Ilkka Mellin

Todennäköisyyslaskenta

Osa 1: Todennäköisyys ja sen laskusäännöt
Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka

Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka

>> **Klassinen todennäköisyys**
Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat
Permutaatiot ja variaatiot
Kombinaatiot ja binomikertoimet
Multinomikertoimet

Klassinen todennäköisyys: Määritelmä

- Olkoon $S = \{s_1, s_2, \ldots , s_n\}$ *äärellinen otosavaruus*.
- Oletetaan, että

$$\Pr(s_i) = \frac{1}{n} \text{ , kaikille } i = 1, 2, \ldots , n$$

- Tällöin sanomme, että *alkeistapahtumat* s_i ovat **symmetrisiä**.
- Tarkastellaan *tapahtumaa* $A \subset S$, johon kuuluu k alkeis-tapahtumaa, joita kutsutaan tapahtumalle A *suotuisiksi*.
- Tällöin tapahtuman A **klassinen todennäköisyys** on

$$\Pr(A) = \frac{k}{n}$$

Klassinen todennäköisyys: Kommentteja

- *Uhkapelit* muodostavat klassisen todennäköisyyden määritelmän tärkeimmän sovelluskohteen.
- Useimmissa uhkapeleissä peliin liittyvät *alkeis-tapahtumien on oltava symmetrisiä pelin sääntöjen mukaan*.
- Pitääkö *oletus* alkeistapahtumien *symmetrisyydestä* paikkaansa myös *reaalimaailmassa*, on *empiirinen* kysymys.

Klassinen todennäköisyys
Esimerkki

- Heitetään noppaa.
- Tällöin otosavaruus on

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- Oletetaan, että noppa on *virheetön* eli

$$\Pr(i) = \frac{1}{6}\ \text{, kaikille } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- Olkoon tapahtuma

$$A = \{5, 6\} \subset S.$$

- Tapahtumalle A *suotuisien* alkeistapahtumien lukumäärä $k = 2$.
- Siten tapahtuman A todennäköisyys on

$$\Pr(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.333$$

Joukon alkioiden lukumäärän laskeminen ja kombinatoriikka

- Jos perusjoukko (otosavaruus) on kooltaan vähänkin isompi, perusjoukon ja sen osajoukkojen (tapahtumien) alkioiden (alkeistapahtumien) *lukumäärien laskemisessa* tarvitaan apuna jotakin *järjestelmällistä* menetelmää.
- Järjestelmällisen menetelmän joukon alkioiden lukumäärän laskemiseen tarjoaa **kombinatoriikaksi** kutsuttu matematiikan osa-alue.

Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka

Klassinen todennäköisyys

>> Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat

Permutaatiot ja variaatiot

Kombinaatiot ja binomikertoimet

Multinomikertoimet

Kombinatoriikan perusperiaatteet 1/2

- Kombinatoriikan kaavojen johtamiseen ja perustelemiseen tarvitaan usein vain kahta yksinkertaista periaatetta, joita sanotaan **kombinatoriikan perusperiaatteiksi**:

  (1) **Yhteenlaskuperiaate**

  (2) **Kertolaskuperiaate**

Kombinatoriikan perusperiaatteet 2/2

- Tarkastellaan **operaatioita** M ja N.
- Tehdään seuraavat oletukset:

  (1) Operaatio M voidaan suorittaa m eri tavalla.

  (2) Operaatio N voidaan suorittaa n eri tavalla.
- Operaatiot M ja N voidaan *yhdistää* uudeksi, **yhdistetyksi operaatioksi** seuraavilla tavoilla:

  (i) ”Suoritetaan *M tai N*”

  (ii) ”Suoritetaan *M ja N*”
- Kombinatoriikan perusperiaatteet liittyvät näiden kahden yhdistetyn operaation *suoritustapojen lukumäärien* laskemiseen.

Toisensa poissulkevat operaatiot ja yhteenlaskuperiaate

- Sanomme, että operaatiot M ja N ovat **toisensa poissulkevia**, jos operaatioita M ja N *ei voi* suorittaa yhtäaikaa eli samanaikaisesti.
- Olkoot operaatiot M ja N *toisensa poissulkevia*.
- Oletetaan lisäksi, että operaatio M voidaan suorittaa m eri tavalla ja operaatio N voidaan suorittaa n eri tavalla.
- Tällöin *yhdistetty operaatio*

  (i) ”Suoritetaan *M tai N*”

  voidaan suorittaa $m + n$ eri tavalla.

Riippumattomat operaatiot ja kertolaskuperiaate

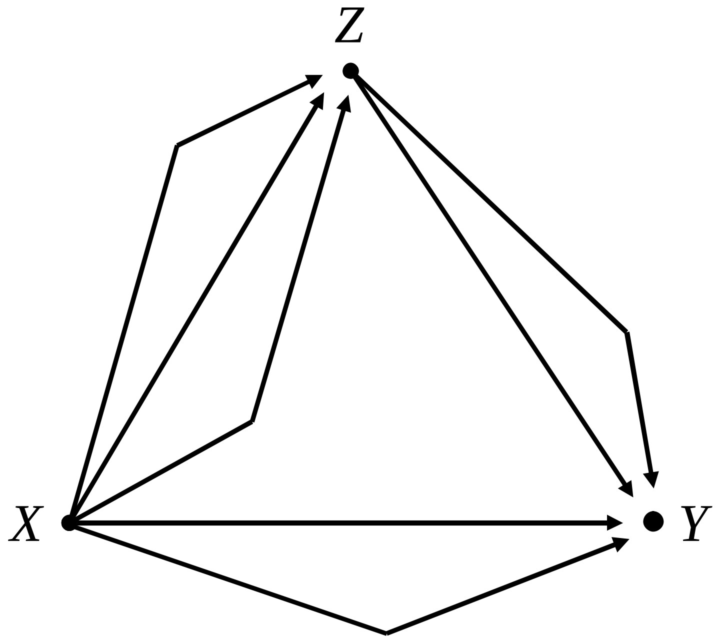
- Sanomme, että operaatiot M ja N ovat **riippumattomia**, jos se, mikä vaihtoehtoisista tavoista suorittaa operaatio M valitaan, *ei vaikuta* siihen, mikä vaihtoehtoisista tavoista suorittaa operaatio N valitaan ja kääntäen.
- Olkoot operaatiot M ja N *riippumattomia*.
- Oletetaan lisäksi, että operaatio M voidaan suorittaa m eri tavalla ja operaatio N voidaan suorittaa n eri tavalla.
- Tällöin *yhdistetty operaatio*

