Ilkka Mellin

Tilastolliset menetelmät

Osa 3: Tilastolliset testit

Testejä suhdeasteikollisille muuttujille

Testejä suhdeasteikollisille muuttujille

>> Testit normaalijakauman parametreille

Yhden otoksen *t*-testi

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A:
Yleinen tapaus

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi B:
Yhtä suurten varianssien tapaus

***t*-testi parivertailuille**

Yhden otoksen testi varianssille

Varianssien vertailutesti

Normaalijakauman parametrien tilastolliset testit 1/2

- **Normaalijakauma** on *tilastotieteen tärkein jakauma*.
- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa **parametrein** μ ja σ^2 :

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

- Tällöin

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

on normaalijakauman *odotusarvo* ja

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

on normaalijakauman *varianssi*.
- Parametrit μ ja σ^2 *määräävät täysin normaalijakauman*.

Normaalijakauman parametrien tilastolliset testit 2/2

- *Normaalijakauman parametreja koskevat testit* voidaan jakaa kahteen ryhmään:
  - **Yhden otoksen testit**
  - **Kahden otoksen testit** eli **vertailutestit**
- *Yhden otoksen testeissä* testataan yksinkertaisia nollahypoteeseja, jotka koskevat normaalijakauman odotusarvo- tai varianssiparametria.
- *Kahden otoksen testit* ovat *vertailutestejä*, joilla verrataan kahden normaalijakauman odotusarvo- tai varianssi-parametreja toisiinsa.

Normaalijakauman parametreille tarkoitettujen testien yleinen soveltuvuus 1/2

- **Testejä normaalijakauman odotusarvolle** *sovelletaan usein* myös sellaisissa *tilanteissa, joissa havainnot eivät noudata normaalijakaumaa*.
- Tämä perustuu seuraaviin seikkoihin:

(i) Esitettävät testit odotusarvolle perustuvat havaintojen *aritmeettisiin keskiarvoihin*.

(ii) *Keskeisen raja-arvolauseen* mukaan myös ei-normaalisten havaintojen aritmeettiset keskiarvot noudattavat – tietyin ehdoin – *suurissa otoksissa approksimatiivisesti normaalijakaumaa*.

Normaalijakauman parametreille tarkoitettujen testien yleinen soveltuvuus 2/2

- Sen sijaan **testit normaalijakauman varianssille** *eivät yleensä ole käyttökelpoisia ei-normaalisille havainnoille* ja tilanne ei välttämättä parane suurillakaan havaintojen lukumäärillä.

Tavanomaiset testit normaalijakauman parametreille

- Tarkastelemme seuraavia *testejä normaalijakauman parametreille*:
  - **Yhden otoksen *t*-testi odotusarvolle**
  - **Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A odotusarvoille: Yleinen tapaus**
  - **Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi B: odotusarvoille: Yhtä suurten varianssien tapaus**
  - ***t*-testi parivertailuille**
  - **Yhden otoksen χ^2-testi varianssille**
  - **Kahden riippumattoman otoksen *F*-testi variansseille eli varianssien vertailutesti**

Testejä suhdeasteikollisille muuttujille

Testit normaalijakauman parametreille

>> Yhden otoksen *t*-testi

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A:
Yleinen tapaus

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi B:
Yhtä suurten varianssien tapaus

***t*-testi parivertailuille**

Yhden otoksen testi varianssille

Varianssien vertailutesti

Testausasetelma 1/2

- Olkoon

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  yksinkertainen satunnaisotos perusjoukosta S, joka noudattaa *normaalijakaumaa*

  $$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

- Jakauma riippuu seuraavista parametreista:

  μ = jakauman *odotusarvo*

  σ^2 = jakauman *varianssi*

Testausasetelma 2/2

- Asetetaan normaalijakauman $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ *odotusarvo*- eli *paikkaparametrille* μ *nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$$

- Testausongelma:

  Ovatko havainnot *sopusoinnussa* nollahypoteesin H_0 kanssa?

- Ongelman ratkaisuna on **yhden otoksen *t*-testi**.

Yhden otoksen *t*-testi
Hypoteesit

- *Yleinen hypoteesi* H :

  (i) Havainnot $X_i \quad \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)\,,\; i = 1, 2, \ldots, n$

  (ii) Havainnot X_1 , X_2 , … , X_n ovat *riippumattomia*

- *Nollahypoteesi* H_0 :

  $$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$$

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

  $$\left.\begin{array}{l} \mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0 \\ \mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0 \end{array}\right\} \text{ 1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

  $$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi

- Olkoot

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ja

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

tavanomaiset *harhattomat estimaattorit* parametreille

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu \,,\; i = 1, 2, \ldots , n$$

ja

$$\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 \,,\; i = 1, 2, \ldots , n$$

Testisuure ja sen jakauma

- Määritellään ***t*-testisuure**

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

- *Jos nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$$

pätee, niin testisuure t noudattaa *Studentin t-jakaumaa* vapausastein $(n - 1)$:

$$t \quad t(n-1)$$

Yhden otoksen *t*-testi

Testisuureen jakauma nollahypoteesin H_0 pätiessä: Perustelu 1/2

- Oletetaan, että testin yleinen hypoteesi H ja nollahypoteesi H_0 pätevät:

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n \perp$$

$$X_i \quad \mathrm{N}(\mu_0, \sigma^2) \text{ , } i = 1, 2, \mathrm{K} , n$$

- Koska tällöin (ks. lukua **Otokset ja otosjakaumat**)

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \mathrm{N}\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

niin

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \quad \mathrm{N}(0,1)$$

- Koska standardipoikkeama σ on *tuntematon*, satunnaismuuttujan z lauseke on testisuureena *epäoperationaalinen*.

Yhden otoksen *t*-testi

Testisuureen jakauma nollahypoteesin H_0 pätiessä: Perustelu 2/2

- Jos standardipoikkeama σ korvataan satunnaismuuttujan *z* lausekkeessa vastaavalla *otossuureella*

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

niin saadaan *t-testisuure*

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

joka *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä noudattaa Studentin t-jakaumaa* vapausastein (n – 1):

$$t \sim t(n-1)$$

- Todistus: ks. lukua **Otokset ja otosjakaumat**.

t-testisuure mittaa tilastollista etäisyyttä

- Testisuure

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

mittaa havaintoarvojen aritmeettisen keskiarvon ja nolla-hypoteesin $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$ kiinnittämän odotusarvoparametrin μ arvon μ_0 *tilastollista etäisyyttä*.

- *Mittayksikkönä* on erotuksen $\bar{X} - \mu_0$ standardipoikkeaman

$$\sigma/\sqrt{n}$$

estimaattori, jota määrättäessä on oletettu, että nolla-hypoteesi H_0 pätee.

Testi

- Testisuureen

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

  normaaliarvo = 0, koska *nollahypoteesin* $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$ *pätiessä*

$$\mathrm{E}(t) = 0$$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen *t* arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *hylätään*, jos testin *p*-arvo on *kyllin pieni*.

Testin hylkäysalueen määrääminen 1/4

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

  $$\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$$

  niin *kriittinen arvo* $+t_\alpha$ saadaan ehdosta

  $$\Pr(t \geq +t_\alpha) = \alpha$$

  jossa

  $$t \sim t(n-1)$$

- Testin **hylkäysalue** on tällöin muotoa

  $$(+t_\alpha , +\infty)$$

Testin hylkäysalueen määrääminen 2/4

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$$

niin *kriittinen arvo* $-t_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(t \leq -t_\alpha) = \alpha$$

jossa

$$t \sim t(n-1)$$

- Testin **hylkäysalue** on tällöin muotoa

$$(-\infty\,,\, -t_\alpha)$$

Testin hylkäysalueen määrääminen 3/4

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$$

niin *kriittiset arvot* $-t_{\alpha/2}$ ja $+t_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$\Pr(t \leq -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

$$\Pr(t \geq +t_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

jossa

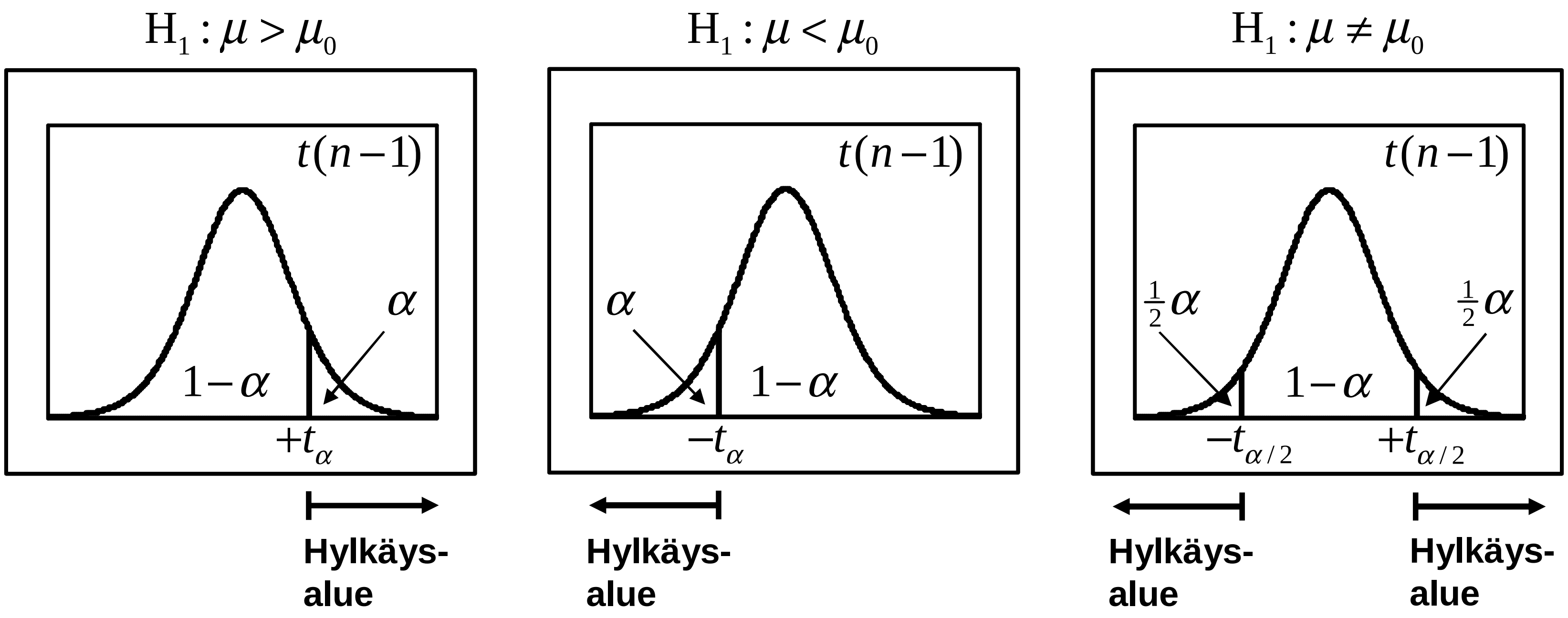
$$t \sim t(n-1)$$

- Testin **hylkäysalue** on tällöin muotoa

$$(-\infty\ , -t_{\alpha}) \cup (+t_{\alpha}\ , +\infty)$$

Testin hylkäysalueen määrääminen 4/4

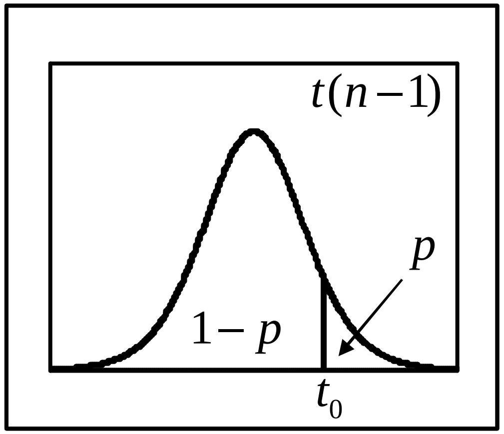
- Oletetaan, että testin *merkitsevyystasoksi* on valittu α.
- Testin **hylkäysalueen** määräämistä voidaan havainnollistaa alla olevilla kuvioilla.



