
Ilkka Mellin
Tilastolliset menetelmät

Osa 2: Otokset, otosjakaumat ja estimointi
Estimointimenetelmät

Estimointimenetelmät

- >> **Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi**
 - Suurimman uskottavuuden menetelmä**
 - Normaalijakauman parametrien estimointi**
 - Eksponenttijakauman parametrien estimointi**
 - Bernoulli-jakauman parametrien estimointi**
 - Momenttimenetelmä**
 - Normaalijakauman parametrien estimointi**
 - Eksponenttijakauman parametrien estimointi**
 - Bernoulli-jakauman parametrien estimointi**

Todennäköisyysjakaumat tilastollisten aineistojen kuvaajina

- **Tilastollinen aineisto** koostuu tutkimuksen kohteita kuvaavien muuttujien *havaituista arvoista*.
- Tilastollisissa tutkimusasetelmissä havaintoarvoihin liittyy aina *epävarmuutta ja satunnaisuutta*.
- Tilastollisissa tutkimusasetelmissä tutkimuksen kohteita kuvaavat muuttujat tulkitaan *satunnaismuuttujiksi*, jotka *generoivat* muuttujien havaitut arvot.
- *Havaintoarvot generoineiden satunnaismuuttujien todennäköisyysjakauma* muodostaa **tilastollisen mallin** sille satunnaisilmiölle, jota havainnot koskevat.

Todennäköisyysjakaumien parametrit 1/2

- Tarkastellaan jotakin tutkimuksen kaikkien mahdollisten kohteiden muodostaman perusjoukon S alkioiden ominaisuutta kuvaavaa *satunnaismuuttujaa* X .
- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *todennäköisyysjakaumaa*, jonka *pistetodennäköisyys-* tai *tiheysfunktio*

$$f(x ; \theta)$$

riippuu **parametrasta** θ .

- Merkintä:

$$X \sim f(x ; \theta)$$

Todennäköisyysjakaumien parametrit 2/2

- Satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio

$$f(x ; \theta)$$

kuvaa satunnaismuuttujan X *todennäköisyysjakaumaa* ja parametri θ kuvaa jotakin jakauman *karakteristista ominaisuutta*.

- Koska parametrin θ arvoa *ei yleensä tunneta*, tilastollisen tutkimuksen tärkeimpiä osatehtäviä on **estimoida** eli *arvioida* tuntemattomalle parametrille θ sopiva arvo jakaumasta $f(x ; \theta)$ *poimitun otoksen perusteella*.

Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi

Yksinkertainen satunnaisotos

- Olkoon

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

(**yksinkertainen**) **satunnaisotos** jakaumasta, jonka pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio $f(x; \theta)$ riippuu parametrilla θ .

- Tällöin havainnot X_1, X_2, \dots, X_n ovat *riippumattomia, identtisesti jakautuneita satunnaismuuttujia*, joilla on *sama pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio* $f(x; \theta)$:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

$$X_i \sim f(x; \theta), i = 1, 2, \dots, n$$

Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi

Havainnot ja havaintoarvot

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat (havainnot)

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

saavat *poimitussa otoksessa* **havaituiksi arvoikseen** luvut

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

- **Havaintoarvot**

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

vaihtelevat satunnaisesti otoksesta toiseen jakaumasta

$$f(x; \theta)$$

saatavin todennäköisyyksin.

Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi

Estimaattorit ja estimaatit 1/2

- Oletetaan, että todennäköisyysjakauman $f(x; \theta)$ parametrin θ estimointiin käytetään satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_n funktiota eli *tunnuslukua*

$$T = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

- Tällöin funktiota $T = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ kutsutaan parametrin θ **estimaattoriksi** ja *havaintoarvoista*

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

laskettua funktion g arvoa

$$t = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

kutsutaan parametrin θ **estimaatiksi**.

Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi

Estimaattorit ja estimaatit 2/2

- Olkoon

$$T = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

jakauman $f(x; \theta)$ parametrin θ *estimaattori*.

- Tällöin estimaattorin T havaintoarvoista

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

laskettu arvo eli *estimaatti*

$$t = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

on satunnaismuuttujan T arvon realisaatio otoksessa.

Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi

Estimaattoreiden johtaminen

- *Hyvien estimaattoreiden johtaminen todennäköisyysjakaumien tuntemattomille parametreille on teoreettisen tilastotieteen keskeisiä ongelmia.*
- Tässä luvussa esitellään seuraavat estimaattoreiden johtamiseen käytettävät menetelmät:
 - **Suurimman uskottavuuden menetelmä**
 - **Momenttimenetelmä**
- *Estimointimenetelmistä tärkein on suurimman uskottavuuden menetelmä, mutta seuraavassa käsitellään ensin momenttimenetelmää.*

Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi

Piste-estimointi ja väliestimointi

- Todennäköisyysjakauman *parametrin arvon estimointia* kutsutaan usein **piste-estimoinniksi**.
- Parametrin estimaattiin on aina syytä liittää **luottamusväliksi** kutsuttu *väli, joka sisältää estimoidun parametrin todellisen, mutta tuntemattoman arvon tietyllä, soveltajan valittavissa olevalla todennäköisyydellä*.
- Luottamusvälin määräämistä kutsutaan **väliestimoinniksi**; ks. lukua **Väliestimointi**.

