# Ilkka Mellin
# Tilastolliset menetelmät

## Osa 2: Otokset, otosjakaumat ja estimointi
## Otokset ja otosjakaumat

# Otokset ja otosjakaumat

>> Yksinkertainen satunnaisotos

Otostunnusluvut ja otosjakaumat

Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin otosjakaumat

Suhteellisen frekvenssin otosjakauma

# Tilastollinen aineisto

- **Tilastollinen aineisto** koostuu tutkimuksen kohteita kuvaavien muuttujien *havaituista arvoista*.
- Tilastollisissa tutkimusasetelmissa havaintoarvoihin liittyy aina *epävarmuutta* ja *satunnaisuutta*.
- Seurauksia:
  - (i) Tilastollisissa tutkimusasetelmissa ajatellaan, että *havaintoarvot on generoinut ilmiö, joka on luonteeltaan satunnainen*.
  - (ii) Tilastollisen tutkimuksen kohteita kuvaavat muuttujat tulkitaan tilastollisissa tutkimusasetelmissa *satunnaismuuttujiksi* ja havaintoarvot tulkitaan näiden *satunnaismuuttujien realisoituneiksi arvoiksi*.

# Tilastollinen malli

- **Tilastollisella mallilla** tarkoitetaan tutkimuksen kohteita kuvaavien satunnaismuuttujien *todennäköisyysjakaumaa*, *jonka ajatellaan generoineen ko. satunnaismuuttujien havaitut arvot*.
- Havaintoarvojen ajatellaan syntyneen *arpomalla* tilastollisena mallina käytetystä todennäköisyysjakaumasta saatavin todennäköisyyksin.
- Huomautus:

  Todennäköisyysjakaumat riippuvat tavallisesti *parametreista* eli vakioista, joiden arvoja ei yleensä tunneta.

# Tilastolliset mallit ja tilastollinen päättely

- Kun tilastollista mallia sovelletaan jotakin reaalimaailman ilmiötä kuvaavan havaintoaineiston analysointiin, kohdataan tavallisesti seuraavat mallin **parametreja** koskevat ongelmat:

  (i) Parametrien arvoja *ei tunneta* ja ne on **estimoitava** eli *arvioitava* havaintoaineistosta.

  (ii) Parametrien arvoista on esitetty *oletuksia* tai *väitteitä*, joita halutaan **testata** eli asettaa koetteelle havainto-aineistosta saatua informaatiota vastaan.

- Tilastollisten mallien parametrien estimointi ja testaus muodostavat keskeisen osan **tilastollista päättelyä**.

# Satunnaisotos ja satunnaisotanta

- **Satunnaisotos** poimitaan *arpomalla* havaintoyksiköt perusjoukosta otokseen.
- Arpomisessa käytettävää menetelmää kutsutaan **satunnaisotannaksi**.
- Satunnaisotannassa *sattuma* määrää mitkä perusjoukon alkioista tulevat otokseen.

# Satunnaisotanta: Kommentteja

- Jos havaintoyksiköt poimitaan perusjoukosta satunnaisotannalla, pätee seuraava:

  (i) **Havaintoyksiköitä kuvaavien muuttujien *havaitut arvot ovat satunnaisia* siinä mielessä, että ne vaihtelevat satunnaisesti otoksesta toiseen.**

  (ii) ***Kaikki* havaintoyksiköitä kuvaavien muuttujien *havaituista arvoista lasketut tunnusluvut ovat satunnaisia* siinä mielessä, että ne vaihtelevat satunnaisesti otoksesta toiseen.**

# Yksinkertainen satunnaisotos

- Olkoot

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  *riippumattomia, identtisesti jakautuneita* satunnais-muuttujia, joilla on *sama* pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio

  $$f(x)$$

- Tällöin satunnaismuuttujat

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  muodostavat (**yksinkertaisen**) **satunnaisotoksen** jakaumasta $f(x)$.

# Havainnot ja havaintoarvot

- Olkoon

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  *satunnaisotos* jakaumasta $f(x)$.
- Kutsumme satunnaismuuttujia $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ tavallisesti **havainnoiksi**.
- *Otoksen poimimisen jälkeen* satunnaismuuttujat $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ saavat havaituiksi arvoikseen **havainto-arvot**

  $$x_1 , x_2 , \ldots , x_n$$
- Merkitään:

  $$X_1 = x_1 , X_2 = x_2 , \ldots , X_n = x_n$$

# Yksinkertainen satunnaisotos: Kommentteja 1/2

- Olkoon

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

*satunnaisotos* jakaumasta $f(x)$.

