

---

**Ilkka Mellin**  
**Todennäköisyyslaskenta**

**Osa 1: Todennäköisyys ja sen laskusäännöt**  
**Todennäköisyyden aksioomat**

# Todennäköisyyden aksioomat

---

## >> Todennäköisyyden määrittely

Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

Klassinen todennäköisyys, suhteellinen frekvenssi ja ehdollinen todennäköisyys

Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

## Todennäköisyyden naiivit määritelmät

---

- Luvussa Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet **todennäköisyydelle** on esitetty kolme *naiivia määritelmää*:
  - (i) Tapahtuman **klassinen todennäköisyys** on tapahtumalle *suotuisien tulosvaihtoehtojen suhteellinen frekvenssi*.
  - (ii) Tapahtuman **empiirinen todennäköisyys** on tapahtuman (tilastollisesti stabiili) *suhteellinen frekvenssi*.
  - (iii) Todennäköisyys on tapahtuman *sattumisen mahdollisuuden mitta*.

## Todennäköisyyden naiivit määritelmät: Kommentteja

---

- Kuten näemme, yksikään todennäköisyyden naiiveista määritelmistä (i)-(iii) ei täytä *hyvän matemaattisen määritelmän* tunnusmerkkejä.

## Todennäköisyyden määrittelemisen

# Klassinen todennäköisyys

---

- Tarkastellaan satunnaiskoetta, johon liittyy  $n$  yhtä todennäköistä tulosvaihtoehtoa.
- Tarkastellaan ko. satunnaiskokeessa tapahtumaa  $A$ , johon liittyy  $k$  yhtä todennäköistä tulosvaihtoehtoa, joita sanotaan tapahtumalle  $A$  suotuisiksi.
- Tapahtuman  $A$  **klassinen todennäköisyys** on tapahtumalle suotuisien tulosvaihtoehtojen *suhteellinen frekvenssi*

$$\frac{k}{n}$$

## Todennäköisyyden määrittelemisen

# Klassinen todennäköisyys:

## Esimerkki

---

- Heitetään kahta virheetöntä noppaa.
- Mikä on tapahtuman

$A = \text{”Silmälukujen summaksi saadaan 11 tai 12”}$

todennäköisyys?

- Kahden virheettömän nopan heitossa mahdolliset *tulosvaihtoehdot* muodostuvat  $6 \times 6 = 36$  lukuparista

$(i, j)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

joiden kaikkien todennäköisyys on  $1/36$ .

- Tapahtumalle  $A$  *suotuisia tulosvaihtoehtoja* on 3 kpl:

$(5,6)$ ,  $(6,5)$ ,  $(6,6)$

- Siten tapahtuman  $A$  *klassinen todennäköisyys* on

$$\Pr(A) = \frac{k}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

## Klassinen todennäköisyys: Kommentteja

---

- Klassisen todennäköisyyden määritelmä soveltuu vain sellaisten satunnaisilmiöiden tapahtumille, joissa tulosvaihtoehdot ovat *symmetrisiä* eli *yhtä todennäköisiä*.
- Klassisen todennäköisyyden määritelmää ei voida soveltaa sellaisiin satunnaiskokeisiin, joilla on *äärettömän monta* tulosvaihtoehtoa.

## Todennäköisyyden määrittelemisen

# Empiirinen todennäköisyys

---

- *Toistetaan jotakin satunnaiskoetta  $n$  kertaa.*
- Oletetaan, että tapahtuma  $A$  sattuu koetoistojen aikana  $f$  kertaa.
- Jos tapahtuman  $A$  *suhteellinen frekvenssi*

$$\frac{f}{n}$$

lähestyy jotakin kiinteätä lukua  $p$  koetoistojen lukumäärän  $n$  kasvaessa rajatta, on  $p$  tapahtuman  $A$  **empiirinen todennäköisyys**.



## Todennäköisyyden määrittelemisen

# Empiirinen todennäköisyys:

### Esimerkki 1/3

---

- Eräessä *kyselytutkimuksessa* selvitettiin miten suomalaiset suhtautuvat Suomen mahdolliseen NATO-jäsenyyteen.
- Tutkimus perustui *satunnaisotokseen*, johon poimittiin *arpomalla*  
1800  
suomalaista.
- *Otoksessa*  
1080  
henkilöä ilmoitti vastustavansa NATO-jäsenyyttä.

## Todennäköisyyden määrittelemisen

# Empiirinen todennäköisyys:

### Esimerkki 2/3

---

- Tutkimusta voidaan kuvata satunnaisilmiönä seuraavalla tavalla:

*Satunnaiskoe:*

Yhden suomalaisen poimiminen arpomalla otokseen

*Koetoistojen lukumäärä (otoskoko):*

$$n = 1800$$

*Tapahtuma A:*

Otokseen poimittu suomalainen vastusti Suomen NATO-jäsenyyttä.

Tapahtuman *A* frekvenssi koetoistojen joukossa:

$$f = 1080$$

Tapahtuman *A* suhteellinen frekvenssi:

$$\frac{f}{n} = \frac{1080}{1800} = 0.6$$

## Todennäköisyyden määrittelemisen

# Empiirinen todennäköisyys:

### Esimerkki 3/3

---

- Jos otoksen poiminnassa käytettiin arvontaa, voidaan olettaa, että tapahtuman  $A$  suhteellinen frekvenssi säilyy *stabiilina*, jos *otoskoko* kasvatetaan tai *otantaa toistetaan*.
- Jos oletus tapahtuman  $A$  suhteellisen frekvenssin stabiiliudesta pätee, havaittua suhteellista frekvenssiä 0.6 on järkevää kutsua *todennäköisyydeksi*, että satunnaisesti valittu suomalainen vastustaa Suomen NATO-jäsenyyttä.
- Siten tapahtuman  $A$  *empiirinen todennäköisyys* on
$$\Pr(A) = 0.6$$
otoksesta saatujen tietojen perusteella.

## Empiirinen todennäköisyys: Kommentteja

---

- Empiirisen todennäköisyyden määritelmä edellyttää sitä, että tapahtuman suhteellinen frekvenssi käyttäytyy koetoistojen lukumäärän kasvaessa *tilastollisesti stabiilisti*.
- Empiiristä todennäköisyyttä *ei voida liittää* sellaisiin satunnaisilmiöihin, joista *ei ole havaintoja*.
- Tapahtuman empiiristä todennäköisyyttä *ei voida* – nimestään huolimatta – *määrätä kokeellisesti*, koska äärettömän monen koetoiston tekeminen ei ole käytännössä mahdollista.
- Mikään *ei takaa*, että empiirisen todennäköisyyden määritelmässä esiintyvä raja-arvo *on olemassa*.

## Todennäköisyyden määrittelemisen

# Todennäköisyys *mittana*

---

- **Todennäköisyyttä** voidaan kutsua **mitaksi**, joka mittaa satunnaisilmiön tapahtumavaihtoehtojen *sattumisen mahdollisuuksia*.
- *Venn-diagrammien* käyttö todennäköisyyslaskennan peruslaskutoimitusten havainnollistamisessa perustuu juuri siihen, että *todennäköisyydellä on mittana samantapaiset ominaisuudet kuin pinta-alamitalla*.

## Todennäköisyyden määrittelemisen

# Todennäköisyys *mittana*:

## Kommentteja

---

- Todennäköisyyden kutsuminen mitaksi sisältää *jotakin hyvin olennaista* todennäköisyyden luonteesta.
- Todennäköisyydellä on samantapaiset ominaisuudet kuin esimerkiksi *pinta-ala-* tai *tilavuusmitalla* paitsi, että tapahtuman todennäköisyydellä on ylärajana varman tapahtuman todennäköisyys 1.
- Todennäköisyyden kutsuminen sattumisen mahdollisuuden mitaksi on kuitenkin *kehämääritelmä*:  
*Sattumisen mahdollisuus* tarkoittaa suunnilleen samaa kuin *todennäköisyys*.

## Todennäköisyyden aksiomaattinen määrittely 1/2

---

- Yksikään todennäköisyyden naiiveista määritelmistä *ei täyty* hyvän matemaattisen määritelmän tunnusmerkkejä.
- Matemaattisesti kelvollisen yleisen määritelmän todennäköisyydelle esitti venäläinen matemaatikko A. N. Kolmogorov 1930-luvun alussa.
- *Kolmogorovin aksioomien* mukaan todennäköisyyslaskenta on *matemaattisen mittateorian* osa.
- Todennäköisyyden naiivit määritelmät voidaan sijoittaa – sopivasti muotoiltuina – Kolmogorovin aksioomajärjestelmään todennäköisyyden käsitteen *tulkintoina* tai *kuvauksina*.

## Todennäköisyyden aksiomaattinen määrittely 2/2

---

- Seuraavissa kappaleissa tarkastellaan todennäköisyyden *aksiomaattista määrittelyä*.
- Tarkastelu on jaettu kahteen osaan:
  - (i) Todennäköisyyden määrittely **äärellisissä** otosavaruuksissa.
  - (ii) Todennäköisyyden määrittely **äärettömissä** otosavaruuksissa.
- Samalla tarkastellaan todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen *todistamista* aksiomista lähtien.



# Todennäköisyyden aksioomat

---

**Todennäköisyyden määrittelemine**

- >> Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa**  
**Klassinen todennäköisyys, suhteellinen frekvenssi ja ehdollinen todennäköisyys**
- Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa**

## Boolean algebra:

### Määritelmä 1/2

---

- Olkoon  $S$  joukko.
- Olkoon  $F$  *jokin* joukon  $S$  osajoukkojen muodostama **joukkoperhe**.
- Jos siis joukko  $A$  on joukkoperheen  $F$  alkio, niin  $A$  on joukon  $S$  osajoukko:

$$A \in F \Rightarrow A \subset S$$

## Boolean algebra:

### Määritelmä 2/2

---

- Joukkoperhe  $\mathcal{F}$  on **Boolean algebra**, jos
  - (i) *Tyhjä joukko*  $\emptyset$  on joukkoperheen  $\mathcal{F}$  alkio:
$$\emptyset \in \mathcal{F}$$
  - (ii) Jos joukko  $A$  on joukkoperheen  $\mathcal{F}$  alkio, niin sen *komplementti*  $A^c$  on joukkoperheen  $\mathcal{F}$  alkio:
$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$
  - (iii) Jos joukot  $A$  ja  $B$  ovat joukkoperheen  $\mathcal{F}$  alkioita, niin niiden *yhdiste*  $A \cup B$  on joukkoperheen  $\mathcal{F}$  alkio:
$$A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$$

Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Boolean algebrat ja joukko-opin operaatiot 1/2

---

- Olkoon  $\mathcal{F}$  joukossa  $S$  määritelty *Boolean algebra*.