Estimointimenetelmät

Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi

>> Suurimman uskottavuuden menetelmä

Normaalijakauman parametrien estimointi

Eksponenttijakauman parametrien estimointi

Bernoulli-jakauman parametrien estimointi

Momenttimenetelmä

Normaalijakauman parametrien estimointi

Eksponenttijakauman parametrien estimointi

Bernoulli-jakauman parametrien estimointi

Suurimman uskottavuuden menetelmä

Uskottavuusfunktio 1/2

- Olkoon X_1, X_2, \dots, X_n yksinkertainen satunnaisotos jakaumasta $f(x; \theta)$, jonka parametrina on θ .
- Koska havainnot X_1, X_2, \dots, X_n on oletettu tässä riippumattomiksi, niiden yhteisjakauman pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio on

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \\ = f(x_1; \theta) \times f(x_2; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta) \end{aligned}$$

jossa

$$f(x_i; \theta), i = 1, 2, \dots, n$$

on havaintoon X_i liittyvä pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio.

Suurimman uskottavuuden menetelmä

Uskottavuusfunktio 2/2

- Otoksen X_1, X_2, \dots, X_n **uskottavuusfunktio**

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$$

on havaintojen

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

yhteisjakauman pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktion f arvo pisteessä

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

tulkittuna parametrin θ arvojen funktioksi.

- **Huomautus:**

Uskottavuusfunktio L sisältää kaiken informaation otoksesta.

Suurimman uskottavuuden estimaattori 1/2

- Olkoon

$$t = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

parametrin θ arvo, joka *maksimoi uskottavuusfunktion*

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

parametrin θ suhteen.

- Huomautus:

Uskottavuusfunktion L maksimin antava parametrin θ arvo t on muuttujien (havaintoarvojen) x_1, x_2, \dots, x_n funktio.

Suurimman uskottavuuden estimaattori 2/2

- Sijoittamalla uskottavuusfunktion L maksimin parametrin θ suhteen antavassa lausekkeessa

$$t = g(x_1, x_2, \mathcal{K}, x_n)$$

muuttujien

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

paikalle havainnot

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

saadaan parametrin θ suurimman uskottavuuden
estimaattori eli SU-estimaattori

$$\hat{\theta} = g(X_1, X_2, \mathcal{K}, X_n)$$

Suurimman uskottavuuden menetelmä

Kommentteja

- Parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{\theta}$ tuottaa parametrille θ arvon, joka *maksimoi poimitun otoksen eli saatujen havaintoarvojen uskottavuuden (todennäköisyyden)*.
- Parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattorin $\hat{\theta}$ otoskohtainen arvo *maksimoi todennäköisyyden saada juuri se otos, joka on saatu*.

SU-estimaattorin määrittäminen 1/2

- Parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori määrätään *maksimoimalla uskottavuusfunktio*

$$L(\theta) = L(\theta ; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

parametrin θ suhteen.

- Kaikissa säännöllisissä tapauksissa maksimi löydetään merkitsemällä uskottavuusfunktion $L(\theta)$ *derivaatta*

$$L'(\theta)$$

nollaksi ja ratkaisemalla θ saadusta *normaaliyhtälöstä*

$$L'(\theta) = 0$$

SU-estimaattorin määrittäminen 2/2

- Jos parametrin θ arvo

$$t = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

tuottaa uskottavuusfunktion $L(\theta)$ maksimin, parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori on

$$\hat{\theta} = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

jossa X_1, X_2, \dots, X_n on yksinkertainen satunnaisotos siitä jakaumasta, johon uskottavuusfunktio $L(\theta)$ liittyy.

Logaritminen uskottavuusfunktio 1/3

- Uskottavuusfunktion maksimi kannattaa tavallisesti etsiä maksimoimalla uskottavuusfunktion sijasta *logaritminen uskottavuusfunktio* (uskottavuusfunktion logaritmi)

$$l(\theta) = \log L(\theta)$$

- Tämä johtuu seuraavista seikoista:
 - (i) Logaritminen uskottavuusfunktio ja uskottavuusfunktio saavuttavat ääriarvonsa *samassa pisteessä*, koska logaritmi on *aidosti monotoninen funktio*.
 - (ii) Logaritminen uskottavuusfunktio on monien todennäköisyysjakaumien tapauksessa uskottavuusfunktioita *yksinkertaisempi* muodoltaan.