Testin *p*-arvo

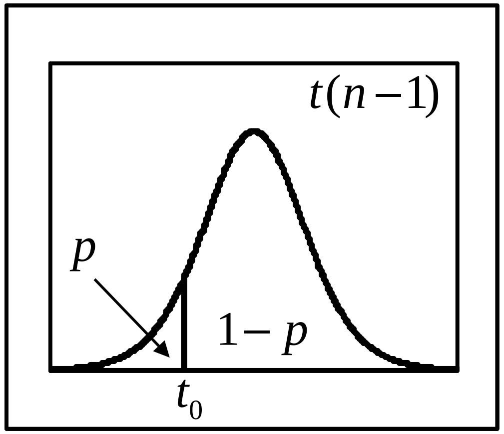
- Olkoon *t-testisuureen* havaittu arvo t_0.
- Testin ***p*-arvon** määräämistä voidaan havainnollistaa alla olevilla kuvioilla.

$\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$



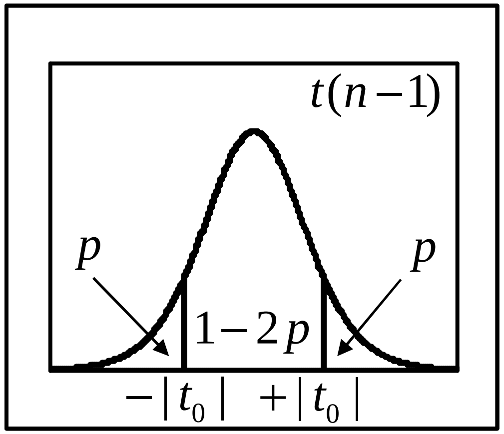
Testin *p*-arvo = *p*

$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$



Testin *p*-arvo = *p*

$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$



Testin *p*-arvo = 2*p*

Yhden otoksen *t*-testi
Normaalisuusoletuksen merkitys 1/2

- Yhden otoksen *t*-testin yleisessä hypoteesissa oletetaan, että havainnot ovat *normaalijakautuneita*.
- *t*-testi *ei* kuitenkaan *ole herkkä poikkeamille normaalisuudesta*, jos havaintojen lukumäärä *n* on ”*kyllin suuri*”.

Yhden otoksen *t*-testi
Normaalisuusoletuksen merkitys 2/2

- *Testiä on melko turvallista käyttää*, kun havaintojen lukumäärä

  $$n > 15$$

  ellei havaintojen jakauma *ole kovin vino* ja havaintojen joukossa *ole poikkeavia havaintoja*.
- Jos havaintojen lukumäärä

  $$n > 40$$

  testiä voidaan melko turvallisesti käyttää jopa selvästi vinoille havaintojen jakaumille.

Yhden otoksen *t*-testi

Testin hyväksymisvirheen todennäköisyys ja voimakkuus 1/6

- Tarkastellaan *t*-testin *hyväksymisvirheen todennäköisyyttä* ja *voimakkuutta* tilanteessa, jossa normaalijakauman $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ **varianssi** σ^2 **oletetaan tunnetuksi**.
- Olkoon *nollahypoteesi* muotoa

  $$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$$

  ja *vaihtoehtoinen hypoteesi* muotoa

  $$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$$

- Huomautus:

  Jos normaalijakauman varianssia σ^2 *ei oleteta tunnetuksi*, vaatii *t*-testin voimakkuuden määrääminen ns. *epäkeskisen t-jakauman* määrittelemistä.

  Tämän yleisen tapauksen käsittely sivuutetaan tässä esityksessä.

Yhden otoksen *t*-testi
Testin hyväksymisvirheen todennäköisyys ja voimakkuus 2/6

- *t-testisuure*

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

noudattaa nollahypoteesin

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$$

pätiessä standardoitua normaalijakaumaa (ks. lukua **Otokset ja otosjakaumat**):

$$t \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

Testin hyväksymisvirheen todennäköisyys ja voimakkuus 3/6

- *Vaihtoehtoisen hypoteesin*

  $$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$$

  tapauksessa t-testin *päätössääntö* on muotoa:

  Hylkää nollahypoteesi

  $$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$$

  jos

  $$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -z_\alpha$$

- *Kriittinen arvo* $-z_\alpha$ saadaan ehdosta

  $$\Pr(z \leq -z_\alpha) = \alpha$$

  jossa $z \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

Testin hyväksymisvirheen todennäköisyys ja voimakkuus 4/6

- *Vaihtoehtoisen hypoteesin*

  $$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$$

  tapauksessa t-testin *päätössääntö* voidaan kirjoittaa myös seuraavaan muotoon:

  Hylkää nollahypoteesi

  $$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$$

  jos

  $$\bar{X} < \mu_0 - z_\alpha \sigma / \sqrt{n} = \bar{X}_c$$

- *Kriittinen arvo* $-z_\alpha$ saadaan ehdosta

  $$\Pr(z \le -z_\alpha) = \alpha$$

  jossa $z \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

Yhden otoksen *t*-testi

Testin hyväksymisvirheen todennäköisyys ja voimakkuus 5/6

- *Vaihtoehtoisen hypoteesin*

$$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$$

tapauksessa t-testin **hyväksymisvirheen todennäköisyys** β on ehdollinen todennäköisyys

$$\beta = \Pr(\mathrm{H}_0 \text{ jätetään voimaan} \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ ei ole tosi})$$

$$= \Pr(\bar{X} \geq \bar{X}_c \,|\, \mu = \mu^*)$$

$$= \Pr\left(z \geq \frac{\bar{X}_c - \mu^*}{\sigma / \sqrt{n}} \right)$$

jossa

$$\mu^* \neq \mu_0$$

Yhden otoksen *t*-testi
Testin hyväksymisvirheen todennäköisyys ja voimakkuus 6/6

- *Vaihtoehtoisen hypoteesin*

$$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$$

tapauksessa t-testin **voimakkuus** $1-\beta$ on ehdollinen todennäköisyys

$$\begin{aligned} 1-\beta &= \Pr(\mathrm{H}_0 \text{ hylätään} \mid \mathrm{H}_0 \text{ ei ole tosi}) \\ &= \Pr(\bar{X} < \bar{X}_c \mid \mu = \mu^*) \\ &= \Pr\left(z < \frac{\bar{X}_c - \mu^*}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

jossa

$$\mu^* \neq \mu_0$$

Testin hyväksymisvirheen todennäköisyys ja voimakkuus: Havainnollistus 1/3

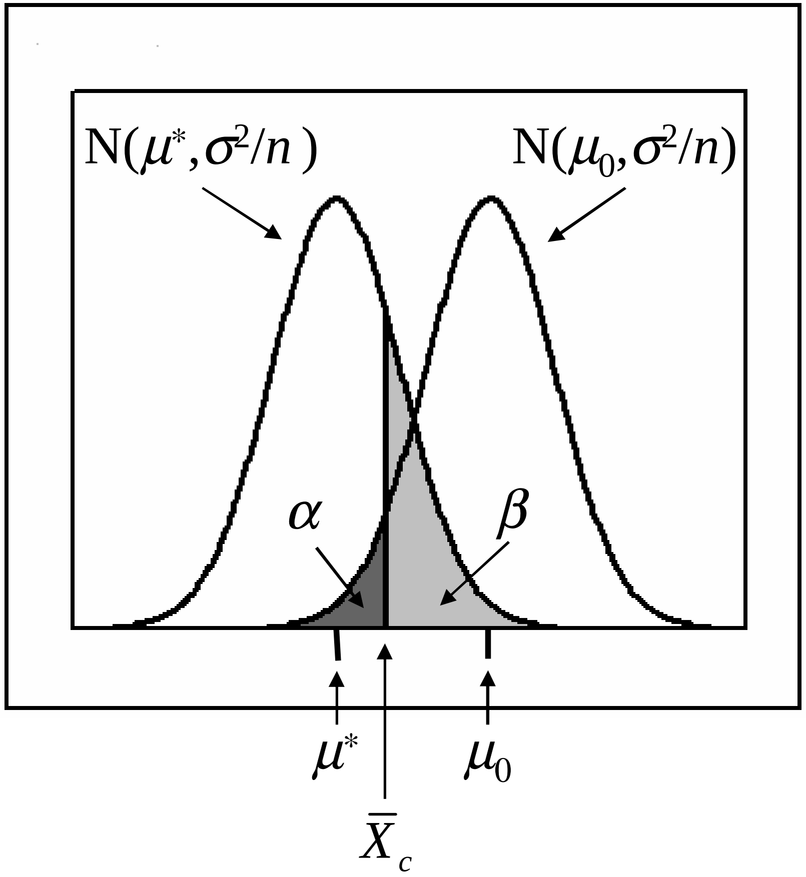
- Kuvio oikealla havainnollistaa *t*-testin *hyväksymisvirheen todennäköisyyttä* β ja *voimakkuutta* $1 - \beta$.
- *Yleinen hypoteesi* H :

  $X_1, X_2, \ldots , X_n \perp$

  $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots , n$
- *Nollahypoteesi* H_0 :