- Tällöin havaintoarvot

$$x_1 , x_2 , \ldots , x_n$$

on saatu *toistamalla arvontaa toisistaan riippumattomin toistoin n kertaa samoin, jakaumasta* $f(x)$ *saatavin todennäköisyyksin*.

- Havaintoarvot $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ ovat *kiinteitä* eli *ei-satunnaisia*, mutta ne *vaihtelevat toisistaan riippumatta ja satunnaisesti otoksesta toiseen*.

# Yksinkertainen satunnaisotos: Kommentteja 2/2

- Satunnaisuus liittyy yksinkertaisessa satunnais-otannassa siihen, että *havaintoarvot vaihtelevat toisistaan riippumatta ja satunnaisesti otoksesta toiseen*.
- **Satunnaisuus *ei siis liity* otannan tuloksena saatuihin havaintoarvoihin**, **vaan otoksen poimintatapaan**.

# Tilastollinen malli yksinkertaiselle satunnaisotokselle 1/2

- Olkoon

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  *satunnaisotos* jakaumasta $f(x)$.
- Satunnaismuuttujien $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *yhteisjakauma* muodostaa **tilastollisen mallin** *havaintoarvojen satunnaiselle vaihtelulle otoksesta toiseen*.

# Tilastollinen malli yksinkertaiselle satunnaisotokselle 2/2

- Koska satunnaismuuttujat

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  on oletettu riippumattomiksi, niin satunnaismuuttujien $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ **yhteisjakauma** on muotoa

  $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) \times f(x_2) \times \cdots \times f(x_n)$$

  jossa

  $$X_i \qquad f(x_i)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

# Otokset ja otosjakaumat

**Yksinkertainen satunnaisotos**

**>> Otostunnusluvut ja otosjakaumat**

**Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin otosjakaumat**

**Suhteellisen frekvenssin otosjakauma**

# Otostunnusluvut 1/3

- Olkoon

$$X_1 \, , X_2 \, , \ldots \, , X_n$$

  **satunnaisotos** jakaumasta, jonka pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio on $f(x)$.

- Tällöin havainnot $X_1 \, , X_2 \, , \ldots \, , X_n$ ovat *riippumattomia*, *identtisesti jakautuneita satunnaismuuttujia*, joilla on *sama pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktio* $f(x)$:

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \perp$$

$$X_i \qquad f(x) \, , i = 1, 2, \ldots, n$$

# Otostunnusluvut 2/3

- Olkoon

  $$T = g(X_1 , X_2 , \ldots , X_n)$$

  jokin *satunnaismuuttujien* $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ (mitallinen) *funktio*.
- Satunnaismuuttujaa $T$ kutsutaan (**otos-**) **tunnusluvuksi**.

# Otostunnusluvut 3/3

- Oletetaan, että otoksen poimimisen jälkeen satunnaismuuttujat $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ saavat havaituiksi arvoikseen *havaintoarvot* $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ :

$$X_1 = x_1 , X_2 = x_2 , \ldots , X_n = x_n$$

- Tällöin tunnusluku

$$T = g(X_1 , X_2 , \ldots , X_n)$$

*saa havaituksi arvokseen* $t$ funktion $g$ arvon pisteessä $(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$:

$$t = g(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$$

# Otosjakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  muodostavat *satunnaisotoksen* jakaumasta $f(x)$ ja olkoon funktio

  $$T = g(X_1 , X_2 , \ldots , X_n)$$

  jokin *otostunnusluku*.
- Tunnusluvun $T$ jakaumaa kutsutaan *tunnusluvun T* **otosjakaumaksi**.
- Tunnusluvun $T$ otosjakauma muodostaa **tilastollisen mallin** *tunnusluvun T arvojen satunnaiselle vaihtelulle otoksesta toiseen*.

