Ilkka Mellin

Tilastolliset menetelmät

Osa 2: Otokset, otosjakaumat ja estimointi

Väliestimointi

Väliestimointi

>> **Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi**
Luottamusväli
Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli
Normaalijakauman varianssin luottamusväli
Bernoulli-jakauman odotusarvon luottamusväli

Todennäköisyysjakaumat tilastollisten aineistojen kuvaajina

- **Tilastollinen aineisto** koostuu tutkimuksen kohteita kuvaavien muuttujien *havaituista arvoista*.
- Tilastollisissa tutkimusasetelmissa havaintoihin liittyy aina *epävarmuutta* ja *satunnaisuutta*.
- Tilastollisissa tutkimusasetelmissa tutkimuksen kohteita kuvaavat muuttujat tulkitaan *satunnaismuuttujiksi*, jotka *generoivat* muuttujien havaitut arvot.
- *Havaintoarvot generoineiden satunnaismuuttujien todennäköisyysjakauma* muodostaa **tilastollisen mallin** sille satunnaisilmiölle, jota havainnot koskevat.

Todennäköisyysjakaumien parametrit 1/2

- Tarkastellaan jotakin tutkimuksen kaikkien mahdollisten kohteiden muodostaman perusjoukon S alkioiden ominaisuutta kuvaavaa *satunnaismuuttujaa* X.
- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *todennäköisyysjakaumaa*, jonka *pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktio*

  $$f(x\,;\,\theta)$$

  riippuu **parametrista** θ.
- Merkintä:

  $$X \sim f(x\,;\theta)$$

Todennäköisyysjakaumien parametrit 2/2

- Satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio

  $$f(x\,;\,\theta)$$

  kuvaa satunnaismuuttujan X *todennäköisyysjakaumaa* ja parametri θ kuvaa jotakin jakauman *karakteristista ominaisuutta*.
- Koska parametrin θ arvoa *ei* sovellustilanteessa *yleensä tunneta*, tilastollisen tutkimuksen tärkeimpiä osatehtäviä on **estimoida** eli *arvioida* tuntemattomalle parametrille θ sopiva arvo jakaumasta $f(x\,;\,\theta)$ *poimitun otoksen perusteella*.

Yksinkertainen satunnaisotos

- Olkoon

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  yksinkertainen satunnaisotos jakaumasta, jonka pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio $f(x\,;\,\theta)$ riippuu parametrista θ.
- Tällöin havainnot $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ ovat *riippumattomia, identtisesti jakautuneita satunnaismuuttujia*, joilla on *sama pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktio* $f(x\,;\,\theta)$:

  $$X_1, X_2, \ldots , X_n \perp$$

  $$X_i \sim f(x\,;\theta)\,,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

Havainnot ja havaintoarvot

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat (havainnot)

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  saavat *poimitussa otoksessa* **havaituiksi arvoikseen** luvut

  $$x_1 , x_2 , \ldots , x_n$$

- **Havaintoarvot**

  $$x_1 , x_2 , \ldots , x_n$$

  vaihtelevat satunnaisesti otoksesta toiseen jakaumasta

  $$f(x \,;\, \theta)$$

  saatavin todennäköisyyksin.

Estimaattorit ja estimaatit 1/2

- Oletetaan, että todennäköisyysjakauman $f(x\ ;\ \theta)$ *parametrin* θ *estimoimiseen* käytetään satunnaismuuttujien $X_1\ , X_2\ , \ldots\ , X_n$ funktiota eli *tunnuslukua*

$$T = g(X_1\ , X_2\ , \ldots\ , X_n)$$

- Tällöin funktiota $T = g(X_1\ , X_2\ , \ldots\ , X_n)$ kutsutaan parametrin θ **estimaattoriksi** ja *havaintoarvoista*

$$x_1\ , x_2\ , \ldots\ , x_n$$

laskettua funktion g arvoa

$$t = g(x_1\ , x_2\ , \ldots\ , x_n)$$

kutsutaan parametrin θ **estimaatiksi**.

Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi

Estimaattorit ja estimaatit 2/2

- Olkoon

$$T = g(X_1 , X_2 , \dots , X_n)$$

jakauman $f(x\,;\,\theta)$ parametrin θ *estimaattori*.

- Tällöin estimaattorin T havaintoarvoista

$$x_1 , x_2 , \dots , x_n$$

laskettu arvo eli *estimaatti*

$$t = g(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$$

on satunnaismuuttujan T arvon realisaatio otoksessa.

Estimaattoreiden johtaminen

- *Hyvien estimaattoreiden johtaminen* todennäköisyys-jakaumien tuntemattomille parametreille *on teoreettisen tilastotieteen keskeisiä ongelmia*.
- Tärkeimmät estimaattoreiden johtamiseen käytettävät menetelmät:
  - **Suurimman uskottavuuden menetelmä**
  - **Momenttimenetelmä**

  Ks. lukua **Estimointimenetelmät.**

Piste-estimointi ja väliestimointi

- Todennäköisyysjakauman *parametrin arvon estimointia* kutsutaan usein **piste-estimoinniksi**.
- Parametrin estimaattiin on aina syytä liittää **luottamus-väliksi** kutsuttu *väli, joka sisältää estimoidun parametrin todellisen, mutta tuntemattoman arvon tietyllä, soveltajan valitsemalla todennäköisyydellä*.
- Luottamusvälin määräämistä kutsutaan **väliestimoinniksi**.

Väliestimointi

Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi

>> Luottamusväli

Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli

Normaalijakauman varianssin luottamusväli

Bernoulli-jakauman odotusarvon luottamusväli

Luottamusväli ja luottamustaso

- *Väliestimoinnissa* todennäköisyysjakauman $f(x\,;\,\theta)$ tuntemattomalle parametrille θ pyritään määräämään *havainnoista riippuva väli*, *joka tietyllä*, *soveltajan valitsemalla todennäköisyydellä*, *peittää parametrin todellisen arvon*.
- Konstruoitua väliä kutsutaan **luottamusväliksi** ja valittua todennäköisyyttä kutsutaan **luottamustasoksi**.
- Huomautus:

  Luottamusvälille ja -tasolle voidaan antaa tulkinnat **todennäköisyyden frekvenssitulkinnan** avulla.

Luottamusvälin määrääminen 1/2

- Oletukset:

(i) Olkoon $f(x\,;\,\theta)$ todennäköisyysjakauma, jonka määrää tuntematon parametri θ.

(ii) Olkoon $X_1\,,\,X_2\,,\,\ldots\,,\,X_n$ *satunnaisotos* jakaumasta $f(x\,;\,\theta)$.

Luottamusvälin määrääminen 2/2

- Valitaan **luottamustaso** $(1 - \alpha)$ siten, että

$$0 < 1 - \alpha < 1$$

- Määrätään satunnaismuuttujat

$$L = L(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

$$U = U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

siten, että

$$\Pr(\theta \in (L, U)) = 1 - \alpha$$

- Tällöin sanomme, että väli (L,U) on **parametrin $\boldsymbol{\theta}$ luottamusväli luottamustasolla $(1 - \alpha)$**.

Luottamusvälin määrääminen: Kommentti

- Luottamusvälin (L,U) päätepisteet L ja U riippuvat yleensä sekä havainnoista

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  että valitusta luottamustasosta

  $$(1 - \alpha)$$

Luottamustason ja -välin frekvenssitulkinta

- Oletetaan, että luottamustasoksi on valittu $(1-\alpha)$.
- Luottamustasolle ja siihen liittyvälle luottamusvälille voidaan antaa seuraava **frekvenssitulkinta**:

(i) Jos otantaa jakaumasta $f(x\,;\,\theta)$ toistetaan, *keskimäärin*

$$100\times(1-\alpha)\ \%$$

otoksista konstruoiduista luottamusväleistä *peittää* parametrin θ todellisen arvon.

(ii) Jos otantaa jakaumasta $f(x\,;\,\theta)$ toistetaan, *keskimäärin*

$$100\times\alpha\ \%$$

otoksista konstruoiduista luottamusväleistä *ei peitä* parametrin θ todellista arvoa.

Johtopäätökset luottamisväleistä

- Oletetaan, että olemme tehneet *johtopäätöksen*, että konstruoitu luottamusväli peittää parametrin θ tuntemattoman todellisen arvon:

  (i) Luottamusvälin konstruktiosta seuraa, että tehty johtopäätös *on oikea* $100\times(1-\alpha)$ %:ssa tapauksia.