  $\mu = \mu_0$
- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

  $\mu < \mu_0$



Testin hyväksymisvirheen todennäköisyys ja voimakkuus: Havainnollistus 2/3

- Valitaan *merkitsevyystasoksi* α.
- *Kriittinen raja* z_α :

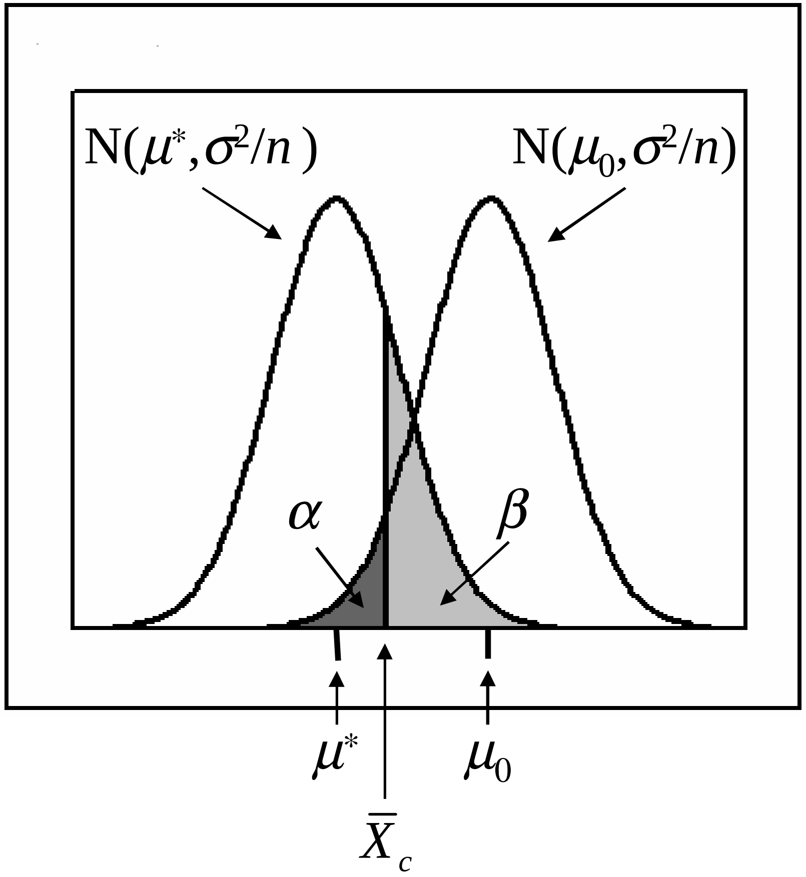
  $\Pr(z \le -z_\alpha) = \alpha$

  $z \sim \mathrm{N}(0, 1)$
- *Kriittinen raja* $\bar{X}_c$:

  $\bar{X}_c = \mu_0 - z_\alpha \sigma / \sqrt{n}$
- *Päätössääntö*:

  Hylkää nollahypoteesi H_0 , jos

  $\bar{X} < \bar{X}_c$



Yhden otoksen *t*-testi

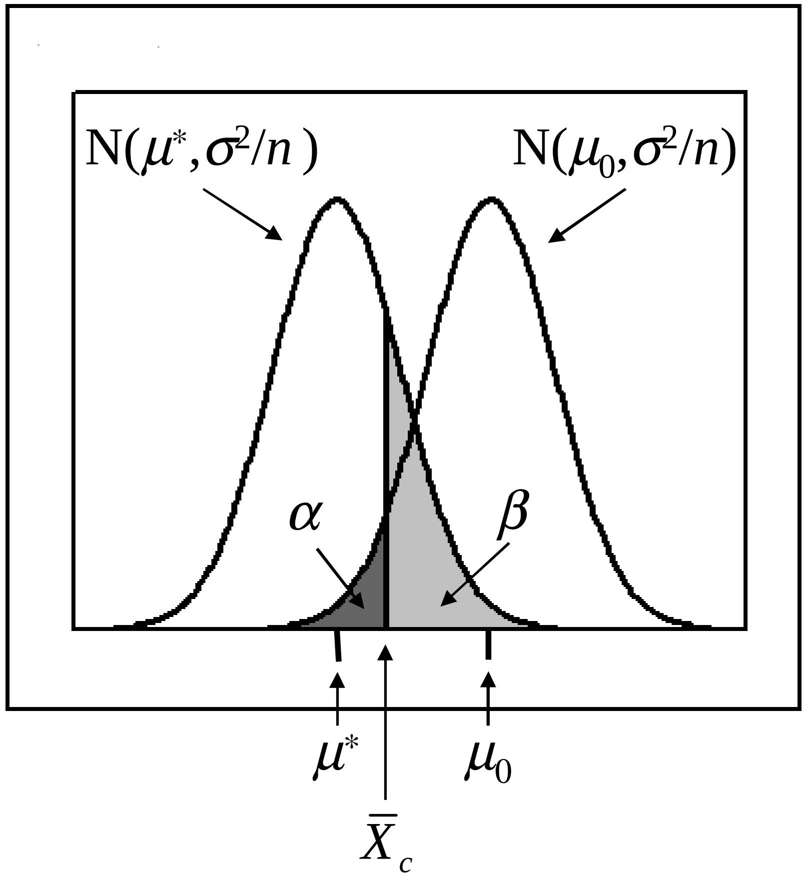
Testin hyväksymisvirheen todennäköisyys ja voimakkuus: Havainnollistus 3/3

- *Hyväksymisvirheen todennäköisyys* β :

$$\beta = \Pr(\bar{X} \geq \bar{X}_c \mid \mu = \mu^*)$$

- *Voimakkuus* $1-\beta$:

$$1-\beta = \Pr(\bar{X} < \bar{X}_c \mid \mu = \mu^*)$$



Testejä suhdeasteikollisille muuttujille

Testit normaalijakauman parametreille

Yhden otoksen *t*-testi

>> Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A:
Yleinen tapaus

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi B:
Yhtä suurten varianssien tapaus

***t*-testi parivertailuille**

Yhden otoksen testi varianssille

Varianssien vertailutesti

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A: Yleinen tapaus

Testausasetelma 1/4

- Olkoon

$$X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n_1 1}$$

yksinkertainen satunnaisotos perusjoukosta S_1, joka noudattaa *normaalijakaumaa*

$$\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$$

- Jakauma riippuu seuraavista parametreista:

μ_1 = jakauman *odotusarvo*

σ_1^2 = jakauman *varianssi*

Testausasetelma 2/4

- Olkoon

$$X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{n_2 2}$$

yksinkertainen satunnaisotos perusjoukosta S_2, joka noudattaa *normaalijakaumaa*

$$\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$$

- Jakauma riippuu seuraavista parametreista:

μ_2 = jakauman *odotusarvo*

σ_2^2 = jakauman *varianssi*

Testausasetelma 3/4

- Oletetaan lisäksi, että perusjoukosta S_1 poimittu otos

  $$X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n_1 1}$$

  ja perusjoukosta S_2 poimittu otos

  $$X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{n_2 2}$$

  ovat toisistaan *riippumattomia*.
- Otosten riippumattomuus merkitsee sitä, että se mikä alkio poimitaan perusjoukosta S_1 *ei vaikuta* siihen mikä alkioista poimitaan perusjoukosta S_2 ja kääntäen.

Testausasetelma 4/4

- Asetetaan normaalijakaumien $\mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ ja $\mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$ *odotusarvo*- eli *paikkaparametreille* μ_1 ja μ_2 *nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

- Testausongelma:

  Ovatko havainnot *sopusoinnussa* nollahypoteesin H_0 kanssa?

- Ongelman ratkaisuna on **kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A**.
- Huomautus:

  Jos voidaan olettaa, että $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, testauksessa *kannattaa käyttää* kahden riippumattoman otoksen *t*-testiä B.

Yleinen hypoteesi

- *Yleinen hypoteesi* H :

  (1) Havainnot $X_{i1} \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n_1$

  (2) Havainnot $X_{j2} \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)\,,\ j = 1, 2, \ldots, n_2$

  (3) Havainnot X_{i1} ja X_{j2} ovat *riippumattomia* kaikille i ja j.

- Huomautuksia:
  - Oletus (3) sisältää *kolme riippumattomuusoletusta*:
    - Havainnot ovat riippumattomia otoksien 1 ja 2 *sisällä*.
    - Havainnot ovat riippumattomia otoksien 1 ja 2 *välillä*.
  - Jakaumien varianssit *saavat* (*mutta ei tarvitse*) *erota toisistaan*; vrt. kahden otoksen *t*-testi B.

Nollahypoteesi ja vaihtoehtoiset hypoteesit

- *Nollahypoteesi* H_0 :

$$\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{H}_1 &: \mu_1 > \mu_2 \\ \mathrm{H}_1 &: \mu_1 < \mu_2\end{aligned}\right\} \text{ 1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi

- Olkoot

$$\bar{X}_k = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} X_{ik} \text{ , } k = 1, 2$$

ja

$$s_k^2 = \frac{1}{n_k - 1}\sum_{i=1}^{n_k}(X_{ik} - \bar{X}_k)^2 \text{ , } k = 1, 2$$

tavanomaiset *harhattomat estimaattorit* parametreille

$$\mathrm{E}(X_{ik}) = \mu_k \text{ , } i = 1, 2, \ldots , n_k \text{ , } k = 1, 2$$

ja

$$\mathrm{Var}(X_{ik}) = \sigma_k^2 \text{ , } i = 1, 2, \ldots , n_k \text{ , } k = 1, 2$$

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A: Yleinen tapaus

Testisuure ja sen asymptoottinen jakauma

- Määritellään ***t*-testisuure**

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

- *Jos nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

pätee, niin *testisuure t noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa* N(0,1):

$$t \;\; _a \; \mathrm{N}(0,1)$$

Testisuureen jakauma nollahypoteesin H$_0$ pätiessä: Perustelu 1/3

- Oletetaan, että testin yleinen hypoteesi H ja nollahypoteesi H$_0$ pätevät:

$$X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n_1 1}, X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{n_2 2} \perp$$

$$X_{i1} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma_1^2)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n_1$$

$$X_{j2} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma_2^2)\,,\ j = 1, 2, \ldots, n_2$$

- Tällöin (ks. lukua **Otos ja otosjakaumat**)

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{i1} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$$

$$\bar{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} X_{j2} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

- Koska $\bar{X}_1 \perp \bar{X}_2$, niin

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim \mathrm{N}\left(0, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A: Yleinen tapaus

Testisuureen jakauma nollahypoteesin H_0 pätiessä: Perustelu 2/3

- Edellä esitetystä seuraa, että

$$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad \mathrm{N}(0,1)$$

- Koska varianssit σ_1^2 ja σ_2^2 ovat *tuntemattomia*, satunnaismuuttujan z lauseke on testisuureena *epäoperationaalinen*.

