
Ilkka Mellin

Todennäköisyyslaskenta

Liite 2: Verkot ja todennäköisyyslaskenta

Verkot

Verkot

Verkko eli graafi:

Määritelmä 1/2

- **Verkko eli graafi** muodostuu **pisteiden joukosta** V , **särmien joukosta** A ja **insidenssikuvauksesta**

$$\Delta : A \rightarrow V \times V$$

jossa

$$V \neq \emptyset, A \neq \emptyset, A \cap V = \emptyset$$

- Insidenssikuvauus Δ kertoo mitkä verkon pisteistä ovat särmien *yhdistämiä*.

Verkot

Verkko eli graafi: Määritelmä 2/2

- Olkoon

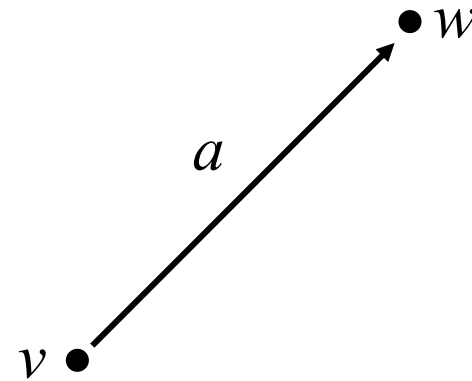
$$a \in A$$

ja

$$\Delta(a) = (v, w)$$

jossa siis

$$v, w \in V$$



- Tällöin:

v = särmän $a = (v, w)$ **alkupiste**

w = särmän $a = (v, w)$ **loppupiste**

Verkot

Verkon määritelmä:

Kommentti

- Verkkoja tarkastellaan tässä esityksessä *suunnattuina verkkoina*, millä tarkoitetaan sitä, että verkon jokaisella särmällä on *suunta*, joka osoittaa särmän *alkupisteestä* särmän *loppupisteeseen*.

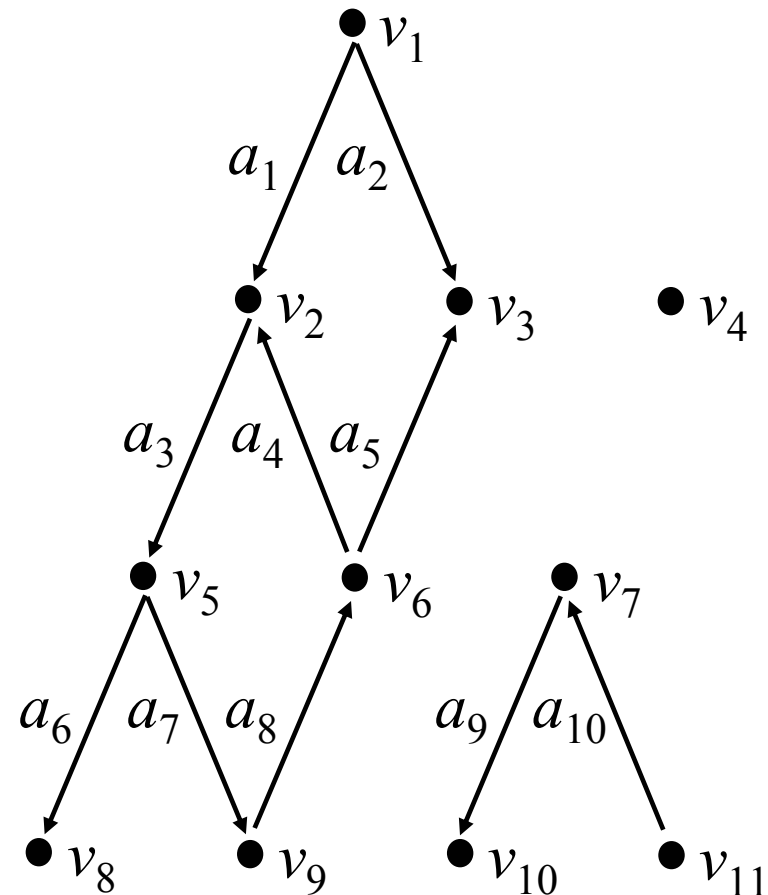
Verkkodiagrammi

- **Verkkodiagrammi** on verkon *graafinen esitys*.
- Verkkodiagrammi voidaan konstruoida seuraavalla tavalla:
 - (i) Merkitään verkon pisteet tasoon.
 - (ii) Piirretään jokaisen särmän $a = (v, w)$ alkupisteestä v *nuoli* särmän loppupisteeseen w .

Verkot

Verkkodiagrammi: Esimerkki 1/3

- Tarkastellaan viereistä *verkko-*
diagrammia.
- *Pisteiden* joukko:
$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_{11}\}$$
- *Särmien* joukko:
$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$$