  (ii) Luottamusvälin konstruktiosta seuraa, että tehty johtopäätös *on väärä* $100\times\alpha$ %:ssa tapauksia.
- Huomautus:

  Virheellisen johtopäätöksen mahdollisuutta *ei saada häviämään*, ellei luottamusväliä tehdä *äärettömän leveäksi*, jolloin väli *ei enää sisällä informaatiota* parametrin θ oikeasta arvosta.

Luottamusvälit: Esimerkkejä

- Olkoon

$$X_1\,,\,X_2\,,\,\ldots\,,\,X_n$$

yksinkertainen satunnaisotos jakaumasta $f(x\,;\,\theta)$.

- Tarkastellaan seuraavien jakaumien parametrien luottamusvälejä (ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukuja **Diskreettejä jakaumia** ja **Jatkuvia jakaumia**):
  - **Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli**
  - **Normaalijakauman varianssin luottamusväli**
  - **Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin luottamusväli**

Väliestimointi

Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi

Luottamusväli

>> Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli

Normaalijakauman varianssin luottamusväli

Bernoulli-jakauman odotusarvon luottamusväli

Normalijakauman odotusarvon luottamusväli

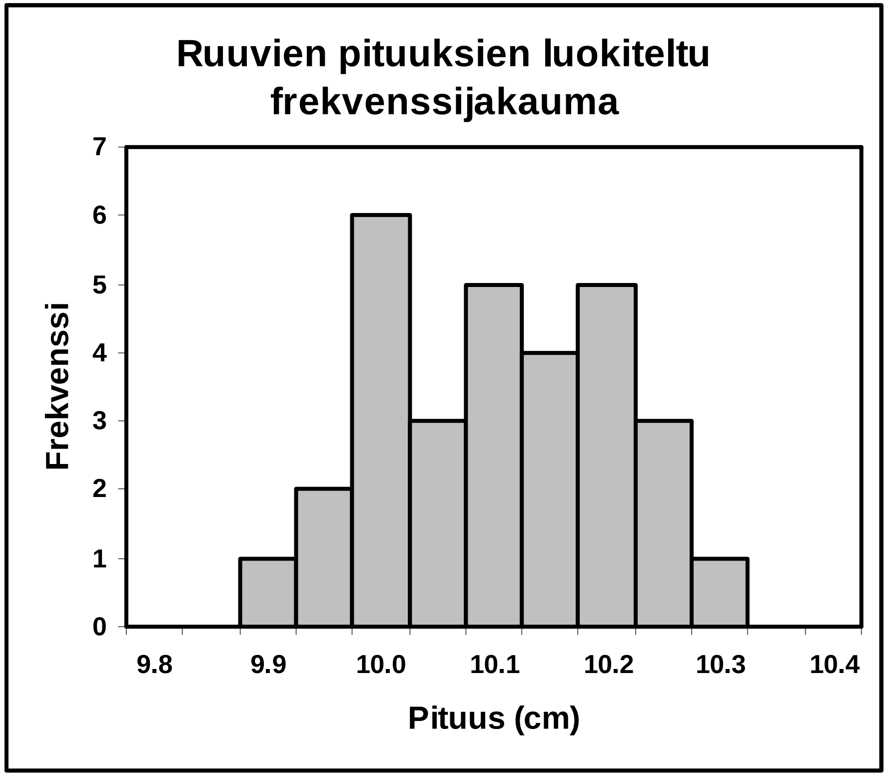
Esimerkki – 1/4

- Kone tekee *ruuveja*, joiden *pituudet vaihtelevat satunnaisesti noudattaen normaalijakaumaa*; ks. esimerkkiä luvussa **Tilastollisten aineistojen kuvaaminen**.
- Ruuvien joukosta poimitaan *yksinkertainen satunnaisotos*, jonka *koko* $n = 30$ ja otokseen poimittujen ruuvien pituudet mitataan.
- Taulukko oikealla esittää pituuksien *luokiteltua frekvenssijakaumaa*.

Luokkavälit	Luokkafrekvenssit
(9.85,9.90]	1
(9.90,9.95]	2
(9.95,10.00]	6
(10.00,10.05]	3
(10.05,10.10]	5
(10.10,10.15]	4
(10.15,10.20]	5
(10.20,10.25]	3
(10.25,10.30]	1

Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli
Esimerkki – 2/4

- Kuva oikealla esittää otokseen poimittujen ruuvien pituuksien luokiteltua frekvenssijakaumaa vastaavaa *histogrammia*.
- *Luokkavälit* määräävät histogrammin suorakaiteiden *kannat.*
- Suorakaiteiden *korkeudet* on valittu niin, että suorakaiteiden *pinta-alat* suhtautuvat toisiinsa kuten vastaavat *luokka-frekvenssit*.



Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli

Esimerkki – 3/4

- Yhteenveto otostiedoista:

  Pituuksien *aritmeettinen keskiarvo*:

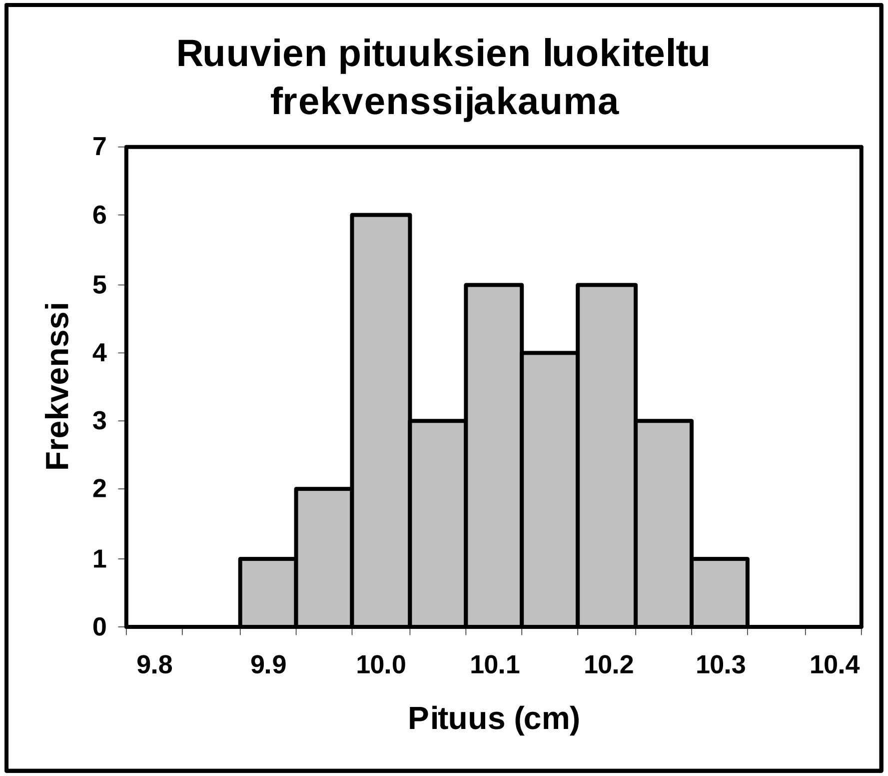
  $$\bar{X} = 10.09 \text{ cm}$$

  Pituuksien *keskihajonta*:

  $$s = 0.1038 \text{ cm}$$

- Huomautus:

  Jos otantaa toistetaan, kaikki otosta koskevat tiedot (sekä havaintoarvot että niistä lasketut otossuureet) *vaihtelevat satunnaisesti* otoksesta toiseen.



Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli

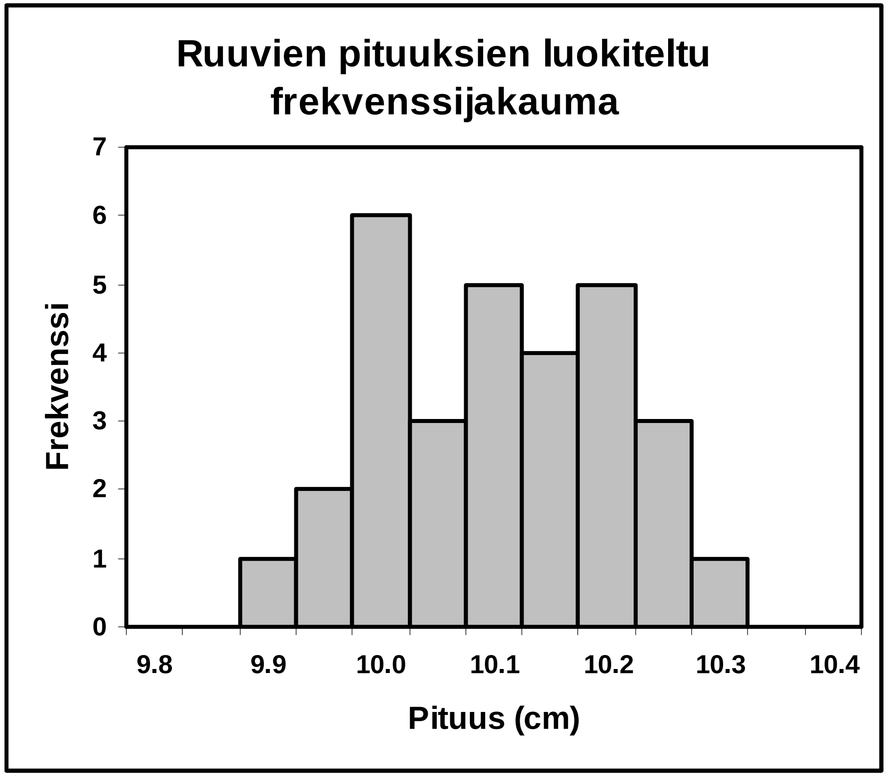
Esimerkki – 4/4

- Ongelma:

  Mitä koneen tekemien ruuvien *todellisesta keskipituudesta* voidaan tietää *yhdestä otoksesta* saatujen tietojen perusteella?