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A: Yleinen tapaus

Testisuureen jakauma nollahypoteesin H_0 pätiessä: Perustelu 3/3

- Jos satunnaismuuttujan *z* lausekkeessa varianssit σ_1^2 ja σ_2^2 korvataan vastaavilla *otossuureilla*

  $$s_k^2 = \frac{1}{n_k - 1}\sum_{i=1}^{n_k}(X_{ik} - \overline{X}_k)^2 \text{ , } k = 1, 2$$

  niin saadaan *t-testisuure*

  $$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

  joka *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa* N(0, 1):

  $$t \sim_a \mathrm{N}(0, 1)$$

- Todistus sivuutetaan.

Testisuureen jakauman approksimointi 1/2

- *Pienissä otoksissa* saadaan testisuureen *t* jakaumalle *parempi approksimaatio* käyttämällä approksimaationa *Studentin t-jakaumaa* vapausastein (ns. Satterthwaiten approksimaatio)

$$\nu = \frac{\left[\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right]^2}{\dfrac{1}{n_1 - 1}\left[\dfrac{s_1^2}{n_1}\right]^2 + \dfrac{1}{n_2 - 1}\left[\dfrac{s_2^2}{n_2}\right]^2}$$

Testisuureen jakauman approksimointi 2/2

- Joskus testisuureen *t* jakaumaa approksimoidaan myös *Studentin t-jakaumalla* vapausastein

$$v = \min\{n_1, n_2\}$$

- Tämä approksimaatio *ei* kuitenkaan *ole yhtä hyvä* kuin Satterthwaiten approksimaatio.

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A: Yleinen tapaus

t-testisuure mittaa tilastollista etäisyyttä

- Testisuure

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

  mittaa otoksien 1 ja 2 aritmeettisten keskiarvojen *tilastollista etäisyyttä*.

- *Mittayksikkönä* on erotuksen $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ standardipoikkeaman

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

  estimaattori, jota määrättäessä on oletettu, että nolla-hypoteesi H_0 pätee.

Testi

- Testisuureen

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

normaaliarvo = 0, koska *nollahypoteesin* $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$ *pätiessä*

$$\mathrm{E}(t) = 0$$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen *t* arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *hylätään*, jos testin *p*-arvo on *kyllin pieni*.

Testin hylkäysalueen määrääminen 1/5

- Käsittelemme seuraavassa *kahden otoksen t-testin A hylkäysalueen valintaa*, jos testisuureen approksimoidaan *standardoidulla normaalijakaumalla* N(0, 1).
- Jos kahden otoksen *t*-testin A testisuuretta approksimoidaan *Studentin t-jakaumalla*, jossa vapausasteiden lukumäärä ν lasketaan Satterthwaiten kaavan mukaan, testin hylkäysalue määrätään samalla tavalla kuin yhden otoksen *t*-testin tapauksessa.

Testin hylkäysalueen määrääminen 2/5

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$$

niin *kriittinen arvo* $+t_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(t \geq +t_\alpha) = \alpha$$

jossa

$$t \sim_a \mathrm{N}(0, 1)$$

- Testin **hylkäysalue** on tällöin muotoa

$$(+t_\alpha \,, +\infty)$$

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A: Yleinen tapaus

Testin hylkäysalueen määrääminen 3/5

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$$

niin *kriittinen arvo* $-t_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(t \le -t_\alpha) = \alpha$$

jossa

$$t \sim_a \mathrm{N}(0, 1)$$

- Testin **hylkäysalue** on tällöin muotoa

$$(-\infty\ , -t_\alpha)$$

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A: Yleinen tapaus
Testin hylkäysalueen määrääminen 4/5

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$$

niin *kriittiset arvot* $-t_{\alpha/2}$ ja $+t_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$\Pr(t \leq -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

$$\Pr(t \geq +t_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

jossa

$$t \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

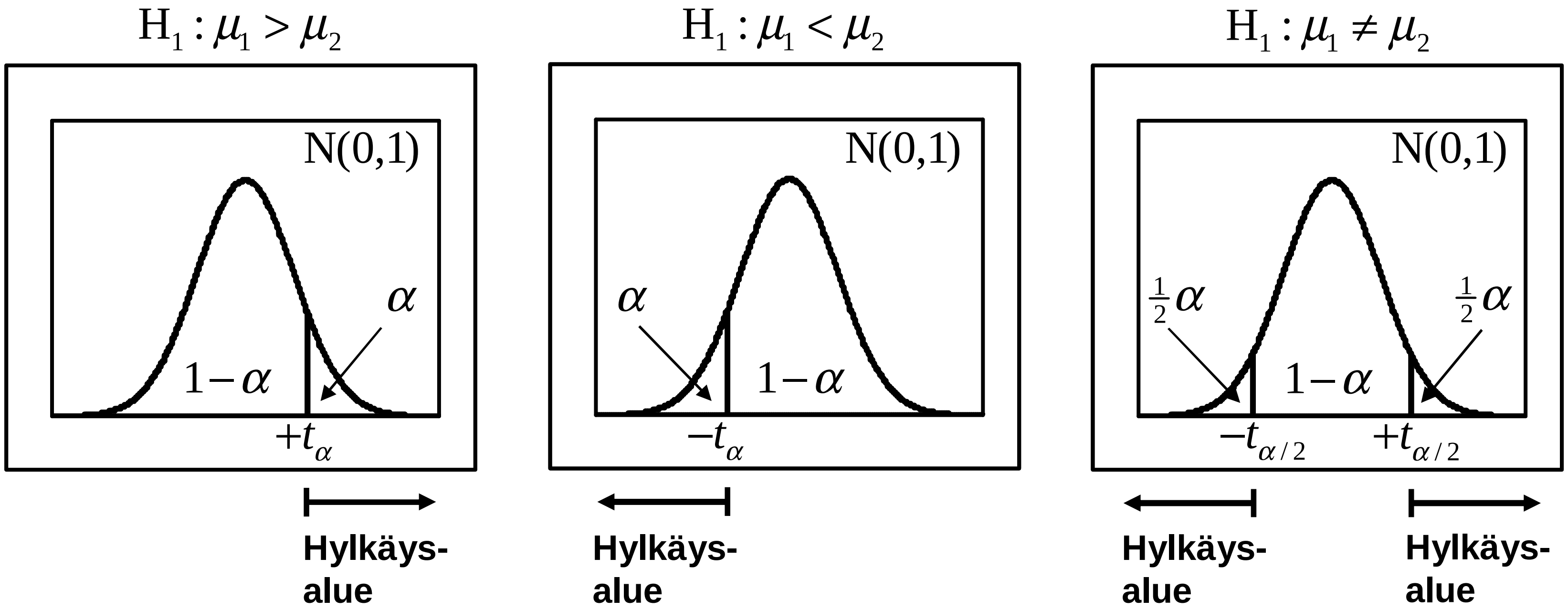
- Testin **hylkäysalue** on tällöin muotoa

$$(-\infty\ , -t_{\alpha}) \cup (+t_{\alpha}\ , +\infty)$$

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A: Yleinen tapaus

Testin hylkäysalueen määrääminen 5/5

- Oletetaan, että testin *merkitsevyystasoksi* on valittu α.
- Testin **hylkäysalueen** määräämistä voidaan havainnollistaa alla olevilla kuvioilla.

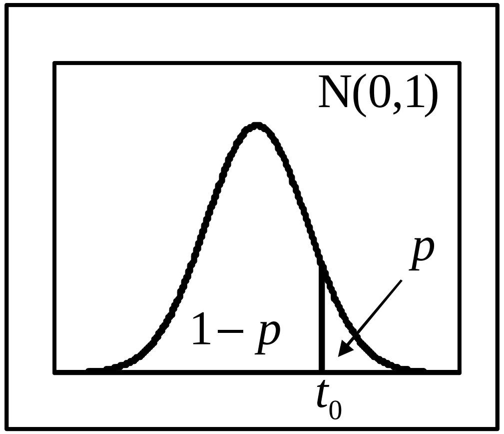


Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A: Yleinen tapaus

Testin *p*-arvo

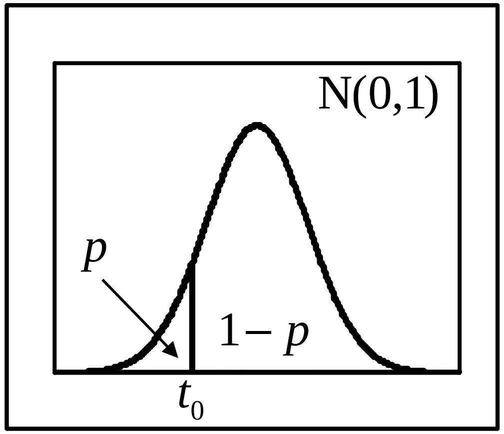
- Olkoon *t-testisuureen* havaittu arvo t_0.
- Testin ***p*-arvon** määräämistä voidaan havainnollistaa alla olevilla kuvioilla.

$\mathrm{H}_1 : \mu_1 > \mu_2$



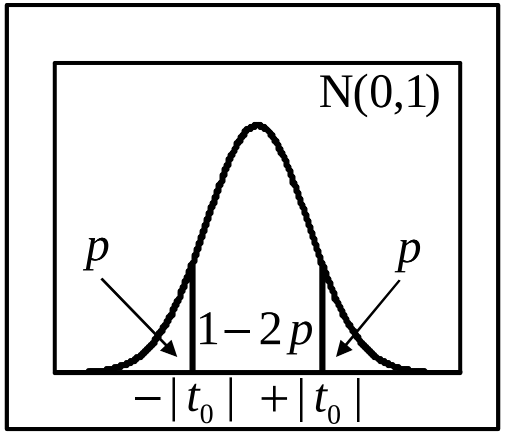
Testin *p*-arvo = *p*

$\mathrm{H}_1 : \mu_1 < \mu_2$



Testin *p*-arvo = *p*

$\mathrm{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$



Testin *p*-arvo = 2*p*

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A: Yleinen tapaus

Normaalisuusoletuksen merkitys 1/2

- Kahden otoksen *t*-testin A yleisen hypoteesin mukaan havainnot ovat molemmissa otoksissa *normaali-jakautuneita*.
- Testi *ei* kuitenkaan *ole herkkä poikkeamille normaalisuudesta*, jos molempien otosten otoskoot ovat ”*kyllin suuria*”.