# Eräiden tavallisten tunnuslukujen otosjakaumat

- Olkoon

  $$X_1\,, X_2\,, \ldots\,, X_n$$

  *satunnaisotos* jakaumasta $f(x)$.
- Jatkossa tarkastellaan seuraavien tunnuslukujen (ks. lukua **Tilastollisten aineistojen kuvaaminen**) otosjakaumia:
  - **Aritmeettinen keskiarvo**
  - **Otosvarianssi**
  - **Suhteellinen frekvenssi**

# Otokset ja otosjakaumat

Yksinkertainen satunnaisotos

Otostunnusluvut ja otosjakaumat

>> Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin otosjakaumat

Suhteellisen frekvenssin otosjakauma

# Aritmeettinen keskiarvo: Määritelmä 1/2

- Oletetaan, että havainnot

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  muodostavat *satunnaisotoksen* satunnaismuuttujan $X$ jakaumasta, jonka *odotusarvo* ja *varianssi* ovat

  $$\mathrm{E}(X) = \mu$$

  $$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

- Tällöin kaikilla satunnaismuuttujilla $X_i$ , $i = 1, 2, \ldots , n$ on *sama* odotusarvo $\mu$ ja *sama* varianssi $\sigma^2$ .

# Aritmeettinen keskiarvo: Määritelmä 2/2

- Olkoon

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

havaintojen $X_1$ , $X_2$ , … , $X_n$ **aritmeettinen keskiarvo**.

- Aritmeettinen keskiarvo $\bar{X}$ kuvaa havaintojen *keski-määräistä arvoa*.
- Aritmeettinen keskiarvo $\bar{X}$ on satunnaismuuttuja, jonka saamat *arvot vaihtelevat satunnaisesti otoksesta toiseen*.

# Aritmeettisen keskiarvon otosjakauma: Odotusarvo ja varianssi

- **Aritmeettisen keskiarvon** $\bar{X}$ **odotusarvo** ja **varianssi**:

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{D}^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- Aritmeettisen keskiarvon $\bar{X}$ *standardipoikkeamaa*

$$\mathrm{D}(\bar{X}) = \sigma \big/ \sqrt{n}$$

kutsutaan tavallisesti **keskiarvon keskivirheeksi** ja se kuvaa aritmeettisen keskiarvon otosvaihtelua oman odotusarvonsa $\mu$ ympärillä.

# Aritmeettisen keskiarvon otosjakauma: Odotusarvon johto

- Olkoot $X_1$ , $X_2$ , … , $X_n$ *riippumattomia* satunnaismuuttujia, joille

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

- Odotusarvon yleisten ominaisuuksien perusteella pätee (myös *ilman riippumattomuusoletusta*):

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\bar{X}) &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu \\
&= \frac{1}{n} n\mu = \mu
\end{aligned}$$

# Aritmeettisen keskiarvon otosjakauma: Varianssin johto

- Olkoot $X_1$ , $X_2$ , … , $X_n$ *riippumattomia* satunnaismuuttujia, joille

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

- Varianssin yleisten ominaisuuksien perusteella pätee (*koska satunnaismuuttujat* $X_1$ , $X_2$ , … , $X_n$ *on oletettu riippumattomiksi*):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\overline{X}) &= \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&\overset{\perp}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 \\
&= \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

# Aritmeettisen keskiarvon otosjakauma: Jakauman käyttäytyminen otoskoon kasvaessa

- Koska aritmeettisen keskiarvon $\bar{X}$ odotusarvo on

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = \mu$$

ja varianssi on

$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \sigma^2 / n$$

niin aritmeettisen keskiarvon otosjakauma *keskittyy yhä voimakkaammin havaintojen yhteisen odotusarvon* $\mu$ *ympärille*, *kun otoskoko n kasvaa*.

# Aritmeettisen keskiarvon otosjakauma: Normaalijakautunut otos

- Oletetaan, että havainnot

  $$X_1\,, X_2\,, \ldots\,, X_n$$

  muodostavat *yksinkertaisen satunnaisotoksen normaali-jakaumasta*

  $$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

- Tällöin havaintojen *aritmeettinen keskiarvo* $\bar{X}$ *noudattaa eksaktisti* (eli myös äärellisissä otoksissa) **normaali-jakaumaa**:

  $$\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

# Aritmeettisen keskiarvon otosjakauma: Perustelu, kun otos on normaalijakautunut 1/2

- Olkoon

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  *yksinkertainen satunnaisotos normaalijakaumasta*

  $$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$$

- Koska oletuksen mukaan havainnot $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ ovat *riippumattomia*, niin

  $$\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2)$$

  ja

  $$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

# Aritmeettisen keskiarvon otosjakauma: Perustelu, kun otos on normaalijakautunut 2/2

- Perustelu:

  Ks. todistusta normaalijakautuneen otoksen aritmeettisen keskiarvon $\bar{X}$ ja otosvarianssin $s^2$ riippumattomuudelle > sekä monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukuja **Jatkuvia jakaumia**, **Moni-ulotteiset satunnaismuuttujat ja jakaumat** sekä **Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat.**

