Ilkka Mellin

Todennäköisyyslaskenta

Osa 2: Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet

Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet

>> Konvergenssikäsitteitä

Suurten lukujen lait

Keskeinen raja-arvolause

Keskeisen raja-arvolauseen seurauksia

Satunnaismuuttujat

- Olkoon

$$(S, \mathcal{F}, \Pr)$$

todennäköisyyskenttä ja olkoon X (mitallinen) *funktio* otosavaruudesta S reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$:

$$X : S \to \mathbb{R}$$

- Tällöin X on **satunnaismuuttuja**.
- Jos haluamme korostaa sitä, että satunnaismuuttuja X on otosavaruuden S kuvaus reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$, merkitsemme

$$X(s) \in \mathbb{R} \,,\; s \in S$$

Satunnaismuuttujat: Kommentteja

- *Satunnaismuuttuja* on *funktiona* täysin *määrätty*, mutta *sattuma määrää* mikä funktion arvoista *realisoituu*.
- Satunnaismuuttuja *kuvaa* satunnaisilmiön *tulos-vaihtoehtoja numeerisessa muodossa*.
- Satunnaismuuttuja liittää jokaiseen satunnaisilmiön *tulos-vaihtoehtoon reaaliluvun* (*numeerisen koodin*).

Satunnaismuuttujien jonot 1/2

- Tarkastelemme jatkossa satunnaismuuttujien

  $$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

  muodostamia **jonoja** ja niiden *konvergenssia*.
- Satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ muodostama jono *ei ole* lukujono missään tavanomaisessa mielessä, vaan se on *lukujonojen joukko*.
- Satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ muodostamassa jonossa *jokaiseen* otosavaruuden alkioon $s \in S$ liittyy lukujono

  $$X_1(s), X_2(s), X_3(s), \ldots$$

Konvergenssikäsitteitä
Satunnaismuuttujien jonot 2/2

- Lukujono

  $$X_1(s), X_2(s), X_3(s), \ldots$$

  voi *konvergoida*, kun

  $$s \in A \subset S$$

  ja *hajaantua*, kun

  $$s \in A^c \subset S$$

- Tämä havainto muodostaa toisen lähtökohdan todennäköisyyslaskennan konvergenssikäsitteiden tarkastelulle.
- Toisen lähtökohdan muodostaa satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ *jakaumien* ja niiden *konvergenssin* tarkastelu.

Varma konvergenssi

- Satunnaismuuttujien

  $X_1, X_2, X_3, \ldots$

  muodostama jono **konvergoi varmasti** kohti satunnais-muuttujaa X, jos

  $$\lim_{i \to \infty} X_i(s) = X(s) \text{ kaikille } s \in S$$

- Huomautus:

  Satunnaismuuttujien jonojen varmaa konvergenssia käytetään liian rajoittavana konvergenssin muotona vain harvoin.

Melkein varma konvergenssi

- Satunnaismuuttujien

  $$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

  muodostama jono **konvergoi melkein varmasti** eli **todennäköisyydellä yksi** kohti satunnaismuuttujaa X, jos

  $$\Pr(\lim_{i\to\infty} X_i = X) = 1$$

- Käytämme tällöin seuraavia merkintöjä:

  $$\lim_{i\to\infty} X_i = X \quad \text{(a.s.)}$$

  $$X_i \xrightarrow[i\to\infty]{\text{a.s.}} X$$

  jossa lyhenne a.s. = *almost surely*.

Konvergenssikäsitteitä

Melkein varma konvergenssi: Esimerkki 1/3

- Liitetään *otosavaruuden*

  $S = [0, 1]$

  osaväleihin todennäköisyydet seuraavalla tavalla:

  $\Pr[a, b] = b - a \text{ , } 0 \leq a \leq b \leq 1$

- Määritellään *satunnaismuuttuja* X otosavaruudessa S kaavalla

  $X(s) = s \text{ , } s \in S$

- Funktio $X(\cdot)$ on *identtinen kuvaus*.
- Määritellään satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, 3, \ldots$ jono seuraavasti:

$$X_i(s) = \begin{cases} 1 \text{ , kun } s = 0 \\ \left(1 - \dfrac{1}{i}\right)s \text{ , kun } 0 < s < 1 \\ 0 \text{, kun } s = 1 \end{cases}$$

Konvergenssikäsitteitä

Melkein varma konvergenssi: Esimerkki 2/3

- Satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, 3, … muodostama jono konvergoi i:n kasvaessa rajatta kohti *rajamuuttujaa*

$$\lim_{i\to\infty} X_i(s) = \begin{cases} 1\,, \text{ kun } s = 0 \\ s\,, \text{ kun } 0 < s < 1 \\ 0\,, \text{ kun } s = 1 \end{cases}$$

- Olkoon joukko

$$A = \{s \in S \mid \lim X_i(s) \neq X(s)\}$$

niiden otosavaruuden S = [0, 1] alkioiden (pisteiden) s joukko, joissa satunnaismuuttujien $X_i(s)$, i = 1, 2, 3, … muodostama jono *ei konvergoi* kohti satunnaismuuttujan $X(s)$ arvoa.