Normaalisuusoletuksen merkitys 2/2

- *Testiä on melko turvallista käyttää*, kun

  $$n_1 > 15 \text{ ja } n_2 > 15$$

  ja n_1 ja n_2 eivät eroa toisistaan kovin paljon, *elleivät* havaintojen jakaumat *ole kovin vinoja* ja *ellei* havaintojen joukossa *ole poikkeavia havaintoja*.
- Jos

  $$n_1 > 40 \text{ ja } n_2 > 40$$

  testiä voidaan melko turvallisesti käyttää jopa selvästi vinoille havaintojen jakaumille.

Testejä suhdeasteikollisille muuttujille

Testit normaalijakauman parametreille

Yhden otoksen *t*-testi

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A:
Yleinen tapaus

>> Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi B:
Yhtä suurten varianssien tapaus

***t*-testi parivertailuille**

Yhden otoksen testi varianssille

Varianssien vertailutesti

Testausasetelma 1/4

- Olkoon

$$X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n_1 1}$$

yksinkertainen satunnaisotos perusjoukosta S_1, joka noudattaa *normaalijakaumaa*

$$\mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$$

- Jakauma riippuu seuraavista parametreista:

μ_1 = jakauman *odotusarvo*

σ^2 = jakauman *varianssi*

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi B: Yhtä suurten varianssien tapaus

Testausasetelma 2/4

- Olkoon

$$X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{n_2 2}$$

yksinkertainen satunnaisotos perusjoukosta S_2, joka noudattaa *normaalijakaumaa*

$$\mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$$

- Jakauma riippuu seuraavista parametreista:

μ_2 = jakauman *odotusarvo*

σ^2 = jakauman *varianssi*

Testausasetelma 3/4

- Oletetaan lisäksi, että perusjoukosta S_1 poimittu otos

  $$X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n_1 1}$$

  ja perusjoukosta S_2 poimittu otos

  $$X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{n_2 2}$$

  ovat toisistaan *riippumattomia*.
- Otosten riippumattomuus merkitsee sitä, että se mikä alkio poimitaan perusjoukosta S_1 *ei vaikuta* siihen mikä alkioista poimitaan perusjoukosta S_2 ja kääntäen.

Testausasetelma 4/4

- Asetetaan normaalijakaumien $\mathrm{N}(\mu_1,\sigma^2)$ ja $\mathrm{N}(\mu_2,\sigma^2)$ *odotusarvo*- eli *paikkaparametreille* μ_1 ja μ_2 *nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

- Testausongelma:

  Ovatko havainnot *sopusoinnussa* nollahypoteesin H_0 kanssa?

- Ongelman ratkaisuna on **kahden riippumattoman otoksen *t*-testi** *yhtä suurten varianssien tapauksessa*.
- Huomautus:

  Jos jakaumien varianssit eivät ole yhtä suuret, testauksessa *pitää käyttää* kahden riippumattoman otoksen *t*-testiä A.

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi B: Yhtä suurten varianssien tapaus

Yleinen hypoteesi

- *Yleinen hypoteesi* H :

  (1) $X_{i1} \quad \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n_1$

  (2) $X_{j2} \quad \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)\,,\ j = 1, 2, \ldots, n_2$

  (3) Havainnot X_{i1} ja X_{j2} ovat *riippumattomia* kaikille i ja j

- Huomautuksia:
  - Oletus (3) sisältää *kolme riippumattomuusoletusta*:
    - Havainnot ovat riippumattomia otoksien 1 ja 2 *sisällä*.
    - Havainnot ovat riippumattomia otoksien 1 ja 2 *välillä*.
  - Jakaumien varianssit *on* tässä *oletettu yhtä suuriksi*;
    vrt. kahden otoksen *t*-testi A.

Nollahypoteesi ja vaihtoehtoiset hypoteesit

- *Nollahypoteesi* H_0 :

$$\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{H}_1 : \mu_1 > \mu_2 \\ \mathrm{H}_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{array}\right\} \text{ 1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi B: Yhtä suurten varianssien tapaus

Parametrien estimointi

- Olkoot

$$\bar{X}_k = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} X_{ik} \text{ , } k = 1, 2$$

ja

$$s_k^2 = \frac{1}{n_k - 1}\sum_{i=1}^{n_k} (X_{ik} - \bar{X}_k)^2 \text{ , } k = 1, 2$$

tavanomaiset *harhattomat estimaattorit* parametreille

$$\mathrm{E}(X_{ik}) = \mu_k \text{ , } i = 1, 2, \ldots , n_k \text{ , } k = 1, 2$$

ja

$$\mathrm{Var}(X_{ik}) = \sigma^2 \text{ , } i = 1, 2, \ldots , n_k \text{ , } k = 1, 2$$

Yhdistetty varianssiestimaattori

- Määritellään ns. **yhdistetty varianssiestimaattori**

$$s_P^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

- Yhdistetty varianssiestimaattori s_P^2 on *harhaton estimaattori* varianssiparametrille σ^2, *jos nollahypoteesi* $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$ *pätee*.
- Huomautus:

  Yhdistetty varianssiestimaattori s_P^2 *ei ole sama kuin yhdistetyn otoksen varianssi*, koska otoskeskiarvot $\bar{X}_1$ ja $\bar{X}_2$ eivät (yleensä) ole yhtä suuria.

Testisuure ja sen jakauma

- Määritellään ***t*-testisuure**

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_P \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$$

- *Jos nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

pätee, niin testisuure t noudattaa *Studentin t-jakaumaa* vapausastein $(n_1 + n_2 - 2)$:

$$t \quad t(n_1 + n_2 - 2)$$

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi B: Yhtä suurten varianssien tapaus

Testisuureen jakauma nollahypoteesin H_0 pätiessä: Perustelu 1/3

- Oletetaan, että testin yleinen hypoteesi H ja nollahypoteesi H_0 pätevät:

$$X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n_1 1}, X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{n_2 2} \perp$$

$$X_{i1} \quad \mathrm{N}(\mu, \sigma^2),\ i = 1, 2, \ldots, n_1$$

$$X_{j2} \quad \mathrm{N}(\mu, \sigma^2),\ j = 1, 2, \ldots, n_2$$

- Tällöin (ks. lukua **Otos ja otosjakaumat**)

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{i1} \quad \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n_1}\right)$$

$$\bar{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} X_{j2} \quad \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$$

- Koska $\bar{X}_1 \perp \bar{X}_2$, niin

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \quad \mathrm{N}\left(0, \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right)$$

Testisuureen jakauma nollahypoteesin H_0 pätiessä: Perustelu 2/3

- Edellä esitetystä seuraa, että

$$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \qquad \mathrm{N}(0,1)$$

- Koska standardipoikkeama σ on *tuntematon*, satunnaismuuttujan z lauseke on testisuureena *epäoperationaalinen*.
- Määritellään otosvarianssit

$$s_k^2 = \frac{1}{n_k - 1}\sum_{i=1}^{n_k}(X_{ik} - \bar{X}_k)^2 \text{ , } k = 1, 2$$

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi B: Yhtä suurten varianssien tapaus

Testisuureen jakauma nollahypoteesin H_0 pätiessä: Perustelu 3/3

- Jos satunnaismuuttujan z lausekkeessa standardipoikkeama σ korvataan *otossuureella*

$$s_P = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

niin saadaan *t-testisuure*

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_P\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$$

joka *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä noudattaa Studentin t-jakaumaa* vapausastein $(n_1 + n_2 - 2)$:

$$t \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

- Todistus sivuutetaan; ks. kuitenkin vastaavaa todistusta *yhden otoksen t-testin* tapauksessa ja siellä esitettyjä viittauksia.

t-testisuure mittaa tilastollista etäisyyttä

- Testisuure

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

  mittaa otoksien 1 ja 2 aritmeettisten keskiarvojen *tilastollista etäisyyttä*.
- *Mittayksikkönä* on erotuksen $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ standardipoikkeaman

$$\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

  estimaattori, jota määrättäessä on oletettu, että nolla-hypoteesi H_0 pätee.

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi B: Yhtä suurten varianssien tapaus

Testi

- Testisuureen

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_P \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$$

  normaaliarvo = 0, koska *nollahypoteesin* $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$ *pätiessä*

  $\mathrm{E}(t) = 0$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen t arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *hylätään*, jos testin *p*-arvo on *kyllin pieni*.

Testin hylkäysalueen määrääminen ja testin *p*-arvo

- Kahden otoksen *t*-testin B **hylkäysalueen** valinta tapahtuu kuten yhden otoksen *t*-testin tapauksessa paitsi, että *t*-testisuure noudattaa tässä Studentin *t*-jakaumaa vapausastein $(n_1 + n_2 - 2)$.
- Kahden otoksen *t*-testin B testisuureen arvoa vastaavan ***p*-arvon** määrääminen tapahtuu kuten yhden otoksen *t*-testin tapauksessa paitsi, että *t*-testisuure noudattaa tässä Studentin *t*-jakaumaa vapausastein $(n_1 + n_2 - 2)$.

Normaalisuusoletuksen merkitys 1/2

- Kahden otoksen *t*-testin B yleisen hypoteesin mukaan havainnot ovat molemmissa otoksissa *normaali-jakautuneita*.
- Testi *ei* kuitenkaan *ole herkkä poikkeamille normaalisuudesta*, jos molempien otosten otoskoot ovat ”*kyllin suuria*”.

Normaalisuusoletuksen merkitys 2/2

- *Testiä on melko turvallista käyttää*, kun

  $$n_1 > 15 \text{ ja } n_2 > 15$$

  ja n_1 ja n_2 eivät eroa toisistaan kovin paljon, *elleivät* havaintojen jakaumat *ole kovin vinoja* ja *ellei* havaintojen joukossa *ole poikkeavia havaintoja*.
- Jos

  $$n_1 > 40 \text{ ja } n_2 > 40$$

  testiä voidaan melko turvallisesti käyttää jopa selvästi vinoille havaintojen jakaumille.

Testejä suhdeasteikollisille muuttujille

Testit normaalijakauman parametreille

Yhden otoksen *t*-testi

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A:
Yleinen tapaus

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi B:
Yhtä suurten varianssien tapaus

>> *t*-testi parivertailuille

Yhden otoksen testi varianssille

Varianssien vertailutesti

Parivertailuasetelma

- **Parivertailuasetelma** syntyy tilastollisessa tutkimuksessa esimerkiksi seuraavissa tilanteissa:
  (i) Päämääränä on *verrata kahta mittaria* mittaamalla molemmilla mittareilla samat kohteet *samoissa olosuhteissa*.
  (ii) Päämääränä on *tutkia* jonkin *käsittelyn vaikutusta* mittaamalla samat kohteet *ennen* käsittelyä ja käsittelyn *jälkeen*.
  (iii) Päämääränä on *vertailla kahta perusjoukkoa* mittaamalla saman muuttujan arvot perusjoukkojen alkioiden *sovitetuissa pareissa*.