- Ratkaisu:

  Konstruoidaan *väli, joka valitulla todennäköisyydellä sisältää ruuvien todellisen keskipituuden*.



Normaalijakauma ja sen parametrointi

- Satunnaismuuttuja X noudattaa **normaalijakaumaa** $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$, jos sen *tiheysfunktio* on

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

$$-\infty < \mu < +\infty\ ,\ \sigma > 0$$

- Normaalijakauman *parametreina* ovat jakauman *odotusarvo*

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

ja *varianssi*

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

Otos normaalijakaumasta

- Olkoon

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

(*yksinkertainen*) *satunnaisotos* normaalijakaumasta

$$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

- Tällöin satunnaismuuttujat $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ ovat *riippumattomia* ja noudattavat *samaa normaalijakaumaa*

$$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

Normaalijakauman parametrien estimointi

- *Estimoidaan* normaalijakauman N(μ, σ^2) parametrit μ ja σ^2 niiden *harhattomilla estimaattoreilla*:

(i) *Odotusarvoparametrin* μ harhaton estimaattori:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

(ii) *Varianssiparametrin* σ^2 harhaton estimaattori:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Luottamustaso

- Määrätään **luottamusväli normaalijakauman odotus-arvoparametrille** μ.
- Valitaan **luottamustasoksi**

$$1-\alpha$$

- Luottamustaso kiinnittää todennäköisyyden, jolla konstruoitava luottamusväli peittää normaalijakauman odotusarvon μ todellisen arvon.

Luottamuskertoimet

- Olkoon valittu luottamustaso $(1 - \alpha)$.
- Määrätään **luottamuskertoimet** $-t_{\alpha/2}$ ja $+t_{\alpha/2}$ siten, että

$$\Pr(t \leq -t_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Pr(t \geq +t_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

jossa satunnaismuuttuja t noudattaa *Studentin t-jakaumaa* vapausastein $(n - 1)$:

$$t \quad t(n-1)$$

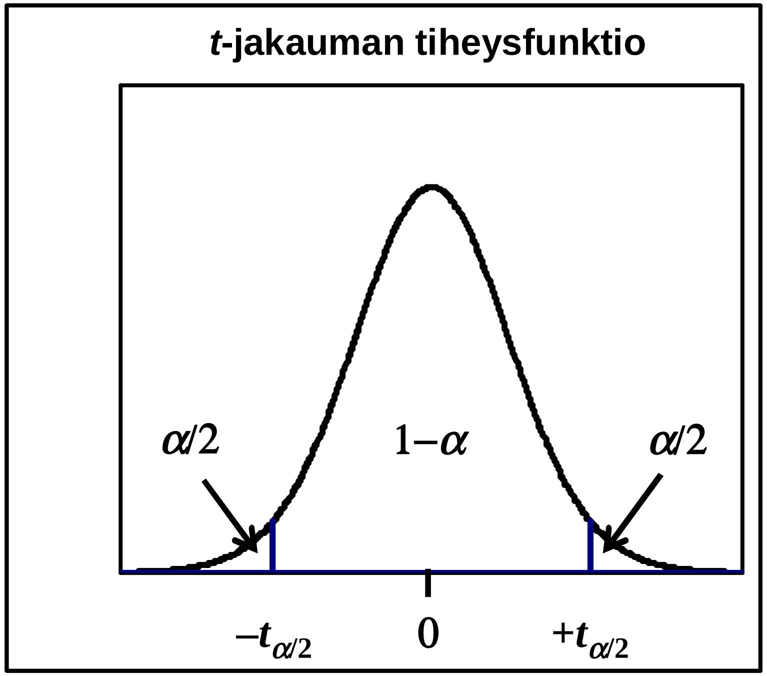
- Luottamuskertoimet $-t_{\alpha/2}$ ja $+t_{\alpha/2}$ toteuttavat ehdon

$$\Pr(-t_{\alpha/2} \leq t \leq +t_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

Luottamuskertoimien määrääminen: Havainnollistus

- Luottamuskertoimet $-t_{\alpha/2}$ ja $+t_{\alpha/2}$ jakavat *t*-jakauman tiheys-funktion kuvaajan alle jäävän todennäköisyysmassan (= 1) *kolmeen* osaan:
  (1) Pisteen $-t_{\alpha/2}$ *vasemmalle* puolelle jää $\alpha/2$ % massasta.
  (2) Pisteen $+t_{\alpha/2}$ *oikealle* puolelle jää $\alpha/2$ % massasta.
  (3) Pisteiden $-t_{\alpha/2}$ ja $+t_{\alpha/2}$ *väliin* jää $(1-\alpha)$ % massasta.
- Huomaa, että

$$\alpha/2 + \alpha/2 + (1-\alpha) = 1$$



Luottamusväli normaalijakauman odotusarvolle

- Normaalijakauman **odotusarvoparametrin** μ **luottamusväli luottamustasolla** $(1 - \alpha)$ on muotoa

$$\left(\bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

jossa

$\bar{X}$ = havaintojen *aritmeettinen keskiarvo*

s^2 = havaintojen harhaton *otosvarianssi*

n = havaintojen *lukumäärä*

$-t_{\alpha/2}$, $+t_{\alpha/2}$

= luottamustasoon $(1 - \alpha)$ liittyvät *luottamuskertoimet t-jakaumasta vapausastein* $(n - 1)$

Luottamusväli ja sen pituus 1/2

- Normaalijakauman odotusarvon μ luottamusväli luottamustasolla $(1 - \alpha)$ esitetään usein muodossa

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

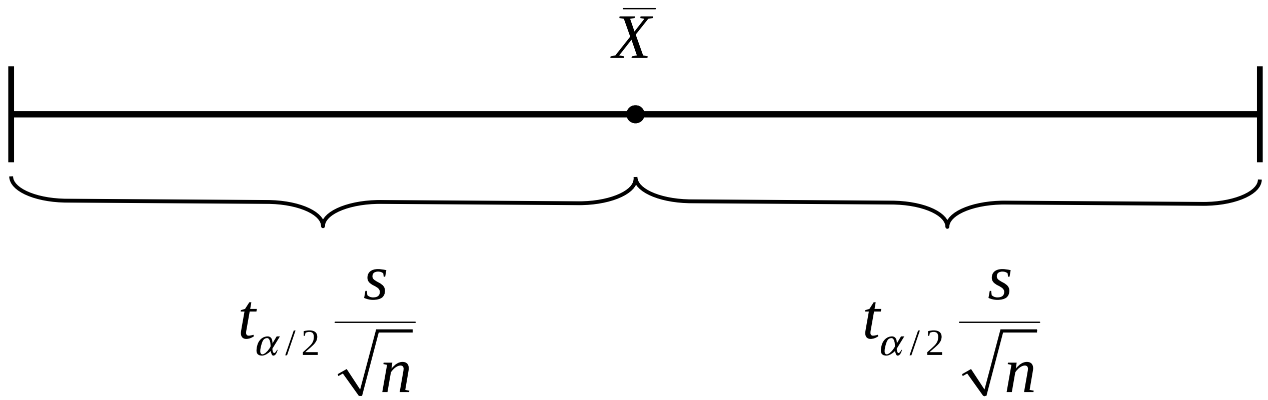
koska väli on symmetrinen keskipisteensä $\bar{X}$ suhteen.

