Ilkka Mellin

Todennäköisyyslaskenta

Osa 3: Todennäköisyysjakaumia

Moniulotteisia todennäköisyysjakaumia

Moniulotteisia todennäköisyysjakaumia

>> Multinomijakauma
Kaksiulotteinen normaalijakauma

Multinomijakauman tausta 1/3

- *Multinomijakauma* on *binomijakauman* (ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**) *yleistys* useamman toisensa poissulkevan tapahtuman tilanteeseen.
- Olkoon $A_1, A_2, \ldots , A_k$ otosavaruuden S *ositus*.
- Tällöin:

$$A_i \cap A_j = \varnothing \ , \ i \neq j$$

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$$

- Olkoot tapahtumien $A_1, A_2, \ldots , A_k$ *todennäköisyydet*:

$$\Pr(A_i) = p_i \ , \ i = 1, 2, \ldots , k$$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$$

Multinomijakauman tausta 2/3

- Määritellään *satunnaismuuttujat* X_i , $i = 1, 2, \ldots , k$:

  X_i = Tapahtuman A_i esiintymisten lukumäärä n-kertaisessa toistokokeessa

- Tällöin

  $$X_i \sim \mathrm{Bin}(n,\ p_i)\ ,\ i = 1, 2, \ldots , k$$

  jossa

  $$p_i = \Pr(A_i)\ ,\ i = 1, 2, \ldots , k$$

- Lisäksi

  $$X_1 + X_2 + \cdots + X_k = n$$

Multinomijakauman tausta 3/3

- *Multinomijakaumalla* tarkoitetaan satunnaismuuttujien

  $$X_1, X_2, \ldots , X_k$$

  yhteisjakaumaa.
- Huomautus:

  Satunnaismuuttuja X_i *eivät ole riippumattomia*, koska niitä sitoo toisiinsa ehto

  $$X_1 + X_2 + \cdots + X_k = n$$

  jossa toistokokeiden lukumäärä n on *kiinteä* luku.

Multinomijakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio

- Satunnaismuuttujat $X_1, X_2, \ldots, X_k$ noudattavat $(k-1)$-ulotteista **multinomijakaumaa**, jos niiden *yhteisjakauman* **pistetodennäköisyysfunktio** on muotoa

$$\Pr(X_1 = n_1 \text{ ja } X_2 = n_2 \text{ ja } \ldots \text{ ja } X_k = n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$$

jossa

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$$

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

- Merkintä:

$$(X_1, X_2, \ldots, X_k) \sim \text{Multinom}(p_1, p_2, \ldots, p_k\,;\, n)$$

Multinomijakauman ominaisuuksia

- Jos $k = 2$, niin multinomijakauma yhtyy *binomijakaumaan*:

$$\Pr_{Multinom}(X_1 = n_1 \text{ ja } X_2 = n - n_1) = \Pr_{Bin}(X_1 = n_1)$$

- Multinomijakauman *yksiulotteiset* **reunajakaumat** ovat **binomijakaumia**.
- *Multinomitodennäköisyydet* saadaan korottamalla *multinomi* $(p_1 + p_2 + \cdots + p_k)$ potenssiin n:

$$(p_1 + p_2 + \cdots + p_k)^n = \sum \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$$

jossa summa lasketaan yli kaikkien lukujen $n_1, n_2, \ldots, n_k$, joille pätee ehto

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

Moniulotteisia todennäköisyysjakaumia

Multinomijakauma

>> Kaksiulotteinen normaalijakauma

Kaksiulotteinen normaalijakauma

- *Kaksiulotteinen normaalijakauma* on *normaalijakauman* (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) *kaksiulotteinen yleistys*.
- Huomautus:

  Normaalijakauman yleistystä *p-ulotteiseen avaruuteen* ($p > 1$) kutsutaan **multinormaalijakaumaksi** tai ***p*-ulotteiseksi normaalijakaumaksi**.

Kaksiulotteinen normaalijakauma ja sen tiheysfunktio 1/2

- Satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat **kaksiulotteista normaalijakaumaa**, jos niiden *yhteisjakauman* **tiheysfunktio** on muotoa

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}Q(x,y)\right\}$$

jossa

$$Q(x,y) = \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

- Merkintä:

$$(X, Y) \sim \mathrm{N}_2(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho_{XY})$$

Kaksiulotteinen normaalijakauma ja sen tiheysfunktio 2/2

- Kaksiulotteisen normaalijakauman

  $$\mathrm{N}_2(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X{}^2, \sigma_Y{}^2, \rho_{XY})$$

  parametrien on toteuttava seuraavat ehdot:

  $$-\infty < \mu_X < +\infty \qquad \sigma_X > 0$$

  $$-\infty < \mu_Y < +\infty \qquad \sigma_Y > 0$$

  $$-1 < \rho_{XY} < +1$$

Kaksiulotteinen normaalijakauman parametrit

- Olkoon

$$(X, Y) \sim \mathrm{N}_2(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho_{XY})$$

- Kaksiulotteisen normaalijakauman **parametreina**, jotka täysin määräävät jakauman, ovat satunnaismuuttujien X ja Y **odotusarvot** ja **varianssit** sekä niiden **korrelaatio**:

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2$$

$$\mathrm{E}(Y) = \mu_Y \qquad \mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2$$