Logaritminen uskottavuusfunktio 2/3

- Koska havainnot X_1, X_2, \dots, X_n on oletettu riippumattomiksi, logaritminen uskottavuusfunktio voidaan tässä kirjoittaa seuraavaan muotoon:

$$\begin{aligned}l(\theta) &= \log L(\theta) \\ &= \log (f(x_1; \theta) \times f(x_2; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta)) \\ &= \log f(x_1; \theta) + \log f(x_2; \theta) + \dots + \log f(x_n; \theta) \\ &= l(\theta; x_1) + l(\theta; x_2) + \dots + l(\theta; x_n)\end{aligned}$$

jossa

$$l(\theta; x_i) = \log f(x_i; \theta), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

on havaintoarvoon x_i liittyvä logaritminen uskottavuusfunktio.

Logaritminen uskottavuusfunktio 3/3

- Logaritmisen uskottavuusfunktion summaesityksen

$$l(\theta) = l(\theta ; x_1) + l(\theta ; x_2) + \dots + l(\theta ; x_n)$$

maksimointi on usein *ratkaisevasti helpompaa* kuin uskottavuusfunktion maksimointi.

Suurimman uskottavuuden menetelmä

SU-estimaattorin ominaisuudet

- Olkoon X_1, X_2, \dots, X_n yksinkertainen satunnaisotos jakaumasta $f(x; \theta)$, jonka parametrina on θ .
- Olkoon $\hat{\theta}$ parametrin θ suurimman uskottavuuden eli **SU-estimaattori**.
- Hyvä estimaattori on *tyhjentävä, harhaton, tehokas ja tarkentuva* (ks. lukua Estimointi).
- **SU-estimaattori ei välttämättä täytä yhtäkään hyvän estimaattorin kriteeriä, joten suurimman uskottavuuden menetelmää käytettäessä on aina erikseen varmistettava tuloksena saadun estimaattorin hyvyys.**

SU-estimaattorin asymptoottiset ominaisuudet 1/3

- Jos parametrin θ SU-estimaattori $\hat{\theta}$ ei täytä hyvän estimaattorin kriteereitä *äärellisillä havaintojen lukumäärillä*, SU-estimaattorin $\hat{\theta}$ käyttöä parametrin θ estimaattorina voidaan usein perustella SU-estimaattorin *yleisillä asymptoottisilla ominaisuuksilla*:
 - (i) SU-estimaattori $\hat{\theta}$ on **tarkentuva** eli
$$\Pr(\hat{\theta} \rightarrow \theta) = 1, \text{ kun } n \rightarrow +\infty$$
 - (ii) SU-estimaattori $\hat{\theta}$ on **asymptoottisesti normaalin**.

SU-estimaattorin asymptoottiset ominaisuudet 2/3

- SU-estimaattorin *tarkentuvuus* merkitsee sitä, että SU-estimaattori toteuttaa **suurten lukujen lain** (ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukua **Stokastiikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet**).
- Suurten lukujen lain mukaan SU-estimaattorin arvo *lähestyy stokastisesti parametrin oikeata arvoa*, kun otoskoko kasvaa.

SU-estimaattorin asymptoottiset ominaisuudet 3/3

- SU-estimaattorin *asymptoottinen normalisuus* merkitsee sitä, että SU-estimaattori toteuttaa **keskeisen raja-arvolauseen** (ks. kalvokokoelman **Johdatus todennäköisyyslaskentaan** lukua **Konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet**).
- SU-estimaattorin asymptoottinen normalisuus merkitsee sitä, että *SU-estimaattorin jakaumaa voidaan suurissa otoksissa approksimoida normaalijakaumalla*.
- Se, että SU-estimaattori on erittäin yleisten ehtojen pätiessä asymptoottisesti normaalin, on tärkeä lisäperuste *normaalijakauman keskeiselle asemalle* tilastotieteessä.

Suurimman uskottavuuden menetelmä vs momenttimenetelmä

- Suurimman uskottavuuden menetelmä *ei tuota* todennäköisyysjakauman parametreille välttämättä samoja estimaattoreita kuin ns. momenttimenetelmä.
- Monissa alkeellisissa tilanteissa molemmilla menetelmillä saadaan kuitenkin samat estimaattorit.
- Suurimman uskottavuuden menetelmä *on hyvin pitkälti syrjäyttänyt* momenttimenetelmän todennäköisyysjakaumien parametrien estimaattoreita johdettaessa.
- Suurimman uskottavuuden menetelmän suosituimmuus-asemaa perustuu sen momenttimenetelmää *vankempaan* teoreettiseen perustaan.

Suurimman uskottavuuden menetelmä

Esimerkkejä 1/2

- Olkoon

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

yksinkertainen satunnaisotos jakaumasta $f(x; \theta)$.

- Tarkastellaan seuraavien jakaumien parametrien SU-estimointia eli estimointia suurimman uskottavuuden menetelmällä (ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukuja **Diskreettejä jakaumia ja Jatkuvia jakaumia**):
 - **Normaalijakauma**
 - **Eksponenttijakauma**
 - **Bernoulli-jakauma**

Suurimman uskottavuuden menetelmä

Esimerkkejä 2/2

- Huomautuksia:
 - Normaalijakauman, eksponenttijakauman ja Bernoulli-jakauman parametrien estimointia *momenttimenetelmällä* tarkastellaan seuraavassa kohdassa.
 - Normaalijakauman, eksponenttijakauman ja Bernoulli-jakauman tapauksessa suurimman uskottavuuden menetelmä ja momenttimenetelmä tuottavat jakaumien parametreille *samat estimaattorit*.

Normaalijakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

Normaalijakauma ja sen parametointi

- Satunnaismuuttuja X noudattaa **normaalijakaumaa** $N(\mu, \sigma^2)$, jos sen *tiheysfunktio* on

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

$$-\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$$

- Normaalijakauman *parametreina* ovat jakauman *odotusarvo*

$$E(X) = \mu$$

ja *varianssi*

$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

Normaalijakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

Otos normaalijakaumasta

- Olkoon

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

yksinkertainen satunnaisotos normaalijakaumasta

$$N(\mu, \sigma^2)$$

- Tällöin havainnot X_1, X_2, \dots, X_n ovat *riippumattomia, samaa normaalijakaumaa*

$$N(\mu, \sigma^2)$$

noudattavia satunnaismuuttujia.

Normaalijakautuneen otoksen uskottavuusfunktio ja log-uskottavuusfunktio

- Otoksen X_1, X_2, \dots, X_n uskottavuusfunktio on

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma^2; x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1; \mu, \sigma^2) \times f(x_2; \mu, \sigma^2) \times \dots \times f(x_n; \mu, \sigma^2) \\ &= \sigma^{-n} (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\} \end{aligned}$$

- Otoksen X_1, X_2, \dots, X_n logaritminen uskottavuusfunktio on

$$\begin{aligned} l(\mu, \sigma^2; x_1, x_2, \dots, x_n) &= \log L(\mu, \sigma^2; x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= -\frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2} n \log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{aligned}$$

Normaalijakauman parametrien SU-estimaattorit

- Normaalijakauman $N(\mu, \sigma^2)$ odotusarvon μ ja varianssin σ^2 **SU-estimaattorit** eli **suurimman uskottavuuden estimaattorit** ovat havaintojen X_1, X_2, \dots, X_n *aritmeettinen keskiarvo*

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

ja *otosvarianssi*

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

- **Huomautus:**
Parametrien μ ja σ^2 SU-estimaattorit yhtyvät niiden *momentti-estimaattoreihin*.

Normaalijakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

SU-estimaattoreiden johto 1/2

- *Derivoidaan* logaritminen uskottavuusfunktio

$$l(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2} n \log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

ensin parametrin μ suhteen ja merkitään derivaatta nolllaksi:

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0$$

- Derivaatan ainoa *nollakohta*

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

antaa log-uskottavuusfunktion *maksimin* parametrin μ suhteen.

Normaalijakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

SU-estimaattoreiden johto 2/2

- *Sijoitetaan* ratkaisu $\mu = \bar{x}$ logaritmiseen uskottavuusfunktioon:

$$l(\bar{x}, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2} n \log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- *Derivoidaan* funktio $l(\bar{x}, \sigma^2)$ parametrin σ^2 suhteen ja merkitään derivaatta nolaksi:

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

- Derivaatan ainoa *nollakohta*

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

antaa log-uskottavuusfunktion *maksimin* parametrin σ^2 suhteen.

Normaalijakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

SU-estimaattoreiden ominaisuudet 1/2

- Normaalijakauman $N(\mu, \sigma^2)$ odotusarvon μ SU-estimaattorilla $\hat{\mu}$ on seuraavat ominaisuudet:
 - (i) $\hat{\mu}$ on *harhaton*.
 - (ii) $\hat{\mu}$ ja $\hat{\sigma}^2$ ovat yhdessä *tyhjentäviä* parametreille μ ja σ^2 .
 - (iii) $\hat{\mu}$ on *tehokas* eli minimivarianssinen estimaattori.
 - (iv) $\hat{\mu}$ on *tarkentuva*.
 - (v) $\hat{\mu}$ noudattaa *normaalijakaumaa*:

$$\hat{\mu} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Normaalijakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

SU-estimaattoreiden ominaisuudet 2/2

- Normaalijakauman $N(\mu, \sigma^2)$ varianssin σ^2 SU-estimaattorilla $\hat{\sigma}^2$ on seuraavat ominaisuudet:

(i) $\hat{\sigma}^2$ on *harhainen*, mutta estimaattori

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

on *harhaton*.

(ii) $\hat{\mu}$ ja $\hat{\sigma}^2$ ovat yhdessä *tyhjentäviä* parametreille μ ja σ^2 .

(iii) $\hat{\sigma}^2$ *ei ole tehokas* eli minimivarianssinen estimaattori.

(iv) $\hat{\sigma}^2$ on *tarkentuva*.