  (ii) ”Suoritetaan *M ja N*”

  voidaan suorittaa $m \times n$ eri tavalla.

Kombinatoriikan perusperiaatteet: Esimerkki 1/3

- Kaupunkien X ja Y välillä on 2 suoraa lentoa.
- X:stä Y:hyn pääsee myös kaupungin Z kautta:
  - (i) Kaupunkien X ja Z välillä on 3 lentoa.
  - (ii) Kaupunkien Z ja Y välillä on 2 lentoa.
- Oletetaan lisäksi, että lennot saa valita toisistaan *riippumatta*.
- *Kuinka monella eri tavalla* voimme lentää X:stä Y:hyn?

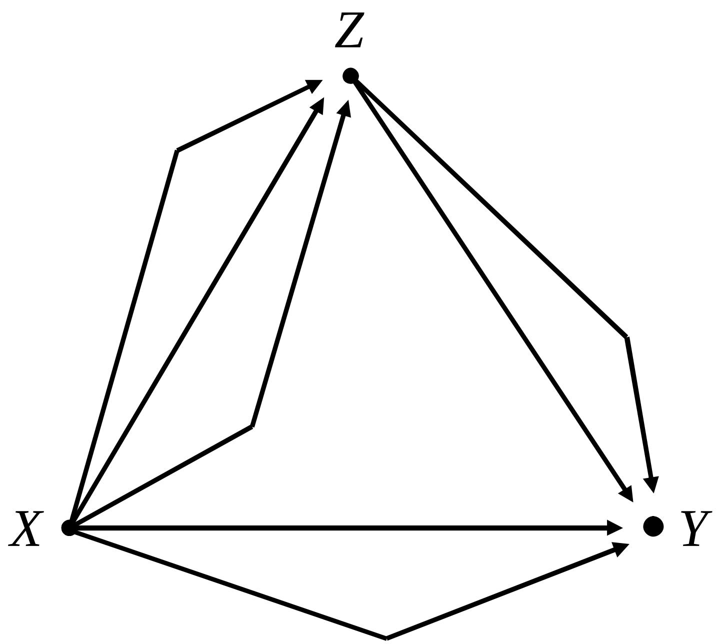


Kombinatoriikan perusperiaatteet: Esimerkki 2/3

- Koska lennot saa valita toisistaan *riippumatta*, Z:n kautta tapahtuvien erilaisten lentoyhdistelmien lukumäärän laskemiseen voidaan soveltaa kombinatoriikan *kertolasku-periaatetta*.
- Sen mukaan X:stä Y:hyn pääsee lentämään Z:n kautta

  $3\times2 = 6$

  eri tavalla.

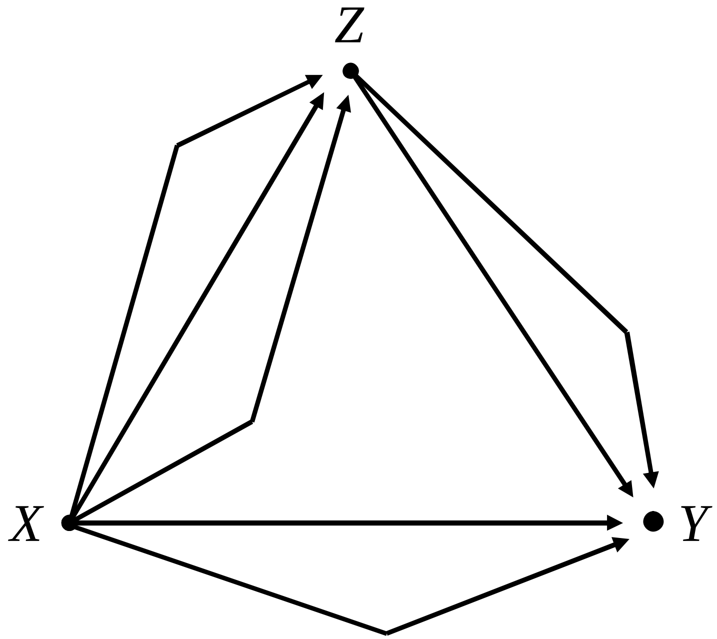


Kombinatoriikan perusperiaatteet: Esimerkki 3/3

- Koska 2 suoraa lentoa X:stä Y:hyn ja 6 eri tapaa lentää X:stä Y:hyn Z:n kautta ovat *toisensa poissulkevia*, lentovaihtoehtojen kokonaislukumäärä saadaan soveltamalla kombinatoriikan *yhteenlaskuperiaatetta*.
- Sen mukaan X:stä Y:hyn pääsee lentämään

  2 + 6 = 8

  eri tavalla.



Kombinatoriikan perusongelmat 1/2

- Olkoon

  $$S = \{s_1, s_2, \ldots , s_n\}$$

  äärellinen joukko, jonka (erilaisten) alkioiden lukumäärä on

  $$n = n_S = n(S)$$

  jossa $n_S = n(S)$ on *lukumääräfunktio*, joka kertoo joukon S (erilaisten) alkioiden lukumäärän.
- *Kombinatoriikan perusongelmat* liittyvät joukon S alkioiden muodostamien *osajonojen* ja *osajoukkojen* lukumäärien laskemiseen.