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \rho_{XY}$$

- Lisäksi

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y$$

Tiheysfunktion ominaisuudet

- Kaksiulotteisen normaalijakauman tiheysfunktio muodostaa *pinnan*

  $$z = f_{XY}(x, y)$$

  kolmiulotteisessa avaruudessa.
- Pinnalla on *maksimi* satunnaismuuttujien X ja Y odotus-arvojen μ_X ja μ_Y määräämässä jakauman todennäköisyys-massan *painopisteessä* (μ_X, μ_Y).
- Pinnan *muodon* määräävät **tasa-arvoellipsit**

$$Q(x,y) = \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

$$= c \text{ (vakio)}$$

Kaksiulotteinen normaalijakauma
Tasa-arvoellipsien ominaisuudet 1/3

- Kaksiulotteisen normaalijakauman tiheysfunktion muodostaman pinnan muodon määräävillä *tasa-arvoellipseillä* on seuraavat *ominaisuudet*:

  (i) Ellipsien *keskipisteenä* on jakauman todennäköisyys-massan *painopiste*

  $$(\mu_X, \mu_Y)$$

  (ii) Ellipsien *eksentrisyys* on sekä korrelaatiokertoimen ρ_{XY} että standardipoikkeamien σ_X ja σ_Y funktio.

  (iii) Ellipsi on *sitä eksentrisempi mitä voimakkaammin satunnaismuuttujat X ja Y ovat korreloituneita* eli mitä suurempi on

  $$|\rho_{XY}|$$

Tasa-arvoellipsien ominaisuudet 2/3

(iv) Jos

$$\rho_{XY} = 0$$

ellipsien *pääakselit* ovat koordinaattiakseleiden suuntaiset.

(v) Jos

$$\rho_{XY} = 0$$

ja lisäksi

$$\sigma_X = \sigma_Y$$

niin ellipsit ovat *ympyröitä*.

(vi) Jos

$$\rho_{XY} = \pm 1$$

niin ellipsit surkastuvat *janoiksi*.

Tasa-arvoellipsien ominaisuudet 3/3

- *Tasa-arvoellipsien pääakselit* ovat satunnaismuuttujien X ja Y **kovarianssimatriisin**

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$$

ominaisvektoreiden suuntaiset ja niiden pituudet suhtautuvat toisiinsa kuten matriisin $\boldsymbol{\Sigma}$ **ominaisarvojen** *neliöjuuret*.

Kaksiulotteinen normaalijakauma

Esimerkki: Jakauman määrittely

- Olkoon

$$(X, Y) \sim \mathrm{N}_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

- Jakauman *parametrit* ovat

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = 4 \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = 2$$

$$\mathrm{E}(Y) = \mu_Y = 3 \qquad \mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2 = 1$$

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \rho_{XY} = 0.7$$

- Siten

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y = 0.7 \times \sqrt{2} \times 1 = 0.9899$$

Esimerkki: Tiheysfunktion kuvaaja

- Olkoon

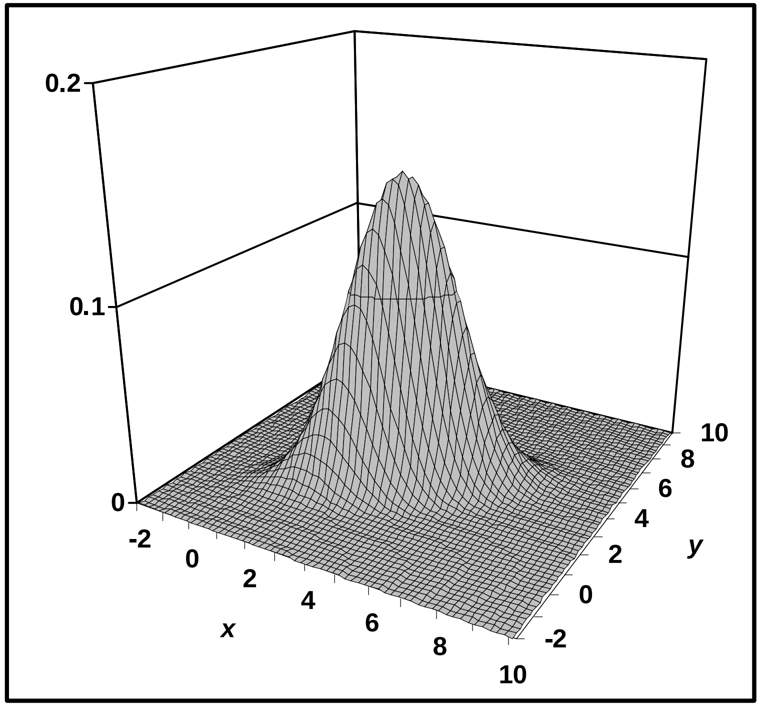
$$(X, Y) \sim \mathrm{N}_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

jolloin

$$\mu_X = 4 \qquad \sigma_X^2 = 2$$
$$\mu_Y = 3 \qquad \sigma_Y^2 = 1$$
$$\rho_{XY} = 0.7$$