# Aritmeettisen keskiarvon otosjakauma: Asymptoottinen jakauma

- Oletetaan, että havainnot

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  muodostavat *yksinkertaisen satunnaisotoksen* satunnais-muuttujan $X$ jakaumasta, jonka *odotusarvo* on $\mu$ ja *varianssi* on $\sigma^2$ .
- Tällöin havaintojen *aritmeettinen keskiarvo* $\bar{X}$ *noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti* **normaalijakaumaa** jonka odotusarvo on $\mu$ ja varianssi on $\sigma^2 / n$ :

  $$\bar{X} \sim_a \mathrm{N}\left( \mu, \frac{\sigma^2}{n} \right)$$

# Aritmeettisen keskiarvon otosjakauma: Kommentteja 1/2

- *Oletukset havaintojen riippumattomuudesta, samasta jakaumasta ja normaalisuudesta ovat välttämättömiä* aritmeettisen keskiarvon *eksaktia* eli *tarkkaa* otos-jakaumaa koskevalle tulokselle.
- Aritmeettisen keskiarvon otosjakaumaa koskeva *asymptoottinen* tulos seuraa **keskeisestä raja-arvo-lauseesta**; ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukua **Jatkuvia jakaumia** tai lukua **Stokastiikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet.**

# Aritmeettisen keskiarvon otosjakauma: Kommentteja 2/2

- Aritmeettisen keskiarvon otosjakaumaa koskeva asymptoottinen tulos *pätee tietyin lisäehdoin* myös monissa sellaisissa tilanteissa, joissa *havaintojen riippumattomuutta ja samaa jakaumaa koskevat oletukset eivät päde*.

# Standardoidun aritmeettisen keskiarvon otosjakauma: Odotusarvo ja varianssi

- Koska

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \sigma^2 / n$$

niin *standardoidun* satunnaismuuttujan

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

*odotusarvo* ja *varianssi* ovat

$$\mathrm{E}(Z) = 0$$

$$\mathrm{Var}(Z) = 1$$

# Standardoidun aritmeettisen keskiarvon otosjakauma: Normaalijakautunut otos

- Oletetaan, että havainnot

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  muodostavat *yksinkertaisen satunnaisotoksen normaali-jakaumasta*

  $$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$$

- Tällöin *standardoitu satunnaismuuttuja*

  $$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

  *noudattaa eksaktisti* (eli myös äärellisissä otoksissa) **standardoitua normaalijakaumaa**:

  $$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$$

## Standardoidun aritmeettisen keskiarvon otosjakauma: Asymptoottinen jakauma

- Oletetaan, että havainnot

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  muodostavat *yksinkertaisen satunnaisotoksen* satunnaismuuttujan $X$ jakaumasta, jonka *odotusarvo* on $\mu$ ja *varianssi* on $\sigma^2$ .
- Tällöin *standardoitu satunnaismuuttuja*

  $$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

  *noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti* **standardoitua normaalijakaumaa**:

  $$Z \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

# Otosvarianssi: Määritelmä 1/2

- Oletetaan, että havainnot

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  muodostavat *yksinkertaisen satunnaisotoksen* satunnaismuuttujan $X$ jakaumasta, jonka *odotusarvo* ja *varianssi* ovat

  $$\mathrm{E}(X) = \mu$$

  $$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

- Tällöin kaikilla satunnaismuuttujilla $X_i$ , $i = 1, 2, \ldots , n$ on *sama* odotusarvo $\mu$ ja *sama* varianssi $\sigma^2$ .

# Otosvarianssi: Määritelmä 2/2

- Olkoon

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

havaintojen $X_1$ , $X_2$ , … , $X_n$ **otosvarianssi**, jossa

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

on havaintojen $X_1$ , $X_2$ , … , $X_n$ *aritmeettinen keskiarvo*.

- Otosvarianssi $s^2$ kuvaa havaintoarvojen *vaihtelua niiden aritmeettisen keskiarvon ympärillä*.
- Otosvarianssi $s^2$ on satunnaismuuttuja, jonka saamat *arvot vaihtelevat satunnaisesti otoksesta toiseen*.