(v) $(n-1) s^2 / \sigma^2$ noudattaa χ^2 -jakaumaa:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Eksponttijakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

Eksponttijakauma ja sen parametrointi

- Satunnaismuuttuja X noudattaa **eksponttijakaumaa** $\text{Exp}(\lambda)$, jos sen *tiheysfunktio* on

$$f(x; \lambda) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0$$

- Eksponttijakauman ainoa *parametri*

$$\lambda = \frac{1}{E(X)}$$

voidaan tulkita sopivat ehdot toteuttavassa jono-
tapahtumassa 1. *tapahtuman odotusajaksi* tai *tapahtuma-*
intensiteetiksi.

Eksponenttijakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

Otos eksponenttijakaumasta

- Olkoon

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

yksinkertainen satunnaisotos eksponenttijakaumasta

$$\text{Exp}(\lambda)$$

- Tällöin havainnot X_1, X_2, \dots, X_n ovat *riippumattomia, samaa eksponenttijakaumaa*

$$\text{Exp}(\lambda)$$

noudattavia satunnaismuuttujia.

Eksponenttijakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

Eksponenttijakautuneen otoksen uskottavuusfunktio ja log-uskottavuusfunktio

- Otoksen X_1, X_2, \dots, X_n uskottavuusfunktio on

$$\begin{aligned}L(\lambda; x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1; \lambda) \times f(x_2; \lambda) \times \dots \times f(x_n; \lambda) \\ &= \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n x_i\right)\end{aligned}$$

- Otoksen X_1, X_2, \dots, X_n logaritminen uskottavuusfunktio on

$$\begin{aligned}l(\lambda; x_1, x_2, \dots, x_n) &= \log L(\lambda; x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= n \log(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i\end{aligned}$$

Eksponenttijakauman parametrin SU-estimaattori

- Eksponenttijakauman $\text{Exp}(\lambda)$ parametrin λ **SU-estimaattori** eli suurimman uskottavuuden estimaattori on

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$$

jossa

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

on havaintojen X_1, X_2, \dots, X_n *aritmeettien keskiarvo*.

- Huomautuksia:
 - Parametrin λ SU-estimaattori yhtyy sen *momenttiestimaattoriin*.
 - Estimaattorin $\hat{\lambda}$ ominaisuudet *sivuuutetaan*.

Eksponenttijakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

SU-estimaattorin johto

- *Derivoidaan* logaritminen uskottavuusfunktio

$$l(\lambda) = n \log(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

parametrin λ suhteen ja merkitään derivaatta nolaksi:

$$\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

- Derivaatan ainoa *nollakohta*

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$

antaa log-uskottavuusfunktion *maksimin* parametrin λ suhteen.

Bernoulli-jakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

Bernoulli-jakauma ja sen parametrointi

- Olkoon A *tapahtuma*, jonka todennäköisyys on p :

$$\Pr(A) = p$$

- Määritellään satunnaismuuttuja X seuraavasti:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{jos } A \text{ tapahtuu} \\ 0, & \text{jos } A \text{ ei tapahdu} \end{cases}$$

- Satunnaismuuttuja X noudattaa **Bernoulli-jakaumaa** $\text{Ber}(p)$ ja sen *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x; p) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1; \quad 0 < p < 1$$

- Bernoulli-jakauman ainoa *parametri* p yhtyy jakauman *odotusarvoon*:

$$p = E(X)$$

Bernoulli-jakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

Otos Bernoulli-jakaumasta

- Olkoon

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

yksinkertainen satunnaisotos Bernoulli-jakaumasta

$$\text{Ber}(p)$$

- Tällöin havainnot X_1, X_2, \dots, X_n ovat *riippumattomia, samaa Bernoulli-jakaumaa*

$$\text{Ber}(p)$$

noudattavia satunnaismuuttujia.

Bernoulli-jakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

Bernoulli-jakautuneen otoksen uskottavuusfunktio ja log-uskottavuusfunktio

- Otoksen X_1, X_2, \dots, X_n uskottavuusfunktio on

$$\begin{aligned}L(p; x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1; p) \times f(x_2; p) \times \dots \times f(x_n; p) \\ &= p^{\sum x_i} (1-p)^{n-\sum x_i}\end{aligned}$$

- Otoksen X_1, X_2, \dots, X_n logaritminen uskottavuusfunktio on

$$\begin{aligned}l(p; x_1, x_2, \dots, x_n) &= \log L(p; x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \log(p) + (n - \sum_{i=1}^n x_i) \log(1-p)\end{aligned}$$

Bernoulli-jakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin SU-estimaattori 1/2

- Bernoulli-jakauman $\text{Ber}(p)$ odotusarvoparametrin p **SU-estimaattori** eli **suurimman uskottavuuden estimaattori** on havaintojen X_1, X_2, \dots, X_n *aritmeettien keskiarvo*

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

- Huomautus:
Parametrin p SU-estimaattori yhtyy sen *momenttiestimaattoriin*.