Testausasetelma 1/2

- Oletetaan, että havainnot muodostuvat muuttujaa X koskevista mittaustuloksien *pareista*

  $$(X_{i1}\ , X_{i2})\ ,\ i = 1, 2, \ldots\ , n$$

  jotka ovat *riippumattomia*.
- Päämääränä on *verrata mittauksia* toisiinsa:

  Antavatko mittaukset *keskimäärin saman tuloksen*?
- *Tällaisissa parivertailuasetelmissa ei saa käyttää riippumattomien otoksien t-testiä* A tai B, koska *mittaus-tulokset* X_{i1} ja X_{i2} *eivät yleensä ole riippumattomia*.

Testausasetelma 2/2

- Muodostetaan mittaustuloksien X_{i1} ja X_{i2} *erotukset*

  $$D_i = X_{i1} - X_{i2} \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

- Mittaukset 1 ja 2 antavat *keskimäärin saman tuloksen*, jos erotukset D_i saavat *keskimäärin arvon nolla*.
- Parivertailuasetelman testausongelman ratkaisuna on tavanomainen **yhden otoksen *t*-testi** mittaustuloksien X_{i1} ja X_{i2} *erotuksien* D_i *odotusarvolle*.

t-testi parivertailuille
Hypoteesit

- *Yleinen hypoteesi* H :

  (1) Erotukset $D_i \sim \mathrm{N}(\mu_D, \sigma_D^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

  (2) Erotukset D_1 , D_2 , … , D_n ovat riippumattomia

- *Nollahypoteesi* H_0 :

$$\mathrm{H}_0 : \mu_D = 0$$

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{H}_1 : \mu_D > 0 \\ \mathrm{H}_1 : \mu_D < 0 \end{array}\right\} \text{ 1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : \mu_D \neq 0 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

t-testi parivertailuille
Parametrien estimointi

- Olkoot

$$\bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$$

ja

$$s_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (D_i - \bar{D})^2$$

tavanomaiset *harhattomat estimaattorit* parametreille

$\mathrm{E}(D_i) = \mu_D$, $i = 1, 2, \ldots , n$

ja

$\mathrm{Var}(D_i) = \sigma_D^2$, $i = 1, 2, \ldots , n$

Testisuure ja sen jakauma

- Määritellään ***t*-testisuure**

$$t = \frac{\bar{D}}{s_D / \sqrt{n}}$$

- *Jos nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \mu_D = 0$$

pätee, niin testisuure *t* noudattaa *Studentin t-jakaumaa* vapausastein (n – 1):

$$t \quad t(n-1)$$

t-testi parivertailuille

Testisuureen jakauma nollahypoteesin H_0 pätiessä: Perustelu 1/2

- Oletetaan, että testin yleinen hypoteesi H ja nollahypoteesi H_0 pätevät:

$$D_1 , D_2 , \ldots , D_n \perp$$

$$D_i \sim \mathrm{N}(0,\sigma_D^2) , i = 1, 2, \ldots , n$$

- Koska tällöin (ks. lukua **Otokset ja otosjakaumat**)

$$\bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i \sim \mathrm{N}\left(0, \frac{\sigma_D^2}{n}\right)$$

niin

$$z = \frac{\bar{D}}{\sigma_D / \sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

- Koska standardipoikkeama σ_D on *tuntematon*, satunnaismuuttujan z lauseke on testisuureena *epäoperationaalinen*.

t-testi parivertailuille

Testisuureen jakauma nollahypoteesin H_0 pätiessä: Perustelu 2/2

- Jos satunnaismuuttujan *z* lausekkeessa standardipoikkeama σ_D korvataan vastaavalla *otossuureella*

  $$s_D = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2}$$

  niin saadaan *t-testisuure*

  $$t = \frac{\bar{D}}{s_D / \sqrt{n}}$$

  joka *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä noudattaa Studentin t-jakaumaa* vapausastein $(n-1)$:

  $$t \sim t(n-1)$$

- Todistus: ks. kappaletta **Yhden otoksen *t*-testi**.

t-testisuure mittaa tilastollista etäisyyttä

- Testisuure

$$t = \frac{\bar{D}}{s_D / \sqrt{n}}$$

mittaa havaintoarvojen erotuksien aritmeettisen keskiarvon *tilastollista etäisyyttä* nollasta.

- *Mittayksikkönä* on erotuksien D_i aritmeettisen keskiarvon $\bar{D}$ standardipoikkeaman

$$\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}$$

estimaattori, jota määrättäessä on oletettu, että nolla-hypoteesi H_0 pätee.

Testi

- Testisuureen

$$t = \frac{\bar{D}}{s_D / \sqrt{n}}$$

normaaliarvo = 0, koska *nollahypoteesin* $\mathrm{H}_0 : \mu_D = 0$ *pätiessä*

$$\mathrm{E}(t) = 0$$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen *t* arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *hylätään*, jos testin *p*-arvo on *kyllin pieni*.

Testin hylkäysalueen määrääminen ja testin *p*-arvo

- Parivertailutestin **hylkäysalueen** *valinta* tapahtuu kuten yhden otoksen *t*-testin tapauksessa.
- Parivertailutestin testisuureen arvoa vastaavan ***p*-arvon** *määrääminen* tapahtuu kuten yhden otoksen *t*-testin tapauksessa.

Normaalisuusoletuksen merkitys 1/2

- Parivertailuasetelman *t*-testin yleisessä hypoteesissa oletetaan, että havaintoarvojen erotukset ovat *normaali-jakautuneita*.
- Testi *ei* kuitenkaan *ole herkkä poikkeamille normaalisuudesta*, jos havaintojen lukumäärä *n* on ”*kyllin suuri*”.

t-testi parivertailuille

Normaalisuusoletuksen merkitys 2/2

- *Testiä on melko turvallista käyttää*, kun

  $$n > 15$$

  ellei erotusten jakauma *ole kovin vino* ja erotuksien joukossa *ole poikkeavia erotuksia*.
- Jos havaintojen lukumäärä

  $$n > 40$$

  testiä voidaan melko turvallisesti käyttää jopa selvästi vinoille erotuksien jakaumille.

Testejä suhdeasteikollisille muuttujille

Testit normaalijakauman parametreille

Yhden otoksen *t*-testi

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A:
Yleinen tapaus

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi B:
Yhtä suurten varianssien tapaus

***t*-testi parivertailuille**

>> Yhden otoksen testi varianssille

Varianssien vertailutesti

Testausasetelma 1/2

- Olkoon

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  yksinkertainen satunnaisotos perusjoukosta S, joka noudattaa *normaalijakaumaa*

  $$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$$

- Jakauma riippuu seuraavista parametreista:

  μ = jakauman *odotusarvo*

  σ^2 = jakauman *varianssi*

Testausasetelma 2/2

- Asetetaan normaalijakauman $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ *varianssi-parametrille* σ^2 *nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

- Testausongelma:

  Ovatko havainnot *sopusoinnussa* nollahypoteesin H_0 kanssa?

- Ongelman ratkaisuna on **yhden otoksen χ^2-testi varianssille**.

Hypoteesit

- *Yleinen hypoteesi* H :

  (1) Havainnot $X_i \quad \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$

  (2) Havainnot X_1 , X_2 , … , X_n ovat *riippumattomia*.

- *Nollahypoteesi* H_0 :

$$\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{H}_1 &: \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ \mathrm{H}_1 &: \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{aligned}\right\} \text{ 1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi

- Olkoot

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ja

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

tavanomaiset *harhattomat estimaattorit* parametreille

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

ja

$$\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

Yhden otoksen testi varianssille
Testisuure ja sen jakauma

- Määritellään **χ^2-testisuure**

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

- *Jos nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

pätee, niin testisuure χ^2 noudattaa χ^2-*jakaumaa* vapaus-asteein (n – 1):

$$\chi^2 \quad \chi^2(n-1)$$

Yhden otoksen testi varianssille

Testisuureen jakauma nollahypoteesin H_0 pätiessä: Perustelu 1/3

- Oletetaan, että testin yleinen hypoteesi H ja nollahypoteesi H_0 pätevät:

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n \perp$$

$$X_i \quad \mathrm{N}(\mu,\sigma_0^2) , i = 1, 2, \ldots , n$$

- Tällöin (ks. lukua **Otokset ja otosjakaumat**)

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2 \quad \chi^2(n)$$

- Koska odotusarvo μ on *tuntematon*, satunnaismuuttujan Y lauseke on testisuureena *epäoperationaalinen*.

Yhden otoksen testi varianssille

Testisuureen jakauma nollahypoteesin H_0 pätiessä: Perustelu 2/3

- Jos satunnaismuuttujan z lausekkeessa odotusarvo μ korvataan vastaavalla *otossuureella*

  $$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

  niin saadaan χ^2-*testisuure*

  $$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma_0}\right)^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

  jossa

  $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Yhden otoksen testi varianssille

Testisuureen jakauma nollahypoteesin H_0 pätiessä: Perustelu 3/3

- Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*, testisuure χ^2 *noudattaa* χ^2*-jakaumaa* vapausastein $(n - 1)$:

$$\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$$

- Todistus: ks. lukua **Otokset ja otosjakaumat**.

Testi

- Testisuureen
$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$
normaaliarvo = (n – 1), koska *nollahypoteesin*
$\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ *pätiessä* E(s^2) = σ_0^2, jolloin
$$\mathrm{E}(\chi^2) = n - 1$$
- Siten sekä *pienet* että *suuret* testisuureen χ^2 arvot sen normaaliarvoon (n – 1) nähden viittaavat siihen, että *nollahypoteesi ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *hylätään*, jos testin p-arvo on *kyllin pieni*.