- Normaalijakauman odotusarvon μ **luottamusvälin pituus** on

$$2 \times t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Luottamusväli ja sen pituus 2/2

- Normaalijakauman odotusarvon μ luottamusväli luottamustasolla $(1 - \alpha)$:



Luottamusvälin johto 1/8

- Olkoon

  $$X_1\ , X_2\ , \ldots\ , X_n$$

  yksinkertainen satunnaisotos normaalijakaumasta

  $$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

- Olkoon

  $$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

  havaintojen $X_1\ , X_2\ , \ldots\ , X_n$ *aritmeettinen keskiarvo* ja

  $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

  havaintojen $X_1\ , X_2\ , \ldots\ , X_n$ (harhaton) *otosvarianssi*.

Luottamusvälin johto 2/8

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

- Satunnaismuuttuja *t* voidaan kirjoittaa muotoon

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{s^2}} = \frac{\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)s^2/\sigma^2}{n-1}}}$$

- Määrätään satunnaismuuttujan *t* jakauma tarkastelemalla erikseen satunnaismuuttujan *t* osoittajaa ja nimittäjää.

Luottamusvälin johto 3/8

- Satunnaismuuttujan *t* osoittaja määrittelee satunnaismuuttujan

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- Satunnaismuuttuja *Z* noudattaa normaalijakautuneen otoksen *aritmeettisen keskiarvon otosjakaumaa koskevan tuloksen perusteella standardoitua normaalijakaumaa* N(0,1):

$$Z \quad \mathrm{N}(0,1)$$

Todistus: ks. lukua **Otokset ja otosjakaumat**.

Luottamusvälin johto 4/8

- Satunnaismuuttuja *t* nimittäjä määrittelee satunnaismuuttujan

$$V = (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2}$$

- Satunnaismuuttuja *V* noudattaa normaalijakautuneen otoksen *varianssin otosjakaumaa koskevan tuloksen perusteella* χ^2 *-jakaumaa vapausastein* $(n - 1)$:

$$V \quad \chi^2(n-1)$$

Todistus: ks. lukua **Otokset ja otosjakaumat**.

Luottamusvälin johto 5/8

- Edellä on todettu, että

$$Z \quad \mathrm{N}(0,1)$$

$$V \quad \chi^2(n-1)$$

- Lisäksi voidaan osoittaa, että satunnaismuuttujat Z ja V ovat *riippumattomia*; todistus: ks. lukua **Otoksetja otosjakaumat.**
- Siten satunnaismuuttuja

$$t = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{Z}{\sqrt{\dfrac{V}{n-1}}}$$

noudattaa *Studentin t-jakaumaa* vapausastein (n – 1) suoraan jakauman *määritelmän mukaan*:

$$t \quad t(n-1)$$

Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli

Luottamusvälin johto 6/8

- Määrätään t-jakaumasta vapausastein (n – 1) piste $+t_{\alpha/2}$ siten, että

  $$\Pr(t \geq +t_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

  jolloin (t-jakauman symmetrian perusteella)

  $$\Pr(t \leq -t_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

  ja edelleen

  $$\Pr(-t_{\alpha/2} \leq t \leq +t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli
Luottamusvälin johto 7/8

- Tarkastellaan epäyhtälöketjua

$$-t_{\alpha/2} \le t \le +t_{\alpha/2}$$

- Sijoittamalla tähän epäyhtälöketjuun satunnaismuuttujan *t* lauseke, saadaan epäyhtälöketju

$$-t_{\alpha/2} \le \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \le +t_{\alpha/2}$$

- Tästä epäyhtälöketjusta saadaan sen kanssa *yhtäpitävä* epäyhtälöketju

$$\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli

Luottamusvälin johto 8/8

- Yhdistämällä saatu epäyhtälö siihen, että

$$\Pr(-t_{\alpha/2} \le t \le +t_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

saadaan vihdoin

$$\Pr\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \right) = 1-\alpha$$

Luottamusvälin frekvenssitulkinta 1/2

- Normaalijakauman odotusarvon μ luottamusvälin

$$\left(\bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \,,\, \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

  konstruktiosta seuraa, että

$$\Pr\left(\bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

- Siten konstruoitu luottamusväli *peittää* parametrin μ todellisen arvon todennäköisyydellä $(1 - \alpha)$ ja se *ei peitä* parametrin μ todellista arvoa todennäköisyydellä α.

Luottamusvälin frekvenssitulkinta 2/2

- Normaalijakauman odotusarvon μ luottamusvälille voidaan antaa seuraava **frekvenssitulkinta**:

  (i) Jos otantaa jakaumasta $N(\mu, \sigma^2)$ toistetaan, *keskimäärin*

  $$100\times(1-\alpha)\ \%$$

  otoksista konstruoiduista luottamusväleistä *peittää* parametrin μ todellisen arvon.

  (ii) Jos otantaa jakaumasta $N(\mu, \sigma^2)$ toistetaan, *keskimäärin*

  $$100\times\alpha\ \%$$

  otoksista konstruoiduista luottamusväleistä *ei peitä* parametrin μ todellista arvoa.

Luottamusvälin ominaisuudet 1/2

- Normaalijakauman odotusarvon μ luottamusvälin *keskipiste* $\bar{X}$ vaihtelee otoksesta toiseen.
- Luottamusvälin *pituus*

$$2 \times t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

  vaihtelee otoksesta toiseen.
- Luottamusvälin *pituus* riippuu valitusta luottamustasosta $(1-\alpha)$, havaintojen lukumäärästä n ja otosvarianssista s^2 .

Luottamusvälin ominaisuudet 2/2

- Luottamusväli *lyhenee* (*pitenee*), jos *luottamustasoa* $(1 - \alpha)$ *pienennetään* (*kasvatetaan*).
- Luottamusväli *lyhenee* (*pitenee*), jos *havaintojen lukumäärää n kasvatetaan* (*pienennetään*).
- Luottamusväli *lyhenee* (*pitenee*), jos *otosvarianssi* s^2 *pienenee* (*kasvaa*).

Vaatimukset luottamusvälille

- Olisi toivottavaa pystyä konstruoimaan odotusarvolle μ mahdollisimman *lyhyt* luottamusväli, johon liittyvä luottamustaso olisi mahdollisimman *korkea*.
- Vaatimusten samanaikainen täyttäminen *ei ole* kuitenkaan *mahdollista*, *jos otoskoko pidetään kiinteänä*:

  (i) *Luottamustason kasvattaminen pidentää luottamusväliä*, jolloin tieto parametrin μ todellisen arvon sijainnista tulee *epätarkemmaksi*.

  (ii) *Luottamusvälin lyhentäminen pienentää luottamustasoa*, jolloin tieto parametrin μ todellisen arvon sijainnista tulee *epävarmemmaksi*.

Johtopäätökset luottamusvälistä

- Oletetaan, että olemme tehneet *johtopäätöksen*, että konstruoitu luottamusväli peittää odotusarvoparametrin μ todellisen arvon:
  - (i) Luottamusvälin konstruktiosta seuraa, että tehty johtopäätös *on oikea* $100\times(1-\alpha)$ %:ssa tapauksia.
  - (ii) Luottamusvälin konstruktiosta seuraa, että tehty johtopäätös *on väärä* $100\times\alpha$ %:ssa tapauksia.
- Huomautus:

  Virheellisen johtopäätöksen mahdollisuutta *ei saada häviämään*, ellei luottamusväliä tehdä *äärettömän leveäksi*, jolloin väli *ei enää sisällä informaatiota* odotusarvoparametrin μ todellisesta arvosta.

Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli
Esimerkki (jatkuu) – 1/4

- Erään koneen tekemien ruuvien joukosta poimittiin *yksinkertainen satunnaisotos* ja ruuvien pituudet mitattiin.