Konvergenssikäsitteitä

Melkein varma konvergenssi: Esimerkki 3/3

- Satunnaismuuttujien $X_i(s)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ muodostama jono *konvergoi* kohti satunnaismuuttujaa $X(s)$, jos $0 < s < 1$, mutta ei konvergoi kohti satunnaismuuttujaa $X(s)$, jos $s = 0$ tai $s = 1$.
- Siten

$$A = \{s \in S \mid \lim X_i(s) \neq X(s)\} = \{0, 1\}$$

- Koska

$$\Pr(A) = 0$$

voimme sanoa, että satunnaismuuttujien $X_i(s)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ muodostama jono *konvergoi* kohti satunnaismuuttujaa $X(s)$ muualla paitsi *nollamittaisessa* joukossa A.

- Siten olemme todistaneet, että satunnaismuuttujien $X_i(s)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ muodostama jono *konvergoi melkein varmasti* eli *todennäköisyydellä yksi* kohti satunnaismuuttujaa $X(s)$:

$$X_i \to X \ \ (\text{a.s.})$$

Kvadraattinen konvergenssi

- Satunnaismuuttujien

  $X_1, X_2, X_3, \ldots$

  muodostama jono **konvergoi kvadraattisesti** kohti satunnaismuuttujaa X, jos

  $$\lim_{i \to \infty} \mathrm{E}\left[(X_i - X)^2 \right] = 0$$

- Käytämme tällöin seuraavia merkintöjä:

  $$\lim_{i \to \infty} X_i = X \quad \text{(q.m.)}$$

  $$X_i \xrightarrow[i \to \infty]{\text{q.m.}} X$$

  jossa lyhenne q.m. = in *quadratic mean*.

Konvergenssikäsitteitä
Kvadraattinen konvergenssi: Esimerkki 1/2

- Olkoon

  X_i , i = 1, 2, 3, …

  jono *riippumattomia* ja *samoin jakautuneita* satunnaismuuttujia, joiden odotusarvot ja varianssit ovat

  $\mathrm{E}(X_i) = \mu$

  $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$

- Määritellään satunnaismuuttujien X_1, X_2, X_3, … , X_n *aritmeettinen keskiarvo* kaavalla

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ , \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Kvadraattinen konvergenssi: Esimerkki 2/2

- Koska satunnaismuuttujat $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ oletettiin riippumattomiksi ja niillä on sama odotusarvo ja varianssi, niin niiden *aritmeettinen keskiarvon* $\bar{X}_n = \Sigma X_i / n$ *odotusarvo* ja *varianssi* ovat

$$\mathrm{E}(\bar{X}_n) = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \sigma^2 / n$$

- Koska

$$\mathrm{E}[(\bar{X}_n - \mu)^2] = \mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

niin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ aritmeettisten keskiarvojen $\bar{X}_n = \Sigma X_i / n$ muodostama jono $\bar{X}_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *konvergoi kvadraattisesti* kohti satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ yhteistä odotusarvoa μ:

$$\bar{X}_n \to \mu \quad \text{(q.m.)}$$

Stokastinen konvergenssi

- Satunnaismuuttujien

  $$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

  muodostama jono **konvergoi stokastisesti** kohti satunnais-muuttujaa X, jos kaikille $\varepsilon > 0$ pätee

  $$\lim_{i \to \infty} \Pr(|X_i - X| > \varepsilon) = 0$$

- Käytämme tällöin seuraavia merkintöjä:

  $$\lim_{i \to \infty} X_i = X \quad (\mathrm{P})$$

  $$X_i \xrightarrow[i \to \infty]{\mathrm{P}} X$$

  jossa lyhenne P = in *probability*.

Konvergenssikäsitteitä

Stokastinen konvergenssi: Esimerkki 1/3

- Olkoon

  $X_i\,,\ i = 1, 2, 3, \ldots$

  jono *riippumattomia* ja *samaa normaalijakaumaa* $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ noudattavia satunnaismuuttujia, joiden odotusarvot ja varianssit ovat

  $\mathrm{E}(X_i) = \mu$

  $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$

- Määritellään satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \ldots , X_n$ *aritmeettinen keskiarvo* kaavalla

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ ,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

- Tällöin

$$\bar{X}_n \quad \mathrm{N}(\mu\ , \sigma^2 / n)$$

Konvergenssikäsitteitä

Stokastinen konvergenssi: Esimerkki 2/3

- Kaikille $\varepsilon > 0$ pätee

$$\begin{aligned}
\Pr(|\,\bar{X}_n - \mu\,| > \varepsilon) &= 1 - \Pr(\mu - \varepsilon < \bar{X}_n < \mu + \varepsilon) \\
&= 1 - \Pr\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < +\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \\
&= 1 - \Pr\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} < Z < +\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \\
&= 1 - \left[\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \right] \\
&\to 0 \text{ , kun } n \to \infty
\end{aligned}$$

jossa $\Phi(z)$ on *standardoitua normaalijakaumaa* N(0, 1) noudattavan satunnaismuuttujan Z kertymäfunktio.