## Otosvarianssin otosjakauma: Odotusarvo ja varianssi

- **Otosvarianssin** $s^2$ **odotusarvo**:

$$\mathrm{E}(s^2) = \sigma^2$$

- Jos lisäksi voidaan olettaa, että havainnot $X_1, X_2, \ldots, X_n$ noudattavat normaalijakaumaa $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, niin **otosvarianssin** $s^2$ **varianssi** on

$$\mathrm{Var}(s^2) = \mathrm{D}^2(s^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

- Siten otosvarianssin $s^2$ *standardipoikkeama* on normaalisen otoksen tapauksessa

$$\mathrm{D}(s^2) = \sigma^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

# Otosvarianssin otosjakauma: Normaalijakautunut otos 1/2

- Oletetaan, että havainnot

  $$X_1\,,X_2\,,\ldots\,,X_n$$

  muodostavat *yksinkertaisen satunnaisotoksen normaalijakaumasta*

  $$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$$

- Tällöin *satunnaismuuttuja*

  $$Y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$$

  *noudattaa* **$\chi^2$-jakaumaa** *vapausastein n*:

  $$Y \quad \chi^2(n)$$

### Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin otosjakaumat

## Otosvarianssin otosjakauma: Normaalijakautunut otos 2/2

- Oletetaan, että havainnot

  $$X_1\,,\,X_2\,,\,\ldots\,,\,X_n$$

  muodostavat *yksinkertaisen satunnaisotoksen normaali-jakaumasta*

  $$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$$

- Tällöin *satunnaismuuttuja*

  $$V=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2$$

  *noudattaa* $\boldsymbol{\chi^2}$**-jakaumaa** *vapausastein* ($n$ – 1):

  $$V \quad \chi^2(n-1)$$

# Otosvarianssin otosjakauma: Perustelu, kun otos on normaalijakautunut 1/6

- Olkoon

  $$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

  *yksinkertainen satunnaisotos normaalijakaumasta*

  $$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

- Olkoon

  $$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

  havaintojen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *aritmeettinen keskiarvo* ja

  $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

  havaintojen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (harhaton) *otosvarianssi*.

# Otosvarianssin otosjakauma: Perustelu, kun otos on normaalijakautunut 2/6

- Määritellään satunnaismuuttuja $Y$ kaavalla

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

- Koska havainnot $X_1$ , $X_2$ , … , $X_n$ ovat *riippumattomia* ja noudattavat normaalijakaumaa $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ :

$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \,,\; i = 1, 2, \ldots, n$$

niin *standardoidut* satunnaismuuttujat

$$Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \,,\; i = 1, 2, \ldots, n$$

ovat *riippumattomia* ja noudattavat standardoitua normaalijakaumaa N(0, 1):

$$Y_i \sim \mathrm{N}(0,1) \,,\; i = 1, 2, \ldots, n$$

# Otosvarianssin otosjakauma: Perustelu, kun otos on normaalijakautunut 3/6

- Edellä esitetystä seuraa, että satunnaismuuttuja $Y$ on *riippumattomien*, *standardoitua normaalijakaumaa* N(0, 1) *noudattavien satunnais-muuttujien* $Y_i$ , $i = 1, 2, \dots , n$ *neliösumma*:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$$

- Suoraan $\chi^2$-*jakauman määritelmästä* seuraa, että satunnaismuuttuja $Y$ noudattaa $\chi^2$-*jakaumaa vapausastein n*:

$$Y \quad \chi^2(n)$$

Ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**.

# Otosvarianssin otosjakauma: Perustelu, kun otos on normaalijakautunut 4/6

- Määritellään nyt satunnaismuuttuja $V$ kaavalla

$$V = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2$$

- Satunnaismuuttuja $V$ saadaan satunnaismuuttujasta

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

korvaamalla odotusarvo $\mu$ harhattomalla estimaattorillaan $\bar{X}$.

- Satunnaismuuttujan $V$ määritelmässä esiintyvän summan termit

$$U_i = \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

*eivät ole riippumattomia*.

# Otosvarianssin otosjakauma: Perustelu, kun otos on normaalijakautunut 5/6

- Voidaan kuitenkin osoittaa, että $V$ voidaan esittää *riippumattomien, standardoitua normaalijakaumaa* N(0, 1) *noudattavien satunnaismuuttujien* $V_i$ , $i = 1, 2, \dots , n - 1$ *neliösummana* (ks. todistusta normaalijakautuneen otoksen aritmeettisen keskiarvon $\bar{X}$ ja otosvarianssin $s^2$ riippumattomuudelle >):

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} V_i^2$$

- Siten suoraan $\chi^2$-*jakauman määritelmästä* seuraa, että satunnaismuuttuja $Y$ noudattaa $\chi^2$-*jakaumaa vapausastein* ($n - 1$):

$$V \qquad \chi^2(n-1)$$

Ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**.