- Olkoot

$$A \in \mathcal{F} \text{ ja } B \in \mathcal{F}$$

- Suoraan Boolean algebran *aksiomien mukaan tyhjä joukko*  $\emptyset$ , *komplementtijoukot*  $A^c$  ja  $B^c$  sekä *yhdiste*  $A \cup B$  kuuluvat joukkoperheeseen  $\mathcal{F}$ :

$$\emptyset, A^c, B^c, A \cup B \in \mathcal{F}$$

- Lisäksi voidaan osoittaa, että *perusjoukko*  $S$ , *leikkaus*  $A \cap B$  sekä *erotukset*  $A \setminus B$  ja  $B \setminus A$  kuuluvat joukkoperheeseen  $\mathcal{F}$ :

$$S, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{F}$$

## Boolean algebrat ja joukko-opin operaatiot 2/2

---

- Boolean algebrat ovat siis **suljettuja** tavanomaisten joukko-opin operaatioiden suhteen.
- Tällä tarkoitetaan siitä, että tavanomaiset joukko-opin operaatiot *eivät vie Boolean algebran ulkopuolelle*:

Jos Boolean algebran  $F$  joukkoihin sovelletaan *korkeintaan äärellinen määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita *komplementti, yhdiste, leikkaus ja erotus*, niin tuloksena saatavat joukot kuuluvat edelleen Boolean algebraan  $F$ .

## Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

# Joukko-opin operaatiot

---

- Olkoon  $F$  joukossa  $S$  määritelty Boolean algebra.
- *Todistetaan seuraavat joukko-opin tulokset:*
  - (i) Joukko  $S \in F$
  - (ii) Jos  $A \in F, B \in F$ , niin  $A \cap B \in F$
  - (iii) Jos  $A \in F, B \in F$ , niin  $A \setminus B \in F$

Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Joukko-opin operaatiot:

### Perusjoukko 1/2

---

- Olkoon  $F$  joukossa  $S$  määritelty Boolean algebra.
- Tällöin *perusjoukko*  $S$  kuuluu joukkoperheeseen  $F$  :

$$S \in F$$

## Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

### Joukko-opin operaatiot:

### Perusjoukko 2/2

---

- Väite seuraa, siitä että

$$S = \emptyset^c$$

- Todistetaan siis, että

$$\emptyset^c \in \mathcal{F}$$

- Aksioman (i) mukaan

$$\emptyset \in \mathcal{F}$$

- Aksioman (ii) mukaan

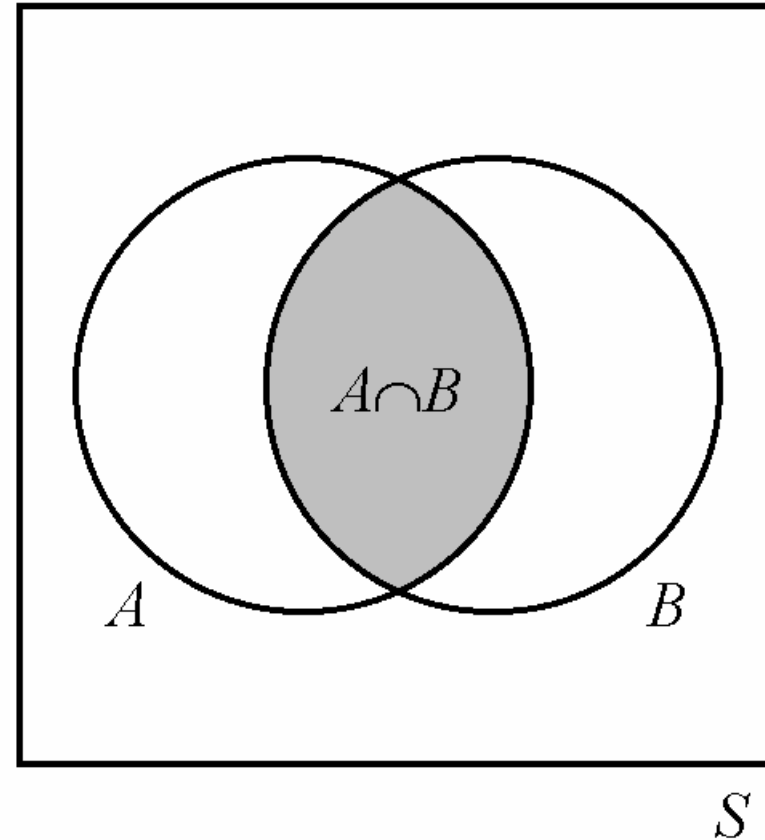
$$\emptyset^c = S \in \mathcal{F}$$



## Joukko-opin operaatiot:

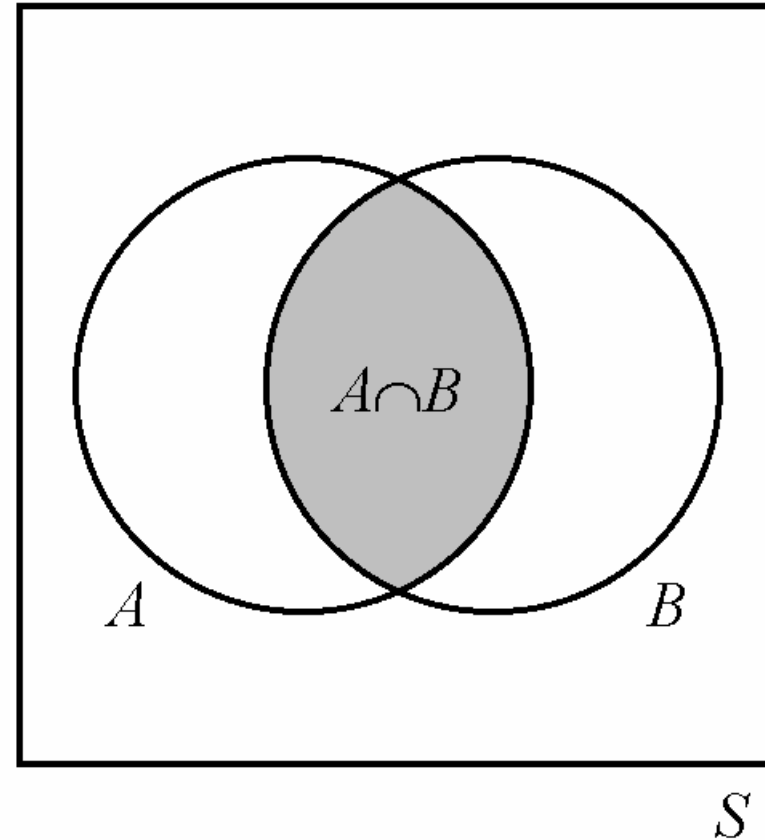
### Leikkausjoukko 1/2

- Olkoon  $F$  joukossa  $S$  määritelty Boolean algebra.
- Olkoot  
 $A \in F, B \in F$
- Tällöin joukkojen  $A$  ja  $B$  leikkaukselle pätee:  
 $A \cap B \in F$



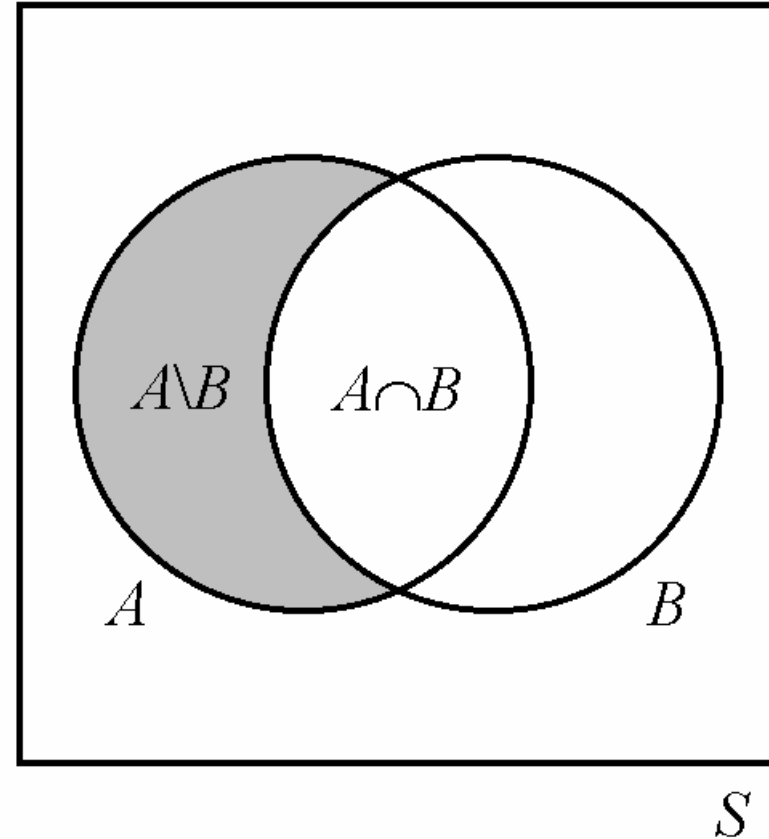
## Joukko-opin operaatiot: Leikkausjoukko 2/2

- Väite seuraa siitä, että  
*DeMorganin lain* mukaan  
 $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$
- Todistetaan siis, että  
 $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$
- Aksioman (ii) mukaan  
 $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}, B^c \in \mathcal{F}$
- Aksioman (iii) mukaan  
 $A^c \in \mathcal{F}, B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \cup B^c \in \mathcal{F}$
- Vihdoin aksioman (ii) mukaan  
 $A^c \cup B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$



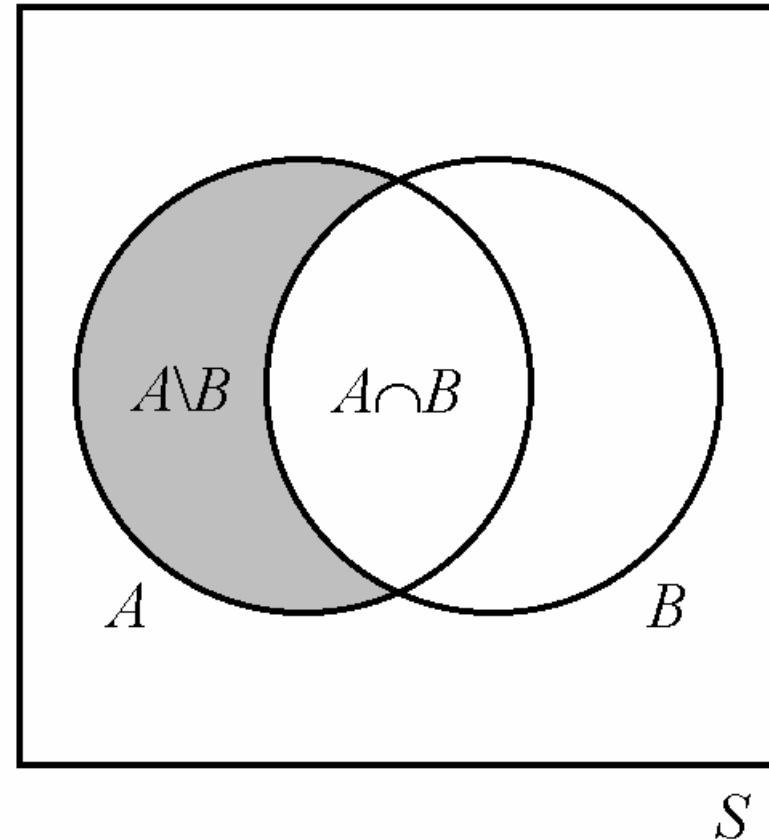
## Joukko-opin operaatiot: Erotusjoukko 1/2