Bernoulli-jakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin SU-estimaattori 2/2

- Koska

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jos } A \text{ tapahtuu} \\ 0, & \text{jos } A \text{ ei tapahdu} \end{cases}$$

niin

$$\sum_{i=1}^n X_i = f$$

jossa f on tapahtuman A *frekvenssi* otoksessa.

- Siten Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin p *suurimman uskottavuuden estimaattori*

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{f}{n}$$

on tapahtuman A *suhteellinen frekvenssi* otoksessa.

Bernoulli-jakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

SU-estimaattorin johto

- *Derivoidaan* logaritminen uskottavuusfunktio

$$l(p) = \sum_{i=1}^n x_i \log(p) + (n - \sum_{i=1}^n x_i) \log(1 - p)$$

parametrin p suhteen ja merkitään derivaatta nolaksi:

$$\frac{\partial l(p)}{\partial p} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{n - \sum x_i}{1 - p} = 0$$

- Derivaatan ainoa *nollakohta*

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

antaa uskottavuusfunktion *maksimin*.

Bernoulli-jakauman parametrien estimointi SU-menetelmällä

SU-estimaattorin ominaisuudet

- Bernoulli-jakauman $\text{Ber}(p)$ odotusarvoparametrin p SU-estimaattorilla \hat{p} on seuraavat ominaisuudet:
 - (i) \hat{p} on *harhaton*.
 - (ii) \hat{p} on *tyhjentävä*.
 - (iii) \hat{p} on *tehokas* eli minimivarianssinen estimaattori.
 - (iv) \hat{p} on *tarkentuva*.
 - (v) \hat{p} noudattaa *asymptoottisesti normaalijakaumaa*:

$$\hat{p} \sim_a \text{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Estimointimenetelmät

Todennäköisyysjakaumien parametrien estimointi

Suurimman uskottavuuden menetelmä

Normaalijakauman parametrien estimointi

Eksponenttijakauman parametrien estimointi

Bernoulli-jakauman parametrien estimointi

>> Momenttimenetelmä

Normaalijakauman parametrien estimointi

Eksponenttijakauman parametrien estimointi

Bernoulli-jakauman parametrien estimointi

Momenttimenetelmä

Momentit

- Olkoon

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

yksinkertainen satunnaisotos jakaumasta $f(x; \theta)$, jonka *parametrina* on p -vektori

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$$

- Oletetaan, että jakaumalla $f(x; \theta)$ on kaikki (origo-) **momentit** kertalukuun p saakka (ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukua **Jakaumien tunnusluvut**):

$$E(X_i^k) = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Parametrien ja momenttien yhteys 1/2

- Oletetaan, että momenttien

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$$

ja parametrien

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$$

välillä on jatkuva *bijektio* eli kääntäen yksikäsitteinen kuvaus:

$$(1) \begin{cases} \alpha_1 = g_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p) \\ \alpha_2 = g_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p) \\ \vdots \\ \alpha_p = g_p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p) \end{cases}$$

Parametrien ja momenttien yhteys 2/2

- Tällöin parametrit

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$$

voidaan esittää momenttien

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$$

funktioina:

$$(2) \begin{cases} \theta_1 = h_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\ \theta_2 = h_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\ \vdots \\ \theta_p = h_p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \end{cases}$$

Momenttiestimaattorit

- Estimoidaan momentit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ vastaavilla *otosmomenteilla* (ks. lukua **Tilastollisten aineistojen kuvaaminen**):

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

- Sijoittamalla estimaattorit a_1, a_2, \dots, a_p momenttien $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ paikalle yhtälöihin (2), saadaan parametrien $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ **momenttiestimaattorit** eli **MM-estimaattorit**

$$(3) \begin{cases} \hat{\theta}_1 = h_1(a_1, a_2, \dots, a_p) \\ \hat{\theta}_2 = h_2(a_1, a_2, \dots, a_p) \\ \quad \quad \quad \mathbb{M} \\ \hat{\theta}_p = h_p(a_1, a_2, \dots, a_p) \end{cases}$$

Momenttimenetelmä

Kommentteja

- Monet todennäköisyysjakaumat on *parametroitu jakauman (origo-) momenteilla tai keskusmomenteilla*:
 - (i) Jos jakauman parametreina on jakauman (origo-) momenteja, *vastaavat otosmomentit* ovat ko. parametrien *momenttiestimaattoreita*.
 - (ii) Jos jakauman parametreina on jakauman keskusmomenteja, *vastaavat otoskeskusmomentit* ovat ko. parametrien *momenttiestimaattoreita*.

