{1}{1+y^2}$$

Cauchyn jakauma: Tiheysfunktion johto 2/2

- Siten satunnaismuuttujan $Y = \tan(X)$ *tiheysfunktioksi* saadaan

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}$$

- Satunnaismuuttujan Y jakaumaa kutsutaan *Cauchyn jakaumaksi*.

Cauchyn jakauma ja Studentin *t*-jakauma

- Voidaan osoittaa, että Cauchyn jakauma on sama kuin **Studentin *t*-jakauma yhdellä vapausasteella** (ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**) eli, jos

$$X \sim \text{Uniform}(-\pi/2, +\pi/2)$$

ja

$$Y = \tan(X)$$

niin

$$Y \sim t(1)$$

- Huomautus:

Cauchyn jakaumalla *ei ole momentteja* eli sillä *ei ole edes odotusarvoa*.

Ei-monotonisten muunnosten jakaumat

- Jos satunnaismuuttujaan sovelletaan ei-monotonista muunnosta, *ei ole mahdollista löytää yleistä muunnoksen jakaumaa ja sen tiheysfunktiota koskevaa tulosta*.
- Ei-monotonisten muunnosten tapauksessa joudutaan tarkastelu tekemään tapauskohtaisesti.
- Seuraavassa tarkastellaan esimerkkinä **χ^2(1)-jakauman** (ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**) *tiheysfunktion johtoa*.

χ^2(1)-jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$X \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$Y = X^2$$

- Satunnaismuuttuja Y noudattaa χ^2-jakauman määritelmän mukaan **χ^2-jakaumaa yhdellä vapausasteella**:

$$Y \sim \chi^2(1)$$

- Satunnaismuuttujan Y **tiheysfunktio** on

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}$$

χ^2(1)-jakauma: Tiheysfunktion johto 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$X \sim \mathrm{N}(0,\,1)$$

- Tällöin

$$Y = X^2 \sim \chi^2(1)$$

- Olkoon $\Phi(\cdot)$ standardoidun normaalijakauman N(0, 1) *kertymäfunktio*.
- Satunnaismuuttujan $Y = X^2$ *kertymäfunktio* on

$$\begin{aligned}
F_Y(y) = \Pr(Y \le y) &= \Pr(X^2 \le y) \\
&= \Pr(|X| \le \sqrt{y}) \\
&= \Pr(-\sqrt{y} \le X \le +\sqrt{y}) \\
&= \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) \\
&= 2\Phi(\sqrt{y}) - 1
\end{aligned}$$

χ^2(1)-jakauma: Tiheysfunktion johto 2/2

- Standardoidun normaalijakauman N(0, 1) tiheysfunktio on

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

jossa $\Phi(\cdot)$ on standardoidun normaalijakauman N(0, 1) kertymäfunktio.

- Siten satunnaismuuttujan $Y = X^2 \sim \chi^2(1)$ *tiheysfunktioksi* saadaan

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) &= \frac{d}{dy}\left[2\Phi(\sqrt{y}) - 1\right] \\ &= \Phi'(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

>> Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Bijektiivisten muunnosten jakaumat 1/3

- Olkoot X ja Y *jatkuvia* satunnaismuuttuja, joiden *yhteisjakauman tiheysfunktio* on

$$f_{XY}(x, y)$$

- Määritellään satunnaismuuttujat

$$U = g(X, Y)$$

$$V = h(X, Y)$$

- Tehdään muunnoksesta

$$(*) \quad \begin{cases} u = g(x, y) \\ v = h(x, y) \end{cases}$$

seuraavalla kalvolla esitettävät oletukset.

Bijektiivisten muunnosten jakaumat 2/3

- Oletukset muunnoksesta (∗):

(i) Muuttujat x ja y voidaan ratkaista yhtälöryhmästä (∗) *yksikäsitteisesti* muuttujien u ja v funktioina.

(ii) Funktioilla g ja h on *jatkuvat osittaisderivaatat* muuttujien x ja y suhteen.

(iii) Muunnoksen (∗) *Jacobin determinantti* on *nollasta poikkeava* alueella, jossa tiheysfunktio $f_{XY}(x, y)$ on positiivinen:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$$

kaikille x ja y, joille $f_{XY}(x, y) > 0$.

Bijektiivisten muunnosten jakaumat 3/3

- Jos oletukset (i)-(iii) pätevät, satunnaismuuttujien *U* ja *V* yhteisjakauman **tiheysfunktio** on

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(x,y)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}$$

jossa *x* ja *y* ratkaistaan kalvon 1/3 yhtälöryhmästä (∗).

Normaalijakauman generointi jatkuvasta tasaisesta jakaumasta 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia* ja noudattavat *jatkuvaa tasaista jakaumaa* (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) välillä (0, 1):

$$X \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

$$Y \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

$$X \perp Y$$

- Määritellään satunnaismuuttujat

$$U = \cos(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$

$$V = \sin(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$

Normaalijakauman generointi jatkuvasta tasaisesta jakaumasta 2/2

- Satunnaismuuttujat U ja V ovat *riippumattomia* ja noudattavat **standardoitua normaalijakaumaa** (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**):

$$U \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

$$V \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

$$U \perp V$$

Normaalijakauman generointi jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Todistus 1/5

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia* ja noudattavat *jatkuvaa tasaista jakaumaa* välillä (0, 1):

$$X \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

$$Y \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

$$X \perp Y$$

- Olkoot

$$U = \cos(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$

$$V = \sin(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$

- Tarkastellaan *yhtälöryhmää*

$$(*) \qquad \begin{cases} u = \cos(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \\ v = \sin(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \end{cases}$$