# Otosvarianssin otosjakauma: Perustelu, kun otos on normaalijakautunut 6/6

- Huomautuksia:

(i) Satunnaismuuttuja $Y$ noudattaa $\chi^2$-jakaumaa, jonka *vapausasteiden lukumäärä on sama kuin havaintojen lukumäärä n*.

(ii) Kun satunnaismuuttujasta $Y$ siirrytään satunnaismuuttujaan $V$ *menetetään yksi vapausaste*.

(iii) Yhden vapausasteen menetys on seurausta siitä, että *parametrin $\mu$ korvaaminen estimaattorillaan $\bar{X}$* riippumattomissa satunnaismuuttujissa

$$Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

*luo yhden* (*lineaarisen*) *side-ehdon* satunnaismuuttujien

$$U_i = \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

välille.

# Otosvarianssin otosjakauma: Kommentteja

- *Oletukset havaintojen riippumattomuudesta ja samasta jakaumasta ovat välttämättömiä* otosvarianssin eksaktia eli tarkkaa otosjakaumaa koskevalle tulokselle.

# Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin riippumattomuus 1/2

- Oletetaan, että havainnot

  $$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

  muodostavat *yksinkertaisen satunnaisotoksen normaalijakaumasta*

  $$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

- Olkoon

  $$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

  havaintojen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *aritmeettinen keskiarvo* ja

  $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

  havaintojen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (harhaton) *otosvarianssi*.

# Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin riippumattomuus 2/2

- Tällöin $\bar{X}$ ja $s^2$ ovat *riippumattomia*:

$$\bar{X} \perp s^2$$

- Lisäksi

$$\bar{X} \quad \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \quad \chi^2(n-1)$$

# Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin riippumattomuus: Perustelu 1/8

- Oletetaan, että havainnot

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  muodostavat *yksinkertaisen satunnaisotoksen normaalijakaumasta*

  $$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$$

- Olkoon

  $$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

  havaintojen $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *aritmeettinen keskiarvo* ja

  $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

  havaintojen $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ (harhaton) *otosvarianssi*.

# Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin riippumattomuus: Perustelu 2/8

- Otoksen *yhteisjakauman tiheysfunktio* voidaan kirjoittaa havaintojen riippumattomuuden ja normaalisuuden takia seuraavaan muotoon:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} \sigma^{-n} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right\}$$

- Määritellään *lineaarinen* muunnos

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} X_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} X_2 + \frac{1}{\sqrt{n}} X_3 + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} X_n \\ Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} X_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} X_2 \\ Y_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} X_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} X_2 - \frac{2}{\sqrt{6}} X_3 \\ \quad \vdots \\ Y_n = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} X_1 + \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} X_2 + \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} X_3 + \cdots - \frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} X_n \end{cases}$$

# Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin riippumattomuus: Perustelu 3/8

- Muunnos voidaan esittää *matriisein* muodossa

$$\mathbf{Y} = \mathbf{BX}$$

jossa

$$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

ja $n \times n$-matriisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots & -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \end{bmatrix}$$

on *ortogonaalinen* ($\mathbf{B}'\mathbf{B} = \mathbf{BB}' = \mathbf{I}$).

# Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin riippumattomuus: Perustelu 4/8

- Matriisi **B** nähdään ortogonaaliseksi alla esitettävällä tavalla.
- Määritellään $n \times n$-matriisi

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & -(n-2) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -(n-1) \end{bmatrix}$$

- On helppo nähdä, että matriisin **C** rivit ovat *kohtisuorassa* toisiaan vastaan.
- Matriisi **B** saadaan matriisista **C** *normeeraamalla* sen rivit niin, että niiden pituudeksi tulee 1.

# Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin riippumattomuus: Perustelu 5/8

- Koska muunnos

$$\mathbf{Y} = \mathbf{BX}$$

on ortogonaalinen, niin muunnosta vastaavan *Jacobin determinantin* itseisarvo = 1.