Kombinatoriikan perusongelmat 2/2

- **Kombinatoriikan perusongelmat**:

  (1a) **Kuinka monella erilaisella tavalla joukon *S* alkiot voidaan järjestää *jonoon*?**

  (1b) **Kuinka monella erilaisella tavalla joukon *S* alkioista voidaan muodostaa *k*:n alkion *osajono*?**

  (2) **Kuinka monella erilaisella tavalla joukon *S* alkioista voidaan muodostaa *k*:n alkion *osajoukko*?**

Joukko

- Palautetaan mieleen, että **joukko** on täysin määrätty, jos sen *alkiot* tunnetaan, jolloin jokaisesta oliosta voidaan sanoa onko se joukon alkio vai ei.
- Olkoot *äärellisen* joukon A (erilaiset) alkiot

$$a_1 , a_2 , \ldots , a_n$$

- Tällöin merkitään

$$A = \{a_1 , a_2 , \ldots , a_n\}$$

Joukkojen samuus

- Joukot A ja B ovat **samat**, jos niissä on täsmälleen samat alkiot eli

  $$A = B$$

  jos ja vain jos

  $$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

Jono

- Palautetaan mieleen, että **jono** on täysin määrätty, jos sen *alkiot* ja niiden *järjestys* tunnetaan.
- Olkoon a jono, jonka i. alkio on

$$a_i \ , \ i = 1, 2, \ldots , n$$

- Tällöin merkitään

$$a = (a_1 \ , a_2 \ , \ldots , a_n)$$

- 1-numeroisten ei-negatiivisisten kokonaislukujen muodostamia jonoja merkitään usein kirjoittamalla numerot peräkkäin ilman sulkumerkkejä ja pilkkuja kuten moninumeroisissa luvuissa.

  Esimerkki: 6491 = (6, 4, 9, 1)

Jonojen samuus

- Jonot $a = (a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$ ja $b = (b_1 , b_2 , \ldots , b_n)$ ovat **samat**, jos niissä on samat alkiot samassa järjestyksessä eli

  $$a = b$$

  jos ja vain jos

  $$a_i = b_i , i = 1, 2, \ldots , n$$

Joukko *vs* jono: Esimerkki

- *Joukot*

  $\{1, 2, 3\}$

  $\{1, 3, 2\}$

  $\{3, 1, 3, 2\}$

  ovat joukkoina samat:

  $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{3, 1, 3, 2\}$

- *Jonot*

  123

  132

  ovat eri jonoja:

  $(1, 2, 3) \neq (1, 3, 2)$

Joukon osajoukot: Esimerkki

- Olkoon

  $S = \{1, 2, 3\}$

- Kaikki joukon S alkioiden muodostamat *osajoukot*:

  Kolmen alkion osajoukot:

  $\{1, 2, 3\}$ 1 kpl

  Kahden alkion osajoukot:

  $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ 3 kpl

  Yhden alkion osajoukot:

  $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ 3 kpl

- *Kaikki* joukon S:n osajoukot:

  $\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \varnothing$ 8 kpl

Joukon osajonot: Esimerkki

- Olkoon

  $S = \{1, 2, 3\}$

- Kaikki joukon S alkioiden muodostamat *osajonot*:

  Kolmen alkion osajonot:

  123, 132, 213, 231, 312, 321 — 6 kpl

  Kahden alkion osajonot:

  12, 21, 13, 31, 23, 32 — 6 kpl

  Yhden alkion osajonot:

  1, 2, 3 — 3 kpl

Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka

Klassinen todennäköisyys
Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat
>> Permutaatiot ja variaatiot
Kombinaatiot ja binomikertoimet
Multinomikertoimet

Permutaatio

- Olkoon äärellisen joukon S (erilaisten) alkioiden lukumäärä

$$n = n(S)$$

- Mikä tahansa joukon S kaikkien alkioiden muodostama *jono* on joukon S alkioiden **permutaatio**.

Permutaatioiden lukumäärä

- Olkoon äärellisen joukon S (erilaisten) alkioiden lukumäärä $n = n(S)$.
- Tällöin joukon S alkioiden kaikkien mahdollisten *permutaatioiden lukumäärä* on

$$n! = n\times(n-1)\times \cdots \times 2\times 1$$

  jossa $n!$ on ns. *n-kertoma*.
- Tulos ratkaisee *kombinatoriikan perusongelman* (1a):

  Kuinka monella erilaisella tavalla joukon *S* alkiot voidaan järjestää *jonoon*?

Permutaatioiden lukumäärä: Perustelu 1/4

- Käytetään permutaatioiden lukumäärän kaavan johdossa apuna ns. **lokeromallia**.
- Olkoon joukon S alkioiden lukumäärä n.
- Oletetaan, että käytettävissä on *lokerikko*, jossa on n *lokeroa*.
- Asetetaan joukon S alkiot lokerikkoon yksi kerrallaan niin, että jokaiseen lokeroon tulee täsmälleen yksi alkio.

Lokerot $\rightarrow$	**1**	**2**	**3**	$\cdots$	$\boldsymbol{n-1}$	$\boldsymbol{n}$

Permutaatioiden lukumäärä: Perustelu 2/4

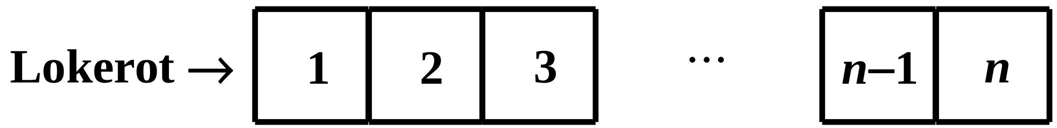
- Lokeroiden täyttäminen voidaan tehdä *vaiheittain*.
- Vaiheessa $k = 1, 2, \dots , n$:

  (i) Lokeroista on täytetty $(k - 1)$ kpl.