Normaalijakauman generointi jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Todistus 2/5

- Yhtälöryhmän

$$(*) \qquad \begin{cases} u = \cos(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \\ v = \sin(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \end{cases}$$

ratkaisut muuttujien x ja y suhteen saadaan yhtälöistä

$$\begin{cases} \cos(2\pi x) = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ \sin(2\pi x) = \dfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ y = \exp\left\{-\dfrac{1}{2}(u^2+v^2)\right\} \end{cases}$$

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumia

Normaalijakauman generointi jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Todistus 3/5

- Muunnoksen (∗) *Jacobin determinantti* on

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \left[-2\pi\sin(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)}\right]\cdot\left[\frac{-\sin(2\pi x)}{y\sqrt{-2\log(y)}}\right]$$

$$-\left[2\pi\cos(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)}\right]\cdot\left[\frac{-\cos(2\pi x)}{y\sqrt{-2\log(y)}}\right]$$

$$= \frac{2\pi}{y}$$

- Koska $y > 0$, niin

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$$

Normaalijakauman generointi jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Todistus 4/5

- Satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio* on

$$f_{XY}(x, y) = 1,\ 0 < x < 1\ ,\ 0 < y < 1$$

- Siten satunnaismuuttujien U ja V *yhteisjakauman tiheysfunktio* on

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(x,y)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \frac{y}{2\pi}\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ 0 < y < 1$$

- Sijoittamalla tähän x ja y lausuttuna muuttujien u ja v funktiona saadaan

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right\}$$

Normaalijakauman generointi jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Todistus 5/5

- Nyt

$$(**)\quad f_{UV}(u,v) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\}$$

$$= f_U(u)\,f_V(v)$$

  jossa $f_U(u)$ ja $f_V(v)$ ovat standardoidun normaalijakauman N(0, 1) tiheysfunktioita.
- Koska satunnaismuuttujien U ja V yhteisjakauman tiheysfunktio voidaan esittää satunnaismuuttujien U ja V reunajakaumien tiheysfunktioiden tulona, satunnaismuuttujat U ja V ovat *riippumattomia*.
- Yhtälöstä (∗∗) nähdään lisäksi se, että satunnaismuuttujat U ja V noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa* N(0, 1).

Normaalijakauman generointi jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Kommentteja

- Muunnosta

$$(*) \quad \begin{cases} u = \cos(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \\ v = \sin(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \end{cases}$$

  kutsutaan tavallisesti **Boxin ja Müllerin muunnokseksi**.
- Boxin ja Müllerin muunnos tarjoaa erään keinon *generoida normaalijakautuneita satunnaislukuja* tasaista jakaumaa välillä (0, 1) noudattavista satunnaisluvuista.

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

>> Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Satunnaismuuttujien riippumattomuus

- Olkoot X ja Y *riippumattomia* ja *jatkuvia satunnaismuuttujia*.
- Tällöin niiden *yhteisjakauman tiheysfunktio*

$$f_{XY}(x, y)$$

voidaan esittää satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumien tiheysfunktioiden* $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$ tulona:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

- Olkoot X ja Y *riippumattomia* ja *jatkuvia satunnais-muuttujia*, joiden *tiheysfunktiot* ovat $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.
- Muodostetaan satunnaismuuttujien X ja Y *summa*

$$U = X + Y$$

- Satunnaismuuttujan U **tiheysfunktio** on

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(u-x) f_X(x)dx$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma: Todistus 1/3

- Olkoot X ja Y *riippumattomia* ja *jatkuvia satunnaismuuttujia*, joiden *tiheysfunktiot* ovat $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.
- Koska satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia,

$$f_{XY}(x, y) = f_Y(y)f_X(x)$$

- Olkoot

$$U = X + Y$$

$$V = X$$

- Satunnaismuuttujien X ja Y summan jakauma saadaan määräämällä satunnaismuuttujan U *reunajakauma* satunnaismuuttujien U ja V yhteisjakaumasta.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma: Todistus 2/3

- Tarkastellaan muunnosta

$$(*)\qquad \begin{cases} u = x + y \\ v = x \end{cases}$$

- Muunnoksen $(*)$ *käänteismuunnos*:

$$\begin{cases} y = u - v \\ x = v \end{cases}$$

- Muunnoksen $(*)$ *Jacobin determinantti*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 1\cdot 0 - 1\cdot 1 \\ &= -1 \neq 0 \end{aligned}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma: Todistus 3/3

- Siten satunnaismuuttujien $U = X + Y$ ja $V = X$ *yhteisjakauman tiheysfunktio* on

$$\begin{aligned} f_{UV}(u,v) &= f_{XY}(x,y)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} \\ &= f_X(x)\,f_Y(y)\,|-1| \\ &= f_X(v)\,f_Y(u-v) \end{aligned}$$

- *Summan* $U = X + Y$ *tiheysfunktio* saadaan tästä satunnaismuuttujan U *reunajakauman tiheysfunktiona*:

$$\begin{aligned} f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{UV}(u,v)dv &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(v)\,f_Y(u-v)dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(u-x)dx \end{aligned}$$

χ^2-jakauma 1/3

- Tarkastellaan riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakaumaa koskevan yleisen tuloksen sovelluksena **χ^2-jakauman** (ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**) *tiheysfunktion lausekkeen johtoa*.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2-jakauma 2/3

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  ovat *riippumattomia* ja noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa*:

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n \perp$$

  $$X_i \sim \mathrm{N}(0, 1) , i = 1, 2, \ldots , n$$

- Määritellään satunnaismuuttuja

  $$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

- Satunnaismuuttuja Y_n noudattaa χ^2-jakauman määritelmän mukaan **χ^2-jakaumaa *n*:llä vapausasteella**:

  $$Y_n \sim \chi^2(n)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2-jakauma 3/3

- Satunnaismuuttujan

  $$Y_n \quad \chi^2(n)$$

  tiheysfunktio on

  $$f_n(y) = C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

- *Normeerausvakio* C_n saadaan kaavasta

  $$C_n = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$$

  jossa $\Gamma(\cdot)$ on *Eulerin gammafunktio*:

  $$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 1/10

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

  $$X_1\,,\, X_2\,,\, \ldots\,,\, X_n$$

  ovat *riippumattomia* ja noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa*:

  $$X_1\,,\, X_2\,,\, \ldots\,,\, X_n \perp$$

  $$X_i \sim \mathrm{N}(0,\,1)\;,\; i = 1, 2, \ldots\,,\, n$$

- Tällöin

  $$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

- Käytetään satunnaismuuttujan Y_n tiheysfunktion lausekkeen

  $$f_n(y) = C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

  perustelemiseen *täydellistä induktiota* ja yleistä tulosta riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakaumalle.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 2/10

- Olkoon $n = 1$.
- Tässä luvussa on jo todettu (ks. kappaletta **Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat**), että

$$Y_1 = X_1^2 \quad \chi^2(1)$$

ja satunnaismuuttujan Y_1 *tiheysfunktio* on

$$f_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y}$$

- Koska

$$C_1 = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

satunnaismuuttujan

$$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \mathrm{L} + X_n^2 \quad \chi^2(n)$$

tiheysfunktion lauseke pätee, kun $n = 1$.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 3/10

- Tarkastellaan seuraavaksi erikseen tapausta $n = 2$.
- Koska satunnaismuuttujat X_1 ja X_2 on oletettu riippumattomiksi, myös satunnaismuuttujat X_1^2 ja X_2^2 ovat riippumattomia.
- Siten voimme soveltaa satunnaismuuttujaan

$$Y_2 = X_1^2 + X_2^2 \quad \chi^2(2)$$

riippumattomien satunnaismuuttujien summan tiheysfunktion kaavaa:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y-z)\,f_1(z)dz = C_2'\int_0^{\infty}(y-z)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(y-z)}z^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}z}dz$$

$$= C_2' e^{-\frac{1}{2}y}\int_0^{\infty}(y-z)^{-\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{2}}dz$$

jossa C_2' on muuttujan y suhteen vakio.

χ^2-jakauma:
Tiheysfunktion johto 4/10

- Tapaus $n = 2$ jatkuu ...
- Sijoituksella $z = yt$ integraali

$$f_2(y) = C_2' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^\infty (y-z)^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dz$$

saadaan muokatuksi muotoon

$$\begin{aligned} f_2(y) &= C_2' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^\infty (y-yt)^{-\frac{1}{2}} (yt)^{-\frac{1}{2}} y dt \\ &= C_2' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^\infty (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= C_2 e^{-\frac{1}{2}y} \end{aligned}$$

jossa $C_2 = C_2' \int_0^\infty (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt$ on muuttujan y suhteen vakio.

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 5/10

- Tapaus n = 2 jatkuu ...
- Siten satunnaismuuttujan

$$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \quad \chi^2(n)$$

tiheysfunktion lauseke

$$f_n(y) = C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

pätee, kun n = 2:

$$f_2(y) = C_2 e^{-\frac{1}{2}y}$$

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 6/10

- Yleinen induktio-askel $n - 1 \rightarrow n$.
- Induktio-oletus:

  Satunnaismuuttujan

  $$Y_{n-1} = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{n-1}^2 \sim \chi^2(n-1)$$

  tiheysfunktio on

  $$f_{n-1}(y) = C_{n-1} y^{\frac{1}{2}(n-1)-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 7/10

- Induktio-askel $n - 1 \rightarrow n$ jatkuu …
- Koska satunnaismuuttujat X_1 , X_2 , … , X_n on oletettu riippumattomiksi, myös satunnaismuuttujat $Y_{n-1} = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{n-1}^2$ ja X_n^2 ovat riippumattomia.
- Siten voimme soveltaa satunnaismuuttujaan

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{n-1}^2 + X_n^2 \quad \chi^2(n)$$

riippumattomien satunnaismuuttujien summan tiheysfunktion kaavaa:

$$f_n(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y-z) f_{n-1}(z) dz = C_n' \int_0^{\infty} (y-z)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(y-z)} z^{\frac{1}{2}(n-1)-1} e^{-\frac{1}{2}z} dz$$

$$= C_n' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (y-z)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}} dz$$

jossa C_n' on muuttujan y suhteen vakio.

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 8/10

- Induktio-askel $n - 1 \rightarrow n$ jatkuu …
- Sijoituksella $z = yt$ integraali

$$f_n(y) = C_n' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^\infty (y-z)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}} dz$$

saadaan muokatuksi muotoon

$$\begin{aligned} f_n(y) &= C_n' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^\infty (y-yt)^{-\frac{1}{2}} (yt)^{\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}} y dz \\ &= C_n' y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^\infty (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}} dt \\ &= C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y} \end{aligned}$$

jossa $C_n = C_n' \int_0^\infty (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}} dt$ on muuttujan y suhteen vakio.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 9/10