Konvergenssikäsitteitä

Stokastinen konvergenssi: Esimerkki 3/3

- Koska kaikille $\varepsilon > 0$ pätee

  $$\Pr(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \to 0 \text{ , kun } n \to \infty$$

  niin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ aritmeettisten keskiarvojen $\bar{X}_n = \Sigma X_i / n$ muodostama jono $\bar{X}_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *konvergoi stokastisesti* kohti satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ yhteistä odotusarvoa μ:

  $$\bar{X}_n \to \mu \text{ (P)}$$

Jakaumakonvergenssi 1/2

- Olkoon

  $$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

  jono *satunnaismuuttujia*, joiden *kertymäfunktiot* ovat

  $$F_1(x), F_2(x), F_3(x), \ldots$$

- Satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ muodostama jono **konvergoi jakaumaltaan** eli **heikosti** kohti satunnais-muuttujaa X, jonka kertymäfunktio on $F_X(x)$, jos

  $$\lim_{i \to \infty} F_i(x) = F_X(x)$$

  jokaisessa satunnaismuuttujan X kertymäfunktion $F_X(x)$ *jatkuvuuspisteessä* x eli sellaisessa pisteessä x, jossa $F_X(x)$ on jatkuva.

Konvergenssikäsitteitä

Jakaumakonvergenssi 2/2

- Käytämme tällöin seuraavia merkintöjä:

$$\lim_{i\to\infty} X_i = X \quad (\mathrm{L})$$

$$X_i \xrightarrow[i\to\infty]{\mathrm{L}} X \qquad F_X(x)$$

jossa L = in (probability) *law*.

- Kirjaimen L tilalla käytetään joskus kirjainta D:
D = in *distribution*.

Jakaumakonvergenssi: Esimerkki 1/2

- Olkoon

  $$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

  jono *satunnaismuuttujia*, joiden *kertymäfunktiot* ovat

  $$F_i(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{x}{i}\right)^i, \text{ kun } 0 \le x \le i \\ 0, \text{ kun } x > i \end{cases}$$

- Koska

  $$\lim_{i \to \infty} \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i = e^{-x}$$

  niin

  $$\lim_{i \to \infty} F_i(x) = 1 - e^{-x} \ , \ x \ge 0$$

Jakaumakonvergenssi: Esimerkki 2/2

- Funktio

$$F(x) = 1 - e^{-x}\ ,\ x \geq 0$$

on *eksponenttijakauman* Exp(1) *kertymäfunktio*.

- Siten satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, 3, … muodostama jono *konvergoi jakaumaltaan* eli *heikosti* kohti satunnaismuuttujaa X ~ Exp(1):

$$X_i \to X \sim \text{Exp}(1)$$

Konvergenssikäsitteiden yhteydet 1/2

- Voidaan osoittaa, että todennäköisyyslaskennan konvergenssikäsitteillä on seuraavat yhteydet:
  (i) **Melkein varma konvergenssi (a.s.) implikoi stokastisen konvergenssin (P)**.
  (ii) **Kvadraattinen konvergenssi (q.m.) implikoi stokastisen konvergenssin (P)**.
  (iii) **Stokastinen konvergenssi (P) implikoi jakauma-konvergenssin eli heikon konvergenssin (L)**.
  (iv) Melkein varman ja kvadraattisen konvergenssin yhteydestä ei voida sanoa mitään yleistä.
- Todistamme seuraavassa kohdan (ii).

Konvergenssikäsitteiden yhteydet 2/2

- Konvergenssikäsitteiden yhteydet voidaan esittää seuraavana kaaviona:

Melkein varma konvergenssi (a.s.) ⇓   **Kvadraattinen konvergenssi (q.m.)** ⇓

Stokastinen konvergenssi (P)

⇓

Jakauma-konvergenssi (L)

Kvadraattinen konvergenssi implikoi stokastisen konvergenssin: Todistus 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttujien

  $$X_i\,,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

  muodostama jono *konvergoi kvadraattisesti* kohti satunnaismuuttujaa X, jolloin

  $$\lim_{i\to\infty} \mathrm{E}\left[(X_i - X)^2\right] = 0$$

- Tarkastellaan todennäköisyyttä

  $$\Pr(|\,X_i - X\,| > \varepsilon)$$

- *Markovin epäyhtälöstä* (ks. lukua **Jakaumien tunnusluvut**) ja kvadraattisen konvergenssin *määritelmästä* seuraa, että

  $$\Pr(|\,X_i - X\,| > \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{E}\left[(X_i - X)^2\right] \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$$

Kvadraattinen konvergenssi implikoi stokastisen konvergenssin: Todistus 2/2

- Koska

  $$\Pr(|X_i - X| > \varepsilon) \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$$

  niin satunnaismuuttujien

  $$X_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

  muodostama jono *konvergoi stokastisesti* kohti satunnaismuuttujaa X suoraan stokastisen konvergenssin määritelmän perusteella.

Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet

Vahva suurten lukujen laki 1/2

- Olkoon

  $$X_i\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

  jono *riippumattomia* ja *samoin jakautuneita* satunnaismuuttujia, joilla on *sama* odotusarvo:

  $$\mathrm{E}(X_i) = \mu\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

- Määritellään satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *aritmeettinen keskiarvo*:

  $$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Vahva suurten lukujen laki 2/2

- Tällöin pätee **vahva suurten lukujen laki**:

  Satunnaismuuttujien X_1, X_2, X_3, … , X_n aritmeettisten keskiarvojen $\bar{X}_n = \Sigma X_i / n$ muodostama jono konvergoi **melkein varmasti** eli **todennäköisyydellä yksi** kohti satunnaismuuttujien yhteistä odotusarvoa μ:

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s.}} \mu$$

- Huomautus:

  Vahvan suurten lukujen lain todistus on vaativa ja sivuutetaan; sen sijaan todistamme seuraavassa *heikon suurten lukujen lain*.

Vahva suurten lukujen laki: Kommentteja

- *Vahva suurten lukujen laki* ilmaistaan usein sanoin seuraavasti:

  Samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien *aritmeettinen keskiarvo lähestyy muuttujien lukumäärän kasvaessa rajatta muuttujien yhteistä odotusarvoa melkein kaikkialla* eli se **otosavaruuden *S* osajoukko, jossa konvergenssia ei tapahdu on *nollamittainen***.

Heikko suurten lukujen laki 1/2

- Olkoon X_i , i = 1, 2, 3, … jono *riippumattomia* satunnaismuuttujia, joilla on *sama* odotusarvo ja varianssi:

  $$\mathrm{E}(X_i) = \mu \,,\ \mathrm{D}^2(X_i) = \sigma^2 \,,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

- Määritellään satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, … , n *aritmeettinen keskiarvo*:

  $$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Heikko suurten lukujen laki 2/2

- Tällöin pätee **heikko suurten lukujen laki**:

  Satunnaismuuttujien X_1, X_2, X_3, … , X_n aritmeettisten keskiarvojen $\bar{X}_n = \Sigma X_i / n$ muodostama jono konvergoi **stokastisesti** kohti satunnaismuuttujien yhteistä odotusarvoa μ:

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \mu$$

Heikko suurten lukujen laki: Todistus

- Olkoon X_i , $i = 1, 2, 3, \ldots$ jono *riippumattomia* satunnaismuuttujia, joilla on *sama* odotusarvo ja varianssi:

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu \, , \, \mathrm{D}^2(X_i) = \sigma^2 \, , \, i = 1, 2, 3, \ldots$$

- Määritellään satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *aritmeettinen keskiarvo*:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- *Tshebyshevin epäyhtälön* (ks. lukua **Jakaumien tunnusluvut**) mukaan

$$\Pr\left(\left|\bar{X}_n - \mu\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

- Koska epäyhtälön oikea puoli $\to 0$, kun $n \to \infty$, niin

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \mu$$

Heikko suurten lukujen laki: Kommentteja

- *Heikko suurten lukujen laki* ilmaistaan usein sanoin seuraavasti:

  Samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien *aritmeettinen keskiarvo lähestyy muuttujien lukumäärän kasvaessa muuttujien yhteistä odotusarvoa* sellaisella tavalla, että **poikkeamien todennäköisyys satunnais-muuttujien yhteisestä odotusarvosta tulee yhä pienemmäksi eli poikkeamat tulevat yhä *harvinaisemmiksi***.

Suurten lukujen lait: Kommentteja

- Suurten lukujen lakeja voidaan pitää matemaattisena formulointina **tilastollisen stabiliteetin** käsitteelle (ks. lukua **Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet**).
- Suurten lukujen lait koskevat satunnaismuuttujien **asymptoottista käyttäytymistä** samaan tapaan kuin **keskeinen raja-arvolause**.
- Vahva suurten lukujen laki *implikoi* heikon suurten lukujen lain.
- Suurten lukujen laeista on olemassa *yleisempiä muotoja*, joissa voidaan lieventää *samoinjakautuneisuus*- ja *riippumattomuusoletuksia*.