- Koska

$$Y_1 = \tfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sqrt{n}\bar{X}$$

ja

$$Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2 = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} = \mathbf{X}'\mathbf{B}'\mathbf{BX} = \mathbf{X}'\mathbf{X} = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + n\bar{X}^2$$

niin

$$Y_2^2 + \cdots + Y_n^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = (n-1)s^2$$

# Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin riippumattomuus: Perustelu 6/8

- Koska

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + n(\bar{X}-\mu)^2$$

$$= Y_2^2 + \cdots + Y_n^2 + (Y_1-\sqrt{n}\mu)^2$$

niin satunnaismuuttujien $Y_1$, $Y_2$, … , $Y_n$ *yhteisjakauman tiheysfunktioksi* saadaan

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(Y_1-\sqrt{n}\mu)^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(Y_1-\sqrt{n}\mu)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}Y_2^2} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}Y_n^2}$$

# Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin riippumattomuus: Perustelu 7/8

- Edellä esitetystä seuraa, että satunnaismuuttujat

  $$Y_1\ ,\ Y_2\ ,\ \ldots\ ,\ Y_n$$

  ovat *riippumattomia* ja *normaalijakautuneita*:

  $$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \perp$$

  $$Y_1 = \sqrt{n}\,\overline{X} \quad \mathrm{N}(\sqrt{n}\mu, \sigma^2)$$

  $$Y_i \quad \mathrm{N}(0, \sigma^2)\ ,\ i = 2, \ldots, n$$

- Lisäksi

  $$s^2 = \frac{1}{n-1}(Y_2^2 + \cdots + Y_n^2) = \frac{\sigma^2}{n-1}\left[\left(\frac{Y_2}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{Y_n}{\sigma}\right)^2\right]$$

  jossa

  $$\frac{Y_i}{\sigma} \quad \mathrm{N}(0,1)\ ,\ i = 2, \ldots, n$$

# Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin riippumattomuus: Perustelu 8/8

- Siten olemme todistaneet, että

$$\bar{X} \perp s^2$$

$$\bar{X} \quad \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \quad \chi^2(n-1)$$

- Huomautus:

  Todistuksessa on sovellettu monisteen **Todennäköisyyslaskenta** luvun **Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat** teoriaa sekä luvussa **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia** esitettyä $\chi^2$-jakauman määritelmää.

# Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin otosjakaumat: Seuraus 1/2

- Oletetaan, että havainnot

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  muodostavat *yksinkertaisen satunnaisotoksen normaali-jakaumasta*

  $$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$$

- Olkoon

  $$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

  havaintojen $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *aritmeettinen keskiarvo* ja

  $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

  havaintojen $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ (harhaton) *otosvarianssi*.

# Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin otosjakaumat: Seuraus 2/2

- Tällöin

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \quad t(n-1)$$

# Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin otosjakaumat: Todistus 1/3

- Oletetaan, että havainnot

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  muodostavat *yksinkertaisen satunnaisotoksen normaalijakaumasta*

  $$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$$

- Olkoon

  $$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

  havaintojen $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *aritmeettinen keskiarvo* ja

  $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

  havaintojen $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ (harhaton) *otosvarianssi*.

# Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin otosjakaumat: Todistus 2/3

- Aikaisemmin on todettu, että

$$\bar{X} \quad \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \quad \chi^2(n-1)$$

ja lisäksi

$$\bar{X} \perp s^2$$

- Aritmeettista keskiarvoa $\bar{X}$ koskevasta jakaumatuloksesta seuraa, että

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \mathrm{N}(0,1)$$

# Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin otosjakaumat: Todistus 3/3

- Siten suoraan *t-jakauman* määritelmästä seuraa, että

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right)}} \qquad t(n-1)$$

Ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia.**

# Otokset ja otosjakaumat

Yksinkertainen satunnaisotos

Otostunnusluvut ja otosjakaumat

Aritmeettisen keskiarvon ja otosvarianssin otosjakaumat

>> Suhteellisen frekvenssin otosjakauma

# Frekvenssi ja suhteellinen frekvenssi: Määritelmät 1/3

- Olkoon $P$ jokin otosavaruuden $S$ alkioiden *ominaisuus*.
- Jos otosavaruuden $S$ alkiolla $x$ on ominaisuus $P$, merkitään

  $$P(x)$$

- Olkoon

  $$A = \{x \in S \mid P(x)\}$$

  niiden otosavaruuden $S$ alkioiden *osajoukko*, joilla on ominaisuus $P$.
- Oletetaan, että **tapahtuman *A* todennäköisyys** on

  $$\Pr(A) = p$$

# Frekvenssi ja suhteellinen frekvenssi: Määritelmät 2/3

- Poimitaan otosavaruudesta *S* *yksinkertainen satunnaisotos*, jonka *koko* on $n$.
- Olkoon

$$f$$

niiden havaintoyksiköiden **frekvenssi**, joilla on ominaisuus $P$ ja olkoon

$$\hat{p} = f/n$$

vastaava **suhteellinen frekvenssi**.