  Otoskoko: $n = 30$

  Pituuksien aritmeettinen keskiarvo: $\bar{X} = 10.09$ cm

  Pituuksien otoskeskihajonta: $s = 0.1038$ cm
- Konstruoidaan ruuvien *todelliselle keskipituudelle* μ *luottamusväli luottamustasolla* 0.95.
- Valitaan *luottamuskertoimet* $-t_{0.025}$ ja $+t_{0.025}$ siten, että

  $$\Pr(t \le -t_{0.025}) = \Pr(t \ge +t_{0.025}) = 0.025$$

  jossa satunnaismuuttuja t noudattaa *Studentin t-jakaumaa* vapausastein $n - 1 = 29$.
- Luottamuskertoimet $-t_{0.025}$ ja $+t_{0.025}$ toteuttavat ehdon

  $$\Pr(-t_{0.025} \le t \le +t_{0.025}) = 0.95$$

Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli

Esimerkki (jatkuu) – 2/4

- t-jakauman *taulukoista* nähdään, että

  $$\Pr(t \geq +2.045) = 0.025$$

  $$\Pr(t \leq -2.045) = 0.025$$

  kun vapausasteiden lukumäärä

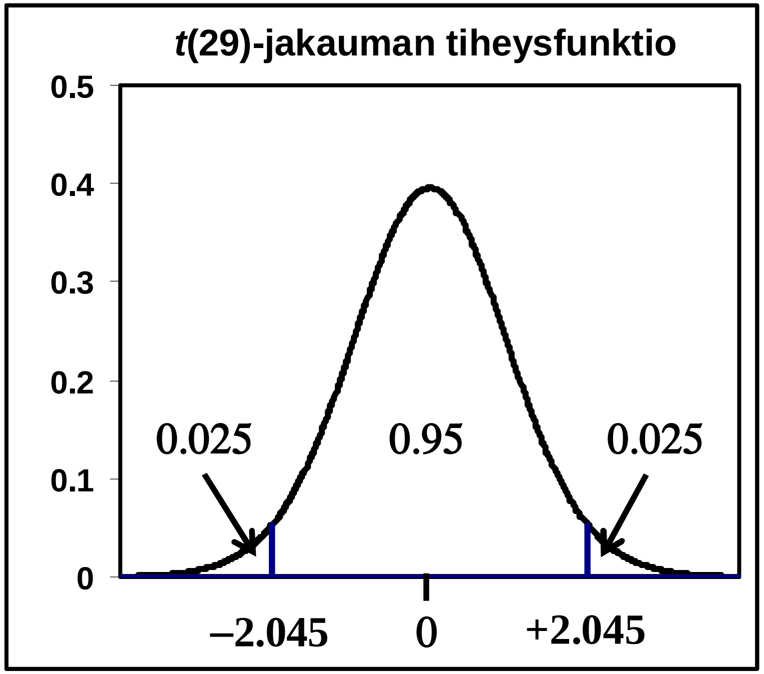
  $$n - 1 = 29$$

- Siten *luottamuskertoimet* ovat:

  $$+t_{0.025} = +2.045$$

  $$-t_{0.025} = -2.045$$

- Kuvio oikealla havainnollistaa luottamuskertoimien valintaa.



Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli

Esimerkki (jatkuu) – 3/4

- *Luottamusväliksi* saadaan:

$$\begin{aligned}\bar{X} \pm t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} &= 10.09 \pm 2.045 \times \frac{0.1038}{\sqrt{30}} \\ &= 10.09 \pm 0.04 \\ &= (10.05, 10.13)\end{aligned}$$

- Siten tiedämme, että *ruuvien todellinen keskipituus on todennäköisyydellä* 0.95 *välillä*

(10.05, 10.13)

Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli

Esimerkki (jatkuu) – 4/4

- *Luottamustason* 0.95 *tulkinta*:

  Oletetaan, että poimimme koneen tekemien ruuvien joukosta *toistuvasti* yksinkertaisia satunnaisotoksia, joiden koko on 30 ja konstruoimme *jokaisesta* otoksesta 95 %:n luottamusvälin edellä esitetyllä menetelmällä.

  Tällöin:

  (i) *Konstruoidusta väleistä keskimäärin* 95 % *peittää ruuvien todellisen*, *mutta tuntemattoman keskipituuden*.

  (ii) *Konstruoidusta väleistä keskimäärin* 5 % *ei peitä ruuvien todellista*, *mutta tuntematonta keskipituutta*.

Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli

Otoskoon määrääminen 1/4

- Monissa tutkimustilanteissa toivotaan, että parametrille voitaisiin muodostaa *mahdollisimman lyhyt* luottamusväli.
- Normaalijakauman odotusarvon μ luottamusvälin pituus riippuu otoskoosta siten, että *väli lyhenee*, *jos havaintojen lukumäärää n kasvatetaan*.
- Tämä normaalijakauman odotusarvon μ luottamusvälin ominaisuus mahdollistaa tietyin ehdoin otoskoon valitsemisen sellaisella tavalla, että *luottamusväliksi saadaan* (suunnilleen) *halutun mittainen väli*.
- Oletetaan siis, että normaalijakauman odotusarvoparametrille μ halutaan konstruoida luottamusväli, jonka *toivottu pituus* on $2A$.

Otoskoon määrääminen 2/4

- *Jos normaalijakauman varianssi* σ^2 *tunnetaan*, normaalijakauman **odotusarvoparametrin** μ **luottamusväliksi luottamustasolla** $(1-\alpha)$ saadaan

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

jossa

$\bar{X}$ = havaintojen *aritmeettinen keskiarvo*

σ^2 = havaintojen *oletettu varianssi*

n = *otoskoko*

$-z_{\alpha/2}$, $+z_{\alpha/2}$

= luottamustasoon $(1-\alpha)$ liittyvät *luottamuskertoimet normaalijakaumasta* N(0,1)

Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli
Otoskoon määrääminen 3/4

- Jos siis käytettävissä on *ennakkotietoa perusjoukon varianssista* σ^2, voidaan otoskoko n ratkaista yhtälöstä:

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = A$$

jossa

$z_{\alpha/2}$ = luottamustasoon $(1-\alpha)$ liittyvä *luottamuskerroin* normaalijakaumasta N(0,1)

σ^2 = havaintojen *oletettu varianssi*

n = *otoskoko*

$2A$ = *toivottu pituus* luottamusvälille

Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli

Otoskoon määrääminen 4/4

- Siten *tarvittava otoskoko* on

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{A} \right)^2$$

- Huomautus:

  Tarvittavan otoskoon kaavasta nähdään, että mitä lyhyempää luottamusväliä toivotaan, sitä suurempi otos on poimittava:

  Esimerkiksi, jos luottamusvälin pituus halutaan puolittaa, pitää havaintoja kerätä 4 kertaa enemmän.

Väliestimointi

Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi
Luottamusväli
Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli
>> Normaalijakauman varianssin luottamusväli
Bernoulli-jakauman odotusarvon luottamusväli

Normaalijakauma ja sen parametrointi

- Satunnaismuuttuja X noudattaa **normaalijakaumaa** N(μ, σ^2), jos sen *tiheysfunktio* on

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

$$-\infty < \mu < +\infty \,, \sigma > 0$$

- Normaalijakauman *parametreina* ovat jakauman *odotusarvo*

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

ja *varianssi*

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

Otos normaalijakaumasta

- Olkoon

  $$X_1\,,\,X_2\,,\,\ldots\,,\,X_n$$

  (*yksinkertainen*) *satunnaisotos* normaalijakaumasta

  $$\mathrm{N}(\mu,\,\sigma^2)$$

- Tällöin satunnaismuuttujat $X_1\,,\,X_2\,,\,\ldots\,,\,X_n$ ovat *riippumattomia* ja noudattavat *samaa normaalijakaumaa*

  $$\mathrm{N}(\mu,\,\sigma^2)$$

Normaalijakauman parametrien estimointi

- *Estimoidaan* normaalijakauman N(μ, σ^2) parametrit μ ja σ^2 niiden *harhattomilla estimaattoreilla*:

  (i) *Odotusarvoparametrin* μ harhaton estimaattori:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

  (ii) *Varianssiparametrin* σ^2 harhaton estimaattori:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

Luottamustaso

- Määrätään **luottamusväli normaalijakauman varianssiparametrille** σ^2.
- Valitaan **luottamustasoksi**

$$1-\alpha$$

- Luottamustaso kiinnittää todennäköisyyden, jolla konstruoitava luottamusväli peittää normaalijakauman varianssin σ^2 todellisen arvon.