  (ii) Joukossa S on jäljellä $(n - k + 1)$ alkiota.

  (iii) Suoritetaan operaatio

  "Valitaan joukon S *jäljellä olevista alkioista yksi* lokeroon k"



Permutaatioiden lukumäärä: Perustelu 3/4

(iv) Kohdan (iii) operaatio voidaan suorittaa $(n - k + 1)$ eri tavalla:

$k = 1$: Joukosta S voidaan valita alkio n tavalla.

$k = 2$: Joukosta S voidaan valita alkio $(n - 1)$ tavalla.

…

$k = n - 1$: Joukosta S voidaan valita alkio 2 tavalla.

$k = n$: Joukosta S voidaan valita alkio 1 tavalla.

Lokerot →	**1**	**2**	**3**	…	$\boldsymbol{n-1}$	$\boldsymbol{n}$
Operaatioiden lkm →	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{n-1}$	$\boldsymbol{n-2}$		**2**	**1**

Permutaatioiden lukumäärä: Perustelu 4/4

- Tarkastellaan *yhdistettyä* operaatiota, jossa kaikki vaiheet $k = 1, 2, \ldots , n$ käydään läpi peräkkäin.
- Kysymys:

  Kuinka monella eri tavalla tämä *yhdistetty operaatio* voidaan suorittaa?
- Koska jokainen valintaoperaatio voidaan suorittaa *edellisistä vaiheista riippumatta*, kombinatoriikan *kertolaskuperiaatteesta* seuraa, että lokeroiden täyttäminen voidaan tehdä

$$n\times(n-1)\times \cdots \times 2\times 1 = n!$$

  eri tavalla.

Lokero →	**1**	**2**	**3**	…	***n*–1**	***n***
Operaatioiden lkm →	***n***	***n*–1**	***n*–2**		**2**	**1**

n-kertoma

- ***n*-kertoma** voidaan laskea seuraavalla *palautuskaavalla*:

  $n! = n\times(n-1)!\ ,\ n = 1, 2, \ldots$

- Määritellään:

  $0! = 1$

- Palautuskaavasta:

  $1! = 1\times0! = 1\times1 = 1$

  $2! = 2\times1! = 2\times1 = 2$

  $3! = 3\times2! = 3\times2\times1 = 6$

  $4! = 4\times3! = 4\times3\times2\times1 = 24$

  $5! = 5\times4! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$

  $\ldots$

Variaatio eli *k*-permutaatio

- Olkoon äärellisen joukon S (erilaisten) alkioiden lukumäärä $n = n(S)$.
- Mikä tahansa joukon S alkioiden *osajono*, jossa on k alkiota, on joukon S alkioiden **variaatio** eli ***k*-permutaatio**.
- Merkintä:

  $\mathrm{P}(n, k)$ = n:n alkion joukon k-permutaatioiden lukumäärä

- Jos $k = n$, saadaan joukon S alkioiden *permutaatio*.

Variaatioiden eli *k*-permutaatioiden lukumäärä

- Olkoon äärellisen joukon S (erilaisten) alkioiden lukumäärä $n = n(S)$.
- Tällöin joukon S alkioiden kaikkien mahdollisten *k-permutaatioiden lukumäärä* on

$$\mathrm{P}(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Tulos ratkaisee *kombinatoriikan perusongelman* (1b):

  Kuinka monella erilaisella tavalla joukon *S* alkioista voidaan muodostaa *k*:n alkion *osajono*?

Variaatioiden eli *k*-permutaatioiden lukumäärä: Huomautus

- Jos

  $$k = n$$

  kutistuu kombinatoriikan perusongelma (1b) perus-ongelmaksi (1a), jolloin

  $$\mathrm{P}(n, n) = n!$$

Variaatioiden eli *k*-permutaatioiden lukumäärä: Perustelu

- Olkoon joukon S alkioiden lukumäärä n.
- Joukon S kaikkien alkioiden permutaatioiden lukumäärää koskevasta todistuksesta nähdään, että n:stä alkiosta voidaan valita k alkiota k:hon *ensimmäiseen* lokeroon

$$n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)$$

  eri tavalla.
- Laventamalla saadaan

$$\begin{aligned} & n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1) \\ &= \frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)\times(n-k)!}{(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

Permutaatioiden lukumäärä: Esimerkki 1/4

- Kuinka monta erilaista 3-*numeroista kokonaislukua* voidaan muodostaa numeroista

  0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

  kun lukuja muodostettaessa merkitään ”etunollat” näkyviin.

  Esimerkkejä: 5 = 005 ja 19 = 019
- Kaikki näin saatavat 3-numeroiset kokonaisluvut ovat muotoa

  xyz

  olevia *jonoja*, joissa numerot x, y ja z valitaan joukosta

  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- Numeroiden x, y ja z valinta jonoon xyz voidaan tehdä *kahdella* eri *tavalla*:

  (i) Aikaisemmin valitun numeron *saa* valita uudelleen.

  (ii) Aikaisemmin valittua numeroa *ei saa* valita uudelleen.

Permutaatioiden lukumäärä: Esimerkki 2/4

- Tarkastellaan ensin tapausta

  (i) Aikaisemmin valitun numeron *saa* valita uudelleen.
- Käytetään apuna *lokeromallia*.
- Kokonaisluku *xyz* muodostuu kolmesta lokerosta, joista jokainen voidaan täyttää *toisistaan riippumatta* 10:llä erilaisella objektilla.
- *Kertolaskuperiaatteen* mukaan lokerot *xyz* voidaan täyttää

  $$10 \times 10 \times 10 = 1000$$

  eri tavalla.
- Siten erilaisia 3-numeroisia lukuja, *joissa saa olla samoja numeroita*, on 1000 kpl.
- Tulos on tietysti sopusoinnussa sen kanssa, että kokonaislukujen

  $$000, 001, 002, \ldots , 010, 011, 012, \ldots , 100, 101, 102, \ldots , 999$$

  lukumäärä on 1000.