- Olkoon  $F$  joukossa  $S$  määritelty Boolean algebra.
- Olkoot  $A \in F, B \in F$
- Tällöin joukkojen  $A$  ja  $B$  erotukselle pätee:  
 $A \setminus B \in F$



## Joukko-opin operaatiot: Erotusjoukko 2/2

- Väite seuraa siitä, että  
 $A \setminus B = A \cap B^c$
- Todistetaan siis, että  
 $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathcal{F}$
- Aksioman (ii) mukaan  
 $B \in \mathcal{F} \Rightarrow B^c \in \mathcal{F}$
- Leikkausjoukkoa koskevan tuloksen mukaan  
 $A \in \mathcal{F}, B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathcal{F}$



## Boolean algebra: Esimerkki

---

- Olkoon  $S$  mielivaltainen joukko.
- Olkoon

$$A \subset S$$

mielivaltainen joukon  $S$  osajoukko.

- Tällöin joukkoperhe

$$F = \{\emptyset, A, A^c, S\}$$

muodostaa Boolean algebran joukossa  $S$ , koska

(i)  $\emptyset \in F$

(ii)  $B \in F \Rightarrow B^c \in F$

(iii)  $B \in F, C \in F \Rightarrow B \cup C \in F$

Tässä  $B$  ja  $C$  voivat olla mitkä tahansa kaksi joukoista  $\emptyset, A, A^c, S$ .

## Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

# Boolean algebra tapahtuma-algebrana 1/2

---

- Olkoon  $F$  otosavaruudessa  $S$  määritelty *Boolean algebra*.
- Kutsutaan Boolean algebraan  $F$  kuuluvia otosavaruuden  $S$  osajoukkoja **tapahtumiksi**.
- Jos siis  $A \in F$ , niin  $A \subset S$  ja  $A$  on tapahtuma.
- Kutsutaan Boolean algebraan  $F$  kuuluvien otosavaruuden  $S$  osajoukkojen alkioita **alkeistapahtumiksi**.
- Jos siis

$$s \in A \in F$$

jollekin  $A \in F$ , niin  $s$  on alkeistapahtuma.

## Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

# Boolean algebra tapahtuma-algebrana 2/2

---

- Olkoon  $F$  otosavaruudessa  $S$  määritelty *Boolean algebra*.
- Olkoot otosavaruuden  $S$  osajoukot  $A$  ja  $B$  tapahtumia eli  
 $A \in F$  ja  $B \in F$
- Tällöin siis myös  
 $A^c$ ,  $B^c$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$   
ovat tapahtumia.
- Siten otosavaruuden tapahtumista voidaan johtaa *uusia tapahtumia* soveltamalla niihin tavanomaisia joukko-opin operaatioita.

## Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

# Äärelliset otosavaruudet

---

- Olkoon  $S$  äärellinen otosavaruus, jossa on  $n$  alkiota.
- Olkoon

$$\mathbf{F} = \{A \mid A \subset S\}$$

otosavaruuden  $S$  kaikkien osajoukkojen perhe, joten joukkoperheessä  $\mathbf{F}$  on

$$n(\mathbf{F}) = 2^n$$

alkiota.

- Otosavaruuden  $S$  kaikkien osajoukkojen perhe  $\mathbf{F}$  muodostaa *triviaalin Boolean algebran* joukossa  $S$ .



## Todennäköisyyden aksioomat 1/2

---

- Olkoon  $S$  äärellinen otosavaruus ja  $\mathcal{F}$  jokin sen osajoukkojen muodostama *Boolean algebra*.
- Olkoon  $\Pr$  joukkofunktio, joka liittää jokaiseen Boolean algebraan  $\mathcal{F}$  kuuluvaan otosavaruuden  $S$  osajoukkoon  $A$  reaalin  $\Pr(A)$ .
- Jos siis  $A \in \mathcal{F}$ , niin  $\Pr(A) \in \mathbb{R}$ .

## Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

# Todennäköisyyden aksioomat 2/2

---

- Joukkofunktio  $\Pr$  on **todennäköisyys**, jos

(i)  $\Pr(S) = 1$

(ii)  $0 \leq \Pr(A) \leq 1$  kaikille  $A \in \mathcal{F}$

(iii)  $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow$

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

## Todennäköisyyden aksioomat: Kommentteja 1/2

---

- *Äärellisen otosavaruuden todennäköisyyden aksioomien (i)-(iii) mukaan todennäköisyys  $\Pr$  on positiivinen, äärellisesti additiivinen ja normeerattu **mitta**.*
- Aksioomat (i) ja (ii), *normeeraus ja positiivisuus:*  
$$A \subset S \Rightarrow 0 \leq \Pr(A) \leq \Pr(S) = 1$$
- Aksiooma (iii), *äärellinen additiivisuus:*  
$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$
- Aksiooma (iii) on *toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusääntö*.

## Todennäköisyyden aksioomat: Kommentteja 2/2

---

- Aksioomien (i)-(iii) olennaisena sisältönä on siis se, että *todennäköisyys on mitta* matematiikan tarkoittamassa mielessä.
- Todennäköisyyslaskentaa voidaan pitää matemaattisen *mittateorian* osana.
- Aksioomien (i)-(iii) mukaan todennäköisyysmitalla on samat ominaisuudet kuin *pinta-alamitalla* paitsi, että todennäköisyysmitta on *normeerattu* niin, että sen yläraja on 1.

## Tapahtumien todennäköisyydet äärellisessä otosavaruudessa

---

- Äärellisen otosavaruuden tapahtumista voidaan muodostaa *uusia tapahtumia* soveltamalla *Boolean algebran aksiomia* ja niistä johdettuja joukko-opin laskusääntöjä.
- Uusien tapahtumien *todennäköisyydet* saadaan soveltamalla *äärellisen otosavaruuden todennäköisyyden aksiomia* ja niistä johdettuja todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä.

## Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

# Äärelliset todennäköisyyskentät

---

- Kolmikko

$$(S, \mathcal{F}, \Pr)$$

muodostaa **äärellisen todennäköisyyskentän**, jos seuraavat ehdot pätevät:

- (i) *Otosavaruus*  $S$  on äärellinen.
- (ii) Joukkoperhe  $\mathcal{F}$  on jokin joukon  $S$  osajoukkojen muodostama *Boolean algebra*.
- (iii) Joukkofunktio  $\Pr$  on Boolean algebraan  $\mathcal{F}$  kuuluville otosavaruuden  $S$  osajoukoille määritelty äärellisen otosavaruuden *todennäköisyysmitta*.

## Todennäköisyyden aksiomat äärellisissä otosavaruuksissa

# Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen todistaminen

---

- *Todistetaan* seuraavat todennäköisyyslaskennan laskusäännöt todennäköisyyden aksiomista lähtien:
  - (i) **Mahdottoman tapahtuman** todennäköisyys.
  - (ii) **Komplementtitapahtuman** todennäköisyys.
  - (iii) **Osajoukon** todennäköisyys.
  - (iv) **Yleinen yhteenlaskusääntö**.

## Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

# Mahdottoman tapahtuman todennäköisyys

---

- Olkoon  $S$  äärellinen otosavaruus.
- Olkoon  $\emptyset$  *mahdoton tapahtuma*.
- Tällöin

$$\Pr(\emptyset) = 0$$



## Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

# Mahdottoman tapahtuman todennäköisyys: Perustelu

---

- Olkoon  $F$  otosavaruuden  $S$  osajoukoille määritelty Boolean algebra.
- Olkoon  $\emptyset$  *mahdoton tapahtuma*.
- Tällöin

$$\emptyset \in F$$

- Joukot  $\emptyset$  ja  $S$  muodostavat otosavaruuden  $S$  *osituksen*:

$$\emptyset \cup S = S$$

$$\emptyset \cap S = \emptyset$$

- Todennäköisyyden *aksiomien* (i) ja (iii) mukaan

$$1 = \Pr(S) = \Pr(\emptyset \cup S) = \Pr(\emptyset) + \Pr(S) = \Pr(\emptyset) + 1$$

josta välttämättä seuraa

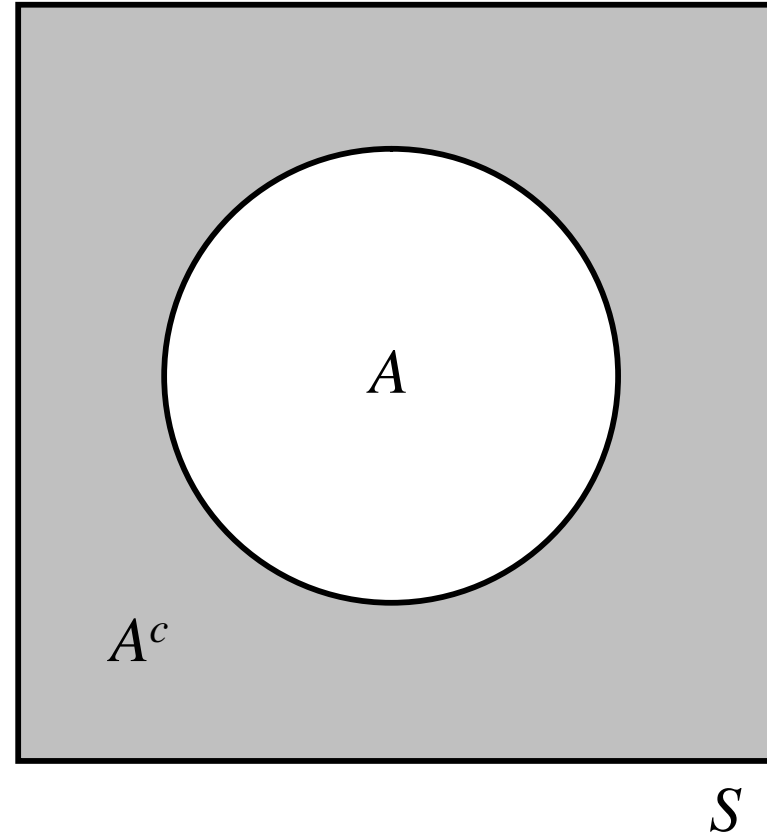
$$\Pr(\emptyset) = 0$$

# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Komplementtitapahtuman todennäköisyys