Normaalijakauman varianssin luottamusväli
Luottamuskertoimet

- Olkoon valittu luottamustaso $(1 - \alpha)$.
- Määrätään **luottamuskertoimet** $\chi^2_{1-\alpha/2}$ ja $\chi^2_{\alpha/2}$ siten, että

$$\Pr(\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Pr(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

jossa satunnaismuuttuja χ^2 noudattaa χ^2-jakaumaa vapausastein $(n - 1)$:

$$\chi^2 \quad \chi^2(n-1)$$

- Luottamuskertoimet $\chi^2_{1-\alpha/2}$ ja $\chi^2_{\alpha/2}$ toteuttavat ehdon

$$\Pr(\chi^2_{1-\alpha/2} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

Normaalijakauman varianssin luottamusväli

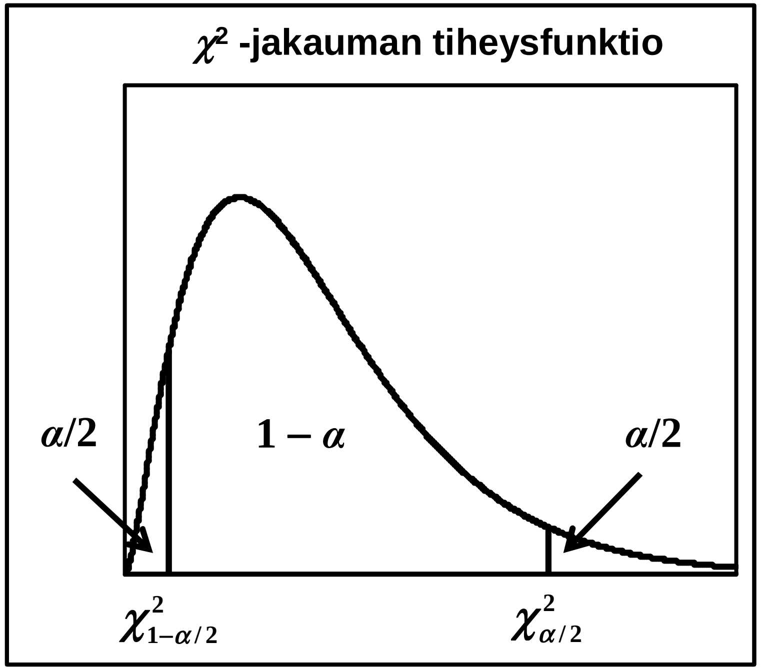
Luottamuskertoimien määrääminen: Havainnollistus

- Luottamuskertoimet $\chi^2_{1-\alpha/2}$ ja $\chi^2_{\alpha/2}$ jakavat χ^2-jakauman tiheysfunktion kuvaajan alle jäävän todennäköisyysmassan (= 1) *kolmeen* osaan:

  (1) Pisteen $\chi^2_{1-\alpha/2}$ *vasemmalle* puolelle jää $\alpha/2$ % massasta.

  (2) Pisteen $\chi^2_{\alpha/2}$ *oikealle* puolelle jää $\alpha/2$ % massasta.

  (3) Pisteiden $\chi^2_{1-\alpha/2}$ ja $\chi^2_{\alpha/2}$ *väliin* jää $(1-\alpha)$ % massasta.



- Huomaa, että

$$\alpha/2 + \alpha/2 + (1-\alpha) = 1$$

Luottamusväli normaalijakauman varianssille

- Normaalijakauman **varianssiparametrin** σ^2 **luottamusväli luottamustasolla** $(1-\alpha)$ on muotoa

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right)$$

jossa

s^2 = havaintojen harhaton *otosvarianssi*

n = havaintojen *lukumäärä*

$\chi^2_{1-\alpha/2}, \chi^2_{\alpha/2}$
= luottamustasoon $(1-\alpha)$ liittyvät *luottamuskertoimet* χ^2*-jakaumasta vapausastein* $(n-1)$

Normaalijakauman varianssin luottamusväli
Luottamusväli ja sen pituus

- Normaalijakauman varianssin σ^2 **luottamusvälin pituus** on

$$(n-1)s^2\left(\frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}}-\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}}\right)$$

Normaalijakauman varianssin luottamusväli

Luottamusvälin johto 1/5

- Olkoon

  $$X_1\ , X_2\ , \ldots\ , X_n$$

  yksinkertainen satunnaisotos normaalijakaumasta

  $$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

- Olkoon

  $$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

  havaintojen $X_1\ , X_2\ , \ldots\ , X_n$ *aritmeettinen keskiarvo* ja

  $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

  havaintojen $X_1\ , X_2\ , \ldots\ , X_n$ (harhaton) *otosvarianssi*.

Luottamusvälin johto 2/5

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

- Satunnaismuuttuja χ^2 noudattaa normaalijakautuneen otoksen *varianssin otosjakaumaa koskevan tuloksen perusteella χ^2-jakaumaa* vapausastein $(n - 1)$:

$$\chi^2 \quad \chi^2(n-1)$$

Todistus: ks. lukua **Otokset ja otosjakaumat**.

Normaalijakauman varianssin luottamusväli

Luottamusvälin johto 3/5

- Määrätään χ^2-jakaumasta vapausastein (n – 1) piste $\chi^2_{1-\alpha/2}$ siten, että

  $$\Pr(\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

  ja piste $\chi^2_{\alpha/2}$ siten, että

  $$\Pr(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

  jolloin

  $$\Pr(\chi^2_{1-\alpha/2} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

Luottamusvälin johto 4/5

- Tarkastellaan epäyhtälöketjua

$$\chi^2_{1-\alpha/2} \le \chi^2 \le \chi^2_{\alpha/2}$$

- Sijoittamalla tähän epäyhtälöketjuun satunnaismuuttujan χ^2 lauseke, saadaan epäyhtälöketju

$$\chi^2_{1-\alpha/2} \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\alpha/2}$$

- Tästä epäyhtälöketjusta saadaan sen kanssa *yhtäpitävä* epäyhtälöketju

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}$$

Luottamusvälin johto 5/5

- Yhdistämällä saatu epäyhtälö siihen, että

$$\Pr(\chi^2_{1-\alpha/2} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

saadaan vihdoin

$$\Pr\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \right) = 1-\alpha$$

Luottamusvälin frekvenssitulkinta 1/2

- Normaalijakauman varianssin σ^2 luottamusvälin

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \right)$$

konstruktiosta seuraa, että

$$\Pr\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \right) = 1-\alpha$$

- Siten konstruoitu luottamusväli *peittää* parametrin σ^2 todellisen arvon todennäköisyydellä $(1-\alpha)$ ja se *ei peitä* parametrin σ^2 todellista arvoa todennäköisyydellä α.

Luottamusvälin frekvenssitulkinta 2/2

- Normaalijakauman odotusarvon σ^2 luottamusvälille voidaan antaa seuraava **frekvenssitulkinta**:

(i) Jos otantaa jakaumasta $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ toistetaan, *keskimäärin*

$$100\times(1-\alpha)\ \%$$

otoksista konstruoiduista luottamusväleistä *peittää* parametrin σ^2 todellisen arvon.

(ii) Jos otantaa jakaumasta $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ toistetaan, *keskimäärin*

$$100\times\alpha\ \%$$

otoksista konstruoiduista luottamusväleistä *ei peitä* parametrin σ^2 todellista arvoa.

Luottamusvälin ominaisuudet 1/2

- Normaalijakauman varianssin σ^2 luottamusvälin *pituus*

$$(n-1)s^2\left(\frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}}-\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}}\right)$$

  vaihtelee otoksesta toiseen.
- Luottamusvälin *pituus* riippuu valitusta luottamustasosta $(1-\alpha)$ ja otosvarianssista s^2 sekä (jonkin verran) havaintojen lukumäärästä n .

Luottamusvälin ominaisuudet 2/2

- Luottamusväli *lyhenee* (*pitenee*), jos *luottamustasoa* $(1-\alpha)$ *pienennetään* (*kasvatetaan*).
- Luottamusväli *lyhenee* (*pitenee*), jos *otosvarianssi* s^2 *pienenee* (*kasvaa*).
- Luottamusvälin pituus *pysyy suunnilleen samana*, jos *havaintojen lukumäärää n muuttuu*.

Vaatimukset luottamusvälille

- Olisi toivottavaa pystyä konstruoimaan varianssiparametrille σ^2 mahdollisimman *lyhyt* luottamusväli, johon liittyvä luottamustaso olisi samanaikaisesti mahdollisimman *korkea*.
- Vaatimusten samanaikainen täyttäminen *ei ole* kuitenkaan mahdollista:

  (i) *Luottamustason kasvattaminen pidentää luottamusväliä*, jolloin tieto parametrin σ^2 todellisen arvon sijainnista tulee *epätarkemmaksi*.

  (ii) *Luottamusvälin lyhentäminen pienentää luottamustasoa*, jolloin tieto parametrin σ^2 todellisen arvon sijainnista tulee *epävarmemmaksi*.

Normaalijakauman varianssin luottamusväli
Johtopäätökset luottamusvälistä

- Oletetaan, että olemme tehneet *johtopäätöksen*, että konstruoitu luottamusväli peittää varianssiparametrin σ^2 todellisen arvon:
  - (i) Luottamusvälin konstruktiosta seuraa, että tehty johtopäätös *on oikea* $100\times(1-\alpha)$ %:ssa tapauksia.
  - (ii) Luottamusvälin konstruktiosta seuraa, että tehty johtopäätös *on väärä* $100\times\alpha$ %:ssa tapauksia.
- Huomautus:

  Virheellisen johtopäätöksen mahdollisuutta *ei saada häviämään*, ellei luottamusväliä tehdä *äärettömän leveäksi*, jolloin väli *ei enää sisällä informaatiota* varianssiparametrin σ^2 todellisesta arvosta.

