
Ilkka Mellin
Todennäköisyyslaskenta

**Osa 2: Satunnaismuuttujat ja
todennäköisyysjakaumat**
**Momenttiemäfunktio ja
karakteristinen funktio**

Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio

>> Momenttiemäfunktio

Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

Jatkuvien jakaumien momenttiemäfunktioita

Karakteristinen funktio

Momenttiemäfunktion määritelmä

- Olkoon X satunnaismuuttuja.

- Oletetaan, että odotusarvo

$$m_X(t) = E(e^{tX})$$

on olemassa kaikille

$$t \in (-h, +h)$$

jossa $h > 0$ on vakio.

- Tällöin funktiota $m_X(t)$ kutsutaan satunnaismuuttujan X ja sen jakauman **momenttiemäfunktiksi** eli **momentit generoivaksi funktioksi (mgf)**.

Momenttiemäfunktio

Momenttiemäfunktion määritelmä:

Kommentteja 1/2

- Satunnaismuuttujan momenttiemäfunktio eli momentit generoiva funktio *ei välttämättä ole olemassa*.
- Momenttiemäfunktion

$$m_X(t) = E(e^{tX})$$

olemassaolo tarkoittaa sitä, että odotusarvo

$$E(e^{tX})$$

on äärellinen.

Momenttiemäfunktio

Momenttiemäfunktion määritelmä:

Kommentteja 2/2

- Satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio

$$m_X(t) = E(e^{tX})$$

on *argumentin t funktio*.

- Jos satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio $m_X(t)$ on olemassa, niin

$$m_X(0) = E(e^0) = E(1) = 1$$

Momenttiemäfunktio

Diskreettien satunnaismuuttujien momenttiemäfunktio

- Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja, jonka pistetodennäköisyysfunktio on

$$f(x) = \Pr(X = x)$$

- Jos satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio on olemassa, niin se saadaan kaavalla

$$m_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f(x)$$

Momenttiemäfunktio

Jatkuvien satunnaismuuttujien momenttiemäfunktio

- Olkoon X jatkuva satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on

$$f(x)$$

- Jos satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio on olemassa, niin se saadaan kaavalla

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

Momenttiemäfunktion yksikäsitteisyys

- Jos satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio

$$m_X(t) = E(e^{tX})$$

on olemassa jossakin pisteen $t = 0$ ympäristössä, **se on yksikäsitteinen ja määrää täysin satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauman.**

- Tämä merkitsee seuraavaa:

Jos satunnaismuuttujilla U ja V on *sama momenttiemäfunktio*, satunnaismuuttujat U ja V noudattavat *samaa todennäköisyysjakaumaa*.

Momenttiemäfunktion yksikäsitteisyys: Seuraus 1/2

- Momenttiemäfunktion *yksikäsitteisyyttä* käytetään usein hyväksi todennäköisyyslaskennan ja matemaattisen tilastotieteen lauseiden todistuksissa seuraavassa tilanteessa:

Tehtävänä on selvittää, *mikä on satunnaismuuttujan U jakauma.*

Momenttiemäfunktio

Momenttiemäfunktion yksikäsitteisyys: Seuraus 2/2

- Oletetaan, että voimme todistaa, että satunnaismuuttujan U momenttiemäfunktio

$$m_U(t)$$

yhtyy pisteen $t = 0$ ympäristössä satunnaismuuttujan V momenttiemäfunktion

$$m_V(t)$$

jonka todennäköisyysjakauma *tunnetaan*.

- Tällöin momenttiemäfunktion yksikäsitteisyydestä seuraa, että **satunnaismuuttuja U noudattaa samaa jakaumaa kuin satunnaismuuttuja V .**

Momenttiemäfunktio

Momenttiemäfunktio ja satunnaismuuttujan momentit

- Olkoon

$$m_X(t) = E(e^{tX})$$

satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio eli momentit generoiva funktio.

- Momentit generoivalla funktiolla $m_X(t)$ on *kaikkien kertalukujen derivaatat* pisteessä $t = 0$ ja

$$\left. \frac{d^k m_X(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = E(X^k) = \alpha_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

jossa

$$\alpha_k = E(X^k)$$

on satunnaismuuttujan X **k . (origo-) momentti.**

Momenttiemäfunktio

Momenttiemäfunktio ja satunnaismuuttujan momentit: Perustelu

- Olkoon

$$m_X(t) = E(e^{tX})$$

satunnaismuuttujan X momentit generoiva funktio.

- Tällöin

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^k m_X(t)}{dt^k} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d^k}{dt^k} E(e^{tX}) \right|_{t=0} \\ &= E \left(\left. \frac{d^k}{dt^k} e^{tX} \right) \right|_{t=0} \\ &= E(X^k e^{tX}) \Big|_{t=0} \\ &= E(X^k) \\ &= \alpha_k \end{aligned}$$

Momenttiemäfunktio

Momenttiemäfunktio ja satunnaismuuttujan momenttien määrääminen

- Satunnaismuuttujan ja sen jakauman momentit voidaan *johtaa kätevästi* käyttämällä hyväksi jakauman momentit generoivan funktion derivaattoja; ks. edellisiä kalvoja.