# Frekvenssi ja suhteellinen frekvenssi: Määritelmät 3/3

- Frekvenssi

  $$f$$

  kuvaa *A-tyyppisten alkioiden* **lukumäärää** otoksessa ja vastaava suhteellinen frekvenssi

  $$\hat{p} = f/n$$

  kuvaa *A-tyyppisten alkioiden* **suhteellista osuutta** otoksessa.
- Frekvenssi $f$ ja vastaava suhteellinen frekvenssi $\hat{p}$ ovat *satunnaismuuttujia*, joiden saamat *arvot vaihtelevat satunnaisesti otoksesta toiseen*.

# Frekvenssi: Odotusarvo, varianssi ja jakauma 1/2

- Olkoon $A$ jokin otosavaruuden $S$ *tapahtuma*:

$$A \subset S$$

- Poimitaan otosavaruudesta $S$ *yksinkertainen satunnaisotos*, jonka *koko* on $n$.
- Olkoon

$$f$$

$A$-tyyppisten alkioiden *lukumäärä* eli *frekvenssi* otoksessa.

# Frekvenssi: Odotusarvo, varianssi ja jakauma 2/2

- **Frekvenssin** $f$ **odotusarvo** ja **varianssi**:

$$\mathrm{E}(f) = np$$

$$\mathrm{Var}(f) = npq$$

jossa $q = 1 - p$.

- *Frekvenssi $f$ noudattaa eksaktisti* **binomijakaumaa** parametrein $n$ ja $\Pr(A) = p$:

$$f \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$

Ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukua **Diskreettejä jakaumia** tai lukua **Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat.**

# Suhteellinen frekvenssi: Odotusarvo ja varianssi 1/2

- Olkoon $A$ jokin otosavaruuden $S$ *tapahtuma*:

$$A \subset S$$

- Poimitaan otosavaruudesta $S$ *yksinkertainen satunnaisotos*, jonka *koko* on $n$.
- Olkoon

$$\hat{p} = f/n$$

$A$-tyyppisten alkioiden *suhteellinen osuus* eli *frekvenssi* otoksessa.

# Suhteellinen frekvenssi: Odotusarvo ja varianssi 2/2

- **Suhteellisen frekvenssin** $\hat{p}$ **odotusarvo** ja **varianssi**:

$$\mathrm{E}(\hat{p}) = p$$

$$\mathrm{Var}(\hat{p}) = \mathrm{D}^2(\hat{p}) = \frac{pq}{n}$$

jossa $q = 1 - p$.

- Suhteellisen frekvenssin $\hat{p}$ *standardipoikkeamaa*

$$\mathrm{D}(\hat{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

kutsutaan tavallisesti **suhteellisen frekvenssin keski-virheeksi** ja se kuvaa suhteellisen frekvenssin $f/n$ otos-vaihtelua oman odotusarvonsa $p$ ympärillä.

# Suhteellisen frekvenssin otosjakauma: Jakauman käyttäytyminen otoskoon kasvaessa

- Koska suhteellisen frekvenssin $\hat{p}$ odotusarvo

  $$\mathrm{E}(\hat{p}) = p$$

  ja varianssi on

  $$\mathrm{Var}(\hat{p}) = pq/n\,,\ q = 1 - p$$

  niin suhteellisen frekvenssin otosjakauma *keskittyy yhä voimakkaammin tapahtuman A todennäköisyyden p ympärille*, *kun otoskoko n kasvaa*.

# Suhteellisen frekvenssin otosjakauma: Asymptoottinen jakauma

- *Suhteellinen frekvenssi* $\hat{p}$ *noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti* **normaalijakaumaa**:

$$\hat{p} \sim_a \mathrm{N}\left( p, \frac{pq}{n} \right)$$

- Siten *standardoitu satunnaismuuttuja*

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}}$$

*noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa*:

$$Z \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

# Suhteellisen frekvenssin otosjakauma: Kommentti

- Suhteellisen frekvenssin otosjakaumaa koskeva asymptoottinen tulos seuraa **keskeisestä raja-arvo-lauseesta**; ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukua **Jatkuvia jakaumia** tai lukua **Stokastiikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet.**