Momenttiestimaattoreiden ominaisuudet

- Olkoon X_1, X_2, \dots, X_n yksinkertainen satunnaisotos jakaumasta $f_X(x; \theta)$, jonka parametrina on θ .
- Olkoon $\hat{\theta}$ parametrin θ **momenttiestimaattori** eli **MM-estimaattori**.
- Hyvä estimaattori on *harhaton, tyhjentävä, tehokas ja tarkentuva* (ks. lukua Estimointi).
- **MM-estimaattori ei välttämättä täytä yhtäkään hyvän estimaattorin kriteeriä, joten momenttimenetelmää käytettäessä on aina erikseen varmistettava tuloksena saadun estimaattorin hyvyys.**

Momenttimenetelmä vs suurimman uskottavuuden menetelmä

- Momenttimenetelmä *ei tuota* todennäköisyysjakauman parametreille välttämättä samoja estimaattoreita kuin suurimman uskottavuuden menetelmä.
- Monissa alkeellisissa tilanteissa molemmilla menetelmillä saadaan kuitenkin samat estimaattorit.
- Momenttimenetelmä on menetelmistä vanhempi ja sen taustalla on *naiivi analogia-periaate*: Teoreettiset momentit estimoidaan vastaavilla otossuureilla.
- Suurimman uskottavuuden menetelmä *on hyvin pitkälti syrjäyttänyt* momenttimenetelmän todennäköisyysjakaumien parametrien estimaattoreita johdettaessa.

Momenttimenetelmä

Esimerkkejä 1/2

- Olkoon

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

yksinkertainen satunnaisotos jakaumasta $f(x; \theta)$, jonka parametrina on θ .

- Tarkastellaan seuraavien jakaumien parametrien MM-estimointia eli estimointia momenttimenetelmällä (ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta lukuja Diskreettejä jakaumia ja Jatkuvia jakaumia**):
 - **Normaalijakauma**
 - **Eksponenttijakauma**
 - **Bernoulli-jakauma**

Momenttimenetelmä

Esimerkkejä 2/2

- Huomautuksia:
 - Normaalijakauman, eksponenttijakauman ja Bernoulli-jakauman parametrien estimointia *suurimman uskottavuuden menetelmällä* on tarkasteltua edellä.
 - Normaalijakauman, eksponenttijakauman ja Bernoulli-jakauman tapauksessa momenttimenetelmä ja suurimman uskottavuuden menetelmä tuottavat jakaumien parametreille *samat estimaattorit*.
 - Estimaattoreiden ominaisuuksia käsitellään suurimman uskottavuuden menetelmän soveltamisen yhteydessä.

Normaalijakauman parametrien estimointi momenttimenetelmällä

Normaalijakauma ja sen parametointi

- Satunnaismuuttuja X noudattaa **normaalijakaumaa** $N(\mu, \sigma^2)$, jos sen *tiheysfunktio* on

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

$$-\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$$

- Normaalijakauman *parametreina* ovat jakauman *odotusarvo*

$$E(X) = \mu$$

ja *varianssi*

$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

Normaalijakauman parametrien estimointi momenttimenetelmällä

Normaalijakauman parametrien ja momenttien yhteys

- Määritellään satunnaismuuttujan X 1. ja 2. *momentti* kaavalla

$$\alpha_k = E(X^k), k = 1, 2$$

- Normaalijakauman parametrien μ ja σ^2 sekä momenttien α_1 ja α_2 välillä on seuraava *bijektio*:

- (i) Parametrit lausuttuina momenttien funktioina:

$$\begin{cases} \mu = E(X) = \alpha_1 \\ \sigma^2 = \text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 \end{cases}$$

- (ii) Momentit lausuttuina parametrien funktioina:

$$\begin{cases} \alpha_1 = E(X) = \mu \\ \alpha_2 = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases}$$

Normaalijakauman parametrien estimointi momenttimenetelmällä

Otos normaalijakaumasta

- Olkoon

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

yksinkertainen satunnaisotos normaalijakaumasta

$$N(\mu, \sigma^2)$$

- Tällöin havainnot X_1, X_2, \dots, X_n ovat *riippumattomia, samaa normaalijakaumaa*

$$N(\mu, \sigma^2)$$

noudattavia satunnaismuuttujia.

Normaalijakauman parametrien estimointi momenttimenetelmällä

Normaalijakauman parametrien momenttiestimaattorit 1/2

- Määritellään havaintojen X_1, X_2, \dots, X_n 1. ja 2. *otosmomentti* kaavalla

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, \quad k = 1, 2$$

- Siten normaalijakauman $N(\mu, \sigma^2)$ parametrien μ ja σ^2 **MM-estimaattorit** eli **momenttiestimaattorit** ovat

$$\begin{cases} \hat{\mu} = a_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ \hat{\sigma}^2 = a_2 - a_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - a_1^2 \end{cases}$$

Normaalijakauman parametrien estimointi momenttimenetelmällä

Normaalijakauman parametrien momenttiestimaattorit 2/2

- Odotusarvon μ momenttiestimaattori

$$\hat{\mu} = a_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

on havaintojen X_1, X_2, \dots, X_n *aritmeettinen keskiarvo*.

- Varianssin σ^2 momenttiestimaattori

$$\hat{\sigma}^2 = a_2 - a_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = m_2$$

on havaintojen X_1, X_2, \dots, X_n *otosvarianssi* eli 2. keskusmomentti.