Testin hylkäysalueen määrääminen 1/4

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

  $$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

  niin *kriittinen raja* χ_α^2 saadaan ehdosta

  $$\Pr(\chi^2 \geq \chi_\alpha^2) = \alpha$$

  jossa

  $$\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$$
- Testin **hylkäysalue** on tällöin muotoa

  $$(\chi_\alpha^2\,, +\infty)$$

Testin hylkäysalueen määrääminen 2/4

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

niin *kriittinen raja* $\chi^2_{1-\alpha}$ saadaan ehdosta

$$\Pr(\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}) = \alpha$$

jossa

$$\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$$

- Testin **hylkäysalue** on tällöin muotoa

$$(0\ ,\chi^2_{1-\alpha})$$

Testin hylkäysalueen määrääminen 3/4

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

niin *kriittiset rajat* $\chi^2_{1-\alpha/2}$ ja $\chi^2_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$\Pr(\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}) = \alpha/2$$

$$\Pr(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

jossa

$$\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$$

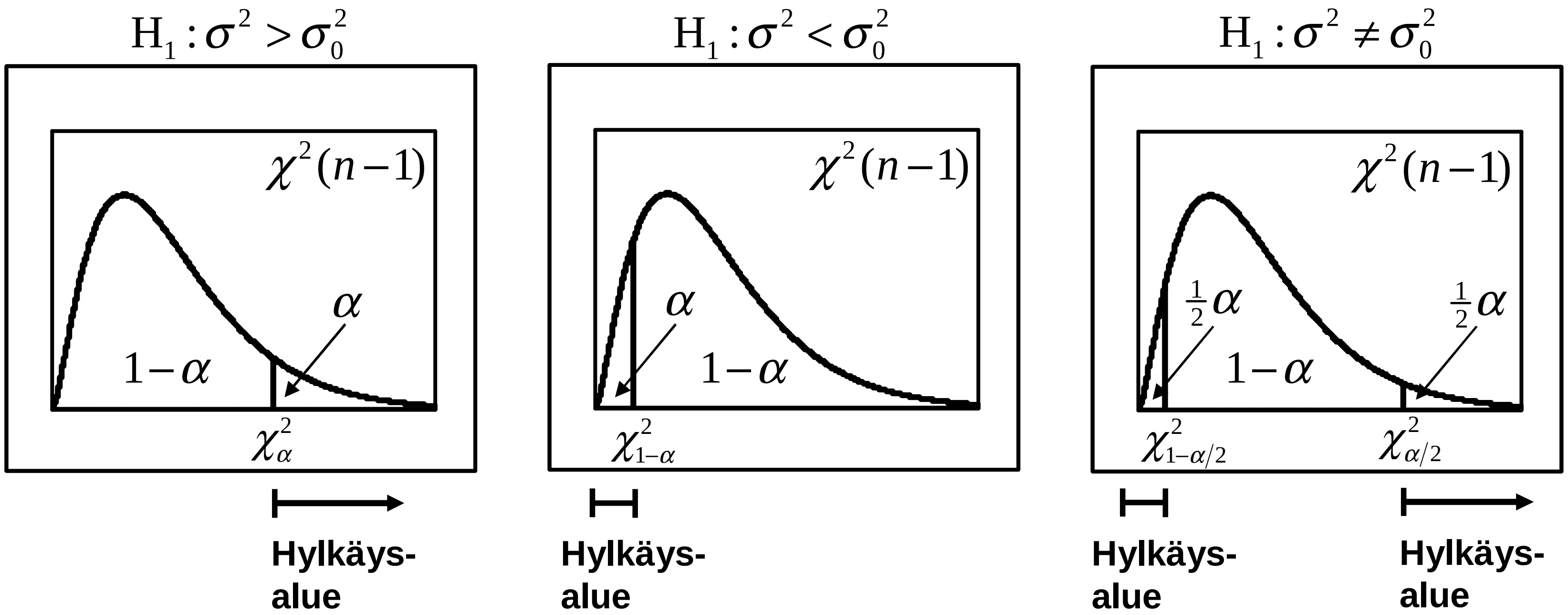
- Testin **hylkäysalue** on tällöin muotoa

$$(0\ ,\ \chi^2_{1-\alpha/2}) \cup (\chi^2_{\alpha/2}\ ,\ +\infty)$$

Yhden otoksen testi varianssille

Testin hylkäysalueen määrääminen 4/4

- Oletetaan, että testin *merkitsevyystasoksi* on valittu α.
- Testin **hylkäysalueen** määräämistä voidaan havainnollistaa alla olevilla kuvioilla.

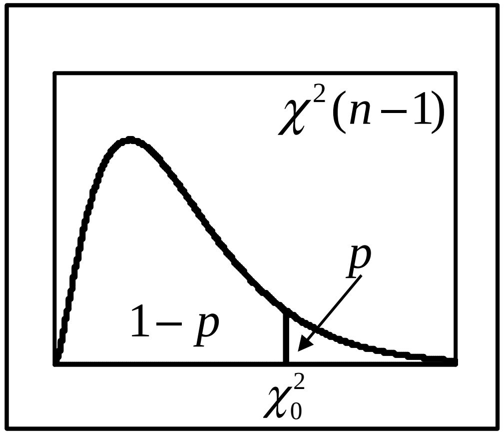


Yhden otoksen testi varianssille

Testin *p*-arvo 1/2

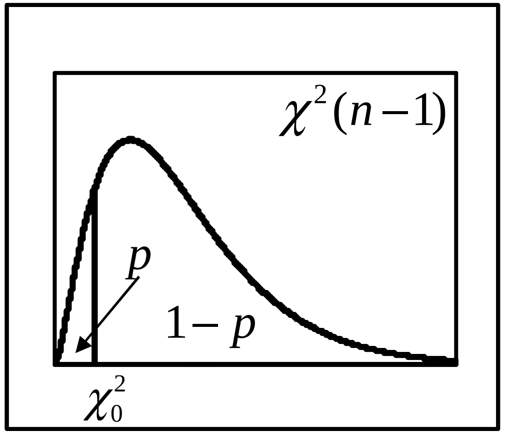
- Olkoon χ^2-*testisuureen* havaittu arvo χ_0^2.
- Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on 1-*suuntainen*, testin ***p*-arvon** määräämistä voidaan havainnollistaa alla olevilla kuvioilla.

$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$



Testin *p*-arvo = *p*

$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$



Testin *p*-arvo = *p*

Testin *p*-arvo 2/2

- Olkoon vaihtoehtoinen hypoteesi 2-*suuntainen*:

$$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

- Tällöin testin ***p*-arvo** on

$$p = 2 \times \min\left\{ \Pr(\chi^2 \geq \chi_0^2), \Pr(\chi^2 \leq \chi_0^2) \right\}$$

jossa

$$\chi^2 \quad \chi^2(n-1)$$

Normaalisuusoletuksen merkitys

- Tässä esitetyn varianssitestin yleisessä hypoteesissa oletetaan, että havainnot ovat *normaalijakautuneita*.
- Testi *on herkkä poikkeamille normaalisuudesta* ja *testi ei toimi kovinkaan hyvin*, jos havaintojen jakauma *on vino* tai havaintojen joukossa *on poikkeavia havaintoja*.
- Tällöin suuretkaan havaintojen lukumäärät eivät yleensä paranna tilannetta.

Testejä suhdeasteikollisille muuttujille

Testit normaalijakauman parametreille

Yhden otoksen *t*-testi

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi A:
Yleinen tapaus

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi B:
Yhtä suurten varianssien tapaus

***t*-testi parivertailuille**

Yhden otoksen testi varianssille

>> Varianssien vertailutesti

Varianssien vertailutesti
Testausasetelma 1/4

- Olkoon

$$X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n_1 1}$$

yksinkertainen satunnaisotos perusjoukosta S_1, joka noudattaa *normaalijakaumaa*

$$\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$$

- Jakauma riippuu seuraavista parametreista:

μ_1 = jakauman *odotusarvo*

σ_1^2 = jakauman *varianssi*

Varianssien vertailutesti

Testausasetelma 2/4

- Olkoon

$$X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{n_2 2}$$

yksinkertainen satunnaisotos perusjoukosta S_2, joka noudattaa *normaalijakaumaa*

$$\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$$

- Jakauma riippuu seuraavista parametreista:

μ_2 = jakauman *odotusarvo*

σ_2^2 = jakauman *varianssi*

Varianssien vertailutesti

Testausasetelma 3/4

- Oletetaan lisäksi, että perusjoukosta S_1 poimittu otos
$$X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n_1 1}$$
ja perusjoukosta S_2 poimittu otos
$$X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{n_2 2}$$
ovat toisistaan *riippumattomia*.
- Otosten riippumattomuus merkitsee sitä, että se mikä alkio poimitaan perusjoukosta S_1 *ei vaikuta* siihen mikä alkioista poimitaan perusjoukosta S_2 ja kääntäen.

Testausasetelma 4/4

- Asetetaan normaalijakaumien $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ja $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ *varianssiparametreille* σ_1^2 ja σ_2^2 *nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

- Testausongelma:

  Ovatko havainnot *sopusoinnussa* nollahypoteesin H_0 kanssa?

- Ongelman ratkaisuna on **kahden riippumattoman otoksen *F*-testi varianseille** eli **varianssien vertailu-testi**.

Yleinen hypoteesi

- *Yleinen hypoteesi* H :

  (1) Havainnot $X_{i1} \quad \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)\,,\; i = 1, 2, \ldots, n_1$

  (2) Havainnot $X_{j2} \quad \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)\,,\; j = 1, 2, \ldots, n_2$

  (3) Havainnot X_{i1} ja X_{j2} ovat *riippumattomia* kaikille i ja j

- Huomautus:

  Oletus (3) sisältää *kolme riippumattomuusoletusta*:

  - Havainnot ovat riippumattomia otoksien 1 ja 2 *sisällä*.
  - Havainnot ovat riippumattomia otoksien 1 ja 2 *välillä*.