Väliestimointi

Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi

Luottamusväli

Normaalijakauman odotusarvon luottamusväli

Normaalijakauman varianssin luottamusväli

\>> Bernoulli-jakauman odotusarvon luottamusväli

Bernoulli-jakauma ja sen parametrointi 1/2

- Olkoon A on kiinnostuksen kohteena oleva *tapahtuma* ja

$$\Pr(A) = p$$

$$\Pr(A^c) = 1 - p = q$$

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$X = \begin{cases} 1, \text{ jos } A \text{ tapahtuu} \\ 0, \text{ jos } A \text{ ei tapahdu} \end{cases}$$

- Tällöin X noudattaa **Bernoulli-jakaumaa** parametrinaan

$$p = \Pr(A) = \mathrm{E}(X)$$

- Merkitään:

$$X \quad \mathrm{Ber}(p)$$

Bernoulli-jakauma ja sen parametrointi 2/2

- *Bernoulli-jakauman* Ber(p) *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x; p) = p^x q^{1-x} \ , \ x = 0,1$$

$$0 < p < 1$$

$$q = 1 - p$$

Otos Bernoulli-jakaumasta

- Olkoon

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  (*yksinkertainen*) *satunnaisotos* Bernoulli-jakaumasta

  $$\text{Ber}(p)$$

- Tällöin satunnaismuuttujat $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ ovat *riippumattomia* ja noudattavat *samaa Bernoulli-jakaumaa*

  $$\text{Ber}(p)$$

Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin estimointi 1/2

- *Estimoidaan* Bernoulli-jakauman Ber(p) odotusarvo-parametri p sen *harhattomalla estimaattorilla*:

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin estimointi 2/2

- Koska

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ jos } A \text{ tapahtuu} \\ 0, \text{ jos } A \text{ ei tapahdu} \end{cases}$$

niin

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = f$$

jossa f on tapahtuman A *frekvenssi* otoksessa.

- Siten Bernoulli-jakauman parametrin p *estimaattori*

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{f}{n}$$

on tapahtuman A *suhteellinen frekvenssi* otoksessa.

Luottamustaso

- Määrätään **luottamusväli Bernoulli-jakauman odotus-arvoparametrille** p.
- Valitaan **luottamustasoksi**

$$1-\alpha$$

- Luottamustaso kiinnittää todennäköisyyden, jolla konstruoitava luottamusväli peittää Bernoulli-jakauman parametrin p todellisen arvon.

Bernoulli-jakauman odotusarvon luottamusväli
Luottamuskertoimet

- Olkoon valittu luottamustaso $(1 - \alpha)$.
- Määrätään **luottamuskertoimet** $-z_{\alpha/2}$ ja $+z_{\alpha/2}$ siten, että

$$\Pr(z \le -z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Pr(z \ge +z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

jossa satunnaismuuttuja z noudattaa *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$z \quad \mathrm{N}(0,1)$$

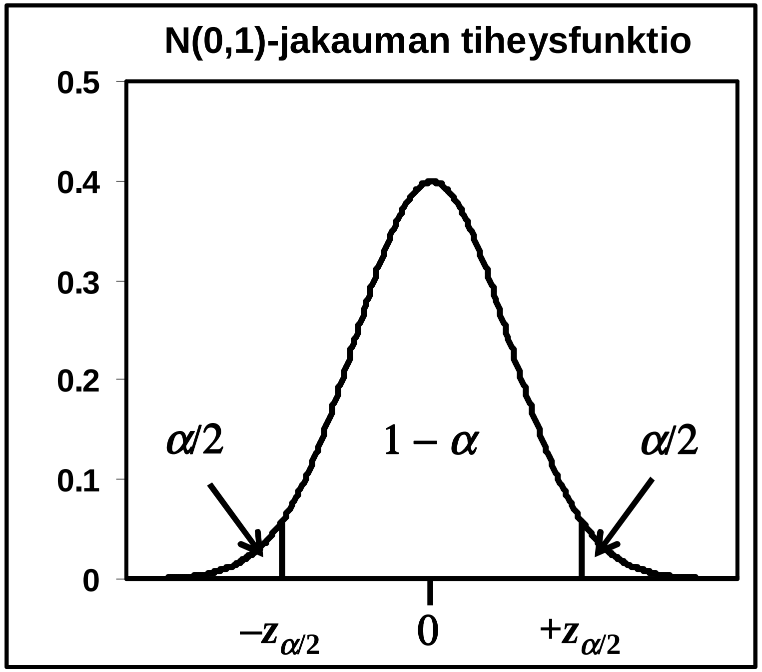
- Luottamuskertoimet $-z_{\alpha/2}$ ja $+z_{\alpha/2}$ toteuttavat ehdon

$$\Pr(-z_{\alpha/2} \le z \le +z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Luottamuskertoimien määrääminen: Havainnollistus

- Luottamuskertoimet $-z_{\alpha/2}$ ja $+z_{\alpha/2}$ jakavat normaalijakauman tiheysfunktion kuvaajan alle jäävän todennäköisyysmassan (= 1) *kolmeen* osaan:
  (1) Pisteen $-z_{\alpha/2}$ *vasemmalle* puolelle jää $\alpha/2$ % massasta.
  (2) Pisteen $+z_{\alpha/2}$ *oikealle* puolelle jää $\alpha/2$ % massasta.
  (3) Pisteiden $-z_{\alpha/2}$ ja $+z_{\alpha/2}$ *väliin* jää $(1-\alpha)$ % massasta.
- Huomaa, että

$$\alpha/2 + \alpha/2 + (1-\alpha) = 1$$



Luottamusväli Bernoulli-jakauman odotusarvolle

- Bernoulli-jakauman **odotusarvoparametrin** *p* **approksimatiivinen luottamusväli luottamustasolla** $(1 - \alpha)$ on muotoa

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\,,\ \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

  jossa

  $\hat{p}$ = parametrin *p harhaton estimaattori*

  n = havaintojen *lukumäärä*

  $-z_{\alpha/2}\,,\ +z_{\alpha/2}$

  = luottamustasoon $(1 - \alpha)$ liittyvät *luottamuskertoimet normaalijakaumasta* N(0,1)

Bernoulli-jakauman odotusarvon luottamusväli

Luottamusväli ja sen pituus 1/2

- Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin p approksimatiivinen luottamusväli luottamustasolla $(1 - \alpha)$ esitetään usein muodossa

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

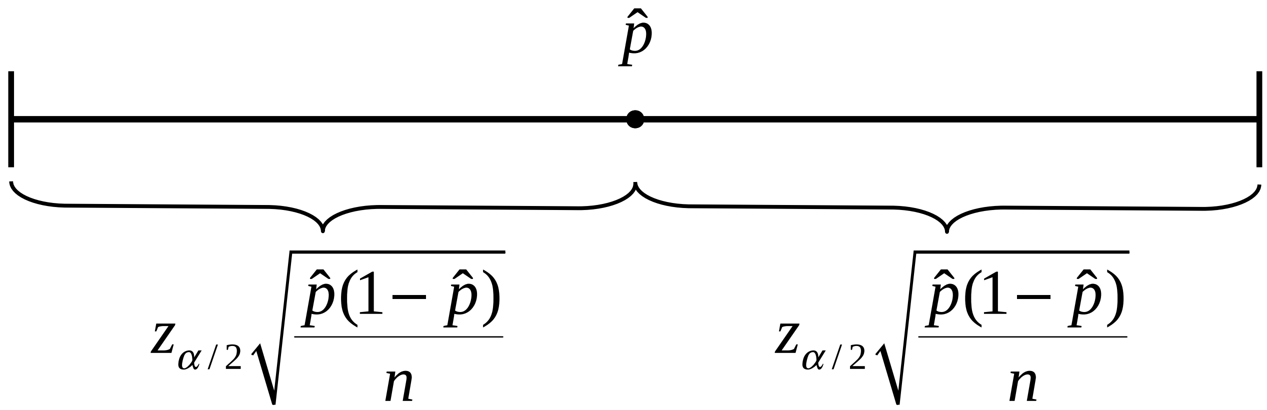
koska väli on symmetrinen keskipisteensä $\hat{p}$ suhteen.