- Induktiopäättely jatkuu ...
- Yhdistämällä kalvojen 2/10-8/10 tulokset nähdään, että satunnais-muuttujan

$$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \qquad \chi^2(n)$$

tiheysfunktion lauseke

$$f_n(y) = C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

pätee kaikille n = 1, 2, 3, …

χ^2-jakauma: Tiheysfunktion johto 10/10

- Määrätään vielä *normeerausvakio* C_n .
- Todetaan ensin, että tiheysfunktio f_n toteuttaa seuraavan ehdon:

$$\int_0^\infty f_n(y)dy = C_n \int_0^\infty y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y} dy = 1$$

- Sijoituksella $y = 2t$ tämä integraali saadaan muokatuksi muotoon

$$2^{\frac{1}{2}n} C_n \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}n-1} e^{-t} dt = 1$$

- Siten normeerausvakion C_n arvoksi saadaan

$$C_n = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

jossa $\Gamma(\cdot)$ on *Eulerin gammafunktio*:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Momenttiemäfunktio

- Olkoon X *satunnaismuuttuja*.
- Oletetaan, että *odotusarvo*

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

on olemassa kaikille

$$t \in (-h, +h)$$

jossa $h > 0$ on vakio.

- Tällöin funktiota $m_X(t)$ kutsutaan satunnaismuuttujan X ja sen jakauman **momenttiemäfunktioksi** eli **momentit generoivaksi funktioksi**.
- Lisätietoja: ks. lukua **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio.**

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktio

- Olkoot

  $$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

  riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden *momentti-emäfunktiot* ovat

  $$m_1(t), m_2(t), \ldots, m_n(t)$$

- Tällöin **summan**

  $$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

  momenttiemäfunktio on satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ momenttiemäfunktioiden *tulo*:

  $$m_X(t) = m_1(t)m_2(t) \cdots m_n(t)$$

Bernoulli-jakaumaa noudattavien satunnais-muuttujien summan jakauma

- Olkoot

  $$X_1, X_2, \dots , X_n$$

  riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat *samaa Bernoulli-jakaumaa* parametrilla p:

  $$X_1, X_2, \dots , X_n \perp$$

  $$X_i \sim \text{Bernoulli}(p) , i = 1, 2, \dots , n$$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots , X_n$ **summa**

  $$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

  noudattaa binomijakaumaa (ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**) parametrein (n , p):

  $$Y \sim \text{Bin}(n , p)$$

Bernoulli-jakaumaa noudattavien satunnais-muuttujien summan jakauma: Perustelu 1/2

- Oletetaan, että

$$X_1, X_2, \dots , X_n \perp$$

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p) \ , \ i = 1, 2, \dots , n$$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots , X_n$ *momenttiemäfunktio* on muotoa

$$m_i(t) = q + pe^t \ , \ i = 1, 2, \dots , n$$

- Lisätietoja: ks. lukua **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio**.
- Muodostetaan satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots , X_n$ *summa*:

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Bernoulli-jakaumaa noudattavien satunnais-muuttujien summan jakauma: Perustelu 2/2

- *Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktiota koskevan tuloksen mukaan* satunnaismuuttujan

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

momenttiemäfunktio on

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_1(t)m_2(t)\cdots m_n(t) \\ &= (q+pe^t)(q+pe^t)\cdots(q+pe^t) \\ &= (q+pe^t)^n \end{aligned}$$

- Koska $m_Y(t)$ on *binomijakauman* Bin(n, p) momenttiemäfunktio, niin

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim \mathrm{Bin}(n\ , p)$$

Binomijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma

- Olkoot

  $$X_1, X_2, \ldots , X_k$$

  riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat *binomijakaumia* parametrein $(n_1 , p), (n_2 , p), \ldots , (n_k , p)$:

  $$X_1, X_2, \ldots , X_k \perp$$

  $$X_i \sim \mathrm{Bin}(n_i , p) , i = 1, 2, \ldots , k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots , X_k$ **summa**

  $$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

  noudattaa binomijakaumaa (ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**) parametrein $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k , p)$:

  $$Y \sim \mathrm{Bin}(n_1 + n_2 + \cdots + n_k , p)$$

Binomijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma: Perustelu 1/2

- Oletetaan, että

  $X_1, X_2, \ldots, X_k \perp$

  $X_i \sim \mathrm{Bin}(n_i, p)$, $i = 1, 2, \ldots, k$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_k$ *momenttiemäfunktiot* ovat muotoa

  $$m_i(t) = (q + pe^t)^{n_i} \ , \ i = 1, 2, \ldots, k$$

- Lisätietoja: ks. lukua **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio**.
- Muodostetaan satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_k$ *summa*:

  $$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

Binomijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma: Perustelu 2/2

- *Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktiota koskevan tuloksen mukaan* satunnaismuuttujan

  $$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

  momenttiemäfunktio on

  $$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_1(t)m_2(t) \cdots m_k(t) \\ &= (q + pe^t)^{n_1}(q + pe^t)^{n_2} \cdots (q + pe^t)^{n_k} \\ &= (q + pe^t)^{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} \end{aligned}$$

- Koska $m_Y(t)$ on *binomijakauman* $\mathrm{Bin}(n_1 + n_2 + \cdots + n_k , p)$ momentti-emäfunktio, niin

  $$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim \mathrm{Bin}(n_1 + n_2 + \cdots + n_k , p)$$