Momenttiemäfunktio ja satunnaismuuttujan odotusarvo ja varianssi

- Satunnaismuuttujan X **odotusarvo** μ , **2. momentti** α_2 ja **varianssi** σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = \alpha_1 = E(X) = \left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \left. \frac{d^2m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0}$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

Momenttiemäfunktio

Momenttiemäfunktion Taylorin sarjakehitelmä

- Olkoon

$$m_X(t) = E(e^{tX})$$

satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio.

- Momenttiemäfunktio $m_X(t)$ voidaan kehittää **Taylorin sarjaksi**

$$m_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \alpha_k$$

jossa

$$\alpha_k = E(X^k)$$

on satunnaismuuttujan X k . *momentti*.

Momenttiemäfunktio

Momenttiemäfunktion Taylorin sarjakehitelmä: Johto

- Olkoon

$$m_X(t) = E(e^{tX})$$

satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio.

- Kehitetään eksponenttifunktio e^{tX} Taylorin sarjaksi:

$$e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!}$$

- Ottamalla tästä sarjakehitelmästä odotusarvo saadaan:

$$\begin{aligned} m_X(t) = E(e^{tX}) &= E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \alpha_k \end{aligned}$$

Momenttiemäfunktio

Momenttiemäfunktion Taylorin sarjakehitelmä ja satunnaismuuttujan momentit

- Olkoon

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} E(X^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \alpha_j$$

satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktion *Taylorin sarjakehitelmä*.

- Derivoidaan tämä sarjakehitelmä termeittäin t :n suhteen:

$$\frac{d^k m_X(t)}{dt^k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} E(X^{j+k}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \alpha_{j+k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- Valitsemalla tässä $t = 0$, saadaan tulos:

$$\left. \frac{d^k m_X(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = E(X^k) = \alpha_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Momenttiemäfunktio

Satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen momenttiemäfunktio

- Olkoon

$$m_X(t) = E(e^{tX})$$

satunnaismuuttujan X *momenttiemäfunktio*.

- Olkoon

$$Y = a + bX$$

jossa a ja b ovat ei-satunnaisia vakioita.

- Satunnaismuuttujan Y *momenttiemäfunktio* on

$$m_Y(t) = e^{at}m_X(bt)$$

- Erityisesti, jos $a = 0$, niin

$$m_Y(t) = m_X(bt)$$

Momenttiemäfunktio

Satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen momenttiemäfunktio: Perustelu

- Olkoon satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio

$$m_X(t) = E[\exp(tX)]$$

ja olkoon

$$Y = a + bX$$

jossa a ja b ovat ei-satunnaisia vakio.

- Tällöin satunnaismuuttujan Y momenttiemäfunktio on muotoa

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E[\exp(tY)] \\ &= E[\exp(t(a + bX))] \\ &= E[\exp(ta) \exp(tbX)] \\ &= \exp(at) E[\exp((bt)X)] \\ &= \exp(at) m_X(bt) \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktio

- Olkoot

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden *momenttiemäfunktiot* ovat

$$m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t)$$

- Tällöin **summan**

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

momenttiemäfunktio on satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_n momenttiemäfunktioiden *tulo*:

$$m_X(t) = m_1(t)m_2(t) \cdots m_n(t)$$

Momenttiemäfunktio

Satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktio: Perustelu 1/2

- Olkoot

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden *momenttiemäfunktiot* ovat

$$m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t)$$

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

- Käytämme hyväksi sitä, että *riippumattomien satunnaismuuttujien tulon odotusarvo on tulon tekijöiden odotusarvojen tulo* (ks. lukua **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja jakaumat**).

Momenttiemäfunktio

Satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktio: Perustelu 2/2

- Siten

$$\begin{aligned}m_X(t) &= E[\exp(tX)] \\&= E[\exp(t(X_1 + X_2 + L + X_n))] \\&= E[\exp(tX_1 + tX_2 + L + tX_n)] \\&= E[\exp(tX_1)\exp(tX_2)L \exp(tX_n)] \\&= E[\exp(tX_1)]E[\exp(tX_2)]L E[\exp(tX_n)] \\&= m_{X_1}(t)m_{X_2}(t)L m_{X_n}(t)\end{aligned}$$

Momenttiemäfunktio

Samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktio

- Olkoot

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden momenttiemäfunktio on

$$m(t)$$

- Tällöin **summan**

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

momenttiemäfunktio on muotoa:

$$m_X(t) = [m(t)]^n$$

Momenttiemäfunktio

Samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktio: Perustelu

- Olkoot

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden *momenttiemäfunktio* on

$$m(t)$$

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

- Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktiota koskevasta yleisestä tuloksesta seuraa välittömästi, että