- Kuva oikealla esittää jakauman *tiheysfunktiota*

$$f_{XY}(x, y)$$



Kaksiulotteinen normaalijakauma

Esimerkki: Tasa-arvoellipsien yhtälöt

- Olkoon

$$(X, Y) \sim \mathrm{N}_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

- Jakauman todennäköisyysmassan *painopisteenä* on piste

$$(\mu_X, \mu_Y) = (4, 3)$$

- Jakauman tiheysfunktion muodostaman pinnan muodon määräävät *tasa-arvoellipsit*

$$Q(x, y) = \left(\frac{x-4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{1}\right)^2 - 2\times 0.7\left(\frac{x-4}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{y-3}{1}\right)$$
$$= c \text{ (vakio)}$$

- Ellipsien *keskipisteenä* on jakauman todennäköisyysmassan *painopiste*

$$(\mu_X, \mu_Y) = (4, 3)$$

Kaksiulotteinen normaalijakauma
Esimerkki: Kovarianssimatriisi

- Olkoon

$$(X, Y) \sim \mathrm{N}_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

- Tällöin satunnaismuuttujien X ja Y *kovarianssimatriisi* on

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y \\ \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0.7\times\sqrt{2}\times 1 \\ 0.7\times\sqrt{2}\times 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0.9899 \\ 0.9899 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Esimerkki: Kovarianssimatriisin pääakselihajotelma 1/6

- Olkoon

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{ULU}'$$

kovarianssimatriisin $\mathbf{\Sigma}$ *pääakselihajotelma*, jossa $\mathbf{L}$ on matriisin $\mathbf{\Sigma}$ *ominaisarvojen* muodostama *diagonaalimatriisi* ja $\mathbf{U}$ on vastaavien *ominaisvektoreiden* muodostama *ortogonaalinen matriisi*, jossa ominaisvektorit ovat sarakkeina.

Kaksiulotteinen normaalijakauma

Esimerkki: Kovarianssimatriisin pääakselihajotelma 2/6

- Olkoot

  $$\lambda_1 \geq \lambda_2$$

  matriisin $\boldsymbol{\Sigma}$ ominaisarvot ja

  $$\mathbf{u}_1 = (u_{11}, u_{21})$$

  $$\mathbf{u}_2 = (u_{21}, u_{22})$$

  niitä vastaavat ominaisvektorit.

- Tällöin

  $$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

  ja

  $$\mathbf{U}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{U} = \mathbf{L}$$

  $$\mathbf{U}'\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}' = \mathbf{I}$$

Kaksiulotteinen normaalijakauma

Esimerkki: Kovarianssimatriisin pääakselihajotelma 3/6

- Olkoon λ kovarianssimatriisin $\boldsymbol{\Sigma}$ *ominaisarvo*.
- Tällöin λ toteuttaa yhtälön

$$\det(\boldsymbol{\Sigma} - \lambda \mathbf{I}_2) = \det \begin{bmatrix} \sigma_X^2 - \lambda & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^2 - (\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)\lambda + \sigma_X^2\sigma_Y^2 - \sigma_{XY}^2 = 0$$

- Tämän 2. asteen yhtälön ratkaisut saadaan kaavasta

$$\lambda = \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \pm \sqrt{(\sigma_X^2 - \sigma_Y^2)^2 + 4\sigma_{XY}^2}}{2}$$

- Ratkaisuiksi saadaan

$\lambda_1 = 2.6091$

$\lambda_2 = 0.3909$

Esimerkki: Kovarianssimatriisin pääakselihajotelma 4/6

- Olkoon $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ kovarianssimatriisin $\mathbf{\Sigma}$ ominaisarvoa λ vastaava *ominaisvektori*.
- Tällöin $\mathbf{u}$ toteuttaa *matriisiyhtälön*

$$\mathbf{\Sigma u} = \lambda \mathbf{u}$$

- Koska vaadimme, että

$$\mathbf{u}'\mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 = 1$$

niin vektori $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ saadaan ratkaistuksi yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} (\sigma_X^2 - \lambda)u_1 + \sigma_{XY}u_2 = 0 \\ \sigma_{XY}u_1 + (\sigma_Y^2 - \lambda)u_2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 = 1 \end{cases}$$

Kaksiulotteinen normaalijakauma

Esimerkki:
Kovarianssimatriisin pääakselihajotelma 5/6

- Ominaisarvoa

  $$\lambda_1 = 2.6091$$

  vastaavaksi ominaisvektoriksi saadaan

  $$\mathbf{u}_1 = (u_{11}, u_{21}) = (0.8517, 0.5240)$$

- Ominaisarvoa

  $$\lambda_2 = 0.3909$$

  vastaavaksi ominaisvektoriksi saadaan

  $$\mathbf{u}_2 = (u_{21}, u_{22}) = (-0.5240, 0.8517)$$

Esimerkki: Kovarianssimatriisin pääakselihajotelma 6/6

- Kovarianssimatriisin

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0.7\sqrt{2} \\ 0.7\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0.9899 \\ 0.9899 & 1 \end{bmatrix}$$

pääakselihajotelmaksi

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{ULU}'$$

saadaan siis

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6091 & 0 \\ 0 & 0.3909 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8517 & -0.5240 \\ 0.5240 & 0.8517 \end{bmatrix}$$

jossa **L** on matriisin **Σ** *ominaisarvojen* muodostama *diagonaalimatriisi* ja **U** on vastaavien *ominaisvektoreiden* muodostama *ortogonaalinen matriisi*, jossa ominaisvektorit ovat sarakkeina.