- Olkoon  $A$  äärellisen otosavaruuden  $S$  tapahtuma.
- Tällöin tapahtuman  $A$  komplementtitapahtuman  $A^c$  todennäköisyydelle pätee:

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$$



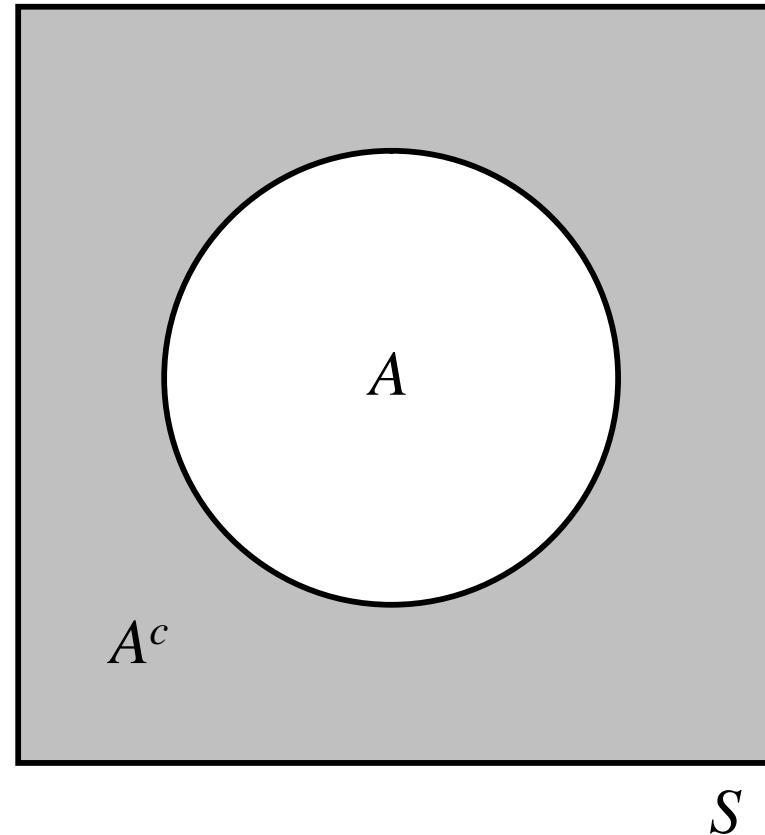
# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Komplementtitapahtuman todennäköisyys:

### Perustelu 1/2

---

- Olkoon  $\mathcal{F}$  otosavaruuden  $S$  osajoukoille määritelty Boolean algebra.
- Väite:  
 $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$
- Boolean algebran aksiooman (ii) mukaan  
 $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- Joukot  $A$  ja  $A^c$  muodostavat otosavaruuden  $S$  osituksen:  
 $A \cup A^c = S$   
 $A \cap A^c = \emptyset$



# Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

## Komplementtitapahtuman todennäköisyys:

### Perustelu 2/2

---

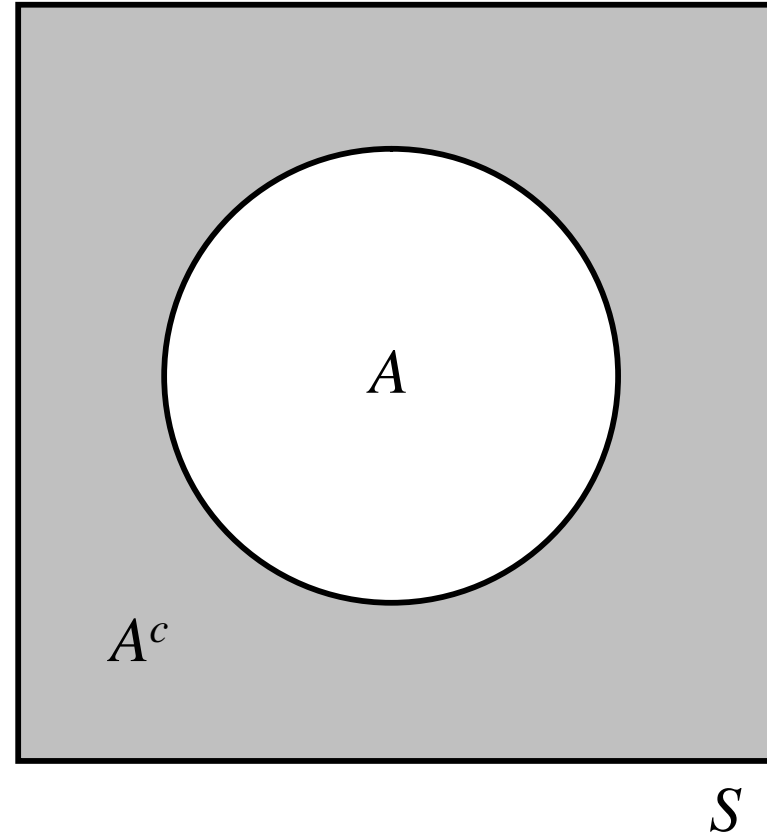
- Todennäköisyyden *aksiomien* (i) ja (iii) mukaan

$$1 = \Pr(S)$$

$$= \Pr(A \cup A^c)$$

$$= \Pr(A) + \Pr(A^c)$$

josta väite seuraa.

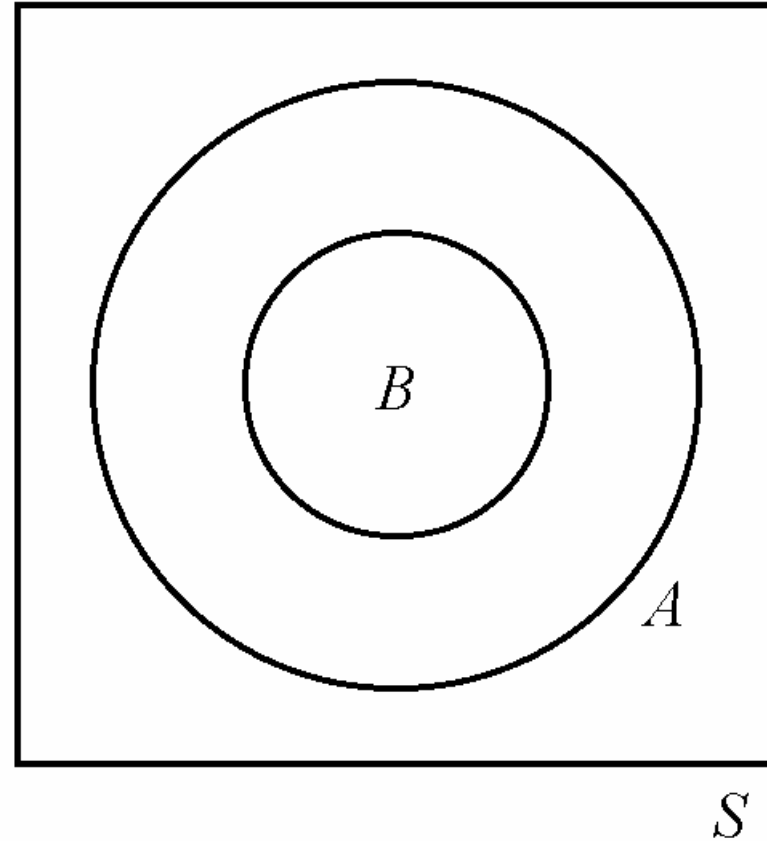


## Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

### Osajoukon todennäköisyys

---

- Olkoot  $A$  ja  $B$  äärellisen otosavaruuden  $S$  tapahtumia.
- Olkoon  $B \subset A$ .
- Tällöin pätee:  
$$\Pr(B) \leq \Pr(A)$$



## Osajoukon todennäköisyys:

### Perustelu 1/2

- Olkoon  $\mathcal{F}$  otosavaruuden  $S$  osajoukoille määritelty Boolean algebra.

- Väite:

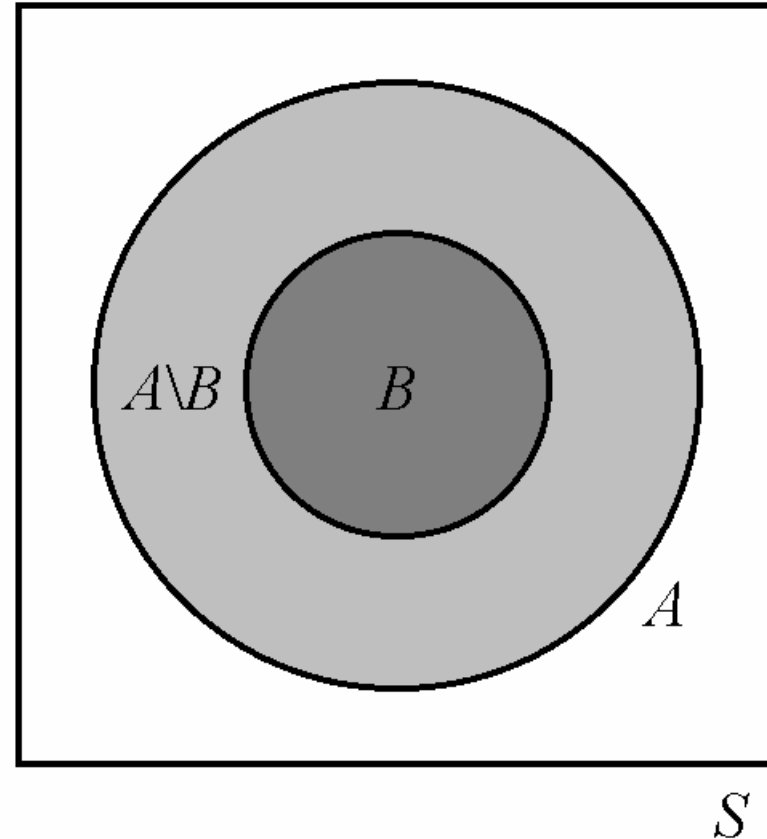
$$A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}, B \subset A \Rightarrow$$

