**Ilkka Mellin**

# Todennäköisyyslaskenta

## Osa 1: Todennäköisyys ja sen laskusäännöt

## Kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavat

# Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava

**>> Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto**

**Kokonaistodennäköisyyden kaava**

**Bayesin kaava**

**Kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavojen systeemiteoreettinen tulkinta**

# Esimerkki laadunvalvonnasta 1/10

- Ruuvitehtaalla on kaksi konetta A ja B, joilla tehdään samanlaisia ruuveja.
- A- ja B-koneen valmistamat ruuvit sekoitetaan ja pakataan laatikoihin.
- Koska A-kone toimii hitaammin, laatikoihin tulee A- ja B-koneiden valmistamia ruuveja *suhteessa* 3:5.
- Osa kummankin koneen valmistamista ruuveista on *viallisia*:

  (i) 5 % A-koneen valmistamista ruuveista on viallisia.

  (ii) 8 % B-koneen valmistamista ruuveista on viallisia.

# Esimerkki laadunvalvonnasta 2/10

- Valitaan *satunnaisesti* laatikollinen ruuveja tutkittavaksi.
- Poimitaan valitusta laatikosta *satunnaisesti* 1 ruuvi tutkittavaksi.
- Kysymyksiä:

  (i) Mikä on todennäköisyys, että poimittu *ruuvi on viallinen*?

  (ii) Mikä on todennäköisyys, että ruuvin on valmistanut A-kone, *jos ruuvi osoittautuu vialliseksi*?

  (iii) Mikä on todennäköisyys, että ruuvin on valmistanut B-kone, *jos ruuvi osoittautuu vialliseksi*?

# Esimerkki laadunvalvonnasta 3/10

- Merkintöjä:

  Otosavaruus $S$ muodostuu laatikollisesta ruuveja

  Tapahtuma $A$ = ”Ruuvin on valmistanut A-kone”

  Tapahtuma $B$ = ”Ruuvin on valmistanut B-kone”

  Tapahtuma $V$ = ”Ruuvi on viallinen”

- **Seuraavat todennäköisyydet *tunnetaan***:

  $\Pr(A) = 3/8$ $\qquad$ $\Pr(V|A) = 0.05$

  $\Pr(B) = 5/8$ $\qquad$ $\Pr(V|B) = 0.08$

- **Seuraavia todennäköisyyksiä *kysytään***:

  $\Pr(V)$

  $\Pr(A|V)$

  $\Pr(B|V)$

# Esimerkki laadunvalvonnasta 4/10

- Tapahtumat $A$ ja $B$ muodostavat *otosavaruuden* $S$ **osituksen**:

(i) $A$ ja $B$ ovat *epätyhjiä*:

$$A \neq \emptyset \text{ ja } B \neq \emptyset$$

(ii) $A$ ja $B$ ovat *pistevieraita*:

$$A \cap B = \emptyset$$

(iii) Joukkojen $A$ ja $B$ *yhdisteenä* saadaan *perusjoukko* $S$:

$$S = A \cup B$$

# Esimerkki laadunvalvonnasta 5/10

- Ositus $S = A \cup B$ **indusoi osituksen** tapahtumaan $V$, millä tarkoitetaan seuraavaa:

(i) Jos $V$ on epätyhjä eli $V \neq \varnothing$, ainakin toinen joukoista $V \cap A$ ja $V \cap B$ on *epätyhjä*:

$$V \cap A \neq \varnothing \text{ tai } V \cap B \neq \varnothing$$

(ii) $V \cap A$ ja $V \cap B$ ovat *pistevieraita*:

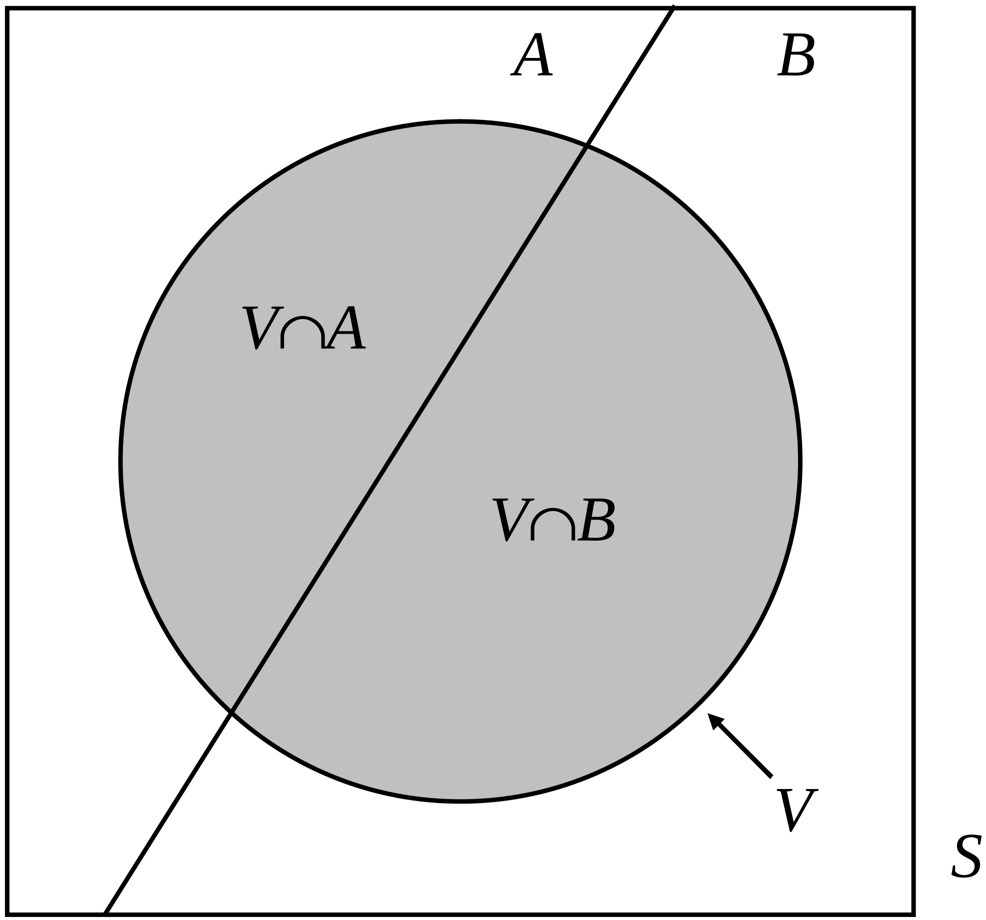
$$(V \cap A) \cap (V \cap B) = \varnothing$$

koska $A \cap B = \varnothing$

(iii) Joukkojen $V \cap A$ ja $V \cap B$ *yhdisteenä* saadaan joukko $V$:

$$V = (V \cap A) \cup (V \cap B)$$

# Esimerkki laadunvalvonnasta 6/10



# Esimerkki laadunvalvonnasta 7/10

- Toisensa poissulkevien tapahtumien **yhteenlaskusäännön** mukaan:

$$\Pr(V) = \Pr(V \cap A) + \Pr(V \cap B) \qquad (1)$$

- **Yleisen tulosäännön** mukaan:

$$\Pr(V \cap A) = \Pr(A)\Pr(V|A) \qquad (2)$$

$$\Pr(V \cap B) = \Pr(B)\Pr(V|B) \qquad (3)$$

- Sijoittamalla lausekkeet (2) ja (3) kaavaan (1) saadaan todennäköisyydeksi, että satunnaisesti poimittu ruuvi on viallinen:

$$\begin{aligned}\Pr(V) &= \Pr(A)\Pr(V|A) + \Pr(B)\Pr(V|B) \\ &= (3/8)\times 0.05 + (5/8)\times 0.08 \\ &= 0.06875 \\ &= 6.875\ \%\end{aligned}$$

- Todennäköisyyden $\Pr(V)$ lauseketta sanotaan **kokonaistodennäköisyyden kaavaksi**.

# Esimerkki laadunvalvonnasta 8/10

- **Ehdollisen todennäköisyyden** määritelmän perusteella

$$\Pr(A|V) = \Pr(V \cap A)/\Pr(V) \qquad (4)$$

$$\Pr(B|V) = \Pr(V \cap B)/\Pr(V) \qquad (5)$$

- **Yleisen tulosäännön** mukaan

$$\Pr(V \cap A) = \Pr(V|A)\Pr(A) \qquad (6)$$

$$\Pr(V \cap B) = \Pr(V|B)\Pr(B) \qquad (7)$$

- Edellä on todettu, että

$$\Pr(V) = \Pr(A)\Pr(V|A) + \Pr(B)\Pr(V|B) \qquad (8)$$

# Esimerkki laadunvalvonnasta 9/10

- Sijoittamalla lausekkeet (6) ja (8) kaavaan (4) saadaan **ehdolliseksi todennäköisyydeksi** Pr($A$|$V$):

$$\Pr(A|V) = \frac{\Pr(V \cap A)}{\Pr(V)}$$

$$= \frac{\Pr(A)\Pr(V|A)}{\Pr(A)\Pr(V|A) + \Pr(B)\Pr(V|B)}$$

$$= \frac{\frac{3}{8}\times 0.05}{\frac{3}{8}\times 0.05 + \frac{5}{8}\times 0.08} = \frac{3}{11} = 0.27$$

- Ehdollisen todennäköisyyden Pr($A$|$V$) lauseketta sanotaan **Bayesin kaavaksi**.