Suurten lukujen lait: Esimerkki 1/5

- Olkoon A otosavaruuden S jokin *tapahtuma* ja oletetaan, että

  $\Pr(A) = p$

- Tällöin

  $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A) = 1 - p = q$

- Määritellään *diskreetti satunnaismuuttuja* X:

$$X = \begin{cases} 1\,, \text{ jos } A \text{ tapahtuu} \\ 0, \text{ jos } A \text{ ei tapahdu} \end{cases}$$

- Satunnaismuuttujan X *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x) = p^x q^{1-x}\,,\ 0 < p < 1\,,\ q = 1 - p\,,\ x = 0{,}1$$

  joten satunnaismuuttuja X noudattaa *Bernoulli-jakaumaa* parametrilla p (ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**):

  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

  $\text{E}(X) = p$

Suurten lukujen lait: Esimerkki 2/5

- *Toistetaan* edellisellä kalvolla määriteltyä Bernoulli-koetta n kertaa ja oletetaan, että koetoistot ovat *riippumattomia*.
- Tarkastellaan tapahtuman A sattumista koetoistojen aikana.
- Oletuksien mukaan

$$\Pr(A) = p \ , \ \Pr(A^c) = 1 - p = q$$

- Määritellään *diskreetit satunnaismuuttujat* X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$:

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{, jos } A \text{ tapahtuu kokeessa } i \\ 0 \text{, jos } A \text{ ei tapahdu kokeessa } i \end{cases}$$

- Satunnaismuuttujat X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ ovat *riippumattomia* ja noudattavat *samaa* Bernoulli-jakaumaa Bernoulli(p):

$$X_1, X_2, \ldots , X_n \perp$$

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p),\ i = 1, 2, \ldots , n$$

$$\mathrm{E}(X_i) = p,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

Suurten lukujen lait: Esimerkki 3/5

- Olkoon

  $$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

  satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *summa*.
- Koska luku 1 esiintyy summassa $\sum X_i$ *täsmälleen* yhtä monta kertaa kuin tapahtuma A sattuu n:n koetoiston aikana, satunnaismuuttuja Y kuvaa tapahtuman A esiintymisten *frekvenssiä* eli lukumäärää n-kertaisessa Bernoulli-kokeessa.
- Satunnaismuuttuja Y noudattaa Binomijakaumaa parametrein n ja p (ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**):

  $$Y \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$

  $$\mathrm{E}(Y) = np$$

Suurten lukujen lait: Esimerkki 4/5

- Satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, … , n *aritmeettinen keskiarvo*

$$\bar{X}_n = \frac{Y}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

kuvaa tapahtuman A esiintymisten *suhteellista frekvenssiä* eli *suhteellista lukumäärää* n-kertaisessa Bernoulli-kokeessa.

- *Tilastotieteessä* satunnaismuuttujat X_i , i = 1, 2, … , n tulkitaan *havainnoiksi* saman Bernoulli-kokeen toistoista.
- Tällöin suhteelliselle frekvenssille Y/n käytetään tavallisesti merkintää

$$\hat{p}_n = \frac{f}{n}$$

jossa f on tapahtuman A havaittu frekvenssi, kun tarkastelun kohteena oleva satunnaisilmiö on toistunut n kertaa.

Suurten lukujen lait: Esimerkki 5/5

- *Vahvan suurten lukujen lain* mukaan suhteellinen frekvenssi $\hat{p}_n = f/n$ konvergoi *melkein varmasti* eli *todennäköisyydellä yksi* kohti tapahtuman A todennäköisyyttä p:

$$\hat{p}_n = f/n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s.}} p = \Pr(A)$$

- Koska vahva suurten lukujen laki *implikoi* heikon suurten lukujen lain, tiedämme, että tapahtuman A suhteellinen frekvenssi *konvergoi* myös *stokastisesti* kohti tapahtuman A todennäköisyyttä.
- Koska tapahtuman A havaittu suhteellinen frekvenssi $\hat{p}_n = f/n$ konvergoi kohti tapahtuman A todennäköisyyttä $\Pr(A) = p$, kun havaintojen X_i lukumäärä n kasvaa rajatta, sanomme, että *suhteellinen frekvenssi* **tarkentuu** *havaintojen lukumäärän kasvaessa kohden tapahtuman A todennäköisyyttä*.

Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet

Konvergenssikäsitteitä

Suurten lukujen lait

>> Keskeinen raja-arvolause

Keskeisen raja-arvolauseen seurauksia

Johdanto 1/2

- Olkoon X_i , i = 1, 2, … , n jono *riippumattomia*, *samaa normaalijakaumaa* N(μ, σ^2) *noudattavia satunnais-muuttujia*.
- Tällöin *satunnaismuuttujien* X_i *summa* Y_n on normaalinen:

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2)$$

- Kysymys:

  Mitä voidaan sanoa *riippumattomien*, *samaa jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakaumasta*, jos ko. satunnaismuuttujat *eivät noudata normaali-jakaumaa*?

Johdanto 2/2

- *Ei-normaalisten* satunnaismuuttujien summa *ei yleensä ole* normaalinen.
- Kuitenkin, jos yhteenlaskettavia on ”tarpeeksi paljon”, *satunnaismuuttujien summa on* (hyvin yleisin ehdoin) **approksimatiivisesti normaalinen**.
- Tämä on **keskeisen raja-arvolauseen** olennainen sisältö.
- Koska monia satunnaismuuttujia voidaan pitää *usean riippumattoman tekijän summana*, antaa keskeinen raja-arvolause selityksen *empiiriselle havainnolle* niiden normaalisuudesta.