$$\Pr(B) \leq \Pr(A)$$

- Leikkaus- tai erotusjoukkoa koskevan tuloksen mukaan

$$A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F} \Rightarrow$$

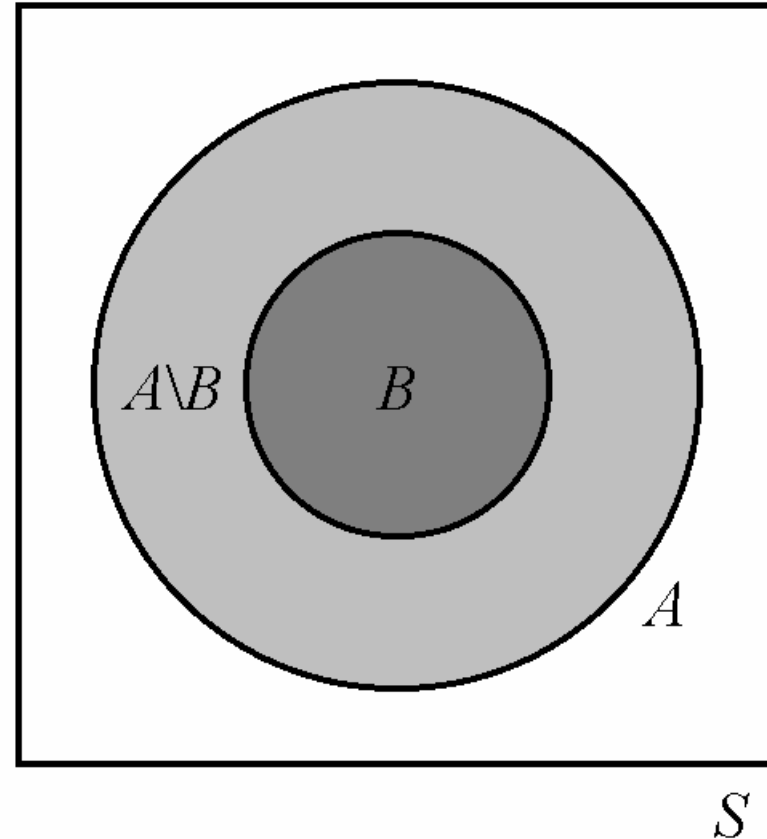
$$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$$



## Osajoukon todennäköisyys:

### Perustelu 2/2

- Koska  $B \subset A$ , joukot  $B$  ja  $A \setminus B$  muodostavat joukon  $A$  osituksen:  
 $B \cup (A \setminus B) = A$   
 $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$
- Aksioomien (ii) ja (iii) mukaan  
 $\Pr(A) = \Pr(B) + \Pr(A \setminus B) \geq \Pr(B)$   
mikä oli väite.

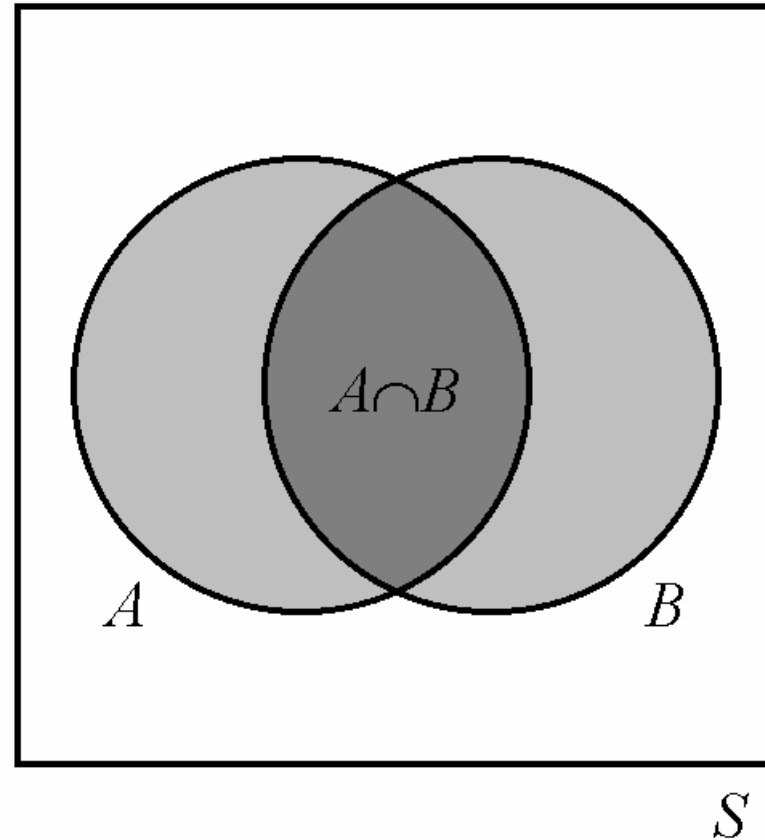


## Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

# Yleinen yhteenlaskusääntö

- Olkoot  $A$  ja  $B$  äärellisen otosavaruuden  $S$  tapahtumia.
- Tällöin pätee *yleinen yhteenlaskusääntö*:

$$\Pr(A \cup B) \\ = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$





## Yleinen yhteenlaskusääntö:

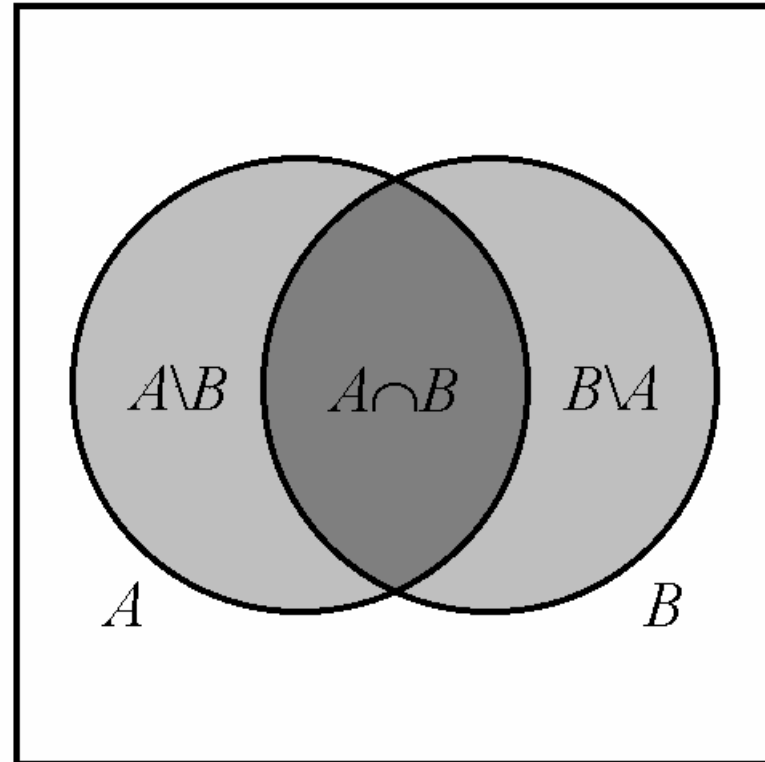
### Perustelu 1/3

- Olkoon  $\mathcal{F}$  otosavaruuden  $S$  osajoukoille määritelty Boolean algebra.
- Väite:  
 $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F} \Rightarrow$   
 $\Pr(A \cup B)$   
 $= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$
- Boolean algebran aksiooman (iii) sekä leikkaus- ja erotusjoukkoja koskevien tuloksien mukaan

$$A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F} \Rightarrow$$

$$A \cup B \in \mathcal{F}, A \cap B \in \mathcal{F}$$

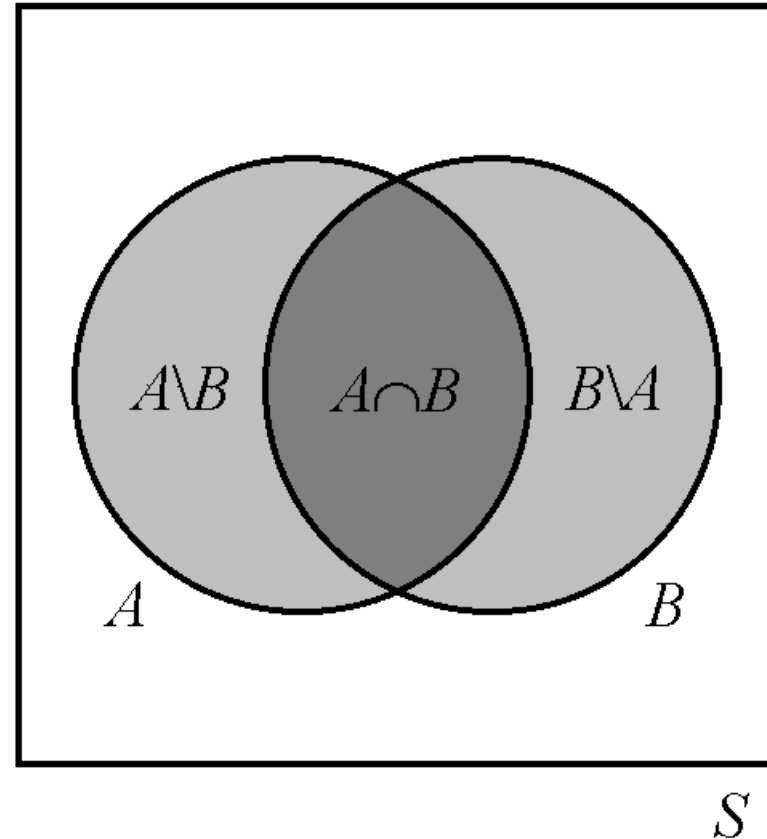
$$A \setminus B \in \mathcal{F}, B \setminus A \in \mathcal{F}$$