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E[\exp(tX)] \\ &= m(t)m(t)\dots m(t) \quad (n \text{ kpl}) \\ &= [m(t)]^n \end{aligned}$$

Momenttiemäfunktio

Samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien aritmeettisen keskiarvon mgf

- Olkoot

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden momenttiemäfunktio on

$$m(t)$$

- Tällöin **aritmeettisen keskiarvon**

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

momenttiemäfunktio on muotoa:

$$m_{\bar{X}}(t) = \left[m\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n$$

Momenttiemäfunktio

Samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien aritmeettisen keskiarvon mgf: Perustelu 1/2

- Olkoot

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden momenttiemäfunktio on

$$m(t)$$

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Momenttiemäfunktio

Samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien aritmeettisen keskiarvon mgf: Perustelu 2/2

- Koska

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \dots + \frac{X_n}{n}$$

riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktiota koskevasta yleisestä tuloksesta ja satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen momenttiemäfunktiota koskevasta tuloksesta seuraa, että

$$m_{\bar{X}}(t) = [m(t/n)]^n$$

Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio

Momenttiemäfunktio

>> Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

Jatkuvien jakaumien momenttiemäfunktioita

Karakteristinen funktio

Diskreettejä todennäköisyysjakaumia 1/2

- Tarkastelemme seuraavien *diskreettien todennäköisyysjakaumien momenttiemäfunktioita* eli **momentit generoivia funktioita**:
 - **Diskreetti tasainen jakauma**
 - **Bernoulli-jakauma**
 - **Binomijakauma**
 - **Geometrinen jakauma**
 - **Negatiivinen binomijakauma**
 - **Poisson-jakauma**
- *Lisätietoja* diskreeteistä todennäköisyysjakaumista: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.

Diskreettejä todennäköisyysjakaumia 2/2

- Jokaisen tarkasteltavan jakauman **momenttiemäfunktiolle** esitetään *johto*.
- Johdettua momenttiemäfunktioita sovelletaan jakauman **odotusarvon, 2. momentin ja varianssin määrittämiseen**.

Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

Diskreetti tasainen jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **diskreettiä tasaista jakaumaa**.
- Tällöin sen *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{1}{n}, \quad x = x_k$$
$$k = 1, 2, \dots, n$$

jossa $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ on reaaliakselin *erillisten* pisteiden muodostama joukko.

- Diskreetin tasaisen jakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{tx_k}$$

Diskreetti tasainen jakauma: Momenttiemäfunktion johto

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *diskreettiä tasaista jakaumaa*, niin sen *momenttiemäfunktio* on

$$\begin{aligned}m_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f(x) \\ &= \sum_{k=1}^n e^{tx_k} f(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^n e^{tx_k} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{tx_k}\end{aligned}$$

Diskreetti tasainen jakauma: Odotusarvo ja varianssi 1/2

- Diskreetin tasaisen jakauman *momenttiemäfunktio* on

$$m_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{tx_k}$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k e^{tx_k} \Big|_{t=0} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 e^{tx_k} \Big|_{t=0} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2$$

Diskreetti tasainen jakauma: Odotusarvo ja varianssi 2/2

- Siten diskreetin tasaisen jakauman *odotusarvo* μ , *2. momentti* α_2 ja *varianssi* σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = E(X) = \alpha_1 = \left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \bar{x}$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \text{Var}(X) &= \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \end{aligned}$$

Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

Bernoulli-jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **Bernoulli-jakaumaa** $\text{Ber}(p)$.
- Tällöin sen *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x) = p^x q^{1-x}, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p$$
$$x = 0, 1$$

- Bernoulli-jakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = q + pe^t$$

Bernoulli-jakauma: Momenttiemäfunktion johto

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *Bernoulli-jakaumaa* $\text{Ber}(p)$, niin sen *momenttiemäfunktio* on

$$\begin{aligned}m_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f(x) \\ &= e^{t \times 0} \times \Pr(X = 0) + e^{t \times 1} \times \Pr(X = 1) \\ &= q + pe^t\end{aligned}$$

Bernoulli-jakauma: Odotusarvo ja varianssi 1/2

- Bernoulli-jakauman $\text{Ber}(p)$ *momenttiemäfunktio* on

$$m_X(t) = q + pe^t$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = pe^t \Big|_{t=0} = p$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left. \frac{d^2m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = pe^t \Big|_{t=0} = p$$

Bernoulli-jakauma:

Odotusarvo ja varianssi 2/2

- Siten Bernoulli-jakauman $\text{Ber}(p)$ *odotusarvo* μ , *2. momentti* α_2 ja *varianssi* σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = E(X) = \alpha_1 = \left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = p$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = p$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \text{Var}(X) &= \alpha_2 - \alpha_1^2 = p - p^2 \\ &= pq \end{aligned}$$

Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

Binomijakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **binomijakaumaa** $\text{Bin}(n, p)$.
- Tällöin sen *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p$$
$$x = 0, 1, 2, \dots, n$$

- Binomijakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = (q + pe^t)^n$$

Binomijakauma: Momenttiemäfunktion johto 1

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *binomijakaumaa* $\text{Bin}(n, p)$, niin sen *momenttiemäfunktio* on

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f(x) \\ &= \sum_{x=0}^n e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x} \\ &= (q + pe^t)^n \end{aligned}$$

Binomijakauma: Momenttiemäfunktion johto 2

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *binomijakaumaa* $\text{Bin}(n, p)$, niin se voidaan esittää *riippumattomien, samaa Bernoulli-jakaumaa* $\text{Ber}(p)$ noudattavien satunnaismuuttujien

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

summana:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

- Koska *riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktio on summan tekijöiden momenttiemäfunktioiden tulo* (ks. kappaletta Momenttiemäfunktio), niin

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E(e^{tX}) = m_1(t) \times m_2(t) \times \dots \times m_n(t) \\ &= (q + pe^t) \times (q + pe^t) \times \dots \times (q + pe^t) \\ &= (q + pe^t)^n \end{aligned}$$

Binomijakauma: Odotusarvo ja varianssi 1/2

- Binomijakauman $\text{Bin}(n, p)$ momenttiemäfunktio on

$$m_X(t) = (q + pe^t)^n$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = n(q + pe^t)^{n-1} pe^t \Big|_{t=0} = np$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} &= \left[n(n-1)(q + pe^t)^{n-2} pe^t pe^t + n(q + pe^t)^{n-1} pe^t \right] \Big|_{t=0} \\ &= npe^t (q + pe^t)^{n-2} \left[(n-1)pe^t + (q + pe^t) \right] \Big|_{t=0} \\ &= np + n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

Binomijakauma:

Odotusarvo ja varianssi 2/2

- Siten binomijakauman $\text{Bin}(n, p)$ *odotusarvo* μ , *2. momentti* α_2 ja *varianssi* σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = E(X) = \alpha_1 = \left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = np$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = np + n(n-1)p^2$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \text{Var}(X) &= \alpha_2 - \alpha_1^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2 p^2 \\ &= npq \end{aligned}$$

Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

Geometrinen jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **geometrasta jakaumaa** $\text{Geom}(p)$.
- Tällöin sen *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x) = q^{x-1} p, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p$$
$$x = 1, 2, 3, \dots$$

- Geometrisen jakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}$$

Geometrinen jakauma: Momenttiemäfunktion johto

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *geometriska jakaumaa* $\text{Geom}(p)$, niin sen *momenttiemäfunktion* on

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f(x) \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} pq^{x-1} \\ &= pe^t \sum_{x=1}^{\infty} e^{t(x-1)} q^{x-1} \\ &= pe^t \sum_{x=1}^{\infty} (qe^t)^{x-1} \\ &= \frac{pe^t}{1 - qe^t} \end{aligned}$$

Geometrinen jakauma: Odotusarvo ja varianssi 1/3

- Geometrisen jakauman $\text{Geom}(p)$ momenttiemäfunktio on

$$m_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{pe^t(1-qe^t) - pe^t(-qe^t)}{(1-qe^t)^2} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{pe^t}{(1-qe^t)^2} \right|_{t=0} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Geometrinen jakauma: Odotusarvo ja varianssi 2/3

- Geometrisen jakauman $\text{Geom}(p)$ *momenttiemäfunktio* on

$$m_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} &= \left. \frac{pe^t(1-qe^t)^2 - pe^t \cdot 2(1-qe^t)(-qe^t)}{(1-qe^t)^4} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{pe^t(1+qe^t)}{(1-qe^t)^3} \right|_{t=0} \\ &= \frac{1+q}{p^2} \end{aligned}$$

Geometrinen jakauma: Odotusarvo ja varianssi 3/3

- Siten geometrisen jakauman $\text{Geom}(p)$ *odotusarvo* μ , *2. momentti* α_2 ja *varianssi* σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = E(X) = \alpha_1 = \left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{p}$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \frac{1+q}{p^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \text{Var}(X) &= \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{q}{p^2} \end{aligned}$$

Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

Negatiivinen binomijakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **negatiivista binomijakaumaa** $\text{NegBin}(r, p)$.
- Tällöin sen *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{x-1}{r-1} q^{x-r} p^r, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p$$
$$r = 1, 2, 3, \dots; \quad x = r, r + 1, r + 2, \dots$$

- Negatiivisen binomijakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = \frac{(pe^t)^r}{(1 - qe^t)^r}$$

Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

Negatiivinen binomijakauma: Momenttiemäfunktion johto

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *negatiivista binomijakaumaa* $\text{NegBin}(r, p)$, niin sen *momenttiemäfunktion* on

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f(x) \\ &= \sum_{x=r}^{\infty} e^{tx} \binom{x-1}{r-1} q^{x-r} p^r \\ &= (pe^t)^r \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \binom{r+x-1}{r-1} q^x \\ &= (pe^t)^r (1 - qe^t)^{-r} \\ &= \frac{(pe^t)^r}{(1 - qe^t)^r} \end{aligned}$$

Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

Negatiivinen binomijakauma:

Odotusarvo ja varianssi 1/3

- Negatiivisen binomijakauman $\text{NegBin}(r, p)$ momenttiemäfunktio on

$$m_X(t) = \frac{(pe^t)^r}{(1-qe^t)^r}$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{r(pe^t)^{r-1} pe^t (1-qe^t)^r - (pe^t)^r r(1-qe^t)^{r-1} (-qe^t)}{(1-qe^t)^{2r}} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{r(pe^t)^r}{(1-qe^t)^{r+1}} \right|_{t=0} \\ &= \frac{r}{p} \end{aligned}$$

Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

Negatiivinen binomijakauma:

Odotusarvo ja varianssi 2/3

- Negatiivisen binomijakauman $\text{NegBin}(r, p)$ momenttiemäfunktio on

$$m_X(t) = \frac{(pe^t)^r}{(1-qe^t)^r}$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{r^2 (pe^t)^{r-1} pe^t (1-qe^t)^{r+1} - r(pe^t)^r (r+1)(1-qe^t)^r (-qe^t)}{(1-qe^t)^{2r+2}} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{r(pe^t)^r (r+qe^t)}{(1-qe^t)^{r+2}} \right|_{t=0} \\ &= \frac{r^2 + rq}{p^2} \end{aligned}$$

Negatiivinen binomijakauma: Odotusarvo ja varianssi 3/3

- Siten negatiivisen binomijakauman $\text{NegBin}(r, p)$ *odotusarvo* μ , *2. momentti* α_2 ja *varianssi* σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = E(X) = \alpha_1 = \left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{r}{p}$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \frac{r^2 + rq}{p^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \text{Var}(X) &= \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{r^2 + rq}{p^2} - \frac{r^2}{p^2} \\ &= \frac{rq}{p^2} \end{aligned}$$

Poisson-jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **Poisson-jakaumaa** $\text{Poisson}(\lambda)$.
- Tällöin sen *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \lambda > 0$$
$$x = 0, 1, 2, \dots$$

- Poisson-jakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Poisson-jakauma: Momenttiemäfunktion johto

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *Poisson-jakaumaa* $\text{Poisson}(\lambda)$, niin sen *momenttiemäfunktio* on

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f(x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \\ &= e^{\lambda(e^t - 1)} \end{aligned}$$

Poisson-jakauma: Odotusarvo ja varianssi 1/2

- Poisson-jakauman $\text{Poisson}(\lambda)$ momenttiemäfunktio on

$$m_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = e^{\lambda(e^t - 1)} \lambda e^t \Big|_{t=0} = \lambda e^{t + \lambda(e^t - 1)} \Big|_{t=0} = \lambda$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \lambda e^{t + \lambda(e^t - 1)} (1 + \lambda e^t) \Big|_{t=0} = \lambda + \lambda^2$$

Poisson-jakauma:

Odotusarvo ja varianssi 2/2

- Siten Poisson-jakauman $\text{Poisson}(\lambda)$ odotusarvo μ , 2. momentti α_2 ja varianssi σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = E(X) = \alpha_1 = \left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = \lambda$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \lambda + \lambda^2$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \text{Var}(X) &= \alpha_2 - \alpha_1^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio

Momenttiemäfunktio

Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

>> Jatkuvien jakaumien momenttiemäfunktioita

Karakteristinen funktio

Jatkuvia todennäköisyysjakaumia 1/2

- Tarkastelemme seuraavien *jatkuvien todennäköisyysjakaumien momenttiemäfunktioita* eli **momentit generoivia funktioita**:
 - **Jatkuva tasainen jakauma**
 - **Eksponenttijakauma**
 - **Normaalijakauma**
- *Lisätietoja* jatkuvista todennäköisyysjakaumista: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Jatkuvia todennäköisyysjakaumia 2/2

- Jokaisen tarkasteltavan jakauman **momenttiemäfunktiolle** esitetään *johto*.
- Johdettua momenttiemäfunktioita sovelletaan jakauman **odotusarvon, 2. momentin ja varianssin** *määrittämiseen*.

Jatkuvien jakaumien momenttiemäfunktioita

Jatkuva tasainen jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **jatkuvaa tasaista jakaumaa** $\text{Uniform}(a, b)$.
- Tällöin sen *tiheysfunktio* on

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b$$

- Jatkuvan tasaisen jakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$$

Jatkuva tasainen jakauma: Momenttiemäfunktion johto

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *jatkuva tasaista jakaumaa* $\text{Uniform}(a, b)$, niin sen *momenttiemäfunktion* on

$$\begin{aligned} m_X(t) = E(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx \\ &= \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{e^{tx}}{t} \right]_a^b \\ &= \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)} \end{aligned}$$