Esimerkki:
Tasa-arvoellipsit ja niiden pääakselit 1/4

- Olkoon

$$(X, Y) \sim \mathrm{N}_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

- Jakauman tiheysfunktion muodostaman pinnan muodon määräävien tasa-arvoellipsien *pääakselit leikkaavat* jakauman todennäköisyys-massan *painopisteessä*

$$(\mu_X, \mu_Y) = (4,3)$$

- Tasa-arvoellipsien *pääakseleiden pituudet* suhtautuvat toisiinsa kuten kovarianssimatriisin $\mathbf{\Sigma}$ ominaisarvojen

$$\lambda_1 = 2.6091$$

$$\lambda_2 = 0.3909$$

neliöjuuret ja vastaavat ominaisvektorit määräävät *pääakseleiden suunnat*.

Esimerkki: Tasa-arvoellipsit ja niiden pääakselit 2/4

- Tasa-arvoellipsien *pääakseleiden suuntaisten suorien yhtälöt* ovat

$$y = a_1 + b_1 x$$

$$y = a_2 + b_2 x$$

jossa

$$b_1 = \frac{u_{21}}{u_{11}} = \frac{0.5240}{0.8517} = 0.6152$$

$$a_1 = \mu_Y - b_1\mu_X = 3 - b_1 \times 4 = 0.5390$$

ovat suurempaa ominaisarvoa 2.6091 vastaavan, pitempään pääakseliin liittyvän suoran kertoimet ja

$$b_2 = \frac{u_{22}}{u_{12}} = -\frac{0.8517}{0.5240} = -1.6254$$

$$a_2 = \mu_Y - b_2\mu_X = 3 - b_2 \times 4 = 9.5015$$

ovat pienempää ominaisarvoa 0.3909 vastaavan, lyhyempään pääakseliin liittyvän suoran kertoimet.

Kaksiulotteinen normaalijakauma

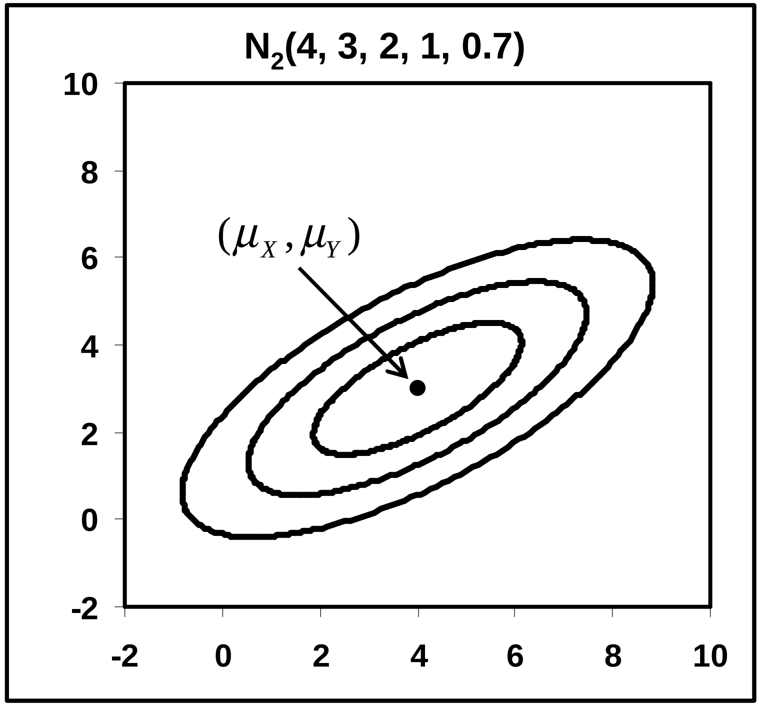
Esimerkki:
Tasa-arvoellipsit ja niiden pääakselit 3/4

- Olkoon

  $$(X, Y) \sim \mathrm{N}_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

  jolloin

  $$\mu_X = 4 \qquad \sigma_X^2 = 2$$
  $$\mu_Y = 3 \qquad \sigma_Y^2 = 1$$
  $$\rho_{XY} = 0.7$$



- Kuva oikealla esittää jakauman tiheysfunktion kuvaajan *tasa-arvoellipsejä*, jotka vastaavat (likimäärin) *todennäköisyyksiä* 68 %, 95 % ja 99.7 %.

  Esimerkiksi *uloimman* ellipsin sisään jää n. 99.7 % jakauman todennäköisyysmassasta.