## Yleinen yhteenlaskusääntö:

### Perustelu 2/3

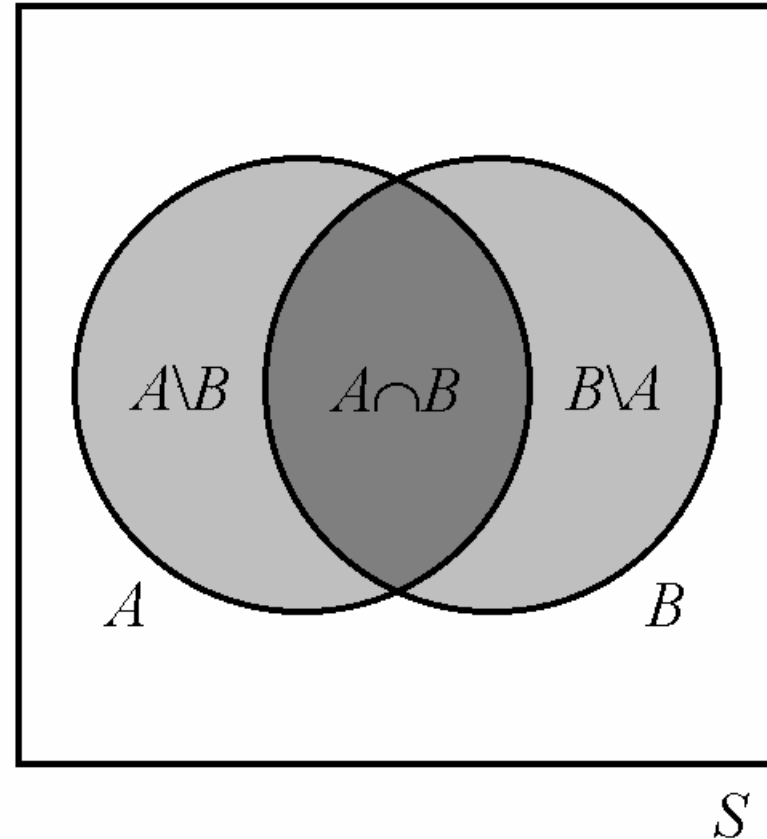
- Joukot  $A$  ja  $B \setminus A$  muodostavat joukon  $A \cup B$  osituksen:
  - (1)  $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$   
 $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$
- Joukot  $A \cap B$  ja  $B \setminus A$  muodostavat joukon  $B$  osituksen:
  - (2)  $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$   
 $(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$



## Yleinen yhteenlaskusääntö:

### Perustelu 3/3

- Osituksesta (1) ja *aksiomasta* (iii) seuraa:  
(3)  $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B \setminus A)$
- Osituksesta (2) ja *aksiomasta* (iii) seuraa:  
(4)  $\Pr(B) = \Pr(A \cap B) + \Pr(B \setminus A)$
- Ratkaisemalla  $\Pr(B \setminus A)$  yhtälöstä (4) ja sijoittamalla ratkaisu yhtälöön (3) saadaan väite:  
 $\Pr(A \cup B)$   
 $= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$



# Todennäköisyyden aksioomat

---

**Todennäköisyyden määrittely**

**Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa**

**>> Klassinen todennäköisyys, suhteellinen frekvenssi ja ehdollinen todennäköisyys**

**Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa**

Klassinen todennäköisyys ja suhteellinen frekvenssi

## Klassinen todennäköisyys ja suhteellinen frekvenssi todennäköisyyksinä

---

- Osoitamme, että *klassinen todennäköisyys ja suhteellinen frekvenssi* toteuttavat – sopivasti määriteltyinä – äärellisen otosavaruuden todennäköisyyden aksioomat.
- Siten klassista todennäköisyyttä ja suhteellista frekvenssiä voidaan pitää todennäköisyyden *tulkintoina*.

## Klassinen todennäköisyys: Määritelmä 1/2

---

- Olkoon  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  johonkin satunnaiskokeeseen liittyvä äärellinen *otosavaruus*, jossa on  $n = n(S)$  alkeistapahtumaa.
- Oletetaan, että otosavaruuden  $S$  alkeistapahtumat ovat *symmetrisiä* eli yhtä todennäköisiä.
- Tällöin

$$\Pr(s_i) = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n$$

- Olkoon  $A = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_k}\} \subset S$  *tapahtuma*, jossa on  $k = n(A)$  alkeistapahtumaa, joita sanotaan tapahtumalle  $A$  *suotuisiksi*.

## Klassinen todennäköisyys: Määritelmä 2/2

---

- Määritellään tapahtuman  $A$  **klassinen todennäköisyys**  $\Pr_c(A)$  kaavalla

$$\Pr_c(A) = \frac{k}{n}$$

jossa siis

$$k = n(A)$$

$$n = n(S)$$

- Klassinen todennäköisyys  $\Pr_c(A)$  toteuttaa todennäköisyyden aksioomat (i)-(iii), joten **klassinen todennäköisyys on todennäköisyys**.

## Klassinen todennäköisyys

# Klassisen todennäköisyyden määritelmä: Perustelu

---

- Olkoon

$$A = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_k}\} \subset S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

- Tällöin

$$A = \{s_{i_1}\} \cup \{s_{i_2}\} \cup \dots \cup \{s_{i_k}\}$$

ja lisäksi alkeistapahtumat

$$s_{i_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

ovat *pareittain toisensa poissulkevia*.

- Koska alkeistapahtumat  $s_1, s_2, \dots, s_n$  on oletettu *symmetrisiksi*, todennäköisyyden aksioomasta (iii) seuraa:

$$\Pr(A) = \Pr(s_{i_1}) + \Pr(s_{i_2}) + \dots + \Pr(s_{i_k}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \Pr_c(A)$$

$k$  kpl



## Klassinen todennäköisyys

# Klassinen todennäköisyys on todennäköisyys: Perustelu 1/2

---

- Todistetaan, että klassinen todennäköisyys  $\Pr_c(\cdot)$  toteuttaa todennäköisyyden aksioomat.

- Aksioma (i):

Koska  $n(S) = n$ , niin

$$\Pr_c(S) = n/n = 1$$

- Aksioma (ii):

Kaikille tapahtumille  $A \subset S$  pätee

$$0 \leq n(A) = k \leq n = n(S)$$

Siten

$$0 \leq \Pr_c(A) = k/n \leq 1$$

## Klassinen todennäköisyys

# Klassinen todennäköisyys on todennäköisyys: Perustelu 2/2

---

- Aksioma (iii):

Jos tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat *toisensa poissulkevia* eli, jos  $A \cap B = \emptyset$ ,  
niin

$$k_{A \cup B} = k_A + k_B$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \Pr_c(A \cup B) &= \frac{k_{A \cup B}}{n} = \frac{k_A + k_B}{n} \\ &= \frac{k_A}{n} + \frac{k_B}{n} \\ &= \Pr_c(A) + \Pr_c(B) \end{aligned}$$

## Suhteellinen frekvenssi

# Suhteellinen frekvenssi: Määritelmä

---

- Olkoon  $S$  johonkin satunnaiskokeeseen liittyvä äärellinen *otosavaruus*.
- Olkoon  $A \subset S$  *tapahtuma* otosavaruudessa  $S$ .
- Toistetaan satunnaiskoetta  $n$  kertaa.
- Olkoon  $f_A$  tapahtuman  $A$  *frekvenssi* koetoistojen joukossa.
- Tällöin

$$\frac{f_A}{n}$$

on tapahtuman  $A$  **suhteellinen frekvenssi**.

## Suhteellinen frekvenssi on todennäköisyys

---

- Käytetään tapahtuman  $A$  suhteelliselle frekvenssille  $f_A/n$  merkintää:

$$\Pr_f(A) = \frac{f_A}{n}$$

- Suhteellinen frekvenssi  $\Pr_f(A)$  toteuttaa todennäköisyyden aksioomat (i)-(iii), joten **suhteellinen frekvenssi on todennäköisyys**.

## Suhteellinen frekvenssi

# Suhteellinen frekvenssi on todennäköisyys: Perustelu 1/2

---

- Todistetaan, että suhteellinen frekvenssi  $\Pr_f(\cdot)$  toteuttaa todennäköisyyden aksioomat.
- Toistetaan satunnaiskoetta  $n$  kertaa.
- Aksioma (i):

Koska otosavaruus  $S$  on *varma tapahtuma* eli  $S$  sattuu jokaisessa koetoistossa, niin

$$f_S = n$$

Siten

$$\Pr_f(S) = f_S/n = n/n = 1$$

- Aksioma (ii):

Kaikille tapahtumille  $A \subset S$  pätee  $0 \leq f_A \leq n$ .

Siten

$$0 \leq \Pr_f(A) = f_A/n \leq 1$$

## Suhteellinen frekvenssi

# Suhteellinen frekvenssi on todennäköisyys: Perustelu 2/2

---

- Aksioma (iii):

Jos tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat *toisensa poissulkevia* eli, jos  $A \cap B = \emptyset$ ,  
niin

$$f_{A \cup B} = f_A + f_B$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \Pr_f(A \cup B) &= \frac{f_{A \cup B}}{n} = \frac{f_A + f_B}{n} \\ &= \frac{f_A}{n} + \frac{f_B}{n} \\ &= \Pr_f(A) + \Pr_f(B) \end{aligned}$$

## Empiirinen todennäköisyys

---

- Jos tapahtuman  $A$  suhteellinen frekvenssi

$$\Pr_f(A) = \frac{f_A}{n}$$

lähestyy toistokokeiden lukumäärän  $n$  rajatta kasvaessa jotakin kiinteätä lukua  $p$ , sanotaan lukua  $p$  tapahtuman  $A$  **empiiriseksi todennäköisyydeksi**.

- Jos siis  $p$  on tapahtuman  $A$  empiirinen todennäköisyys, niin

$$\Pr_f(A) = \frac{f_A}{n} \rightarrow p, \text{ kun } n \rightarrow +\infty$$

## Todennäköisyyden frekvenssitulkinta

---

- Oletetaan, että tapahtuman  $A$  todennäköisyys on  $p$ .
- Toistetaan sitä satunnaiskoetta, johon tapahtuma  $A$  liittyy,  $n$  kertaa.
- **Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan** mukaan tapahtuman  $A$  suhteellinen frekvenssi

$$\Pr_f(A) = \frac{f_A}{n}$$

*vaihtelee satunnaisesti koetoistosta toiseen, mutta saa keskimäärin tapahtuman todennäköisyyttä  $p$  lähellä olevia arvoja.*



## Ehdollinen todennäköisyys todennäköisyytenä

---

- Seuraavassa osoitetaan, että *ehdollinen todennäköisyys* toteuttaa äärellisen otosavaruuden todennäköisyyden aksioomat.
- Siten ehdollista todennäköisyyttä voidaan pitää todennäköisyyden käsitteen *laajennuksena*.

## Ehdollinen todennäköisyys: Määritelmä

---

- Olkoon  $S$  johonkin satunnaiskokeeseen liittyvä äärellinen *otosavaruus*.
- Olkoot  $A \subset S$  ja  $C \subset S$  *tapahtumia* ja  $\Pr(C) \neq 0$ .
- Määritellään tapahtuman  $A$  **ehdollinen todennäköisyys**  $\Pr(A|C)$  kaavalla

$$\Pr(A|C) = \frac{\Pr(A \cap C)}{\Pr(C)}$$

- Ehdollinen todennäköisyys  $\Pr(A|C)$  toteuttaa todennäköisyyden aksioomat (i)-(iii), joten **ehdollinen todennäköisyys on todennäköisyys**.

## Ehdollinen todennäköisyys

# Ehdollinen todennäköisyys on todennäköisyys: Perustelu 1/3

---

- Todistetaan, että ehdollinen todennäköisyys  $\Pr(\cdot / \cdot)$  toteuttaa todennäköisyyden aksioomat.