Jatkuva tasainen jakauma: Odotusarvo ja varianssi 1/3

- Jatkuvan tasaisen jakauman $\text{Uniform}(a, b)$ momenttiemäfunctio on

$$m_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{(be^{bt} - ae^{at})t(b-a) - (e^{bt} - e^{at})(b-a)}{t^2(b-a)^2} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{(be^{bt} - ae^{at})t - (e^{bt} - e^{at})}{t^2(b-a)} \right|_{t=0} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Jatkuva tasainen jakauma: Odotusarvo ja varianssi 2/3

- Jatkuvan tasaisen jakauman $\text{Uniform}(a, b)$ momenttiemäfunctio on

$$m_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} \\ &= \left\{ \frac{[(b^2 e^{bt} - a^2 e^{at})t + (be^{bt} - ae^{at}) - (be^{bt} - ae^{at})]t^2 (b-a)}{t^4 (b-a)^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{[(be^{bt} - ae^{at})t - (e^{bt} - e^{at})]2t(b-a)}{t^4 (b-a)^2} \right\} \Big|_{t=0} \\ &= \left. \frac{(b^2 e^{bt} - a^2 e^{at})t^2 - 2(be^{bt} - ae^{at})t + 2(e^{bt} - e^{at})}{t^3 (b-a)} \right|_{t=0} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \end{aligned}$$

Jatkuva tasainen jakauma: Odotusarvo ja varianssi 3/3

- Siten jatkuvan tasaisen jakauman $\text{Uniform}(a, b)$ *odotusarvo* μ , *2. momentti* α_2 ja *varianssi* σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = E(X) = \alpha_1 = \left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{a+b}{2}$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \text{Var}(X) &= \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

Jatkuvien jakaumien momenttiemäfunctioita

Eksponttijakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **eksponenttijakaumaa** $\text{Exp}(\lambda)$.
- Tällöin sen *tiheysfunktio* on

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \lambda > 0, x \geq 0$$

- Eksponttijakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

Jatkuvien jakaumien momenttiemäfunktioita

Eksponttijakauma:

Momenttiemäfunktion johto

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *eksponenttijakaumaa* $\text{Exp}(\lambda)$, niin sen *momenttiemäfunktio* on

$$\begin{aligned}m_X(t) = E(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x} dx \\ &= \lambda \left[\frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-t}\end{aligned}$$

Eksponttijakauma: Odotusarvo ja varianssi 1/2

- Eksponttijakauman $\text{Exp}(\lambda)$ *momenttiemäfunktio* on

$$m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \left. \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3} \right|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Eksponenttijakauma:

Odotusarvo ja varianssi 2/2

- Siten eksponenttijakauman $\text{Exp}(\lambda)$ *odotusarvo* μ , *2. momentti* α_2 ja *varianssi* σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = E(X) = \alpha_1 = \left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \text{Var}(X) &= \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Jatkuvien jakaumien momenttiemäfunktioita

Normaalijakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **normaalijakaumaa** $N(\mu, \sigma^2)$.
- Tällöin sen *tiheysfunktio* on

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad -\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$$
$$-\infty < x < +\infty$$

- Normaalijakauman **momenttiemäfunktio** on

$$m_X(t) = \exp(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$$

Normaalijakauma: Momenttiemäfunktion johto

- Jos satunnaismuuttuja X noudattaa *normaalijakaumaa* $N(\mu, \sigma^2)$, niin sen *momenttiemäfunktio* on

$$\begin{aligned} m_X(t) = E(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} dx \\ &= \exp(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[x-2(\mu+\sigma^2 t)]^2\right\} dx \\ &= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \end{aligned}$$

Normaalijakauma: Odotusarvo ja varianssi 1/2

- Normaalijakauman $N(\mu, \sigma^2)$ momenttiemäfunktio on

$$m_X(t) = \exp(\mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2)$$

- 1. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = e^{\mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2} (\mu + \sigma^2 t) \Big|_{t=0} = \mu$$

- 2. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} &= \left[e^{\mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2} (\mu + \sigma^2 t)^2 + e^{\mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2} \sigma^2 \right] \Big|_{t=0} \\ &= \mu^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

Normaalijakauma:

Odotusarvo ja varianssi 2/2

- Siten normaalijakauman $N(\mu, \sigma^2)$ odotusarvo μ , 2. momentti α_2 ja varianssi σ^2 saadaan seuraavilla kaavoilla:

$$\mu = E(X) = \alpha_1 = \left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = \mu$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \mu^2 + \sigma^2$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \text{Var}(X) &= \alpha_2 - \alpha_1^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio

Momenttiemäfunktio

Diskreettien jakaumien momenttiemäfunktioita

Jatkuvien jakaumien momenttiemäfunktioita

>> Karakteristinen funktio

Karakteristisen funktion määritelmä

- Olkoon X satunnaismuuttuja.
- Tällöin odotusarvo

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}), \quad i = \sqrt{-1}$$

on satunnaismuuttujan X ja sen jakauman **karakteristinen funktio**.