# Esimerkki laadunvalvonnasta 10/10

- Sijoittamalla lausekkeet (7) ja (8) kaavaan (5) saadaan **ehdolliseksi todennäköisyydeksi** $\Pr(B|V)$:

$$\Pr(B|V) = \frac{\Pr(V \cap B)}{\Pr(V)}$$

$$= \frac{\Pr(B)\Pr(V|B)}{\Pr(A)\Pr(V|A) + \Pr(B)\Pr(V|B)}$$

$$= \frac{\frac{5}{8}\times 0.08}{\frac{3}{8}\times 0.05 + \frac{5}{8}\times 0.08} = \frac{8}{11} = 0.73$$

- Ehdollisen todennäköisyyden $\Pr(B|V)$ lauseketta sanotaan **Bayesin kaavaksi**.

# Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava

## Kokonaistodennäköisyyden kaava

# Otosavaruuden ositus

- *Otosavaruuden S osajoukot*

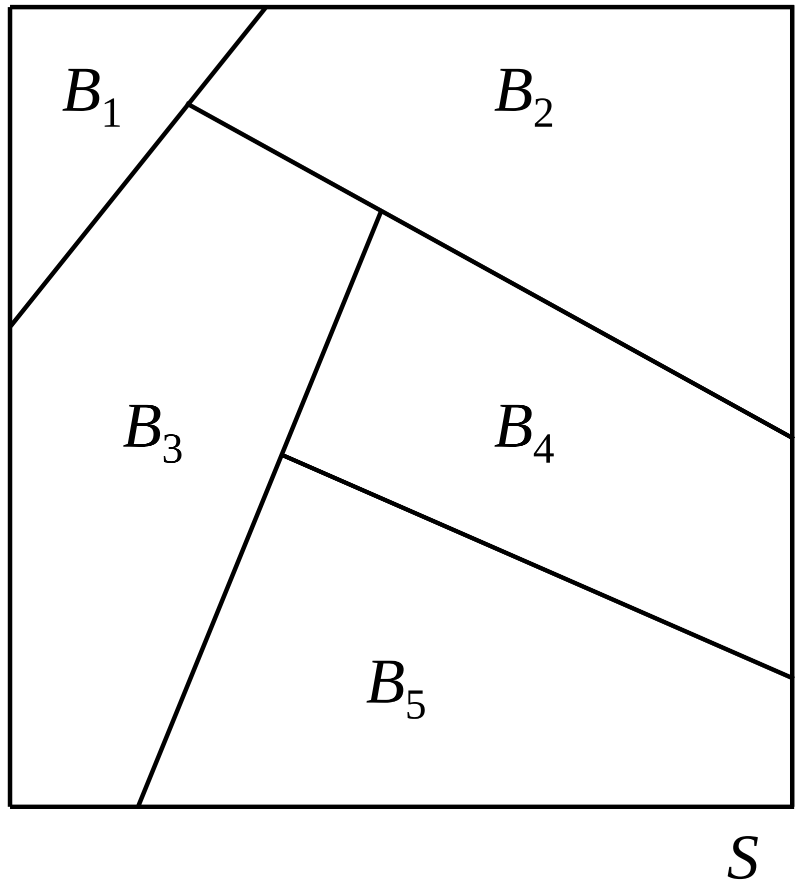
  $B_1, B_2, \ldots , B_n$

  muodostavat otosavaruuden $S$ **osituksen** *toisensa pois-sulkeviin tapahtumiin*, jos

  (i) $B_i \neq \varnothing, i = 1, 2, \ldots , n$

  (ii) $B_i \cap B_j = \varnothing, i \neq j$

  (iii) $S = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$



# Otosavaruuden ositus: Kommentteja

- Otosavaruuden $S$ *ositus* $B_1, B_2, \ldots , B_n$ muodostaa avaruuden $S$ alkioiden *luokkajaon*, koska:
  - (i) Joukot $B_1, B_2, \ldots , B_n$ ovat *epätyhjiä*.
  - (ii) Joukot $B_1, B_2, \ldots , B_n$ ovat *pareittain pistevieraita*.
  - (iii) $S = \cup B_i$
- Jos tapahtumat $B_1, B_2, \ldots , B_n$ muodostavat otosavaruuden $S$ *osituksen*, *täsmälleen yksi* tapahtumista $B_1, B_2, \ldots , B_n$ sattuu aina, kun se satunnaisilmiö, jonka tulosvaihtoehtoja otosavaruus $S$ kuvaa, esiintyy.