Keskeisen raja-arvolauseen formulointi 1/3

- Olkoon X_i , i = 1, 2, 3, … jono *riippumattomia*, *samoin jakautuneita satunnaismuuttujia*, joiden odotusarvo ja varianssi ovat

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu \ , \ i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\mathrm{D}^2(X_i) = \sigma^2 \ , \ i = 1, 2, 3, \ldots$$

- Olkoon

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, … , *n summa*.

Keskeisen raja-arvolauseen formulointi 2/3

- Summan Y_n odotusarvo ja varianssi ovat

$$\mathrm{E}(Y_n) = n\mu$$

$$\mathrm{D}^2(Y_n) = n\sigma^2$$

- *Standardoidaan* summa Y_n :

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

- Annetaan $n \to \infty$
- Tällöin satunnaismuuttujan Z_n *jakauma lähestyy standardoitua normaalijakaumaa* N(0, 1).

Keskeisen raja-arvolauseen formulointi 3/3

- Siten **keskeinen raja-arvolause** sanoo, että

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le z \right) = \Phi(z)$$

  jossa Φ on *standardoidun normaalijakauman* N(0, 1) *kertymäfunktio*.
- Merkintä:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad {}_{a} \; \mathrm{N}(0,1)$$

Keskeinen raja-arvolause: Todistus 1/9

- Olkoon

  $$X_i\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

  jono *riippumattomia*, *samoin jakautuneita satunnaismuuttujia*.
- Oletetaan, että satunnaismuuttujilla X_i , $i = 1, 2, 3, \ldots$ on (yhteinen) *momenttiemäfunktio* (ks. lukua **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio**) jossakin origon ympäristössä.
- Olkoot satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, 3, \ldots$ odotusarvo ja varianssi

  $$\mathrm{E}(X_i) = \mu\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

  $$\mathrm{D}^2(X_i) = \sigma^2\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

Keskeinen raja-arvolause: Todistus 2/9

- Olkoon

  $$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

  satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, … , n *summa*.
- Summamuuttujan Y_n odotusarvo ja varianssi ovat

  $$\mathrm{E}(Y_n) = n\mu$$

  $$\mathrm{D}^2(Y_n) = n\sigma^2$$
- *Standardoidaan* summa Y_n :

  $$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$
- Standardoidun muuttujan Z_n odotusarvo ja varianssi ovat

  $$\mathrm{E}(Z_n) = 0$$

  $$\mathrm{D}^2(Z_n) = 1$$

Keskeinen raja-arvolause: Todistus 3/9

- Siirrytään tarkastelemaan *keskistettyjä satunnaismuuttujia*

$$T_i = X_i - \mu \ , \ i = 1, 2, 3 \ldots$$

- Satunnaismuuttujien T_i odotusarvo ja varianssi ovat

$$\mathrm{E}(T_i) = 0 \ , \ i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\mathrm{D}^2(T_i) = \sigma^2 \ , \ i = 1, 2, 3, \ldots$$

- Keskistettyjen muuttujien T_i avulla standardoitu muuttuja Z_n voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} Z_n &= \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \\ &= \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(T_1 + T_2 + \cdots + T_n) \end{aligned}$$

Keskeinen raja-arvolause: Todistus 4/9

- Satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, 3, … momenttiemäfunktion olemassaolosta jossakin origon ympäristössä seuraa keskitettyjen muuttujien

$$T_i = X_i - \mu \text{ , } i = 1, 2, 3 \ldots$$

momenttiemäfunktion olemassaolo jossakin origon ympäristössä.

- Olkoon

$$m(t) = \mathrm{E}(e^{tT_i})$$

satunnaismuuttujien T_i , i = 1, 2, 3, … yhteinen momenttiemäfunktio.

Keskeinen raja-arvolause: Todistus 5/9

- Koska *riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktio on summan tekijöiden momenttiemäfunktioiden tulo*, niin satunnaismuuttujan

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(T_1 + T_2 + \cdots + T_n)$$

momenttiemäfunktio $m_n(t)$ voidaan esittää muodossa

$$m_n(t) = \left[m\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n$$

jossa siis $m(t)$ on satunnaismuuttujien T_i , $i = 1, 2, 3, \ldots$ yhteinen momenttiemäfunktio.

Keskeinen raja-arvolause: Todistus 6/9

- Satunnaismuuttujien T_i , i = 1, 2, 3, … yhteisellä momenttiemäfunktiolla $m(t)$ on jossakin pisteen t = 0 ympäristössä voimassa sarjakehitelmä

$$m(t)=1+\alpha_1 t+\frac{\alpha_2}{2}t^2+t^2\eta(t)$$

jossa

$$\alpha_k=\mathrm{E}(T_i^k)\ ,\ k=1,2$$

on satunnaismuuttujien T_i , i = 1, 2, 3, … k. (origo-) momentti, k = 1, 2, ja $\eta(t) \to 0$, kun $t \to 0$.