Karakteristinen funktio

Karakteristisen funktion määritelmä:

Kommentteja

- Satunnaismuuttujan karakteristinen funktio *on* – toisin kuin sen momenttiemäfunktio – *aina olemassa*.

- Karakteristisen funktion

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}), i = \sqrt{-1}$$

olemassaolo tarkoittaa sitä, että odotusarvo

$$E(e^{itX})$$

on äärellinen.

- Satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}), i = \sqrt{-1}$$

riippuu vain argumentista t .

Karakteristinen funktio

Karakteristinen funktio ja momenttiemäfunktio

- Jos satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio

$$m_X(t) = E(e^{tX})$$

tunnetaan, saadaan sen karakteristinen funktio

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}), i = \sqrt{-1}$$

momenttiemäfunktiosta sijoituksella

$$t \rightarrow it, i = \sqrt{-1}$$

Karakteristisen funktion ominaisuuksia

- Olkoon

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}), \quad i = \sqrt{-1}$$

satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio.

- Aina pätee:

(i) $\varphi_X(0) = E(e^0) = E(1) = 1$

(ii) $|\varphi_X(t)| \leq 1$ kaikille $t \in (-\infty, +\infty)$.

(iii) $\varphi_X(-t) = \bar{\varphi}_X(t)$

jossa merkintä \bar{z} tarkoittaa kompleksiluvun z konjugaattia.

(iv) $\varphi_X(t)$ on *tasaisesti jatkuva* kaikille $t \in (-\infty, +\infty)$.

Karakteristinen funktio

Diskreettien satunnaismuuttujien karakteristinen funktio

- Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja, jonka pistetodennäköisyysfunktio on

$$f_X(x) = \Pr(X = x)$$

- Satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio saadaan kaavalla

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_x e^{itx} f_X(x), \quad i = \sqrt{-1}$$

Karakteristinen funktio

Jatkuvien satunnaismuuttujien karakteristinen funktio

- Olkoon X jatkuva satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on

$$f_X(x)$$

- Satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio saadaan kaavalla

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx, \quad i = \sqrt{-1}$$

Karakteristinen funktio

Inversioteoreema 1/2

- Olkoon

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x)$$

satunnaismuuttujan X kertymäfunktio ja

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}), \quad i = \sqrt{-1}$$

sen karakteristinen funktio.

- Oletetaan, että

$$(a - h, a + h)$$

sellainen reaaliakselin väli, että kertymäfunktio $F_X(x)$ on jatkuva välin päätepisteissä.

Karakteristinen funktio

Inversioiteoreema 2/2

- Tällöin

$$F_X(a+h) - F_X(a-h) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{+T} \frac{\sin(ht)}{t} e^{-ita} \varphi_X(t) dt$$

Karakteristinen funktio

Inversioteoreema:

Kommentteja

- *Jos jakauman karakteristinen funktio tunnetaan, voidaan jakauman kertymäfunktio määrätä inversioteoreemassa määritellyn rajaprosessin avulla.*
- Myös **karakteristisen funktion yksikäsitteisyys** voidaan todistaa inversioteoreeman avulla.

Karakteristinen funktio

Inversioteoreema ja jatkuvat jakaumat 1/2

- Olkoon

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}), i = \sqrt{-1}$$

satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio.

- Oletetaan, että

$$|\varphi_X(t)|$$

on *integroituva* kaikille $t \in (-\infty, +\infty)$.

- Tällöin satunnaismuuttuja X on *jatkuva* ja sen *tiheysfunktio* $f_X(x)$ saadaan kaavalla

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt, i = \sqrt{-1}$$

Karakteristinen funktio

Inversioteoreema ja jatkuvat jakaumat 2/2

- Huomaa, että *jatkuvan satunnaismuuttujan* X karakteristinen funktio

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx, \quad i = \sqrt{-1}$$

on satunnaismuuttujan X tiheysfunktion **Fourier-muunnos** ja

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt, \quad i = \sqrt{-1}$$

on sen **käänteinen Fourier-muunnos**.

Karakteristisen funktion yksikäsitteisyys

- Satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}), i = \sqrt{-1}$$

on **yksikäsitteinen** ja määrää täysin satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauman.

- Tämä merkitsee seuraavaa:

Jos satunnaismuuttujilla U ja V on *sama karakteristinen funktio*, satunnaismuuttujat U ja V noudattavat *samaa todennäköisyysjakaumaa*.

Karakteristisen funktion yksikäsitteisyys: Seuraus 1/2

- Karakteristisen funktion *yksikäsitteisyyttä* käytetään usein hyväksi todennäköisyyslaskennan ja matemaattisen tilastotieteen lauseiden todistuksissa seuraavassa tilanteessa:

Tehtävänä on selvittää, *mikä on satunnaismuuttujan U jakauma.*

Karakteristisen funktion yksikäsitteisyys: Seuraus 2/2

- Oletetaan, että voimme todistaa, että satunnaismuuttujan U karakteristinen funktio

$$\varphi_U(t)$$

yhtyy satunnaismuuttujan V karakteristiseen funktioon

$$\varphi_V(t)$$

jonka todennäköisyysjakauma *tunnetaan*.