## Kokonaistodennäköisyyden kaava

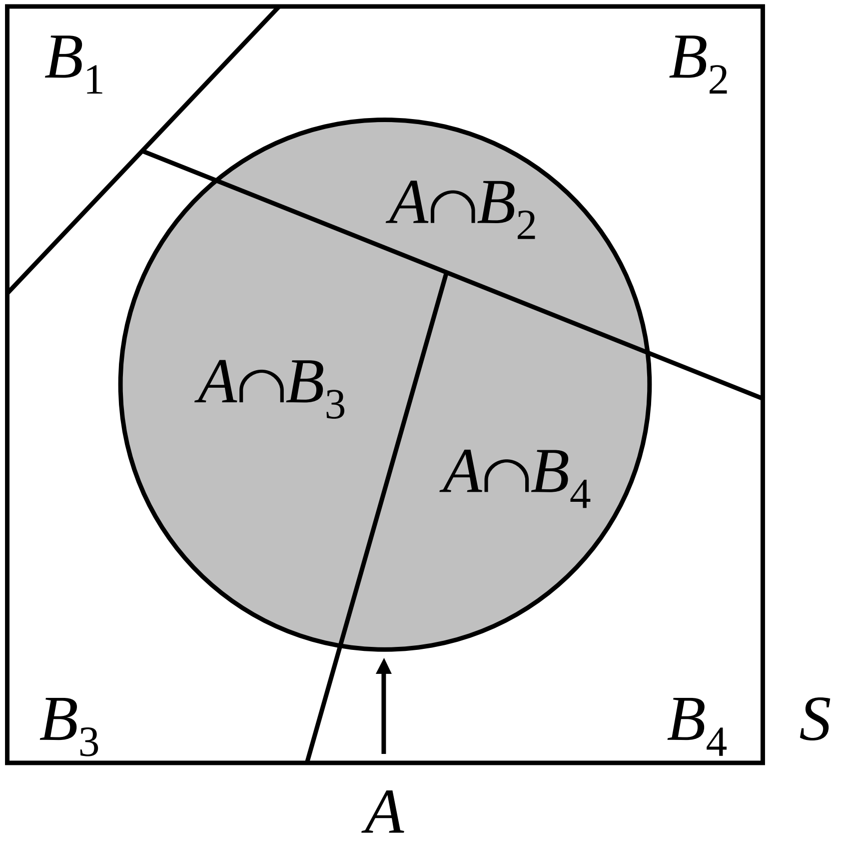
# Otosavaruuden osituksen indusoima ositus

- Olkoon $A \subset S$, $A \neq \varnothing$ otosavaruuden $S$ *osajoukko*.
- Olkoon $B_1, B_2, \ldots, B_n$ otosavaruuden $S$ *ositus*.
- Ositus $B_1, B_2, \ldots, B_n$ **indusoi osituksen** joukkoon $A$:

  $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \varnothing,\ i \neq j$

  ja

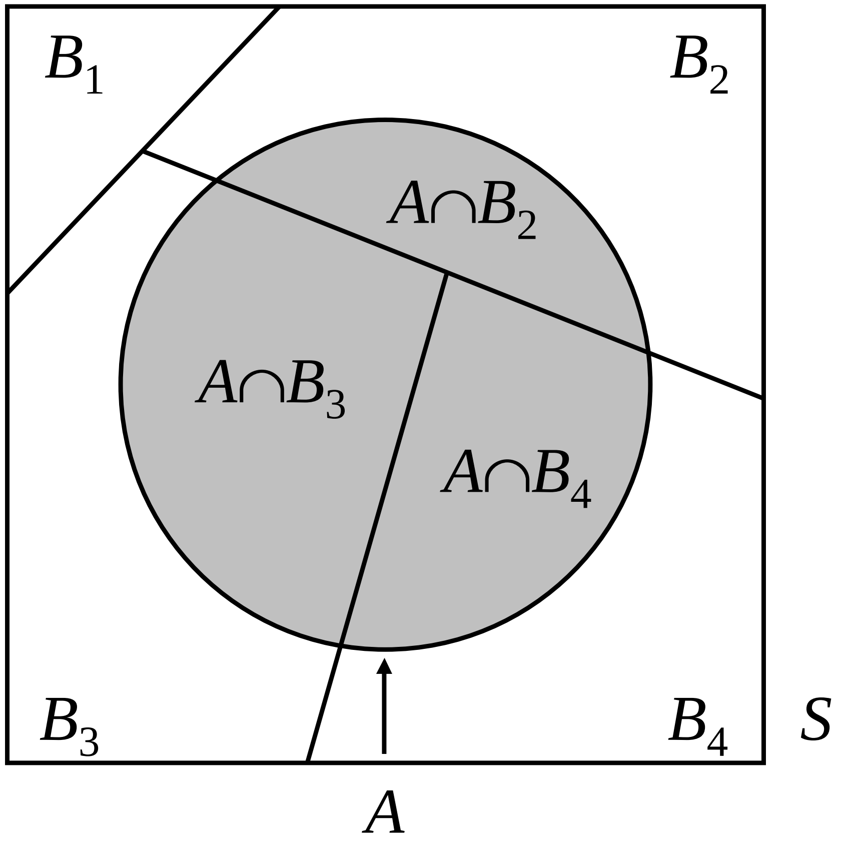
  $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)$