Esimerkki: Tasa-arvoellipsit ja niiden pääakselit 4/4

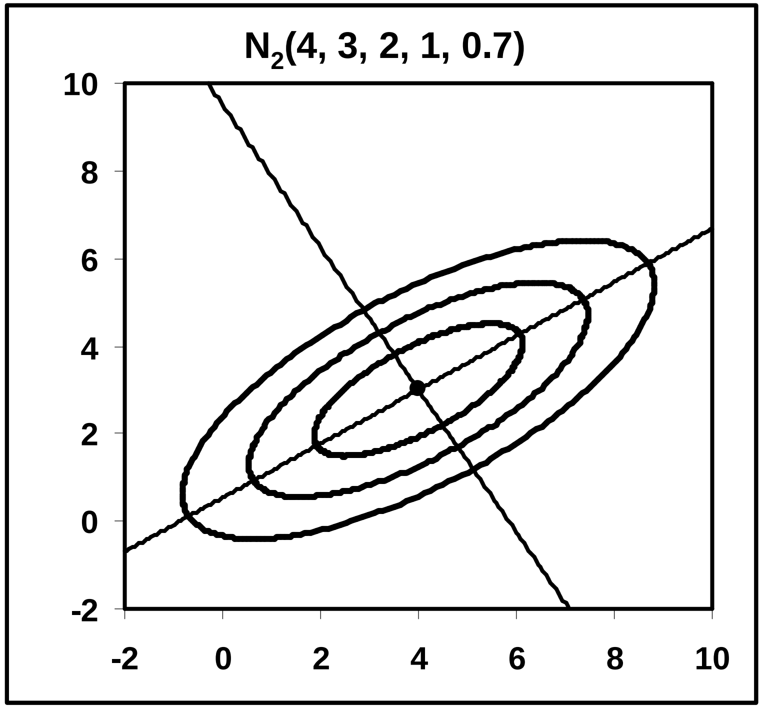
- Olkoon

$$(X, Y) \sim \mathrm{N}_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

- Kuva oikealla esittää jakauman tiheysfunktion kuvaajan *tasa-arvoellipsejä*, jotka vastaavat (likimäärin) *todennäköisyyksiä* 68 %, 95 % ja 99.7 %.
- Kuvaan on lisäksi piirretty tasa-arvoellipsien *pääakselien suuntaiset suorat*

$$y = 0.5390 + 0.6152 \times x$$

$$y = 9.5015 - 1.6254 \times x$$



Reunajakaumat

- Voidaan osoittaa, että kaksiulotteisen normaalijakauman **reunajakaumat** ovat *normaalisia*:

  $X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$

  $Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

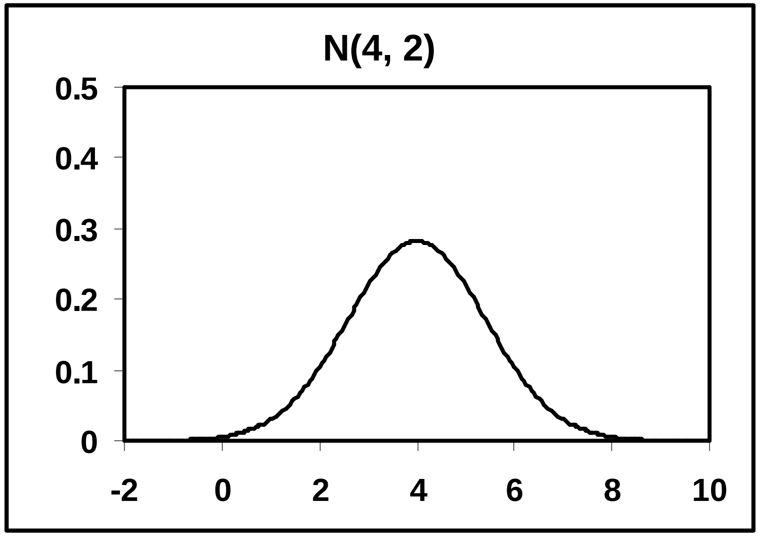
  ja niiden *tiheysfunktiot* ovat

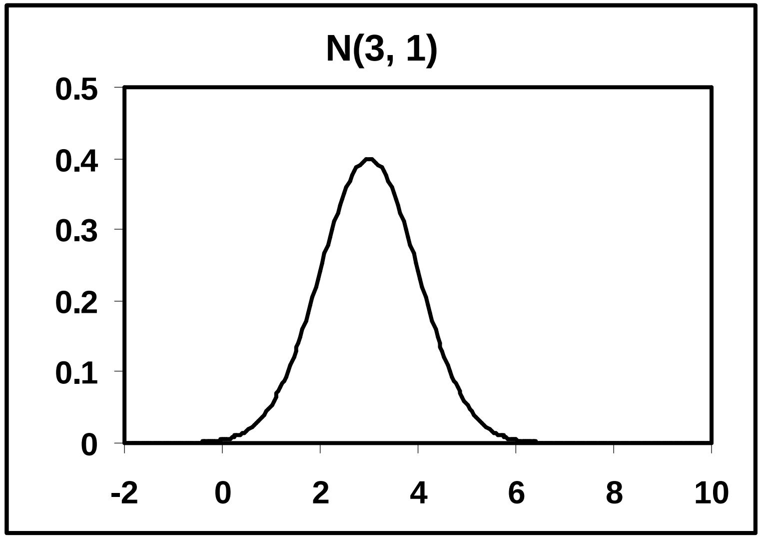
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right\}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right\}$$

Kaksiulotteinen normaalijakauma

Esimerkki: Reunajakaumat





- Olkoon

$$(X, Y) \sim \mathrm{N}_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

- Kuvat yllä esittävät satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumia*:

$$X \sim \mathrm{N}(4, 2)$$

$$Y \sim \mathrm{N}(3, 1)$$

Korreloimattomuus *vs* riippumattomuus

- **Kaksiulotteisen normaalijakauman tapauksessa satunnaismuuttujien *X* ja *Y korreloimattomuus on yhtäpitävää niiden riippumattomuuden kanssa*.**
- Huomautuksia:
  - Satunnaismuuttujien riippumattomuudesta *seuraa aina* niiden korreloimattomuus.
  - Satunnaismuuttujien korreloimattomuudesta *ei yleisesti seuraa* niiden riippumattomuus.