- Aksioma (i):

Kaikille tapahtumille  $C \subset S$  pätee  $S \cap C = C$ .

Siten

$$\Pr(S|C) = \frac{\Pr(S \cap C)}{\Pr(C)} = \frac{\Pr(C)}{\Pr(C)} = 1$$

- Aksioma (ii):

Kaikille tapahtumille  $A \subset S$  ja  $C \subset S$  pätee  $A \cap C \subset C$ , joten

$$0 \leq \Pr(A \cap C) \leq \Pr(C).$$

Siten

$$0 \leq \Pr(A|C) = \frac{\Pr(A \cap C)}{\Pr(C)} \leq \frac{\Pr(C)}{\Pr(C)} = 1$$

Ehdollinen todennäköisyys

## Ehdollinen todennäköisyys on todennäköisyys: Perustelu 2/3

---

- Aksioma (iii):

Kaikille joukoille  $A$ ,  $B$  ja  $C$  pätee *distribuutilaki*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Jos tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat *toisensa poissulkevia* eli, jos  $A \cap B = \emptyset$ ,  
niin kaikille  $C \subset S$  pätee

$$(A \cap C) \cap (B \cap C) = \emptyset$$

Ehdollinen todennäköisyys

## Ehdollinen todennäköisyys on todennäköisyys: Perustelu 3/3

---

Tällöin

$$\begin{aligned}\Pr(A \cup B | C) &= \frac{\Pr((A \cup B) \cap C)}{\Pr(C)} \\ &= \frac{\Pr((A \cap C) \cup (B \cap C))}{\Pr(C)} \\ &= \frac{\Pr(A \cap C)}{\Pr(C)} + \frac{\Pr(B \cap C)}{\Pr(C)} \\ &= \Pr(A | C) + \Pr(B | C)\end{aligned}$$

# Todennäköisyyden aksioomat

---

**Todennäköisyyden määrittelemine**

**Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa**

**Klassinen todennäköisyys, suhteellinen frekvenssi ja ehdollinen todennäköisyys**

**>> Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa**

## Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

# Äärettömät otosavaruudet

---

- Äärellisille otosavaruuksille esitetyt aksioomat eivät sellaisenaan kelpaa *äärettömille otosavaruuksille*:
- Tämä johtuu seuraavista seikoista:
  - (i) *Äärettömän* otosavaruuden tapauksessa kaikki otosavaruuden osajoukot *eivät välttämättä kelpaa* tapahtumiksi.
  - (ii) *Äärellisen* otosavaruuden aksiooma (iii) on *äärettömän* otosavaruuden tapauksessa korvattava aksioomalla, joka sallii *äärettömän monen* pareittain toisensa poissulkevan tapahtuman tarkastelun.

Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

**$\sigma$ -algebra:**

**Määritelmä 1/2**

---

- Olkoon  $S$  joukko.
- Olkoon  $\mathbf{F}$  *jokin* joukon  $S$  osajoukkojen muodostama *joukkoperhe*.
- Jos siis joukko  $A$  on joukkoperheen  $\mathbf{F}$  alkio, niin  $A$  on joukon  $S$  osajoukko:

$$A \in \mathbf{F} \Rightarrow A \subset S$$



## $\sigma$ -algebra:

### Määritelmä 2/2

---

- Joukkoperhe  $F$  on  **$\sigma$ -algebra**, jos

(i) Tyhjä joukko  $\emptyset$  on joukkoperheen  $F$  alkio:

$$\emptyset \in F$$

(ii) Jos joukko  $A$  on joukkoperheen  $F$  alkio, niin sen *komplementti*  $A^c$  on joukkoperheen  $F$  alkio:

$$A \in F \Rightarrow A^c \in F$$

(iii) Jos joukot  $A_1, A_2, A_3, \dots$  ovat joukkoperheen  $F$  alkioita, niin niiden *yhdiste*  $\cup A_i$  on joukkoperheen  $F$  alkio:

$$A_1, A_2, A_3, \dots \in F \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$$

# Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

## $\sigma$ -algebrat ja joukko-opin operaatiot 1/2

---

- Olkoon  $F$  joukossa  $S$  määritelty  $\sigma$ -algebra.

- Olkoot

$$A_i \in F, i = 1, 2, 3, K$$

- Suoraan  $\sigma$ -algebran aksioomien mukaan joukkojen  $A_i$  komplementit ja niiden yhdiste  $\cup A_i$  ovat joukkoperheen  $F$  alkioita:

$$A_i^c \in F, i = 1, 2, 3, K \quad \text{ja} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$$

- Lisäksi voidaan osoittaa, että joukkojen  $A_i$  leikkaus  $\cap A_i$  on joukkoperheen  $F$  alkio:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$$

## Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

### $\sigma$ -algebrat ja joukko-opin operaatiot 2/2

---

- $\sigma$ -algebrat ovat siis *suljettuja* numeroituvan monen tavanomaisen joukko-opin operaation suhteen.
- Tällä tarkoitetaan siitä, että *numeroituva* määrä tavanomaisia joukko-opin operaatioita *ei vie*  $\sigma$ -algebran *ulkopuolelle*:

Jos  $\sigma$ -algebran  $F$  joukkoihin sovelletaan *korkeintaan* *numeroituva määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita *komplementti, yhdiste, leikkaus* ja *erotus*, niin tuloksena saatavat joukot kuuluvat edelleen  $\sigma$ -algebraan  $F$ .

## Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa $\sigma$ -algebrat ja Boolean algebrat

---

- Jos joukon  $S$  osajoukkojen perhe  $\mathcal{F}$  toteuttaa  $\sigma$ -algebran aksioomat, niin se toteuttaa myös *Boolean algebran* aksioomat.
- Jokainen Boolean algebran aksioomista johdettu *joukko-opin sääntö* pätee myös  $\sigma$ -algebroidille.

Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa  
**Kolmogorovin aksioomat todennäköisyydelle 1/2**

---

- Olkoon  $S$  otosavaruus ja  $\mathcal{F}$  jokin joukon  $S$  osajoukkojen *perhe*, joka muodostaa  $\sigma$ -algebran.
- Olkoon  $\Pr$  joukkofunktio, joka liittää jokaiseen  $\sigma$ -algebraan  $\mathcal{F}$  kuuluvaan otosavaruuden  $S$  osajoukkoon  $A$  reaaliluvun  $\Pr(A)$ .
- Jos siis  $A \in \mathcal{F}$ , niin  $\Pr(A) \in \mathbb{R}$ .

## Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

# Kolmogorovin aksioomat todennäköisyydelle 2/2

---

- Joukkofunktio  $\Pr$  on **todennäköisyys**, jos

(i)  $\Pr(S) = 1$

(ii)  $0 \leq \Pr(A) \leq 1$  kaikille  $A \in \mathcal{F}$

(iii)  $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$  ja  $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \Rightarrow$

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i)$$

## Kolmogorovin aksioomat: Kommentteja 1/2

---

- Kolmogorovin aksioomien (i)-(iii) mukaan *todennäköisyys*  $\Pr$  on *positiivinen, täydellisesti additiivinen ja normeerattu mitta*.
- Aksioomat (i) ja (ii), *normeeraus ja positiivisuus*:  
$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow 0 \leq \Pr(A) \leq \Pr(S) = 1$$
- Aksiooma (iii), *täydellinen additiivisuus*:  
Jos  $A_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  ja  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , niin  
$$\Pr(\cup A_i) = \sum \Pr(A_i)$$
- Aksiooma (iii) on *pareittain toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusääntö*.

## Kolmogorovin aksioomat: Kommentteja 2/2

---

- Aksioomien (i)-(iii) olennaisena sisältönä on siis se, että *todennäköisyys on mitta* matematiikan tarkoittamassa mielessä.
- Todennäköisyyslaskentaa voidaan pitää matemaattisen *mittateorian* osana.
- Aksioomien (i)-(iii) mukaan todennäköisyysmitalla on samat ominaisuudet kuin *pinta-alamitalla* paitsi, että todennäköisyysmitta on *normeerattu* niin, että sen yläraja on 1.



Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

## Kolmogorovin aksioomat ja äärellisen otosavaruuden aksioomat

---

- Jos joukkofunktio  $P$  toteuttaa todennäköisyyden aksioomat *äärettömille otosavaruuksille*, niin se toteuttaa todennäköisyyden aksioomat myös *äärellisille otosavaruuksille*.
- Jokainen äärellisen otosavaruuden todennäköisyyden aksioomista johdettu *todennäköisyyden laskusääntö* pätee myös äärettömille otosavaruuksille.

## Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

### Mitallisuus 1/2

---

- Jos  $S$  on *äärellinen* otosavaruus, *kaikille* otosavaruuden  $S$  osajoukoille  $A \subset S$  voidaan *määritellä* todennäköisyys.
- Siten *äärellisen* otosavaruuden  $S$  tapauksessa *kaikki* otosavaruuden osajoukot  $A \subset S$  *kelpaavat* tapahtumiksi.
- Jos  $S$  on *ääretön* otosavaruus, *kaikille* otosavaruuden  $S$  osajoukoille  $A \subset S$  *ei voida välttämättä määritellä* todennäköisyyttä.
- Siten *äärettömän* otosavaruuden  $S$  tapauksessa *kaikki* otosavaruuden osajoukot  $A \subset S$  *eivät välttämättä kelpaa* tapahtumiksi.

## Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

### Mitallisuus 2/2

---

- Sellaisia otosavaruuden  $S$  osajoukkoja  $A \subset S$ , joille *voidaan* määritellä todennäköisyys sanotaan **mitallisiksi**.
- Sellaisia otosavaruuden  $S$  osajoukkoja  $A \subset S$ , joille *ei voida* määritellä todennäköisyyttä sanotaan **epämitallisiksi**.
- Voidaan osoittaa, että otosavaruuden  $S$  *mitallisten osajoukkojen perhe* muodostaa  $\sigma$ -algebran.

## Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

# Mitallisuus ja reaalilukujen joukko 1/2

---

- Jos otosavaruutena  $S$  on *reaalilukujen joukko* , mm. kaikki reaaliakselin *välit* sekä *avoimet* ja *suljetut joukot* ovat mitallisia ja kelpaavat tapahtumiksi.
- Voidaan osoittaa, että reaalilukujen joukolla on todennäköisyysmitan suhteen *epämitallisia osajoukkoja*, jotka eivät kelpaa tapahtumiksi.

## Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

### Mitallisuus ja reaalilukujen joukko 2/2

---

- *Kaikki* reaalilukujen joukon todennäköisyyksien suhteen *mitalliset osajoukot* saadaan tyyppiä

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq b\}$$

olevista puoliavoimista väleistä soveltamalla niihin *korkeintaan numeroituva määrä* komplementti-, yhdiste- ja leikkausoperaatiota.