# Kokonaistodennäköisyyden kaava: Määritelmä 1/2

- Olkoon $A \subset S$, $A \neq \emptyset$ otosavaruuden $S$ *osajoukko*.
- Olkoon $B_1, B_2, \ldots, B_n$ otosavaruuden $S$ *ositus*.
- Olkoon $(A \cap B_1), (A \cap B_2), \ldots, (A \cap B_n)$ osituksen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *indusoima ositus* joukkoon $A$.
- *Yhteenlaskusäännön* perusteella

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A \cap B_i) \quad (1)$$



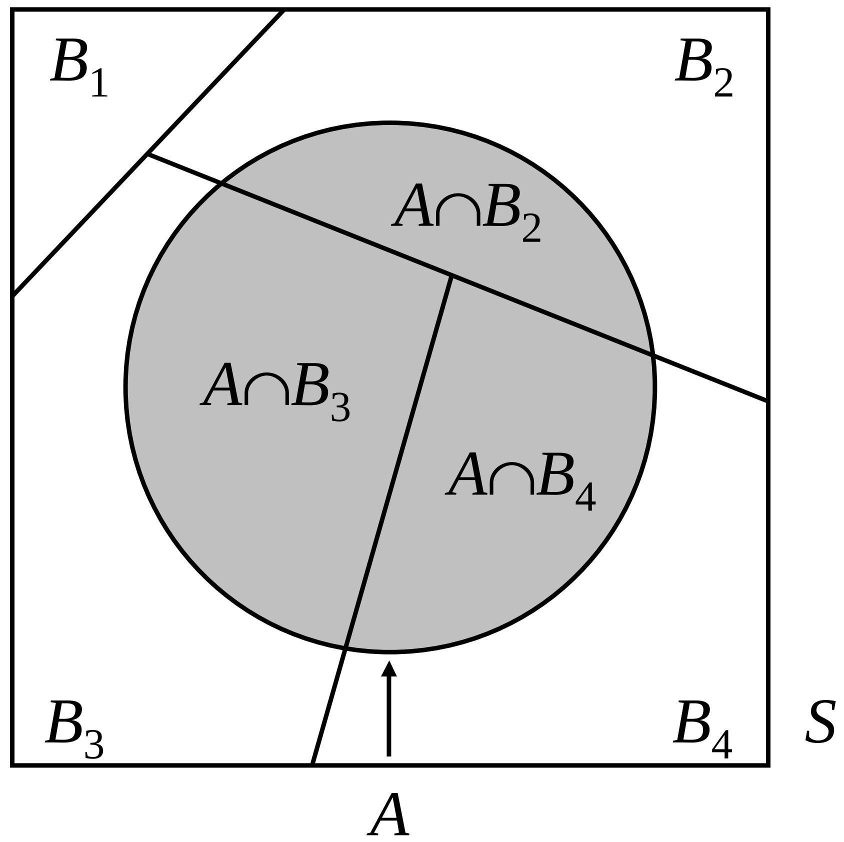
# Kokonaistodennäköisyyden kaava: Määritelmä 2/2

- *Yleisen tulosäännön* perusteella

$$\Pr(A \cap B_i) = \Pr(B_i)\Pr(A|B_i)$$
$$i = 1, 2, \ldots , n$$

- Sijoittamalla nämä lausekkeet kaavaan (1), saadaan **kokonaistodennäköisyyden** kaava

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(B_i)\Pr(A|B_i)$$



# Kokonaistodennäköisyyden kaava: Kommentteja

- *Kokonaistodennäköisyyden kaava* ilmaisee otosavaruuden $S$ osajoukon $A$ todennäköisyyden $\Pr(A)$ otosavaruuden $S$ *osituksen* $B_1, B_2, \ldots , B_n$ määräämien todennäköisyyksien $\Pr(B_i)$ ja ehdollisten todennäköisyyksien $\Pr(A|B_i)$ avulla.
- Kokonaistodennäköisyyden kaava on käyttökelpoinen sellaisissa tilanteissa, joissa todennäköisyydet $\Pr(B_i)$ ja ehdolliset todennäköisyydet $\Pr(A|B_i)$ ovat *tunnettuja*.