Permutaatioiden lukumäärä: Esimerkki 3/4

- Tarkastellaan seuraavaksi tapausta

  (ii) Aikaisemmin valittua numeroa *ei saa* valita uudelleen.
- Käytetään apuna *lokeromallia*.
- Kokonaisluku *xyz* muodostuu kolmesta lokerosta, jotka voidaan täyttää vaiheittain seuraavalla tavalla:

  (1) 1. lokero *x* voidaan täyttää 10 erilaisella objektilla.

  (2) 2. lokero *y* voidaan täyttää *vaiheesta* (1) *riippumatta* 9 erilaisella objektilla, koska 1 objekteista on käytetty.

  (3) 3. lokero *z* voidaan täyttää *vaiheesta* (2) *riippumatta* 8 erilaisella objektilla, koska 2 objekteista on käytetty.
- *Kertolaskuperiaatteen* mukaan lokerot *xyz* voidaan täyttää

  $$10\times9\times8 = 720$$

  eri tavalla.

Permutaatioiden lukumäärä: Esimerkki 4/4

- Siten erilaisia 3-numeroisia lukuja, *joissa sama numero ei saa esiintyä kuin kerran*, on 720 kpl.
- Huomaa, että sama tulos saadaan huomaamalla, että tapauksessa (ii) on määrättävä joukon {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} 3-*permutaatioiden lukumäärä*.
- 3-permutaatioiden lukumääräksi saadaan

$$\mathrm{P}(10,3)=\frac{10!}{7!}=10\times 9\times 8=720$$

mikä tietysti yhtyy edellä saatuun tulokseen.

Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka

Klassinen todennäköisyys

Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat

Permutaatiot ja variaatiot

>> Kombinaatiot ja binomikertoimet

Multinomikertoimet

Kombinaatio

- Olkoon äärellisen joukon S alkioiden lukumäärä

$$n = n(S)$$

- Mikä tahansa joukon S *osajoukko*, jossa on k alkiota, muodostaa joukon S alkioiden *k alkiota sisältävän* **kombinaation**.
- Merkintä:

$\mathrm{C}(n, k) =$ n:n alkion joukon k alkiota sisältävien kombinaatioiden lukumäärä

Kombinaatioiden lukumäärä

- Olkoon joukon S alkioiden lukumäärä $n = n(S)$.
- Tällöin joukon S alkioiden kaikkien mahdollisten *k alkiota sisältävien kombinaatioiden lukumäärä* on

$$\mathrm{C}(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

jossa

$$n! = n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1$$

on ns. *n-kertoma*.

- Tulos ratkaisee *kombinatoriikan perusongelman* (2):

Kuinka monella erilaisella tavalla joukon *S* alkioista voidaan muodostaa *k*:n alkion *osajoukko*?

Kombinaatioiden lukumäärä ja binomikertoimet

- Kombinaatioiden lukumäärää C(n, k) merkitään usein ns. **binomikertoimella**

$$\binom{n}{k}$$

joka luetaan “n yli k:n”.

Kombinaatioiden lukumäärä: Perustelu 1/3

- Oletetaan, että joukossa S on $n(S) = n$ alkiota.
- Kombinaatioiden lukumäärää koskeva kaava voidaan perustella *määräämällä* joukon S alkioiden k alkiota sisältävien *permutaatioiden lukumäärä kahdella eri tavalla* ja merkitsemällä saadut tulokset yhtä suuriksi.
- Joukon S, jossa on n alkiota, k-permutaatioiden lukumäärä on aikaisemman tuloksen perusteella

$$\mathrm{P}(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Kombinaatioiden lukumäärä: Perustelu 2/3

- Toisaalta joukon *S* alkioiden permutointi voidaan tehdä *kahdessa vaiheessa*:

  (1) Valitaan joukon *S* alkioista *k* alkiota sisältävä osajoukko.

  Tämä voidaan tehdä tehdä C(*n*, *k*) eri tavalla, jossa C(*n*, *k*) on toistaiseksi tuntematon luku.

  (2) Järjestetään valitun osajoukon *k* alkiota jonoon.

  Tämä voidaan voidaan tehdä *k*! eri tavalla.
- Vaiheet (1) ja (2) voidaan suorittaa *toisistaan riippumatta*.

Kombinaatioiden lukumäärä: Perustelu 3/3

- Kombinatoriikan *kertolaskuperiaatteen* mukaan joukon S alkioiden k alkiota sisältävien *permutaatioiden lukumäärä* on siis

$$\mathrm{P}(n,k) = \mathrm{C}(n,k)k!$$

- Sijoittamalla tähän permutaatioiden lukumäärän lauseke

$$\mathrm{P}(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

saadaan yhtälö

$$\mathrm{C}(n,k)k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

josta C(n, k) ratkaisemalla saadaan haluttu tulos.

Kombinaatioiden lukumäärä: Esimerkki 1/3

- Edellä on käsitelty esimerkkiä, jossa tarkasteltiin 3-numeroisten lukujen muodostamista, kun käytössä on numerot

  0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Tällöin todettiin seuraavaa:

  (i) Jos sama numero *saa* esiintyä luvussa useamman kerran, erilaisia lukuja on 1000 kpl.