Poisson-jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma

- Olkoot

  $$X_1, X_2, \ldots , X_k$$

  riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat *Poisson-jakaumia* parametrein $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_k$:

  $$X_1, X_2, \ldots , X_k \perp$$

  $$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i) \ , \ i = 1, 2, \ldots , k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots , X_k$ **summa**

  $$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

  noudattaa Poisson-jakaumaa (ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**) parametrilla $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$:

  $$Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)$$

Poisson-jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma: Perustelu 1/2

- Oletetaan, että

$$X_1, X_2, \ldots , X_k \perp$$

$$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i) \text{ , } i = 1, 2, \ldots , k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots , X_k$ *momenttiemäfunktiot* ovat muotoa

$$m_i(t) = e^{\lambda_i(e^t - 1)} \text{ , } i = 1, 2, \ldots , k$$

- Lisätietoja: ks. lukua **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio**.
- Muodostetaan satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots , X_k$ *summa*:

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

Poisson-jakaumaa noudattavien satunnais-muuttujien summan jakauma: Perustelu 2/2

- *Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktiota koskevan tuloksen mukaan* satunnaismuuttujan

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

momenttiemäfunktio on

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_1(t)m_2(t)\cdots m_k(t) \\ &= e^{\lambda_1(e^t-1)}e^{\lambda_2(e^t-1)}\cdots e^{\lambda_k(e^t-1)} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_1)(e^t-1)} \end{aligned}$$

- Koska $m_Y(t)$ on *Poisson-jakauman* Poisson($\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$) momenttiemäfunktio, niin

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)$$

Normaalijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma

- Olkoot

$$X_1, X_2, \ldots , X_k$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat *normaalijakaumia* parametrein $(\mu_1, \sigma_1^2), (\mu_2, \sigma_2^2), \ldots, (\mu_k, \sigma_k^2)$:

$$X_1, X_2, \ldots , X_k \perp$$

$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2) \text{ , } i = 1, 2, \ldots , k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots , X_k$ **summa**

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

noudattaa normaalijakaumaa (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) parametrein $(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k \text{ , } \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2)$:

$$Y \sim \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k \text{ , } \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Normaalijakaumaa noudattavien satunnais-muuttujien summan jakauma: Perustelu 1/2

- Oletetaan, että

  $X_1, X_2, \ldots , X_k \perp$

  $X_i \quad \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)\ , \ i = 1, 2, \ldots , k$

- Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots , X_k$ *momenttiemäfunktiot* ovat muotoa

  $m_i(t) = \exp(\mu_i t + \frac{1}{2}\sigma_i^2 t^2)\ , \ i = 1, 2, \mathrm{K}\ , k$

- Lisätietoja: ks. lukua **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio**.
- Muodostetaan satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots , X_k$ *summa*:

  $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Normaalijakaumaa noudattavien satunnais-muuttujien summan jakauma: Perustelu 2/2

- *Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktiota koskevan tuloksen mukaan* satunnaismuuttujan

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

momenttiemäfunktio on

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_1(t)m_2(t)\cdots m_k(t) \\ &= \exp(\mu_1 t + \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 t^2)\exp(\mu_2 t + \tfrac{1}{2}\sigma_2^2 t^2)\cdots\exp(\mu_k t + \tfrac{1}{2}\sigma_k^2 t^2) \\ &= \exp((\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k)t + \tfrac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2)t^2) \end{aligned}$$

- Koska $m_Y(t)$ on *normaalijakauman* $\mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k\ , \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2)$ momenttiemäfunktio, niin

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \quad \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k\ , \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2)$$

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

>> Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Satunnaismuuttujien riippumattomuus

- Olkoot X ja Y *riippumattomia* ja *jatkuvia satunnais-muuttujia*.
- Tällöin niiden *yhteisjakauman tiheysfunktio*

  $$f_{XY}(x, y)$$

  voidaan esittää satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumien tiheysfunktioiden* $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$ tulona:

  $$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

- Olkoot X ja $Y > 0$ *riippumattomia* ja *jatkuvia satunnaismuuttujia*, joiden *tiheysfunktiot* ovat $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.
- Määritellään satunnaismuuttuja

$$U = X / Y$$

- **Osamäärän** $U = X / Y$ **tiheysfunktio** on

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(uy) f_Y(y) dy$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma: Todistus 1/3

- Olkoot X ja $Y > 0$ *riippumattomia* ja *jatkuvia satunnaismuuttujia*, joiden *tiheysfunktiot* ovat $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.
- Koska satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia,

$$f_{XY}(x, y) = f_Y(y)f_X(x)$$

- Olkoot

$$U = X / Y$$

$$V = Y$$

- Satunnaismuuttujien X ja Y osamäärän jakauma saadaan määräämällä satunnaismuuttujan U *reunajakauma* satunnaismuuttujien U ja V yhteisjakaumasta.

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma: Todistus 2/3

- Tarkastellaan muunnosta

$$(*) \qquad \begin{cases} u = x/y \\ v = y \end{cases}$$

- Muunnoksen $(*)$ *käänteismuunnos*:

$$\begin{cases} x = uv \\ y = v \end{cases}$$

- Muunnoksen $(*)$ *Jacobin determinantti*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{1}{y}\cdot 1 - \left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot 0 \\ &= 1/y \neq 0 \end{aligned}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma: Todistus 3/3

- Siten satunnaismuuttujien $U = X / Y$ ja $V = Y$ *yhteisjakauman tiheysfunktio* on

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(x,y)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}$$
$$= f_X(x)f_Y(y)y$$
$$= vf_X(uv)f_Y(v)$$

- *Osamäärän $U = X / Y$ tiheysfunktio* saadaan tästä satunnaismuuttujan *U reunajakauman tiheysfunktiona*:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{UV}(u,v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} vf_X(uv)f_Y(v)dv$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} yf_X(uy)f_Y(y)dy$$