# Riippumattomuus ja kokonaistodennäköisyyden kaava

- Jos tapahtuma $A$ on *riippumaton* jokaisesta tapahtumasta $B_1, B_2, \ldots , B_n$ , kokonaistodennäköisyyden kaavasta *ei ole hyötyä* tapahtuman $A$ todennäköisyyttä määrättäessä.

# Riippumattomuus ja kokonaistodennäköisyyden kaava: Perustelu

- Jos $A \perp B_i$ , $i$ = 1, 2, … , $n$ niin

$$\Pr(A \cap B_i) = \Pr(A)\Pr(B_i)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- Tällöin

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= \sum_{i=1}^{n} \Pr(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A)\Pr(B_i) \\ &= \Pr(A)\sum_{i=1}^{n} \Pr(B_i) \\ &= \Pr(A)\end{aligned}$$

koska

$$\sum_{i=1}^{n} \Pr(B_i) = 1$$

# Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto

Kokonaistodennäköisyyden kaava

**>> Bayesin kaava**

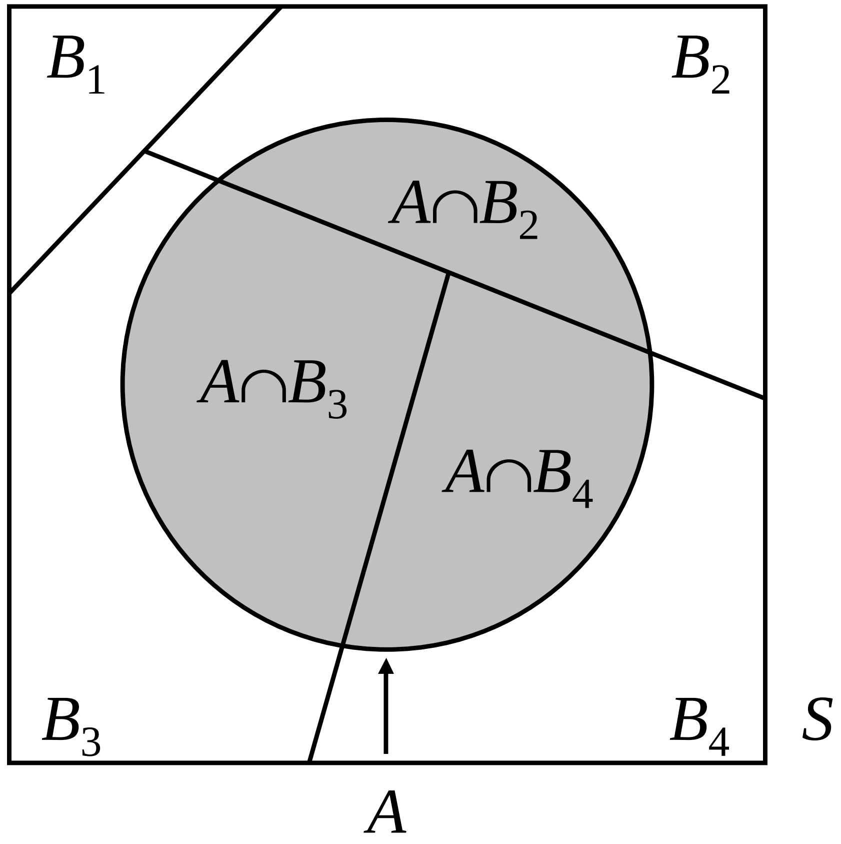
Kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavojen systeemiteoreettinen tulkinta

# Bayesin kaava: Määritelmä 1/2

- Olkoon $A \subset S$, $A \neq \varnothing$ otosavaruuden $S$ *osajoukko*.
- Olkoon $B_1, B_2, \ldots, B_n$ otosavaruuden $S$ *ositus*.
- *Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän* mukaan