Nollahypoteesi ja vaihtoehtoiset hypoteesit

- *Nollahypoteesi* H_0 :

$$\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{H}_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \\ &\mathrm{H}_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{aligned}\right\} \text{ 1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi

- Olkoot

$$\bar{X}_k = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} X_{ik} \ , \ k = 1, 2$$

ja

$$s_k^2 = \frac{1}{n_k - 1}\sum_{i=1}^{n_k} (X_{ik} - \bar{X}_k)^2 \ , \quad k = 1, 2$$

tavanomaiset *harhattomat estimaattorit* parametreille

$$\mathrm{E}(X_{ik}) = \mu_k \ , \ i = 1, 2, \ldots , n_k \ , \ k = 1, 2$$

ja

$$\mathrm{Var}(X_{ik}) = \sigma_k^2 \ , \ i = 1, 2, \ldots , n_k \ , \ k = 1, 2$$

Varianssien vertailutesti

Testisuure ja sen jakauma

- Määritellään ***F*-testisuure**

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

- *Jos nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

pätee, niin testisuure *F* noudattaa *Fisherin F-jakaumaa* vapausastein $(n_1 - 1)$ ja $(n_2 - 1)$:

$$F \quad F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

Testisuureen jakauma nollahypoteesin H_0 pätiessä: Perustelu 1/4

- Oletetaan, että testin yleinen hypoteesi H ja nollahypoteesi H_0 pätevät:

$$X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n_1 1}, X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{n_2 2} \perp$$

$$X_{i1} \quad \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n_1$$

$$X_{j2} \quad \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)\,,\ j = 1, 2, \ldots, n_2$$

- Tällöin (ks. lukua **Otokset ja otosjakaumat**)

$$Y_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{X_{i1} - \mu_1}{\sigma} \right)^2 \quad \chi^2(n_1)$$

$$Y_2 = \sum_{j=1}^{n_2} \left(\frac{X_{j2} - \mu_2}{\sigma} \right)^2 \quad \chi^2(n_2)$$

- Koska $Y_1 \perp Y_2$, niin

$$Y = \frac{Y_1 / n_1}{Y_2 / n_2} \quad F(n_1, n_2)$$

Varianssien vertailutesti

Testisuureen jakauma nollahypoteesin H_0 pätiessä: Perustelu 2/4

- Koska odotusarvot μ_1 ja μ_2 ovat *tuntemattomia*, satunnaismuuttujan

  $$Y = \frac{Y_1/n_1}{Y_2/n_2}$$

  lauseke on testisuureena *epäoperationaalinen*.
- Korvataan satunnaismuuttujien Y_1 ja Y_2 lausekkeissa odotusarvot μ_1 ja μ_2 vastaavilla *otossuureilla*

  $$\bar{X}_k = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} X_{ik} \ , k = 1, 2$$

Testisuureen jakauma nollahypoteesin H$_0$ pätiessä: Perustelu 3/4

- Saamme satunnaismuuttujat (ks. lukua **Otokset ja otosjakaumat**)

$$V_1 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{X_{i1} - \bar{X}_1}{\sigma} \right)^2 \quad \chi^2(n_1 - 1)$$

$$V_2 = \frac{(n_2 - 1)s_2^2}{\sigma^2} = \sum_{j=1}^{n_2} \left(\frac{X_{j2} - \bar{X}_2}{\sigma} \right)^2 \quad \chi^2(n_2 - 1)$$

jossa

$$s_k^2 = \frac{1}{n_k - 1} \sum_{i=1}^{n_k} (X_{ik} - \bar{X}_k)^2 \ , \ k = 1, 2$$

- Lisäksi satunnaismuuttujat V_1 ja V_2 ovat *riippumattomia*:

$$V_1 \perp V_2$$

Varianssien vertailutesti

Testisuureen jakauma nollahypoteesin H_0 pätiessä: Perustelu 4/4

- Määritellään *F-testisuure*

$$F = \frac{V_1/(n_1-1)}{V_2/(n_2-1)} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

- Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*, testisuure *F noudattaa Fisherin F-jakaumaa* vapausastein $(n_1 - 1)$ ja $(n_2 - 1)$:

$$F \quad F(n_1-1, n_2-1)$$

Testi

- Testisuureen

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

normaaliarvo ≈ 1, koska *nollahypoteesin* $\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ *pätiessä* (ja jos n_2 on kyllin suuri)

$$\mathrm{E}(F) = \frac{n_2 - 1}{n_2 - 3} \approx 1$$

- Siten sekä *pienet* että *suuret* testisuureen F arvot sen normaaliarvoon ≈ 1 nähden viittaavat siihen, että *nollahypoteesi ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *hylätään*, jos testin p-arvo on *kyllin pieni*.

Varianssien vertailutesti

Testin hylkäysalueen määrääminen 1/4

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

niin *kriittinen raja* F_α saadaan ehdosta

$$\Pr(F \geq F_\alpha) = \alpha$$

jossa

$$F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

- Testin **hylkäysalue** on tällöin muotoa

$$(F_\alpha , +\infty)$$

Varianssien vertailutesti

Testin hylkäysalueen määrääminen 2/4

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

niin *kriittinen raja* $F_{1-\alpha}$ saadaan ehdosta

$$\Pr(F \le F_{1-\alpha}) = \alpha$$

jossa

$$F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

- Testin **hylkäysalue** on tällöin muotoa

$$(0\ ,\ F_{1-\alpha})$$

Varianssien vertailutesti

Testin hylkäysalueen määrääminen 3/4

- Valitaan testin **merkitsevyystasoksi** α.
- Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

niin *kriittiset rajat* $F_{1-\alpha/2}$ ja $F_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$\Pr(F \leq F_{1-\alpha/2}) = \alpha/2$$

$$\Pr(F \geq F_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

jossa

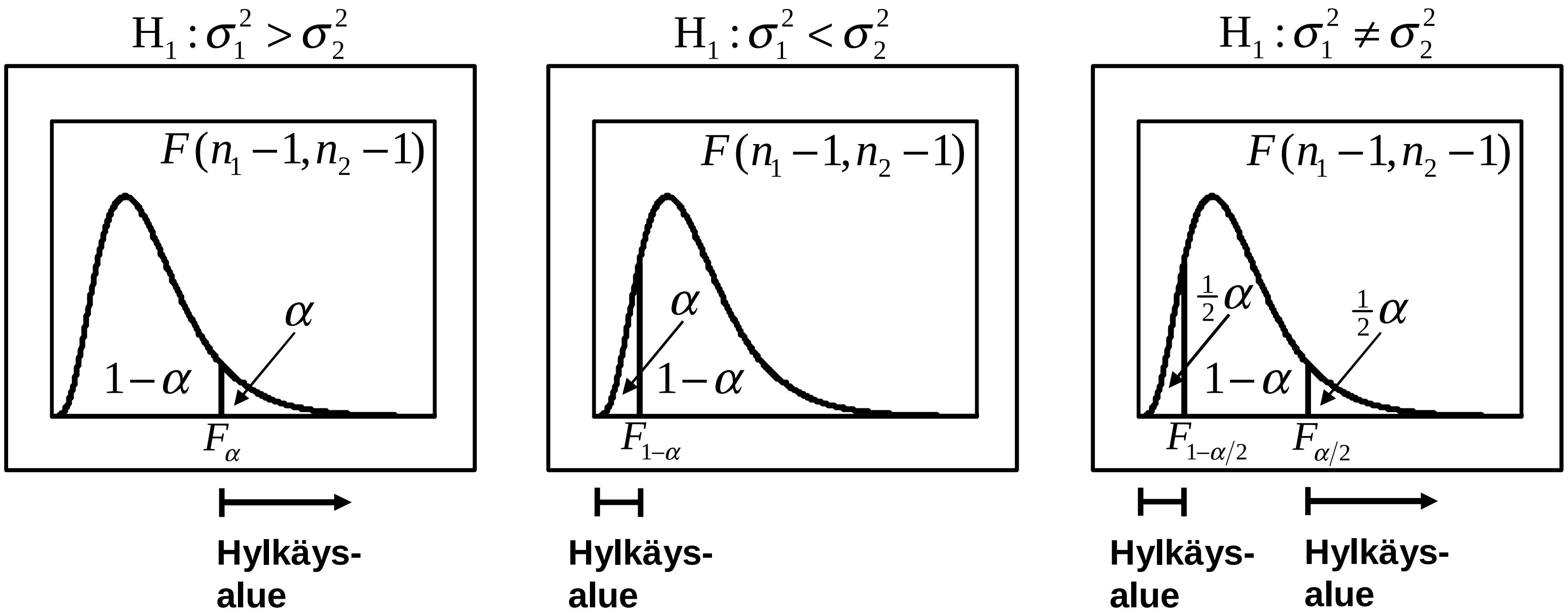
$$F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

- Testin **hylkäysalue** on tällöin muotoa

$$(0\ ,\ F_{1-\alpha/2}) \cup (F_{\alpha/2}\ ,\ +\infty)$$

Testin hylkäysalueen määrääminen 4/4

- Oletetaan, että testin *merkitsevyystasoksi* on valittu α.
- Testin **hylkäysalueen** määräämistä voidaan havainnollistaa olevilla kuvioilla.

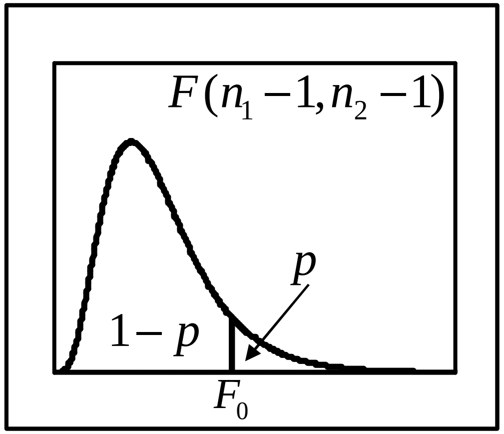


Varianssien vertailutesti

Testin *p*-arvo 1/2

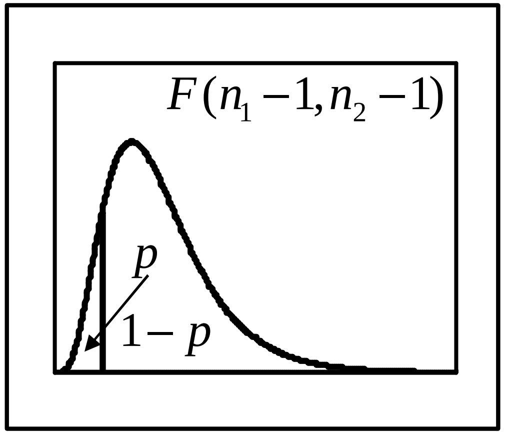
- Olkoon *F-testisuureen* havaittu arvo F_0 .
- Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on 1-*suuntainen*, testin ***p*-arvon** määräämistä voidaan havainnollistaa alla olevilla kuvioilla.

$\mathrm{H}_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$



Testin *p*-arvo = *p*

$\mathrm{H}_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$



Testin *p*-arvo = *p*

Testin *p*-arvo 2/2

- Olkoon vaihtoehtoinen hypoteesi 2-*suuntainen*:

$$\mathrm{H}_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

- Tällöin testin ***p*-arvo** on

$$p = 2 \times \min\left\{\Pr(F \geq F_0), \Pr(F \leq F_0)\right\}$$

jossa

$$F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

Normaalisuusoletuksen merkitys

- Tässä esitetyn varianssien vertailutestin yleisessä hypoteesissa oletetaan, että havainnot ovat molemmissa otoksissa *normaalijakautuneita*.
- Testi *on herkkä poikkeamille normaalisuudesta* ja *testi ei toimi kovinkaan hyvin*, jos havaintojen jakauma *on vino* tai havaintojen joukossa *on poikkeavia havaintoja*.
- Tällöin suuretkaan havaintojen lukumäärät eivät yleensä paranna tilannetta.