- Koska

$$\alpha_1=\mathrm{E}(T_i)=0\ ,\ i=1,2,3,\ldots$$

$$\alpha_2=\mathrm{E}(T_i^2)=\mathrm{D}^2(T_i)=\sigma^2\ ,\ i=1,2,3,\ldots$$

niin

$$m(t)=1+\alpha_1 t+\frac{\alpha_2}{2}t^2+t^2\eta(t)=1+\frac{\sigma^2}{2}t^2+t^2\eta(t)$$

Keskeinen raja-arvolause: Todistus 7/9

- Sijoitetaan satunnaismuuttujien T_i , i = 1, 2, 3, … yhteisen momenttiemäfunktion $m(t)$ sarjakehitelmä

$$m(t) = 1 + \frac{\sigma^2}{2}t^2 + t^2\eta(t)$$

satunnaismuuttujan

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(T_1 + T_2 + \cdots + T_n)$$

momenttiemäfunktion lausekkeeseen

$$m_n(t) = \left[m\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n$$

Keskeinen raja-arvolause: Todistus 8/9

- Saamme sijoituksen tuloksena lausekkeen

$$m_n(t) = \left[1 + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 \eta\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

$$= \left[1 + \frac{1}{n}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{\sigma^2}\eta\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)\right]^n$$

jossa

$$\lim_{n\to\infty} \eta\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 0$$

jokaiselle kiinteälle t.

Keskeinen raja-arvolause: Todistus 9/9

- Eksponenttifunktion ominaisuuksien perusteella

$$m_n(t) = \left[1 + \frac{1}{n}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{\sigma^2}\eta\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{t^2/2}$$

- Koska

$$e^{t^2/2}$$

on *standardoidun normaalijakauman* N(0, 1) *momenttiemäfunktio*, satunnaismuuttujien

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

muodostama jono *konvergoi jakaumaltaan* eli *heikosti* kohti standardoitua normaalijakaumaa N(0, 1):

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}} Z \quad \mathrm{N}(0,1)$$

Kommentteja 1/3

- Keskeisen raja-arvolauseen mukaan usean satunnais-muuttujan *summa on* (*tietyin ehdoin*) *approksimatiivisesti normaalinen* (*lähes*) *riippumatta yhteenlaskettavien jakaumasta*.
- Huomautus:

  Yhteenlaskettavien ei tarvitse olla edes *jatkuvia*, vaan ne voivat olla jopa *diskreettejä*.

Kommentteja 2/3

- Approksimaation *hyvyys riippuu* yhteenlaskettavien satunnaismuuttujien lukumäärästä, niiden jakaumasta ja erityisesti niiden jakauman *vinoudesta*.
- Approksimaation *hyvyys paranee*, kun yhteenlaskettavien satunnaismuuttujien *lukumäärä kasvaa*.
- Jos yhteenlaskettavien satunnaismuuttujien jakauma on *symmetrinen*, approksimaatio on hyvä jo suhteellisen pienillä yhteenlaskettavien lukumäärillä.
- Jos yhteenlaskettavien satunnaismuuttujien jakauma on *epäsymmetrinen*, hyvä approksimaatio vaatii enemmän yhteenlaskettavia.

Kommentteja 3/3

- Keskeinen raja-arvolause koskee satunnaismuuttujien **asymptoottista käyttäytymistä** samaan tapaan kuin **suurten lukujen laki**.
- Keskeisessä raja-arvolauseessa esiintyvä *rajakäyttäytymisen muoto* on esimerkki **jakauma-konvergenssista** eli **heikosta konvergenssista**.
- Keskeisestä raja-arvolauseesta on olemassa *yleisempiä muotoja*, joissa lievennetään *samoinjakautuneisuus*- ja *riippumattomuusoletuksia*.

Aritmeettisen keskiarvon approksimatiivinen jakauma

- Keskeisestä raja-arvolauseesta seuraa:

  Riippumattomien samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ **aritmeettinen keskiarvo**

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

  on suurille (mutta äärellisille) *n approksimatiivisesti normaalinen parametreinaan* μ *ja* σ^2/n:

$$\bar{X}_n \quad {}_a \; \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet

Konvergenssikäsitteitä
Suurten lukujen lait
Keskeinen raja-arvolause
>> Keskeisen raja-arvolauseen seurauksia

De Moivren ja Laplacen raja-arvolause

- Olkoon $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ ja $q = 1 - p$.
- Siten

$$\mathrm{E}(X) = np$$

$$\mathrm{Var}(X) = npq$$

- *Keskeisen raja-arvolauseen* mukaan

$$\lim_{n \to +\infty} \Pr\left(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq z \right) = \Phi(z)$$

  jossa Φ on *standardoidun normaalijakauman* N(0, 1) *kertymäfunktio*.
- Tätä keskeisen raja-arvolauseen seurausta on tapana kutsuta **De Moivren ja Laplacen raja-arvolauseeksi**.