- Tällöin karakteristisen funktion yksikäsitteisyydestä seuraa, että **satunnaismuuttuja U noudattaa samaa jakaumaa kuin satunnaismuuttuja V .**

Karakteristinen funktio

Satunnaismuuttujan momentit ja karakteristisen funktion derivaatat 1/2

- Olkoon

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}), \quad i = \sqrt{-1}$$

satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio.

- Oletetaan, että satunnaismuuttujan X r . (**origo-**) **momentti**

$$\alpha_r = E(X^r)$$

on olemassa.

- Tällöin karakteristinen funktio $\varphi_X(t)$ on *differentioituva kertalukuun r ja*

$$\alpha_k = E(X^k) = \frac{1}{i^k} \cdot \left. \frac{d^k \varphi_X(t)}{dt^k} \right|_{t=0}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, r$$

Satunnaismuuttujan momentit ja karakteristisen funktion derivaatat 2/2

- Olkoon

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}), i = \sqrt{-1}$$

satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio.

- Oletetaan, että satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio $\varphi_X(t)$ on *differentioituva kertalukuun r* .
- Tällöin *kaikki momentit*

$$\alpha_k = E(X^k), k = 1, 2, \dots, r$$

ovat olemassa, jos r on parillinen ja kaikki momentit

$$\alpha_k = E(X^k), k = 1, 2, \dots, r-1$$

ovat olemassa, jos r on pariton.

Karakteristinen funktio

Karakteristisen funktion derivaatat ja satunnaismuuttujan momentit: Johto

- Olkoon

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}), \quad i = \sqrt{-1}$$

satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio.

- Jos $E(X^k)$ on olemassa, niin

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^k \varphi_X(t)}{dt^k} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d^k}{dt^k} E(e^{itX}) \right|_{t=0} \\ &= E \left(\left. \frac{d^k}{dt^k} e^{itX} \right|_{t=0} \right) \\ &= E(i^k X^k e^{itX}) \Big|_{t=0} \\ &= i^k E(X^k) \\ &= i^k \alpha_k \end{aligned}$$

Karakteristinen funktio

Karakteristisen funktion derivaatat ja satunnaismuuttujan momentit 1/2

- Jos satunnaismuuttujan momentit ovat olemassa, niin ne voidaan *johtaa kätevästi* käyttämällä hyväksi jakauman karakteristisen funktion derivaattoja; ks. edellisiä kalvoja.

Karakteristinen funktio

Karakteristisen funktion derivaatat ja satunnaismuuttujan momentit 2/2

- Satunnaismuuttujan X **odotusarvo** μ , **2. momentti** α_2 ja **varianssi** σ^2 saadaan seuraavista kaavoista:

$$\left. \frac{d\varphi_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = i E(X) = i\alpha_1 = i\mu$$

$$\left. \frac{d^2\varphi_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = i^2 E(X^2) = -\alpha_2$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

jossa

$$i = \sqrt{-1}$$

Karakteristisen funktion Taylorin sarjakehitelmä

- Olkoon

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}), \quad i = \sqrt{-1}$$

satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio.

- Oletetaan, että satunnaismuuttujan X r . (**origo-**) **momentti**

$$\alpha_r = E(X^r)$$

on olemassa.

- Tällöin karakteristinen funktio $\varphi_X(t)$ voidaan kehittää **Taylorin sarjaksi**

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^r \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) + o(t^r) = \sum_{k=0}^r \frac{(it)^k}{k!} \alpha_k + o(t^r)$$

jossa $o(t^r)/t^r \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow 0$.

Karakteristinen funktio

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan karakteristinen funktio

- Olkoot

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden *karakteristiset funktiot* ovat

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$$

- Tällöin **summan**

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

karakteristinen funktio on satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_n karakterististen funktioiden *tulo*:

$$\varphi_X(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) \cdots \varphi_n(t)$$

Karakteristinen funktio

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan karakteristinen funktio: Perustelu 1/2

- Olkoot

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden *momenttiemäfunctiot* ovat

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$$

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

- Käytämme hyväksi sitä, että *riippumattomien satunnaismuuttujien tulon odotusarvo on tulon tekijöiden odotusarvojen tulo* (ks. lukua **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja jakaumat**).

Karakteristinen funktio

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan karakteristinen funktio: Perustelu 2/2

- Siten

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= E[\exp(itX)] \\ &= E[\exp(it(X_1 + X_2 + \dots + X_n))] \\ &= E[\exp(itX_1 + itX_2 + \dots + itX_n)] \\ &= E[\exp(itX_1)\exp(itX_2)\dots\exp(itX_n)] \\ &= E[\exp(itX_1)]E[\exp(itX_2)]\dots E[\exp(itX_n)] \\ &= \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)\dots\varphi_{X_n}(t)\end{aligned}$$