  (ii) Jos sama numero *ei saa* esiintyä luvussa useammin kuin kerran, erilaisia lukuja on 720 kpl.
- Kummassakin tapauksessa 3-numeroisia lukuja käsiteltiin numeroiden 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 muodostamina *jonoina*.
- Määrätään nyt kuinka monella eri tavalla numeroiden 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 muodostamasta joukosta

  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

  voidaan valita *osajoukko*, jossa on 3 alkiota.

Kombinaatioiden lukumäärä: Esimerkki 2/3

- Ratkaisun antaa binomikerroin C(10, 3):

$$C(10,3) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2} = 120$$

- Siten joukosta

  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

  voidaan valita 3:n alkion *osajoukko* 120:llä eri tavalla.

Kombinaatioiden lukumäärä: Esimerkki 3/3

- Huomaa asetettujen ehtojen vaikutus:
  - (i) Numeroista 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 voidaan muodostaa 1000 kpl 3-numeroisia lukuja, *joissa sama numero saa esiintyä useamman kerran*.
  - (ii) Joukosta {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} voidaan muodostaa 720 kpl 3:n numeron *osajonoja*.
  - (iii) Joukosta {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} voidaan muodostaa 120 kpl 3:n numeron *osajoukkoja*.

Permutaatiot *vs* kombinaatiot

- Joukon alkioiden *permutaatioissa* alkioiden *järjestyksellä on merkitystä*.
- Joukon alkioiden *kombinaatioissa* alkioiden *järjestyksellä ei ole merkitystä*.

Permutaatiot *vs* kombinaatiot: Esimerkkejä

- Opiskelijaravintolan ruokajono muodostaa siinä seisovien opiskelijoiden *permutaation*, jossa opiskelijoiden järjestyksellä on merkitystä jonottaville opiskelijoille.
- Lotossa oikean rivin antavat 7 voittonumeroa muodostavat 39:n numeron joukon erään 7:n alkion *kombinaation*, jossa numeroiden arvontajärjestyksellä ei ole merkitystä.

Binomikerroin

- Kerrointa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \mathrm{C}(n,k)$$

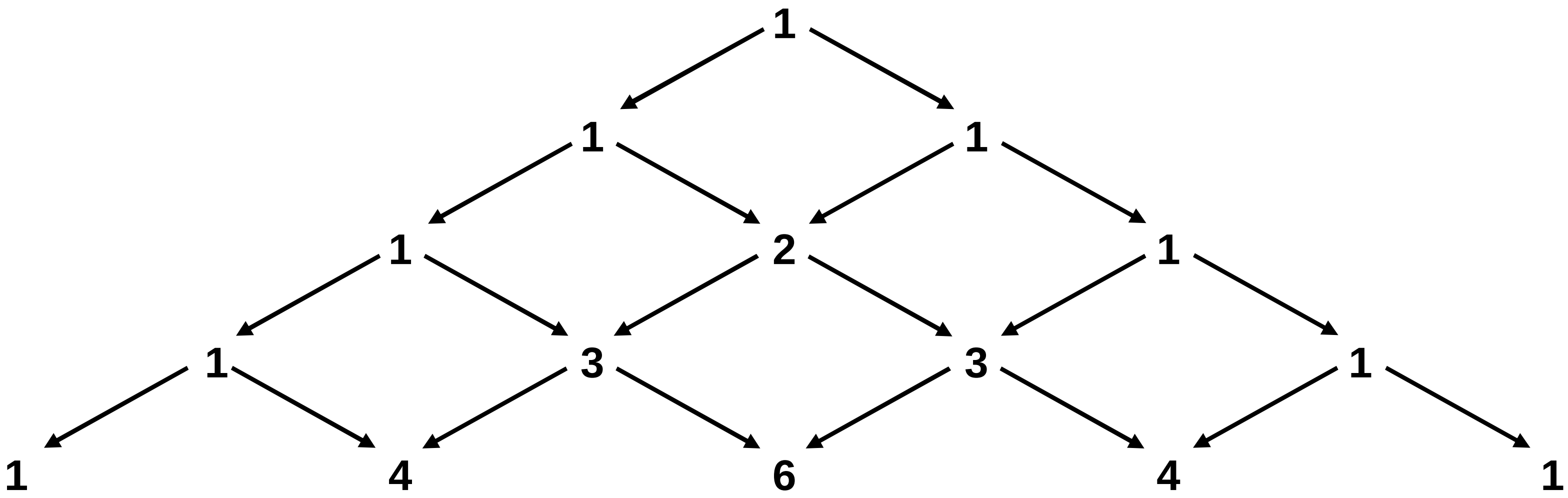
kutsutaan **binomikertoimeksi**.

- Binomikerroin luetaan “*n* yli *k*:n”.
- Koska 0! = 1, niin

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1 = \frac{n!}{n!0!} = \binom{n}{n}$$

Pascalin kolmio

- *Binomikertoimet* voidaan muodostaa käyttäen apuna ns. **Pascalin kolmiota** (5 ensimmäistä riviä):



- Lukuun ottamatta kolmion reunoilla olevia ykkösiä, Pascalin kolmion luvut saadaan laskemalla yhteen kaksi edeltävän rivin lukua nuolten suuntaan.

Pascalin kolmion muodostamissääntö

- Binomikertoimet

  $$C(n, 0), C(n, 1), C(n, 2), \ldots , C(n, n-1), C(n, n)$$

  muodostavat Pascalin kolmion (n + 1). rivin luvut.
- Siten Pascalin kolmion *muodostamissääntö* voidaan ilmaista binomikertoimien avulla seuraavasti:

  $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
- Sanoin:

  Pascalin kolmion n. rivin k. luku saadaan laskemalla yhteen (n – 1). rivin (k – 1). luku ja k. luku.