F-jakauma 1/4

- Tarkastellaan riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakaumaa koskevan yleisen tuloksen sovelluksena ***F*-jakauman** (ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**) *tiheysfunktion lausekkeen johtoa*.
- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_m , Y_1 , Y_2 , \ldots , Y_n$$

ovat *riippumattomia* ja noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_m , Y_1 , Y_2 , \ldots , Y_n \perp$$

$$X_i \sim \mathrm{N}(0, 1) , i = 1, 2, \ldots , m$$

$$Y_i \sim \mathrm{N}(0, 1) , i = 1, 2, \ldots , n$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

F-jakauma 2/4

- Määritellään satunnaismuuttujat

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_m^2$$

$$Y = Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2$$

- Satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia* ja χ^2-jakauman määritelmän mukaan X noudattaa χ^2-*jakaumaa* m:llä vapausasteella ja Y noudattaa χ^2-*jakaumaa* n:llä vapausasteella:

$$X \sim \chi^2(m)$$

$$Y \sim \chi^2(n)$$

$$X \perp Y$$

F-jakauma 3/4

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$F = \frac{X/m}{Y/n} = \frac{n}{m} \cdot \frac{X}{Y}$$

jossa siis

$$X \quad \chi^2(m)$$

$$Y \quad \chi^2(n)$$

$$X \perp Y$$

- Satunnaismuuttuja *F* noudattaa *F*-jakauman määritelmän mukaan ***F*-jakaumaa vapausastein *m* ja *n***:

$$F \sim F(m, n)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

F-jakauma 4/4

- Satunnaismuuttujan

  $F \sim F(m, n)$

  tiheysfunktio on

$$f_F(y) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}-1} \left(1+\frac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

jossa $\Gamma(\cdot)$ on *Eulerin gammafunktio*:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

F-jakauma: Tiheysfunktion johto 1/6

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$F = \frac{n}{m} \cdot \frac{X}{Y}$$

jossa

$$X \quad \chi^2(m)\,, Y \quad \chi^2(n)\,, X \perp Y$$

- Tällöin

$$F \sim F(m, n)$$

- Käytetään satunnaismuuttujan F tiheysfunktion lausekkeen

$$f_F(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n} y\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

perustelemiseen yleistä tulosta riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakaumalle.

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

F-jakauma: Tiheysfunktion johto 2/6

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$Z = \frac{X}{Y}$$

jossa

$$X \quad \chi^2(m)\,,\; Y \quad \chi^2(n)\,,\; X \perp Y$$

- $\chi^2(n)$-jakauman tiheysfunktio on muotoa (ks. kappaletta **Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma**):

$$f_n(y) = C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

$$C_n = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma
F-jakauma: Tiheysfunktion johto 3/6

- *Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän tiheysfunktion kaavan* mukaan satunnaismuuttujan $Z = X/Y$ tiheysfunktio on

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(zy) f_Y(y)dy = C_m C_n \int_0^{\infty} y(zy)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}zy} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} dy$$

$$= C_m C_n \int_0^{\infty} y(zy)^{\frac{m}{2}-1} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(1+z)y} dy$$

- Kun integraalissa tehdään sijoitus $(1 + y)z = t$, saadaan

$$f_Z(z) = C_m C_n \int_0^{\infty} \frac{t}{1+z} \left(z \frac{t}{1+z} \right)^{\frac{m}{2}-1} \left(\frac{t}{1+z} \right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}t} \frac{1}{1+z} dt$$

$$= C_m C_n z^{\frac{m}{2}-1} (1+z)^{-\frac{m+n}{2}} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}(m+m)-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

F-jakauma: Tiheysfunktion johto 4/6

- Satunnaismuuttujan $Z = X/Y$ tiheysfunktion lausekkeen

$$f_Z(z) = C_m C_n z^{\frac{m}{2}-1}(1+z)^{-\frac{m+n}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}(m+m)-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

integraalin

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}(m+m)-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

integroitava on $\chi^2(m+n)$-jakauman tiheysfunktion *ydin*.

- Siten

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}(m+m)-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt = \frac{1}{C_{m+n}}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

F-jakauma: Tiheysfunktion johto 5/6

- Sijoittamalla vakioiden C_m , C_n ja C_{m+n} lausekkeet paikoilleen saadaan satunnaismuuttujan $Z = X/Y$ tiheysfunktioksi

$$f_Z(z) = \frac{C_m C_n}{C_{m+n}} z^{\frac{m}{2}-1}(1+z)^{-\frac{m+n}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} z^{\frac{m}{2}-1}(1+z)^{-\frac{m+n}{2}}$$

- Satunnaismuuttujan

$$F = \frac{n}{m}\cdot\frac{X}{Y} \quad F(m,n)$$

saadaan satunnaismuuttujan $Z = X/Y$ tiheysfunktiosta *lineaari-muunnoksella*

$$F = \frac{n}{m}Z$$

F-jakauma: Tiheysfunktion johto 6/6

- Soveltamalla satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen tiheysfunktion kaavaa (ks. kappaletta **Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat**) saadaan $F(m, n)$-jakauman tiheysfunktioksi

$$f_F(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

t-jakauma 1/4

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

  $$X\ ,\ Y_1\ ,\ Y_2\ ,\ \ldots\ ,\ Y_n$$

  ovat *riippumattomia* ja noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa*:

  $$X\ ,\ Y_1\ ,\ Y_2\ ,\ \ldots\ ,\ Y_n \perp$$

  $$X \sim \mathrm{N}(0,\ 1)$$

  $$Y_i \sim \mathrm{N}(0,\ 1)\ ,\ i = 1, 2, \ldots\ , n$$

t-jakauma 2/4

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$Y = Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2$$

- Satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, X noudattaa *standardoitua normaalijakaumaa* N(0, 1) ja Y noudattaa χ^2-jakauman määritelmän mukaan χ^2-*jakaumaa* n:llä vapausasteella:

$$X \quad \mathrm{N}(0,1)$$

$$Y \quad \chi^2(n)$$

$$X \perp Y$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

t-jakauma 3/4

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} = \sqrt{n} \cdot \frac{X}{\sqrt{Y}}$$

jossa siis

$$X \quad \mathrm{N}(0,1)$$

$$Y \quad \chi^2(n)$$

$$X \perp Y$$

- Satunnaismuuttuja *t* noudattaa *t*-jakauman määritelmän mukaan **Studentin *t*-jakaumaa vapausastein *n*** (ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**):

$$t \sim t(n)$$

t-jakauma 4/4

- Satunnaismuuttujan

  $$t \sim t(n)$$

  tiheysfunktio on

  $$f_t(y) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{n} y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

  jossa $\Gamma(\cdot)$ on *Eulerin gammafunktio*:

  $$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

t-jakauma:
Tiheysfunktion johto 1/4

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$t = \sqrt{n}\frac{X}{\sqrt{Y}}$$

jossa

$$X \quad \mathrm{N}(0,1)\,,\; Y \quad \chi^2(n)\,,\; X \perp Y$$

- Tällöin

$$t \sim t(n)$$

- Käytetään satunnaismuuttujan t tiheysfunktion lausekkeen

$$f_t(y) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{n}y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

perustelemisessa hyväksi sitä, että

$$t^2 \sim F(1, n)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

t-jakauma:
Tiheysfunktion johto 2/4

- Jakauman $F(1, n)$ tiheysfunktio on

$$f_F(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}-1} \left(1+\frac{1}{n}z\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{z}} \left(1+\frac{1}{n}z\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

t-jakauma: Tiheysfunktion johto 3/4

- Koska

  $$t = \sqrt{z}$$

  jossa

  $$z \sim F(1, n)$$

  pätee seuraava tulos, kun $y > 0$:

  $$\begin{aligned}\Pr(0 \le t \le y) &= \tfrac{1}{2}\Pr(0 \le |t| \le y) \\ &= \tfrac{1}{2}\Pr(0 \le t^2 \le y^2) \\ &= \tfrac{1}{2}\Pr(0 \le z \le y^2) \\ &= \tfrac{1}{2}F_F(y^2)\end{aligned}$$

  jossa F_F on jakauman $F(1, n)$ *kertymäfunktio*.

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

t-jakauma: Tiheysfunktion johto 4/4

- Derivoimalla yhtälö
$$\Pr(0 \le t \le y) = \tfrac{1}{2} F_F(y^2)$$
saadaan satunnaismuuttujan t tiheysfunktioksi, kun $y > 0$:
$$f_t(y) = y f_F(y^2)$$
- Siten jakauman $t(n)$ tiheysfunktioksi saadaan lopulta
$$f_t(y) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{n} y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

Satunnaismuuttujien minimin jakauma 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  ovat *riippumattomia* ja noudattavat *samaa jakaumaa*, jonka *kertymäfunktio* on $F(x)$:

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n \perp$$

  $$X_i \sim F(x) \text{ , } i = 1, 2, \ldots , n$$

- Olkoon satunnaismuuttuja $X_{(1)}$ satunnaismuuttujien $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ **minimi**:

  $$X_{(1)} = \min\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

Satunnaismuuttujien minimin jakauma 2/2

- Satunnaismuuttujan

  $$X_{(1)} = \min\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

  kertymäfunktio on

  $$F_{(1)} = 1 - [1 - F(x)]^n$$

- Jos satunnaismuuttujat $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ ovat lisäksi *jatkuvia* ja niiden *tiheysfunktio* on

  $$f(x) = F'(x)$$

  niin satunnaismuuttujan

  $$X_{(1)} = \min\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

  tiheysfunktio on

  $$f_{(1)} = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x)$$

Satunnaismuuttujien minimin jakauma: Perustelu 1/3

- Oletetaan, että

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n \perp$$
$$X_i \sim F(x) , i = 1, 2, \ldots , n$$

- Olkoon

$$X_{(1)} = \min\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

Satunnaismuuttujien minimin jakauma: Perustelu 2/3

- Soveltamalla *kertymäfunktion määritelmää*, *komplementtitodennäköisyyden kaavaa* ja satunnaismuuttujien $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *riippumattomuutta* satunnaismuuttujan

  $$X_{(1)} = \min\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

  kertymäfunktioksi saadaan:

  $$\begin{aligned}
  F_{(1)}(x) &= \Pr(X_{(1)} \le x) \\
  &= 1 - \Pr(X_{(1)} > x) \\
  &= 1 - \Pr(X_1 > x \ ja \ X_2 > x \ ja \ \ldots \ ja \ X_n > x) \\
  &= 1 - \Pr(X_1 > x)\Pr(X_2 > x) \cdots \Pr(X_n > x) \\
  &= 1 - [1 - \Pr(X_1 \le x)][1 - \Pr(X_2 \le x)] \cdots [1 - \Pr(X_n \le x)] \\
  &= 1 - [1 - F(x)][1 - F(x)] \cdots [1 - F(x)] \\
  &= 1 - [1 - F(x)]^n
  \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien minimin jakauma: Perustelu 3/3