Binomitodennäköisyydet ja normaalijakauma 1/4

- De Moivren ja Laplacen raja-arvolauseen mukaan **binomijakaumaa**

  $$\mathrm{Bin}(n, p)$$

  voidaan suurille n **approksimoida normaalijakaumalla**

  $$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

  jossa

  $$\mu = np$$

  $$\sigma^2 = npq \,,\; q = 1 - p$$

Binomitodennäköisyydet ja normaalijakauma 2/4

- Jos siis

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$

niin De Moivren ja Laplacen raja-arvolauseen mukaan suurille n

$$\Pr(a < X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

jossa Φ on standardoidun normaalijakauman N(0, 1) kertymäfunktio.

Keskeisen raja-arvolauseen seurauksia
Binomitodennäköisyydet ja normaalijakauma 3/4

- Jos a ja b ovat kokonaislukuja, approksimaatio *on* hieman *parempi*, jos käytetään kaavaa
$$\Pr(a < X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$
- *Korjaustekijä* 1/2 perustuu siihen, että *diskreettiä* binomijakaumaa approksimoidaan *jatkuvalla* normaalijakaumalla.

Binomitodennäköisyydet ja normaalijakauma 4/4

- Jos annetaan $a \to -\infty$, saadaan approksimaatiotulos
$$\Pr(X \leq b) = F_X(b) \approx \Phi\left(\frac{b + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$
jossa F_X on *binomijakauman kertymäfunktio*.
- Jos $a = b$, saadaan approksimaatiotulos
$$\Pr(X = a) = f_X(a) \approx \Phi\left(\frac{a + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$
jossa f_X on *binomijakauman pistetodennäköisyysfunktio*.

Hypergeometrisen jakauman todennäköisyydet ja normaalijakauma 1/2

- *Hypergeometrinen jakauma*

  $$\mathrm{HyperGeom}(N, r, n)$$

  lähestyy perusjoukon koon N kasvaessa rajatta *binomi-jakaumaa*

  $$\mathrm{Bin}(n, p)$$

  jossa

  $$p = r/N$$

Hypergeometrisen jakauman todennäköisyydet ja normaalijakauma 2/2

- Siten **hypergeometrista jakaumaa**

  HyperGeom(N, r, n)

  voidaan suurille N **approksimoida normaalijakaumalla**

  N(μ, σ^2)

  jossa

$$\mu = n\frac{r}{N}$$

$$\sigma^2 = n\frac{r}{N}\left(1-\frac{r}{N}\right)$$

Poisson-jakauma ja normaalijakauma

- Olkoon $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.
- Siten

$$\mathrm{E}(X) = \lambda$$

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda$$

- *Keskeisen raja-arvolauseen* mukaan

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \Pr\left(\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le z \right) = \Phi(z)$$

jossa Φ on *standardoidun normaalijakauman* N(0, 1) *kertymäfunktio*.

Poisson-jakauman todennäköisyydet ja normaalijakauma 1/4

- Poisson-jakaumaa koskevan raja-arvolauseen mukaan **Poisson-jakaumaa**

  $$\text{Poisson}(\lambda)$$

  voidaan suurille λ **approksimoida normaalijakaumalla**

  $$\text{N}(\mu, \sigma^2)$$

  jossa

  $$\mu = \lambda$$

  $$\sigma^2 = \lambda$$

Keskeisen raja-arvolauseen seurauksia

Poisson-jakauman todennäköisyydet ja normaalijakauma 2/4

- Jos siis

$$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$$

niin Poisson-jakaumaa koskevan raja-arvolauseen mukaan suurille λ

$$\Pr(a < X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

jossa Φ on *standardoidun normaalijakauman* N(0, 1) *kertymäfunktio*.

Poisson-jakauman todennäköisyydet ja normaalijakauma 3/4

- Jos *a* ja *b* ovat kokonaislukuja, approksimaatio *on* hieman *parempi*, jos käytetään kaavaa

$$\Pr(a < X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b+1/2-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a-1/2-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

- *Korjaustekijä* 1/2 perustuu siihen, että *diskreettiä* Poisson-jakaumaa approksimoidaan *jatkuvalla* normaalijakaumalla.

Poisson-jakauman todennäköisyydet ja normaalijakauma 4/4

- Jos annetaan $a \to -\infty$, saadaan approksimaatiotulos

$$\Pr(X \leq b) = F_X(b) \approx \Phi\left(\frac{b + 1/2 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

jossa F_X on *Poisson-jakauman kertymäfunktio*.

- Jos $a = b$, saadaan approksimaatiotulos

$$\Pr(X = a) = f_X(a) \approx \Phi\left(\frac{a + 1/2 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 1/2 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

jossa f_X on *Poisson-jakauman pistetodennäköisyysfunktio*.