Pascalin kolmion muodostamissääntö: Perustelu

- Pascalin kolmion *muodostamissääntö* voidaan perustella seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}+\frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!}+\frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(k+(n-k))(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Pascalin kolmion symmetrisyys

- Pascalin kolmio on *symmetrinen* kolmion rivien keskikohdan suhteen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Pascalin kolmion symmetrisyys: Perustelu

- Pascalin kolmion *symmetrisyys* kolmion rivien keskikohdan suhteen voidaan perustella seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} \\ &= \binom{n}{n-k}\end{aligned}$$

Binomikaava

- **Binomikaavan** mukaan *n*:s potenssi binomille $x + y$ voidaan esittää muodossa

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots \\
&\quad + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n
\end{aligned}
$$

Binomikaava: Perustelu 1/3

- Kun binomi $x + y$ korotetaan potenssiin n, saadaan summalauseke, jonka kaikki termit ovat muotoa

$$x^{n-k}y^k \;, k = 0,1,2,\ldots,n$$

- *Yhdistetään* sellaiset termit, joissa esiintyy *sama* x:n potenssi ja *järjestetään* näin saadut termit x:n alenevien potenssien mukaiseen järjestykseen.
- Yhdistämisen tuloksena saadaan (n +1) termiä sisältävä summa-lauseke, jonka (k + 1). termi on muotoa

$$\mathrm{D}(n,k)x^k y^{n-k} \;, k = 0,1,2,\ldots,n$$

jossa D(n, k) on muotoa $x^k y^{n-k}$ olevien termien lukumäärä.

- Tehtävänä on määrätä D(n, k) eli se *kuinka monella eri tavalla muotoa* $x^k y^{n-k}$ *oleva termi syntyy* korotettaessa binomi $x + y$ potenssiin n.

Binomikaava: Perustelu 2/3

- Käytetään tehtävän ratkaisemisessa *lokeromallia*.
- Täytetään lokerikko, jossa on n lokeroa, tyyppiä x ja tyyppiä y olevilla objekteilla, kun tyyppiä x olevia objekteja on $(n-k)$ kpl ja tyyppiä y olevia objekteja on k kpl.
- Kuinka monella eri tavalla tämä täyttöoperaatio voidaan suorittaa?
- Huomaa, että tyyppiä y olevien objektien paikat *on määrätty* sen jälkeen, kun tyyppiä x olevat objektit on saatu sijoitetuksi lokeroihinsa.
- Siksi riittää tarkastella sitä, kuinka monella eri tavalla $(n-k)$ kpl tyyppiä x olevaa objektia voidaan sijoittaa lokerikkoon, jossa on n lokeroa.

Binomikaava: Perustelu 3/3

- Tämä tehtävä voidaan formuloida myös seuraavassa, vaihtoehtoisessa muodossa:

  Kuinka monella eri tavalla joukosta, jossa on n alkiota, voidaan valita *osajoukko*, jossa on $(n - k)$ alkiota?
- Tämä on selvästi *kombinatoriikan perusongelma* (2).
- Siten kysytyn lukumäärän $\mathrm{D}(n, k)$ antaa *binomikerroin*

$$\mathrm{C}(n,k) = \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Kombinaatiot ja binomikertoimet

Binomikaava: Esimerkki 1/2

- *Binomikaavan* mukaan 4. potenssi binomille *x* + *y* voidaan esittää muodossa

$$
\begin{aligned}
(x+y)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^{4-k} y^k \\
&= \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x y^3 + \binom{4}{4} y^4 \\
&= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4
\end{aligned}
$$

- Tulos on sopusoinnussa sen kanssa, että *Pascalin kolmion* 5. rivin luvut ovat

  1, 4, 6, 4, 1

Binomikaava: Esimerkki 2/2

- Tarkastellaan esimerkkinä, miten tyyppiä x^2y^2 olevat termit syntyvät.
- Kaikki mahdolliset muotoa x^2y^2 olevat tulot ovat

$$\begin{array}{ccc} xxyy & xyxy & xyyx \\ yxxy & yxyx & yyxx \end{array}$$

- Tuloja on siis 6 kappaletta.
- Koska tässä $n = 4$ ja $k = 2$, binomikertoimen kaavasta saadaan tämän tuloksen kanssa yhtäpitävästi

$$\mathrm{C}(4,2) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1} = 6$$

Osajoukkojen lukumäärä

- Olkoon joukon S alkioiden lukumäärä $n = n(S)$.
- Joukon S *osajoukkojen lukumäärä* on

$$2^n$$

- Lukumäärässä ovat mukana:

(1) Tyhjä joukko $\emptyset$
(2) Kaikki *yhden* alkion osajoukot
(3) Kaikki *kahden* alkion osajoukot
(4) Kaikki *kolmen* alkion osajoukot

…

(n) Kaikki (n – 1):n alkion osajoukot
(n + 1) Joukko S

Osajoukkojen lukumäärä: Perustelu 1/2

- Olkoon joukon S alkioiden lukumäärä $n = n(S)$.
- Joukolla S on k alkiota sisältävien kombinaatioiden lukumäärää koskevan tuloksen mukaan

$$\mathrm{C}(n,k) = \binom{n}{k}$$

osajoukkoa, jossa on k alkiota, $k = 0, 1, 2, \ldots , n$.
- Joukon S *osajoukkojen kokonaislukumäärä* N saadaan laskemalla kaikki binomikertoimet $\mathrm{C}(n, k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots , n$ yhteen:

$$N = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

- Toisaalta *binomikaavasta* saadaan sijoittamalla $x = y = 1$:

$$(1+1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Osajoukkojen lukumäärä: Perustelu 2/2

- Yhdistämällä nämä tulokset saadaan joukon S, jossa on $n = n(S)$ alkiota, kaikkien osajoukkojen lukumääräksi

$$N = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

jossa binomikerroin

$$\binom{n}{k}$$

kertoo joukon S sellaisten osajoukkojen lukumäärän, joissa on k alkiota, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Kombinatorisia laskutoimituksia: Esimerkki 1