Kaksiulotteinen normaalijakauma

Korreloimattomuus *vs* riippumattomuus: Perustelu 1/3

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat *kaksiulotteista normaalijakaumaa*:

$$(X, Y) \sim \mathrm{N}_2(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho_{XY})$$

- Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, niin ne ovat myös korreloimattomia, koska satunnaismuuttujien riippumattomuudesta *seuraa aina* niiden korreloimattomuus; ks. lukua **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja jakaumat**.
- Oletetaan nyt, että satunnaismuuttujat X ja Y *korreloimattomia* eli

$$\rho_{XY} = 0$$

Kaksiulotteinen normaalijakauma

Korreloimattomuus *vs* riippumattomuus: Perustelu 2/3

- Kaksiulotteisen normaalijakauman *tiheysfunktio* on

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}Q(x,y)\right\}$$

$$Q(x,y)=\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2-2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

- Jos $\rho_{XY} = 0$, niin

$$\begin{aligned}f_{XY}(x,y)&=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right\}\\&=f_X(x)f_Y(y)\end{aligned}$$

Kaksiulotteinen normaalijakauma

Korreloimattomuus *vs* riippumattomuus: Perustelu 3/3

- Jos siis $\rho_{XY} = 0$, niin

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

jossa $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$ ovat satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumien* tiheysfunktiot.

- Koska oletuksesta $\rho_{XY} = 0$ seuraa, että kaksiulotteisen normaalijakauman tiheysfunktio voidaan esittää reunajakaumiensa tiheysfunktioiden tulona, niin satunnaismuuttujat X ja Y ovat tällöin *rippumattomia*; ks. lukua **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja jakaumat**.

Ehdolliset jakaumat 1/2

- Kaksiulotteisen normaalijakauman **ehdolliset jakaumat** ovat *normaalisia*:

$$(X \mid Y = y) \sim \mathrm{N}\left(\mu_{X|Y}, \sigma_{X|Y}^2\right)$$

jossa

$$\mu_{X|Y} = \mathrm{E}(X \mid Y = y) = \mu_X + \rho_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y)$$

$$\sigma_{X|Y}^2 = \mathrm{Var}(X \mid Y = y) = (1 - \rho_{XY}^2)\sigma_X^2$$

Kaksiulotteinen normaalijakauma

Ehdolliset jakaumat 2/2

- Kaksiulotteisen normaalijakauman **ehdolliset jakaumat** ovat *normaalisia*:

$$(Y \mid X = x) \sim \mathrm{N}\left(\mu_{Y|X}, \sigma^2_{Y|X}\right)$$

jossa

$$\mu_{Y|X} = \mathrm{E}(Y \mid X = x) = \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$$

$$\sigma^2_{Y|X} = \mathrm{Var}(Y \mid X = x) = (1 - \rho^2_{XY})\sigma^2_Y$$

Kaksiulotteinen normaalijakauma

Ehdolliset jakaumat: Perustelu 1/4

- Esitetään perustelu *kaksiulotteisen normaalijakauman ehdollisten jakaumien normaalisuudelle* tarkastelemalla satunnaismuuttujan Y *ehdollista jakaumaa* satunnaismuuttujan X suhteen (ehdolla $X = x$).
- Olkoon

$f_{XY}(x, y)$ = satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman* tiheysfunktio

$f_{Y|X}(y \mid x)$ = satunnaismuuttujan Y *ehdollisen jakauman* tiheysfunktio satunnaismuuttujan X suhteen

$f_X(x)$ = satunnaismuuttujan X *reunajakauman* tiheysfunktio

- Ehdollisen jakauman tiheysfunktion määritelmän mukaan

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}$$

Kaksiulotteinen normaalijakauma

Ehdolliset jakaumat: Perustelu 2/4

- Kaksiulotteisen normaalijakauman *tiheysfunktio* $f_{XY}(x,y)$:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}Q(x,y)\right\}$$

$$Q(x,y) = \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

- Satunnaismuuttujan X reunajakauman *tiheysfunktio* $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right\}$$

Ehdolliset jakaumat: Perustelu 3/4

- Nähdään (melko) helposti, että

$$f_{Y|X}(y\,|\,x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2)}Q(y\,|\,x)\right\}$$

$$Q(y\,|\,x) = \left[y-\mu_y-\rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)\right]^2$$

Kaksiulotteinen normaalijakauma

Ehdolliset jakaumat: Perustelu 4/4

- Siten satunnaismuuttujan *Y ehdollinen jakauma* satunnaismuuttujan *X* suhteen (ehdolla *X* = *x*) on *normaalinen*:

$$(Y \mid X = x) \sim \mathrm{N}(\mu_{Y|X}, \sigma_{Y|X}^2)$$

jossa

$$\mu_{Y|X} = \mathrm{E}(Y \mid X = x) = \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$$

$$\sigma_{Y|X}^2 = \mathrm{Var}(Y \mid X = x) = (1 - \rho_{XY}^2)\sigma_Y^2$$

Ehdolliset odotusarvot

- Satunnaismuuttujan X **ehdollinen odotusarvo** eli **regressiofunktio** satunnaismuuttujan Y suhteen

$$\mathrm{E}(X \mid Y = y) = \mu_X + \rho_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y)$$

on *lineaarinen* satunnaismuuttujan Y arvojen y suhteen.