- Muotoa  $(-\infty, b]$  olevat reaaliakselin välit *virittävät* reaalilukujen joukon mitallisten osajoukkojen muodostaman  $\sigma$ -algebran.
- Tähän tulokseen perustuu *kertymäfunktion* keskeinen asema *matemaattisessa tilastotieteessä*; ks. lukua **Kertymäfunktio**.

## Tapahtumien todennäköisyydet äärettömässä otosavaruudessa

---

- Otosavaruuden mitallisista osajoukoista eli tapahtumista voidaan muodostaa *uusia* mitallisia osajoukkoja eli tapahtumia soveltamalla  *$\sigma$ -algebran aksioomia* ja niistä johdettuja joukko-opin sääntöjä.
- Uusien tapahtumien *todennäköisyydet* saadaan soveltamalla *Kolmogorovin aksioomia* ja niistä johdettuja todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä.

# Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

## Todennäköisyyskentät

---

- Kolmikko

$$(S, \mathcal{F}, \text{Pr})$$

muodostaa **todennäköisyyskentän**, jos seuraavat ehdot pätevät:

- (i)  $S$  on *joukko*.
- (ii) Joukkoperhe  $\mathcal{F}$  muodostaa  $\sigma$ -*algebran* joukossa  $S$ .
- (iii) Joukkofunktio  $\text{Pr}$  on  $\sigma$ -algebraan  $\mathcal{F}$  kuuluville joukon  $S$  osajoukoille määritelty *todennäköisyysmitta*, joka toteuttaa Kolmogorovin aksioomat.

## Lause 1

---

- Olkoon  $(S, \mathcal{F}, \Pr)$  todennäköisyyskenttä ja  $A_1, A_2, A_3, K \in \mathcal{F}$ .

Tällöin pätee:

- (i) Jos  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset L$  , niin

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n)$$

- (ii) Jos  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset L$  , niin

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n)$$



## Lause 1:

### Todistus kohdalle (i) – 1/4

- Määritellään

$$B_0 = A_0 = \emptyset$$

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$

$$B_3 = A_3 \setminus A_2$$

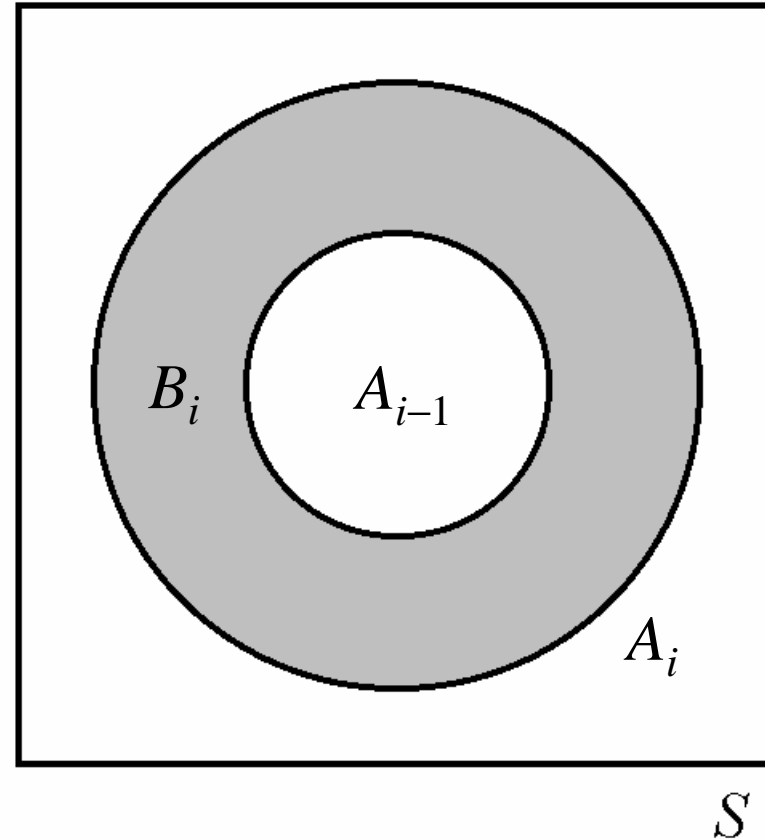
└

ja yleisesti

$$B_i = A_i \setminus A_{i-1} = A_i \cap A_{i-1}^c, i = 1, 2, 3, \dots$$

- Joukot  $B_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  ovat *pareittain toisensa poissulkevia*, koska oletuksen mukaan

$$A_{i-1} \subset A_i, i = 1, 2, 3, \dots$$



## Lause 1:

### Todistus kohdalle (i) – 2/4

- Oletuksesta

$$A_{i-1} \subset A_i, i = 1, 2, 3, \dots$$

seuraa:

$$\begin{aligned} \Pr(B_i) &= \Pr(A_i \setminus A_{i-1}) \\ &= \Pr(A_i) - \Pr(A_{i-1}) \end{aligned}$$

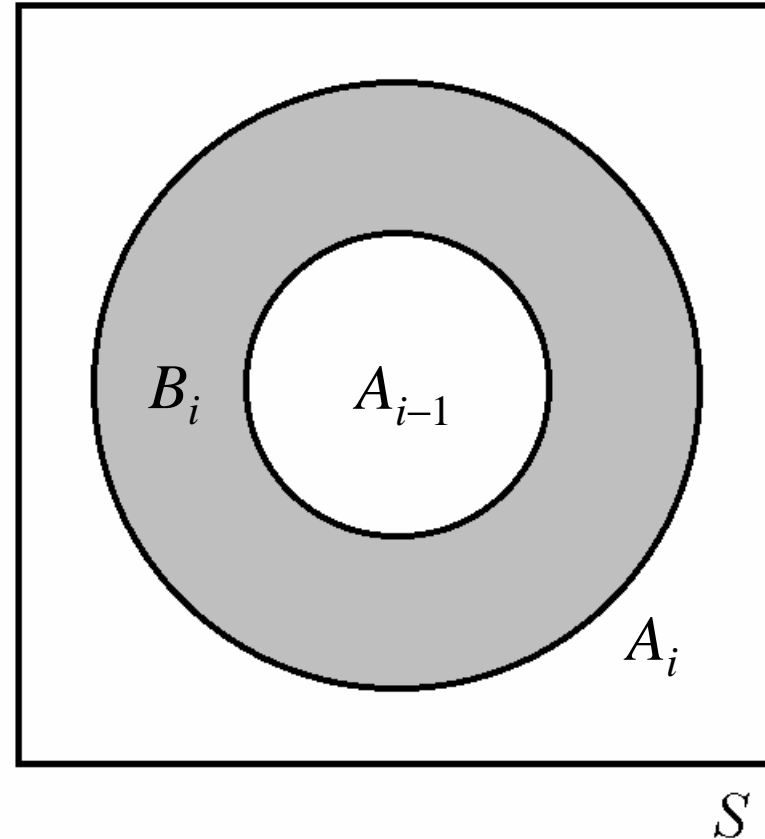
$$i = 1, 2, 3, \dots$$

- Lisäksi on selvää, että

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

- Siten

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$



## Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

### Lause 1:

### Todistus kohdalle (i) – 3/4

---

- Koska joukot  $B_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  ovat pareittain toisensa poissulkevia, *Kolmogorovin aksioomasta* (iii) seuraa:

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(B_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \Pr(B_i)$$

- Sijoittamalla tähän  $\Pr(B_i) = \Pr(A_i) - \Pr(A_{i-1})$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  saadaan

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \Pr(B_i) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \Pr(A_1) + \Pr(A_2) - \Pr(A_1) \right. \\ &\quad \left. + \Pr(A_3) - \Pr(A_2) \right. \\ &\quad \left. \vdots \right. \\ &\quad \left. + \Pr(A_{n-1}) - \Pr(A_{n-2}) \right. \\ &\quad \left. + \Pr(A_n) - \Pr(A_{n-1}) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n) \end{aligned}$$

## Lause 1:

### Todistus kohdalle (i) – 4/4

---

- Yhdistämällä edellä johdetut tulokset saadaan lopulta:

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n)$$

## Lause 1:

### Todistus kohdalle (ii) – 1/3

---

- Määritellään

$$C_0 = S$$

$$C_1 = A_1^c$$

$$C_2 = A_2^c$$

$$C_3 = A_3^c$$

⋮

ja yleisesti

$$C_i = A_i^c, i = 1, 2, 3, \dots, K$$

- Oletuksesta  $A_{i-1} \supset A_i, i = 1, 2, 3, \dots$  seuraa:

$$C_{i-1} = A_{i-1}^c \subset A_i^c = C_i, i = 1, 2, 3, \dots, K$$

## Lause 1:

### Todistus kohdalle (ii) – 2/3

---

- Sovelletaan joukkoihin  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  Lauseen 1 kohtaa (i):

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(C_n)$$

- Koska  $C_i = A_i^c$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , niin

$$\Pr(C_i) = \Pr(A_i^c) = 1 - \Pr(A_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

- *DeMorganin lain* mukaan

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)^c = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

- *Komplementtitapahtuman todennäköisyyden* kaavan mukaan

$$\Pr\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)^c\right] = 1 - \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)$$

## Lause 1:

### Todistus kohdalle (ii) – 3/3

---

- Yhdistämällä edellä johdetut tulokset saadaan lopulta:

$$\begin{aligned}\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \Pr\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)^c\right] \\ &= 1 - \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(C_n) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} [1 - \Pr(A_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n)\end{aligned}$$

## Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

### Lause 2

---

- Olkoon  $(S, \mathcal{F}, \Pr)$  todennäköisyyskenttä ja  $A_1, A_2, A_3, K \in \mathcal{F}$ .
- Jos  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \rightarrow \emptyset$ , niin

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n) = 0$$



## Lause 2:

### Todistus

---

- Jos  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \rightarrow \emptyset$ , niin

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$$

- Siten

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \Pr(\emptyset) = 0$$

- Lauseen 1 kohdan (ii) mukaan

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n)$$

- Yhdistämällä nämä tulokset saadaan:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n) = 0$$

## Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

### **Lause 2 ja Kolmogorovin aksioomat**

---

- Voidaan osoittaa, että Kolmogorovin aksiooma

$$(iii) \quad A_1, A_2, A_3, K \in \mathcal{F} \text{ ja } A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \Rightarrow$$

$$\Pr(\cup A_i) = \sum \Pr(A_i)$$

on yhtäpitävä aksioomien

$$(iii)' \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow \Pr(A_1 \cup A_2) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2)$$

$$(iv) \quad A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \rightarrow \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(A_n) = 0$$

kanssa.

- Aksioomaa (iv) kutsutaan usein todennäköisyyden **jatkuvuusaksioomaksi**.