Eksponenttijakauman parametrien estimointi momenttimenetelmällä

Eksponenttijakauma ja sen parametointi

- Satunnaismuuttuja X noudattaa **eksponenttijakaumaa** $\text{Exp}(\lambda)$, jos sen *tiheysfunktio* on

$$f(x; \lambda) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0$$

- Eksponenttijakauman ainoa *parametri*

$$\lambda = \frac{1}{E(X)}$$

voidaan tulkita sopivat ehdot toteuttavassa jono-
tapahtumassa 1. *tapahtuman odotusajaksi* tai *tapahtuma-*
intensiteetiksi.

Eksponenttijakauman parametrin ja

1. momentin yhteys

- Määritellään satunnaismuuttujan X 1. *momentti* kaavalla

$$\alpha_1 = E(X)$$

- Eksponenttijakauman parametrin λ ja 1. momentin α_1 välillä on seuraava *bijektio*:

- (i) Parametri λ lausuttuna momentin α_1 funktiona:

$$\lambda = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{\alpha_1}$$

- (ii) Momentti α_1 lausuttuna parametrin λ funktiona:

$$\alpha_1 = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Eksponenttijakauman parametrien estimointi momenttimenetelmällä

Otos eksponenttijakaumasta

- Olkoon

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

yksinkertainen satunnaisotos eksponenttijakaumasta

$$\text{Exp}(\lambda)$$

- Tällöin havainnot X_1, X_2, \dots, X_n ovat *riippumattomia, samaa eksponenttijakaumaa*

$$\text{Exp}(\lambda)$$

noudattavia satunnaismuuttujia.

Eksponenttijakauman parametrien estimointi momenttimenetelmällä

Eksponenttijakauman parametrin momenttiestimaattori

- Määritellään havaintojen X_1, X_2, \dots, X_n 1. *otosmomentti* kaavalla

$$a_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- Siten eksponenttijakauman $\text{Exp}(\lambda)$ parametrin λ **MM-estimaattori** eli **momenttiestimaattori** on

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{\bar{X}}$$

jossa

$$\bar{X} = a_1$$

on havaintojen X_1, X_2, \dots, X_n *aritmeettinen keskiarvo*.

Bernoulli-jakauman parametrien estimointi momenttimenetelmällä

Bernoulli-jakauma ja sen parametointi

- Olkoon A *tapahtuma*, jonka todennäköisyys on p :

$$\Pr(A) = p$$

- Määritellään satunnaismuuttuja X seuraavasti:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{jos } A \text{ tapahtuu} \\ 0, & \text{jos } A \text{ ei tapahdu} \end{cases}$$

- Satunnaismuuttuja X noudattaa **Bernoulli-jakaumaa** $\text{Ber}(p)$ ja sen *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x; p) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1; \quad 0 < p < 1$$

- Bernoulli-jakauman ainoa *parametri* p yhtyy jakauman *odotusarvoon*:

$$p = E(X)$$

Bernoulli-jakauman parametrien estimointi momenttimenetelmällä

Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin ja 1. momentin yhteys

- Määritellään satunnaismuuttujan X 1. *momentti* kaavalla

$$\alpha_1 = E(X)$$

- Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin p ja 1. momentin α_1 välillä on seuraava *bijektio*:

- (i) Parametri p lausuttuna momentin α_1 funktiona:

$$p = E(X) = \alpha_1$$

- (ii) Momentti α_1 lausuttuna parametrin p funktiona:

$$\alpha_1 = E(X) = p$$

Bernoulli-jakauman parametrien estimointi momenttimenetelmällä

Otos Bernoulli-jakaumasta

- Olkoon

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

yksinkertainen satunnaisotos Bernoulli-jakaumasta

$$\text{Ber}(p)$$

- Tällöin havainnot X_1, X_2, \dots, X_n ovat *riippumattomia, samaa Bernoulli-jakaumaa*

$$\text{Ber}(p)$$

noudattavia satunnaismuuttujia.

Bernoulli-jakauman parametrien estimointi momenttimenetelmällä

Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin momenttiestimaattori 1/2

- Määritellään havaintojen X_1, X_2, \dots, X_n 1. *otosmomentti* kaavalla

$$a_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- Siten Bernoulli-jakauman $\text{Ber}(p)$ odotusarvoparametrin p **MM-estimaattori** eli **momenttiestimaattori** on

$$\hat{p} = a_1 = \bar{X}$$

jossa

$$\bar{X} = a_1$$

on havaintojen X_1, X_2, \dots, X_n *aritmeettinen keskiarvo*.

Bernoulli-jakauman parametrien estimointi momenttimenetelmällä

Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin momenttiestimaattori 2/2

- Koska

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jos } A \text{ tapahtuu} \\ 0, & \text{jos } A \text{ ei tapahdu} \end{cases}$$

niin

$$\sum_{i=1}^n X_i = f$$

jossa f on tapahtuman A *frekvenssi* otoksessa.

- Siten Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrin p *momenttiestimaattori*

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{f}{n}$$

on tapahtuman A *suhteellinen frekvenssi* otoksessa.