- Satunnaismuuttujan Y **ehdollinen odotusarvo** eli **regressiofunktio** satunnaismuuttujan X suhteen

$$\mathrm{E}(Y \mid X = x) = \mu_Y + \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$$

on *lineaarinen* satunnaismuuttujan X arvojen x suhteen.

Regressiosuorat

- Kaksiulotteisen multinormaalijakauman *regressiokäyrät* ovat **suoria**, joiden yhtälöt voidaan kirjoittaa satunnais-muuttujan X saamien arvojen x funktioina seuraaviin muotoihin:

  (i) y:n regressiosuora x:n suhteen:

$$y = \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$$

  (ii) x:n regressiosuora y:n suhteen:

$$y = \mu_Y + \frac{1}{\rho_{XY}} \times \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$$

Regressiosuorien ominaisuudet 1/5

- Olkoon

$$y = \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$$

y:n regressiosuora *x*:n suhteen ja

$$y = \mu_Y + \frac{1}{\rho_{XY}} \times \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$$

x:n regressiosuora *y*:n suhteen.

Regressiosuorien ominaisuudet 2/5

- Regressiosuorilla on seuraavat ominaisuudet:

(i) Molemmat regressiosuorat kulkevat jakauman todennäköisyysmassan painopisteen (μ_X, μ_Y) kautta.

(ii) Molempien regressiosuorien kulmakertoimilla ja satunnaismuuttujien X ja Y korrelaatiokertoimella ρ_{XY} on *aina sama merkki*:

– Suorat ovat *nousevia*, jos $\rho_{XY} > 0$.

– Suorat ovat *laskevia*, jos $\rho_{XY} < 0$.

(iii) y:n regressiosuora x:n suhteen on *aina loivempi* kuin x:n regressiosuora y:n suhteen, koska

$$\rho_{XY}^2 \le 1$$

Regressiosuorien ominaisuudet 3/5

(iv) y:n regressiosuora x:n suhteen on *sitä jyrkempi mitä voimakkaammin satunnaismuuttujat X ja Y ovat korreloituneita* eli mitä suurempi on

$$|\rho_{XY}|$$

(v) x:n regressiosuora y:n suhteen on *sitä loivempi mitä voimakkaammin satunnaismuuttujat X ja Y ovat korreloituneita* eli mitä suurempi on

$$|\rho_{XY}|$$

Regressiosuorien ominaisuudet 4/5

(vi) Molemmat regressiosuorat ovat *sitä jyrkempiä mitä suurempi on satunnaismuuttujan Y varianssi*

$$\sigma_Y^2$$

(vii) Molemmat regressiosuorat ovat *sitä jyrkempiä mitä pienempi on satunnaismuuttujan X varianssi*

$$\sigma_X^2$$

(viii) Regressiosuorat *yhtyvät* täsmälleen silloin, kun

$$\rho = \pm 1$$

Kaksiulotteinen normaalijakauma

Regressiosuorien ominaisuudet 5/5

(ix) Jos $\rho = 0$, niin regressiosuorat ovat *kohtisuorassa toisiaan vastaan* ja y:n regressiosuora x:n suhteen on

$$y = \mu_Y$$

ja x:n regressiosuora y:n suhteen on

$$x = \mu_X$$

jolloin y:n saamat arvot *eivät riipu* x:n saamista arvoista ja x:n saamat arvot *eivät riipu* y:n saamista arvoista.

Kaksiulotteinen normaalijakauma

Esimerkki:
Regressiosuorat 1/2

- Olkoon

$$(X, Y) \sim \mathrm{N}_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

- y:n regressiosuora muuttujan x suhteen on

$$y = \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$$

$$= 3 + 0.7 \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 4) = 1.0201 + 0.4950x$$

- x:n regressiosuora muuttujan y suhteen on

$$y = \mu_Y + \frac{1}{\rho_{XY}} \times \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$$

$$= 3 + \frac{1}{0.7} \times \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 4) = -1.0406 + 1.0101x$$