$$\Pr(B_i | A) = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(A)}$$

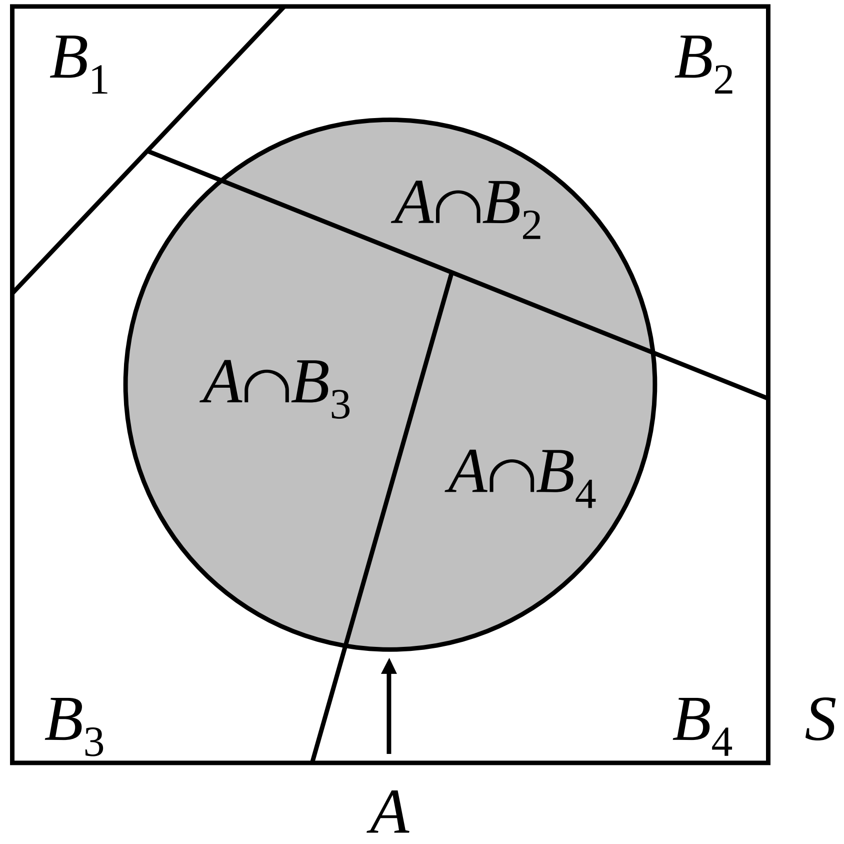
$$= \frac{\Pr(B_i)\Pr(A | B_i)}{\Pr(A)}$$



# Bayesin kaava: Määritelmä 2/2

- Soveltamalla nimittäjään *kokonaistodennäköisyyden* kaavaa saadaan **Bayesin kaava**:

$$\Pr(B_i \mid A) = \frac{\Pr(B_i)\Pr(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{n} \Pr(B_i)\Pr(A \mid B_i)}$$



# Bayesin kaava: Kommentteja 1/3

- Bayesin kaavan todennäköisyyttä $\Pr(B_i)$ kutsutaan tavallisesti **priori-todennäköisyydeksi**.

  *prior* (*lat.*), edeltävä, aikaisempi

- Todennäköisyyttä $\Pr(B_i)$ kutsutaan priori-todennäköisyydeksi, koska se kuvaa *ennakkokäsitystä* tapahtuman $B_i$ todennäköisyydestä, *ennen kuin on saatu tietää*, *että tapahtuma A on sattunut*.

# Bayesin kaava: Kommentteja 2/3

- Bayesin kaavan todennäköisyyttä $\Pr(B_i|A)$ kutsutaan tavallisesti **posteriori-todennäköisyyksiksi**.

  *posterior* (*lat.*), jälkeen tuleva, myöhempi
- Todennäköisyyttä $\Pr(B_i|A)$ kutsutaan posteriori-todennäköisyydeksi, koska se kuvaa sitä *miten ennakko-käsitystä* tapahtuman $B_i$ todennäköisyydestä *kannattaa muuttaa sen jälkeen*, *jos on saatu tietää*, *että tapahtuma A on sattunut*.
- Posteriori-todennäköisyyttä $\Pr(B_i|A)$ kutsutaan usein *käänteistodennäköisyydeksi*, koska se on ”käänteinen” *tunnettuun* todennäköisyyteen $\Pr(A|B_i)$ nähden.

# Bayesin kaava: Kommentteja 3/3

- Bayesin kaava kertoo miten *ennakkokäsitystä* tapahtuman $B_i$ todennäköisyydestä on järkevää *korjata sen jälkeen*, *kun tapahtuma A on havaittu*.
- Bayesin kaava kertoo miten *tietoa tapahtuman A sattumisesta voidaan käyttää hyväksi* tapahtuman $B_i$ todennäköisyyden arvioinnissa.
- Bayesin kaava on käyttökelpoinen sellaisissa tilanteissa, joissa todennäköisyydet $\Pr(B_i)$ ja ehdolliset todennäköisyydet $\Pr(A|B_i)$ ovat *tunnettuja*.