- Bernoulli-jakauman parametrin p approksimatiivisen **luottamusvälin pituus** on

$$2 \times z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Luottamusväli ja sen pituus 2/2

- Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin p approksimatiivinen luottamusväli luottamustasolla $(1 - \alpha)$:



Bernoulli-jakauman odotusarvon luottamusväli
Luottamusvälin johto 1/5

- Olkoon

  $$X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

  yksinkertainen satunnaisotos Bernoulli-jakaumasta

  $$\mathrm{Ber}(p)$$

- Olkoon

  $$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

  harhaton estimaattori parametrille p.

- Huomaa, että $\hat{p}$ on havaintojen $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *aritmeettinen keskiarvo*.

Luottamusvälin johto 2/5

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}}$$

- Satunnaismuuttuja z noudattaa Bernoulli-jakautuneen otoksen *suhteellisen osuuden otosjakaumaa koskevan tuloksen perusteella suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa* N(0,1) :

$$z \quad {}_{a}\ \mathrm{N}(0,1)$$

  Ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukua **Stokastiikan konvergenssi-käsitteet ja raja-arvolauseet**.

Luottamusvälin johto 3/5

- Määrätään normaalijakaumasta N(0,1) piste $+z_{\alpha/2}$ siten, että

  $$\Pr(z \geq +z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

  jolloin (normaalijakauman symmetrian perusteella)

  $$\Pr(z \leq -z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

  ja edelleen

  $$\Pr(-z_{\alpha/2} \leq z \leq +z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

Luottamusvälin johto 4/5

- Tarkastellaan epäyhtälöketjua

$$-z_{\alpha/2} \le z \le +z_{\alpha/2}$$

- Sijoittamalla tähän epäyhtälöketjuun satunnaismuuttujan z lauseke, saadaan epäyhtälöketju

$$-z_{\alpha/2} \le \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \le +z_{\alpha/2}$$

- Tästä epäyhtälöketjusta saadaan sen kanssa *yhtäpitävä* epäyhtälöketju

$$\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Bernoulli-jakauman odotusarvon luottamusväli

Luottamusvälin johto 5/5

- Yhdistämällä saatu epäyhtälö siihen, että

$$\Pr(-z_{\alpha/2} \le z \le +z_{\alpha/2}) =_a 1-\alpha$$

saadaan vihdoin

$$\Pr\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) =_a 1-\alpha$$

Bernoulli-jakauman odotusarvon luottamusväli

Luottamusvälin frekvenssitulkinta 1/2

- Bernoulli-jakauman parametrin p luottamusvälin

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \,,\, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

konstruktiosta seuraa, että

$$\Pr\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) =_a 1-\alpha$$

- Siten konstruoitu luottamusväli *peittää* parametrin p todellisen arvon approksimatiivisesti todennäköisyydellä $(1 - \alpha)$ ja se *ei peitä* parametrin p todellista arvoa approksimatiivisesti todennäköisyydellä α.

Luottamusvälin frekvenssitulkinta 2/2

- Bernoulli-jakauman parametrin p approksimatiiviselle luottamusvälille voidaan antaa seuraava **frekvenssitulkinta**:

  (i) Jos otantaa jakaumasta Ber(p) toistetaan, *keskimäärin*
  $$100\times(1-\alpha)\ \%$$
  otoksista konstruoiduista luottamusväleistä *peittää* parametrin p todellisen arvon.

  (ii) Jos otantaa jakaumasta Ber(p) toistetaan, *keskimäärin*
  $$100\times\alpha\ \%$$
  otoksista konstruoiduista luottamusväleistä *ei peitä* parametrin p todellista arvoa.

Bernoulli-jakauman odotusarvon luottamusväli
Luottamusvälin ominaisuudet 1/2

- Bernoulli-jakauman parametrin p luottamusvälin *keskipiste* $\hat{p}$ vaihtelee otoksesta toiseen.
- Luottamusvälin *pituus*

$$2 \times z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

  vaihtelee otoksesta toiseen.
- Luottamusvälin *pituus* riippuu valitusta luottamustasosta $(1 - \alpha)$, havaintojen lukumäärästä n ja estimaattorista $\hat{p}$.

Luottamusvälin ominaisuudet 2/2

- Luottamusväli *lyhenee* (*pitenee*), jos *luottamustasoa* $(1 - \alpha)$ *pienennetään* (*kasvatetaan*).
- Luottamusväli *lyhenee* (*pitenee*), jos *havaintojen lukumäärää n kasvatetaan* (*pienennetään*).
- Luottamusväli on *lyhimmillään*, kun

$$\hat{p} \approx 0 \text{ tai } \hat{p} \approx 1$$

- Luottamusväli on *pisimmillään*, kun

$$\hat{p} = \frac{1}{2}$$

Vaatimukset luottamusvälille

- Olisi toivottavaa pystyä konstruoimaan parametrille p mahdollisimman *lyhyt* luottamusväli, johon liittyvä luottamustaso olisi samanaikaisesti mahdollisimman *korkea*.
- Vaatimusten samanaikainen täyttäminen *ei ole* kuitenkaan mahdollista, *jos otoskoko pidetään kiinteänä*:

  (i) *Luottamustason kasvattaminen pidentää luottamusväliä*, jolloin tieto parametrin p todellisen arvon sijainnista tulee *epätarkemmaksi*.

  (ii) *Luottamusvälin lyhentäminen pienentää luottamustasoa*, jolloin tieto parametrin p todellisen arvon sijainnista tulee *epävarmemmaksi*.

Johtopäätökset luottamusvälistä

- Oletetaan, että olemme tehneet *johtopäätöksen*, että konstruoitu luottamusväli peittää odotusarvoparametrin *p* todellisen arvon:

  (i) Luottamusvälin konstruktiosta seuraa, että tehty johtopäätös *on oikea* $100 \times (1 - \alpha)$ %:ssa tapauksia.

  (ii) Luottamusvälin konstruktiosta seuraa, että tehty johtopäätös *on väärä* $100 \times \alpha$ %:ssa tapauksia.

- Huomautus:

  Virheellisen johtopäätöksen mahdollisuutta *ei saada häviämään*, ellei luottamusväliä tehdä *äärettömän leveäksi*, jolloin väli *ei enää sisällä informaatiota* odotusarvoparametrin *p* todellisesta arvosta.

Bernoulli-jakauman odotusarvon luottamusväli
Otoskoon määrääminen 1/5

- Monissa tutkimustilanteissa toivotaan, että parametrin luottamusväli saataisiin *mahdollisimman lyhyeksi*.
- Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin p luottamus-välin pituus riippuu otoskoosta siten, että *väli lyhenee*, *jos havaintojen havaintojen lukumäärää n kasvatetaan*.
- Tämä odotusarvoparametrin p luottamusvälin ominaisuus mahdollistaa tietyin ehdoin otoskoon valinnan niin, että *luottamusvälistä tulee* (suurin piirtein) *toivotun mittainen*.
- Oletetaan siis, että Bernoulli-jakauman odotusarvo-parametrille p halutaan konstruoida luottamusväli, jonka *toivottu pituus* on

$$2A$$

Otoskoon määrääminen 2/5

- *Bernoulli-jakauma* **odotusarvoparametrin** *p* **luottamusväli luottamustasolla** $(1-\alpha)$ on muotoa

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

jossa

$\hat{p}$ = parametrin *p harhaton estimaattori*

n = havaintojen *lukumäärä*

$-z_{\alpha/2}$, $+z_{\alpha/2}$

= luottamustasoon $(1-\alpha)$ liittyvät *luottamus-kertoimet normaalijakaumasta* N(0,1)

Bernoulli-jakauman odotusarvon luottamusväli

Otoskoon määrääminen 3/5

- Jos siis käytettävissä on *ennakkotietoa parametrista p*, voidaan otoskoko n ratkaista yhtälöstä:

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = A$$

jossa

$z_{\alpha/2}$ = luottamustasoon $(1-\alpha)$ liittyvä *luottamuskerroin normaalijakaumasta* N(0,1)

p = odotusarvon *oletettu arvo*

n = *otoskoko*

$2A$ = *toivottu pituus* luottamusvälille

Bernoulli-jakauman odotusarvon luottamusväli

Otoskoon määrääminen 4/5

- Siten *tarvittava otoskoko* on

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)}}{A} \right)^2$$

- Huomaa, että tarvittava otoskoko *saavuttaa maksiminsa*

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{2A} \right)^2$$

kun

$$p = 1/2$$

Otoskoon määrääminen 5/5

- Huomautus:

  Tarvittavan otoskoon kaavasta nähdään, että mitä lyhyempää luottamusväliä toivotaan, sitä suurempi otos on poimittava:

  Jos esimerkiksi luottamusvälin pituus halutaan puolittaa, pitää havaintoja kerätä 4 kertaa enemmän.