- Lotossa 1 ruudukko lototaan valitsemalla 7 numeroa 39:stä.
- Montako erilaista lottoruudukkoa on olemassa?
- Toinen muotoilu:

  Kuinka monta erilaista 7:n alkion osajoukkoa voidaan valita 39 erilaisen alkion joukosta?
- Vastauksen antaa *kombinaatioiden lukumäärää* koskeva tulos:

$$\binom{39}{7} = \frac{39!}{7!32!} = 15\,380\,937$$

Kombinatorisia laskutoimituksia: Esimerkki 2

- Montako sellaista lottoruudukkoa on olemassa, joissa on *täsmälleen* 5 oikein?
- 5 oikein saadaan, jos on valittu 5 oikeata numeroa 7 oikean numeron joukosta ja 2 väärää numeroa 32 väärän numeron joukosta.
- Valinnat voidaan tehdä *toisistaan riippumatta*.
- *Kertolaskuperiaatteen* mukaan 5 oikein sisältävien rivien lukumäärä on

$$\binom{7}{5}\binom{32}{2} = \frac{7!}{5!2!} \times \frac{32!}{2!30!} = 21 \times 496 = 10\ 416$$

Kombinatorisia laskutoimituksia: Esimerkki 3

Korttipelit: *pokeri*

- Montako erilaista 5 kortin kättä on olemassa?
- Kombinaatioiden lukumäärää koskevan tuloksen mukaan:

$$\binom{52}{5} = 2\,598\,960$$

Korttipelit: *bridge*

- Montako erilaista 13 kortin kättä on olemassa?
- Kombinaatioiden lukumäärää koskevan tuloksen mukaan:

$$\binom{52}{13} = 635\,013\,559\,600$$

Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka

Klassinen todennäköisyys

Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat

Permutaatiot ja variaatiot

Kombinaatiot ja binomikertoimet

>> Multinomikertoimet

Multinomikerroin 1/2

- Olkoon äärellisen joukon S alkioiden lukumäärä $n = n(S)$.
- Oletetaan, että positiiviset kokonaisluvut

  $$n_i \,,\; i = 1, 2, \ldots , k$$

  toteuttavat ehdon

  $$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

- *Ositetaan* joukko S *pistevieraisiin* osajoukkoihin

  $$A_i \,,\; i = 1, 2, \ldots , k$$

  siten, että joukossa A_i on $n(A_i) = n_i$ alkiota.
- *Kuinka monella tavalla* joukko S voidaan osittaa piste-vieraisiin osajoukkoihin niin, että osajoukkojen alkioiden lukumäärät toteuttavat ym. ehdot?

Multinomikerroin 2/2

- Joukko *S*, jossa on $n = n(S)$ alkiota, voidaan *osittaa*

$$\begin{pmatrix} & n & & \\ n_1 & n_2 & \cdots & n_k \end{pmatrix} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

tavalla *pistevieraisiin osajoukkoihin* A_i , $i = 1, 2, \ldots , k$, joiden alkioiden lukumäärät toteuttavat ehdot:

(i) $n(A_i) = n_i$, $i = 1, 2, \ldots , k$

(ii) $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

- Lukumäärän antavaa lauseketta kutsutaan **multinomi-kertoimeksi**.

Multinomikerroin: Kommentteja

- Epätyhjät joukot $A_i \subset S$, $i = 1, 2, \ldots, k$ muodostavat joukon S **osituksen**, jos

$$S = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \quad \text{ja} \quad A_i \cap A_j = \varnothing \text{, kun } i \neq j$$

- *Multinomikerroin* kertoo *kuinka monella eri tavalla* joukko S, jossa on n alkiota, voidaan *osittaa* pistevieraisiin osajoukkoihin A_i , $i = 1, 2, \ldots, k$ niin, että osajoukossa A_i on n_i alkiota ja

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

Multinomikerroin: Kommentteja

- Multinomikertoimet ovat kertoimina *multinomin*

  $$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$$

  kehityskaavassa tuloissa

  $$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

  joissa siis

  $$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

- *Binomikerroin* saadaan multinomikertoimen erikoistapauksena, kun $k = 2$.

Multinomikerroin: 1. esimerkki 1/2

- Sanassa *kasa* on 4 kirjainta, joiden joukossa on 3 *erilaista* kirjainta:

k	1 kpl
a	2 kpl
s	1 kpl

- Kuinka monta *erilaista* neljän kirjaimen mittaista ”sanaa” voidaan muodostaa permutoimalla kirjaimia *k*, *a*, *a* ja *s*?
- Erilaisten sanojen lukumäärän antaa *multinomikerroin*

$$\begin{pmatrix} & 4 & \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{4!}{1!2!1!} = 12$$

Multinomikerroin: 1. esimerkki 2/2

- *Tässä tapauksessa* erilaiset sanat on helppo *luetella*:

  a-alkuiset sanat:

  aaks *aask* *akas* *aksa* *asak* *aska*

  k-alkuiset sanat:

  kaas *kasa* *ksaa*

  s-alkuiset sanat

  saak *saka* *skaa*

- Sanoja on todellakin 12 kpl kuten edellä todettiin.

Multinomikerroin: 2. esimerkki

Korttipeli: *pokeri*

- Oletetaan, että peliin osallistuu 4 pelaajaa.
- Jaetaan 5 korttia jokaiselle pelaajalle.
- Kuinka monta erilaista jakoa on olemassa?
- Korttipakka (52 kortin pakka) jaetaan siis 5 osaan, joissa on 5, 5, 5, 5 ja 32 korttia.
- Erilaisten jakojen lukumäärän antaa *multinomikerroin*

$$\binom{52}{5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 32} = \frac{52!}{5!5!5!5!32!} = 1.47 \times 10^{24}$$