# Riippumattomuus ja Bayesin kaava

- Jos tapahtuma $A$ on *riippumaton* jokaisesta tapahtumasta $B_1, B_2, \ldots, B_n$, tieto tapahtuman $A$ sattumisesta *ei muuta* priori-todennäköisyyksiä $\Pr(B_i)$:

  Jos $A \perp B_1, B_2, \ldots, B_n$, niin

$$\Pr(B_i \mid A) = \Pr(B_i)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

# Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava

Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava: Johdanto

Kokonaistodennäköisyyden kaava

Bayesin kaava

>> Kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavojen systeemiteoreettinen tulkinta

# Systeemiteoreettinen tulkinta kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavoille 1/4

- Oletetaan, että **systeemissä** on *alkutila* $L$, *välitilat* $B_1, B_2, \ldots , B_n$ ja yksi sen *lopputiloista* on $A$.
- Oletetaan, että *alkutilasta* $L$ *voidaan päästä lopputilaan* $A$ *vain käymällä jossakin välitiloista* $B_1, B_2, \ldots , B_n$.
- Olkoot

$$\Pr(B_i) = \Pr(\text{Käydään välitilassa } B_i)$$

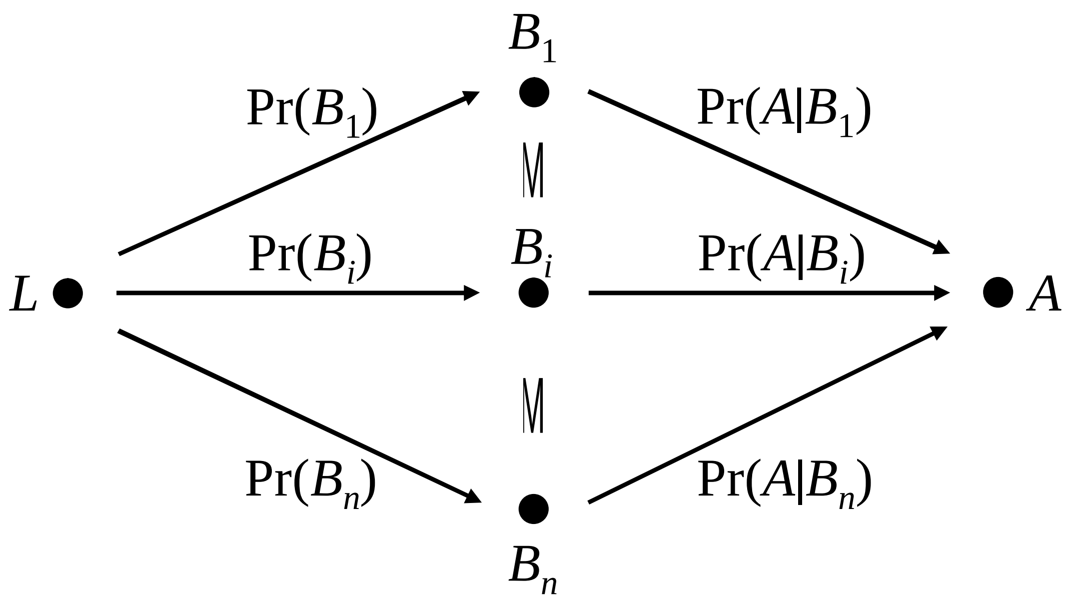
$$\Pr(A|B_i) = \Pr(\text{Välitilasta } B_i \text{ päästään lopputilaan } A)$$

$$\Pr(A) = \Pr(\text{Päästään lopputilaan } A)$$

$$\Pr(B_i|A) = \Pr(\text{Lopputilaan } A \text{ tullaan välitilan } B_i \text{ kautta})$$

# Systeemiteoreettinen tulkinta kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavoille 2/4

- Systeemiä voidaan havainnollistaa seuraavalla **verkko-diagrammilla**:



# Systeemiteoreettinen tulkinta kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavoille 3/4

- **Kokonaistodennäköisyyden kaavan** mukaan

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(B_i)\Pr(A \mid B_i)$$

- $\Pr(A)$ on todennäköisyys sille, että *päästään* lopputilaan $A$.
- Kokonaistodennäköisyyden kaavan mukaan todennäköisyys $\Pr(A)$ saadaan laskemalla yhteen alkutilasta $L$ lopputilaan $A$ välitilojen $B_i$ , $i = 1, 2, \ldots , n$ kautta kulkevien *reittien* todennäköisyydet

$$\Pr(A \cap B_i) = \Pr(B_i)\Pr(A|B_i)$$

# Systeemiteoreettinen tulkinta kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavoille 4/4

- **Bayesin kaavan** mukaan

$$\Pr(B_i | A) = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\sum_{i=1}^{n} \Pr(A \cap B_i)}$$

$$= \frac{\Pr(B_i)\Pr(A | B_i)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(B_i)\Pr(A | B_i)}{\sum_{i=1}^{n} \Pr(B_i)\Pr(A | B_i)}$$

- $\Pr(B_i|A)$ on siis *ehdollinen* todennäköisyys sille, että *on käyty* välitilassa $B_i$ , kun *ehtotapahtumana* on se, että *on päästy* lopputilaan $A$.