Kaksiulotteinen normaalijakauma
Esimerkki: Regressiosuorat 2/2

- Olkoon

$$(X, Y) \sim \mathrm{N}_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

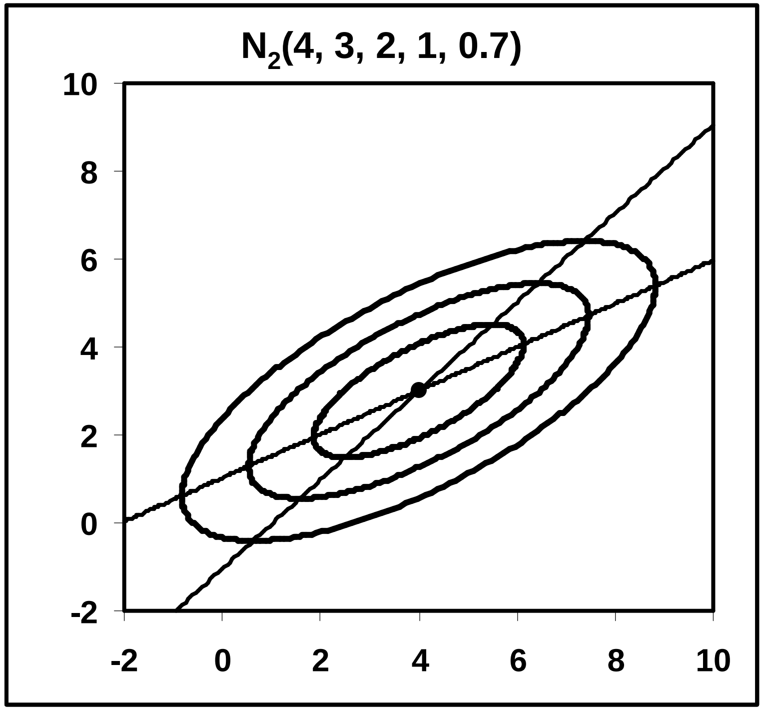
- Kuva oikealla esittää jakauman tiheysfunktion kuvaajan *tasa-arvoellipsejä*, jotka vastaavat (likimäärin) *todennäköisyyksiä* 68 %, 95 % ja 99.7 %.
- Kuvan suorista *loivempi*

$$y = 1.0201 + 0.4950 \times x$$

on *y*:*n regressiosuora x*:*n suhteen* ja suorista *jyrkempi*

$$y = -1.0406 + 1.0101 \times x$$

on *x*:*n regressiosuora y*:*n suhteen*.



Regressiosuorat ja standardointi

- *Regressiosuorat* voidaan kirjoittaa **standardoitujen muuttujien**

$$y' = \frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y} \qquad\qquad x' = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}$$

  funktioina seuraaviin muotoihin:

$$y' = \rho_{XY} x' \qquad\qquad \text{y:n regressiosuora x:n suhteen}$$

$$y' = \frac{1}{\rho_{XY}} x' \qquad\qquad \text{x:n regressiosuora y:n suhteen}$$

- *Standardoitujen muuttujien* välisten regressiosuorien kulmakertoimet ovat siis toistensa *käänteislukuja*.

Ehdolliset varianssit 1/2

- Satunnaismuuttujan X **ehdollinen varianssi** satunnaismuuttujan Y suhteen on *korkeintaan yhtä suuri* kuin satunnaismuuttujan X varianssi:

$$0 \leq \sigma_{X|Y}^2 = (1-\rho_{XY}^2)\sigma_X^2 \leq \sigma_X^2$$

- Jos siis $\rho_{XY} \neq 0$, niin satunnaismuuttujan X ehdollinen jakauma satunnaismuuttujan Y suhteen vaihtelee x:n regressiosuoran ympärillä *vähemmän* kuin satunnaismuuttuja X oman painopisteensä ympärillä.
- Lisäksi pätee, että

$$\sigma_{X|Y}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{XY} = \pm 1$$

$$\sigma_{X|Y}^2 = \sigma_X^2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{XY} = 0$$

Ehdolliset varianssit 2/2

- Satunnaismuuttujan Y **ehdollinen varianssi** satunnaismuuttujan X suhteen on *korkeintaan yhtä suuri* kuin satunnaismuuttujan Y varianssi:

$$0 \leq \sigma_{Y|X}^2 = (1-\rho_{XY}^2)\sigma_Y^2 \leq \sigma_Y^2$$

- Jos siis $\rho_{XY} \neq 0$, niin satunnaismuuttujan Y ehdollinen jakauma satunnaismuuttujan X suhteen vaihtelee y:n regressiosuoran ympärillä *vähemmän* kuin satunnaismuuttuja Y oman painopisteensä ympärillä.
- Lisäksi pätee, että

$$\sigma_{Y|X}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{XY} = \pm 1$$

$$\sigma_{Y|X}^2 = \sigma_Y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{XY} = 0$$

Ehdolliset varianssit: Kommentti

- Satunnaismuuttujan X ehdollisen varianssin kaavasta

$$\sigma_{X|Y}^2 = (1-\rho_{XY}^2)\sigma_Y^2$$

ja satunnaismuuttujan Y ehdollisen varianssin kaavasta

$$\sigma_{Y|X}^2 = (1-\rho_{XY}^2)\sigma_X^2$$

nähdään välittömästi, että kumpikaan ehdollisista variansseista *ei riipu ehtomuuttujan arvoista*.

- Siten kaksiulotteisen normaalijakauman kummankaan ehdollisen jakauman todennäköisyysmassan vaihtelu vastaavan regressiosuoran ympärillä *ei riipu ehto-muuttujan arvoista*.

Esimerkki:
Ehdolliset varianssit

- Olkoon

$$(X, Y) \sim \mathrm{N}_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

- Satunnaismuuttujan Y *ehdollinen varianssi* satunnaismuuttujan X suhteen on

$$0 \leq \sigma_{Y|X}^2 = (1-\rho_{XY}^2)\sigma_Y^2 = (1-0.7^2)\times 1 = 0.51 \leq 1 = \sigma_Y^2$$

- Satunnaismuuttujan X *ehdollinen varianssi* satunnaismuuttujan Y suhteen on

$$0 \leq \sigma_{X|Y}^2 = (1-\rho_{XY}^2)\sigma_X^2 = (1-0.7^2)\times 2 = 1.02 \leq 2 = \sigma_X^2$$