- Oletetaan lisäksi, että satunnaismuuttujat $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ ovat *jatkuvia* ja niiden tiheysfunktio on

$$f(x) = F'(x)$$

- Tällöin satunnaismuuttujan

$$X_{(1)} = \min\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

tiheysfunktio saadaan derivoimalla satunnaismuuttujan $X_{(1)}$ kertymäfunktion lauseke:

$$\begin{aligned} f_{(1)}(x) = F'_{(1)}(x) &= \frac{d}{dx}\{1-[1-F(x)]^n\} \\ &= -n[1-F(x)]^{n-1}[-F'(x)] \\ &= n[1-F(x)]^{n-1} f(x) \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien minimin jakauma: Eksponenttijakauma 1/2

- Oletetaan, että riippumattomat satunnaismuuttujat $X_1, X_2, \ldots, X_n$ noudattavat *samaa* **eksponenttijakaumaa** (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) parametrinaan λ :

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \perp$$

$$X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

- Satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *kertymäfunktio*:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *tiheysfunktio*:

$$f(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Satunnaismuuttujien minimin jakauma: Eksponenttijakauma 2/2

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$X_{(1)} = \min\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

- Satunnaismuuttujan $X_{(1)}$ *kertymäfunktio*:

$$F_{(1)}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n = 1 - [1 - (1 - e^{-\lambda x})]^n$$

$$= 1 - e^{-n\lambda x}$$

- Satunnaismuuttujan $X_{(1)}$ *tiheysfunktio*:

$$f_{(1)}(x) = F'_{(1)}(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{-n\lambda x})$$

$$= n\lambda e^{-n\lambda x}$$

- Siten *samaa* eksponenttijakaumaa Exp(λ) noudattavien satunnais-muuttujien $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *minimi* $X_{(1)}$ *noudattaa* **eksponentti-jakaumaa** parametrinaan $n\lambda$:

$$X_{(1)} \sim \mathrm{Exp}(n\lambda)$$

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  ovat *riippumattomia* ja noudattavat *samaa jakaumaa*, jonka *kertymäfunktio* on $F(x)$:

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n \perp$$

  $$X_i \sim F(x) , i = 1, 2, \ldots , n$$

- Olkoon satunnaismuuttuja $X_{(n)}$ satunnaismuuttujien $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ **maksimi**:

  $$X_{(n)} = \max\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma 2/2

- Satunnaismuuttujan

  $$X_{(n)} = \max\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

  kertymäfunktio on

  $$F_{(n)} = [F(x)]^n$$

- Jos satunnaismuuttujat $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ ovat lisäksi *jatkuvia* ja niiden *tiheysfunktio* on

  $$f(x) = F'(x)$$

  niin satunnaismuuttujan

  $$X_{(n)} = \max\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

  tiheysfunktio on

  $$f_{(n)} = n[F(x)]^{n-1}f(x)$$

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma: Perustelu 1/3

- Oletetaan, että

$$X_1\,,\,X_2\,,\,\ldots\,,\,X_n \perp$$

$$X_i \sim F(x)\,,\; i = 1, 2, \ldots , n$$

- Olkoon

$$X_{(n)} = \max\{X_1\,,\,X_2\,,\,\ldots\,,\,X_n\}$$

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma: Perustelu 2/3

- Soveltamalla *kertymäfunktion määritelmää* ja satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *riippumattomuutta* satunnaismuuttujan
$$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$
kertymäfunktioksi saadaan:
$$\begin{aligned}
F_{(n)}(x) &= \Pr(X_{(n)} \le x) \\
&= \Pr(X_1 \le x \ ja \ X_2 \le x \ ja \ \ldots \ ja \ X_n \le x) \\
&= \Pr(X_1 \le x)\Pr(X_2 \le x) \cdots \Pr(X_n \le x) \\
&= F(x)F(x) \cdots F(x) \\
&= [F(x)]^n
\end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma: Perustelu 3/3

- Oletetaan lisäksi, että satunnaismuuttujat $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ ovat *jatkuvia* ja niiden tiheysfunktio on

$$f(x) = F'(x)$$

- Tällöin satunnaismuuttujan

$$X_{(n)} = \max\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$$

tiheysfunktio saadaan derivoimalla satunnaismuuttujan $X_{(n)}$ kertymäfunktion lauseke:

$$\begin{aligned} f_{(n)}(x) = F'_{(n)}(x) &= \frac{d}{dx}[F(x)]^n \\ &= n[F(x)]^{n-1} F'(x) \\ &= n[F(x)]^{n-1} f(x) \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma: Eksponenttijakauma 1/2

- Oletetaan, että riippumattomat satunnaismuuttujat $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ noudattavat *samaa* **eksponenttijakaumaa** (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) parametrinaan λ :

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n \perp$$

$$X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda) , i = 1, 2, \ldots , n$$

- Satunnaismuuttujien $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *kertymäfunktio*:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Satunnaismuuttujien $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *tiheysfunktio*:

$$f(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma: Eksponenttijakauma 2/2

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

- Satunnaismuuttujan $X_{(n)}$ *kertymäfunktio*:

$$F_{(n)}(x) = [F(x)]^n = (1 - e^{-\lambda x})^n$$

- Satunnaismuuttujan $X_{(n)}$ *tiheysfunktio*:

$$f_{(n)}(x) = F'_{(n)}(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{-\lambda x})^n$$
$$= n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}$$

- Siten *samaa* eksponenttijakaumaan Exp(λ) noudattavien satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *maksimi* $X_{(n)}$ *ei noudata mitään tavanomaista jakaumaa* toisin kuin niiden *minimi* $X_{(1)}$, joka *noudattaa eksponenttijakaumaa* parametrinaan $n\lambda$.