Verkot

Verkkodiagrammi: Esimerkki 2/3

- *Insidenssikuvaus* Δ :

$$\Delta(a_1) = (v_1, v_2)$$

$$\Delta(a_2) = (v_1, v_3)$$

$$\Delta(a_3) = (v_2, v_5)$$

$$\Delta(a_4) = (v_6, v_2)$$

$$\Delta(a_5) = (v_6, v_3)$$

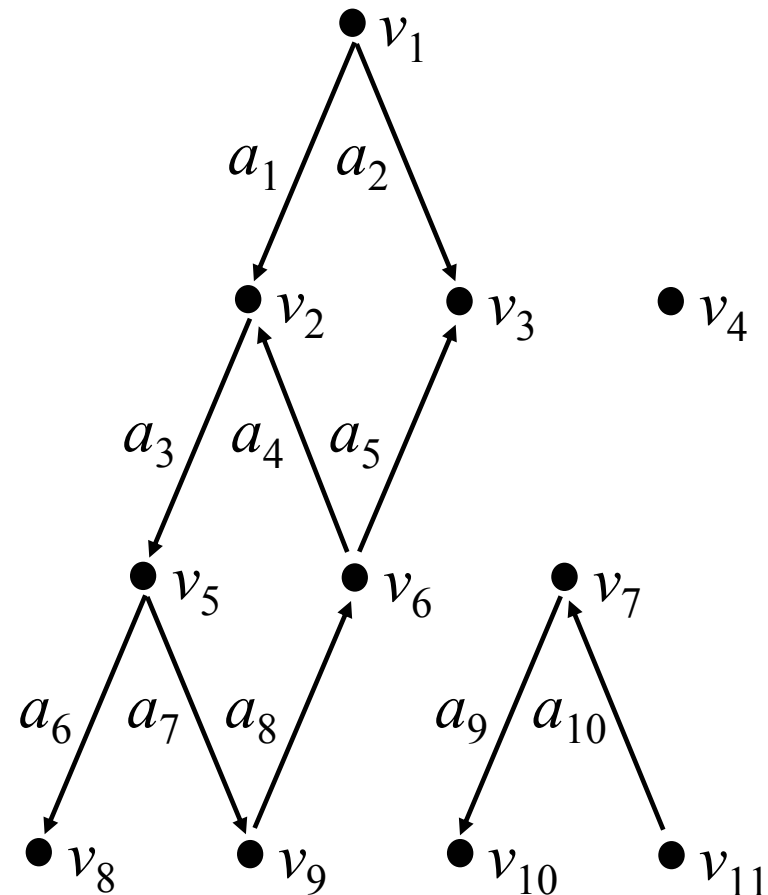
$$\Delta(a_6) = (v_5, v_8)$$

$$\Delta(a_7) = (v_5, v_9)$$

$$\Delta(a_8) = (v_9, v_6)$$

$$\Delta(a_9) = (v_7, v_{10})$$

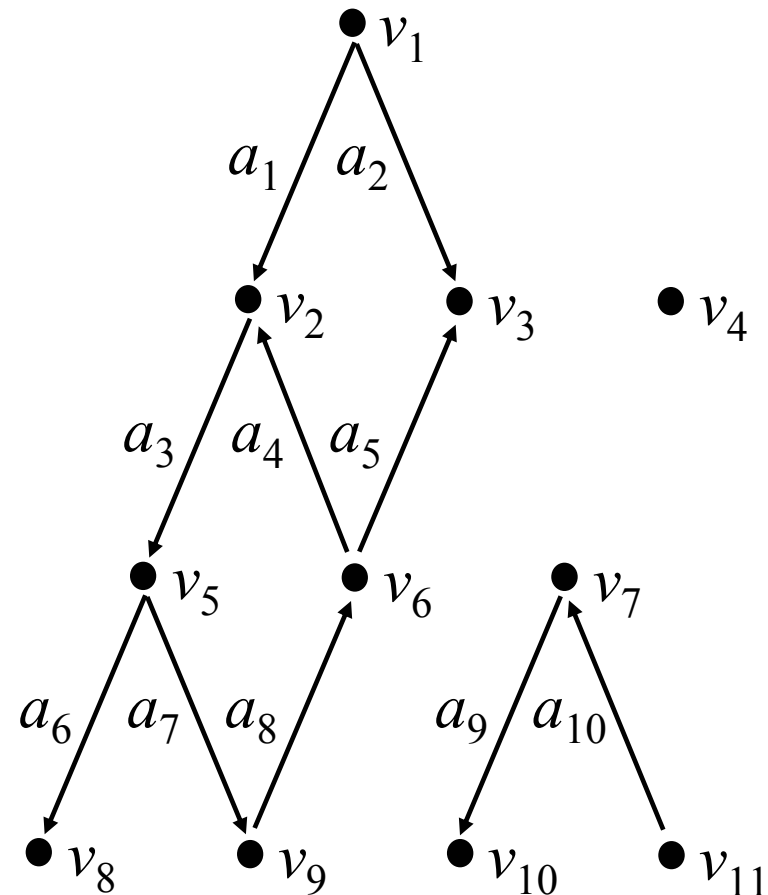
$$\Delta(a_{10}) = (v_{11}, v_7)$$



Verkot

Verkkodiagrammi: Esimerkki 3/3

- Esimerkiksi:
Piste v_6 on särmien a_4 ja a_5 alkupiste ja särmän a_8 loppupiste.
Särmän a_7 alkupiste on v_5 ja loppupiste on v_9 .
- Piste v_4 on *eristetty*, koska se ei ole yhdenkään särmän alku- tai loppupiste.



Verkot

Reitti

- Särmät

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$$

muodostavat **reitin** pisteestä v_1 pisteeseen v_k , jos on olemassa pisteet v_1, v_2, \dots, v_k siten, että

$$\Delta(a_i) = (v_i, v_{i+1}), i = 1, 2, \dots, k - 1$$

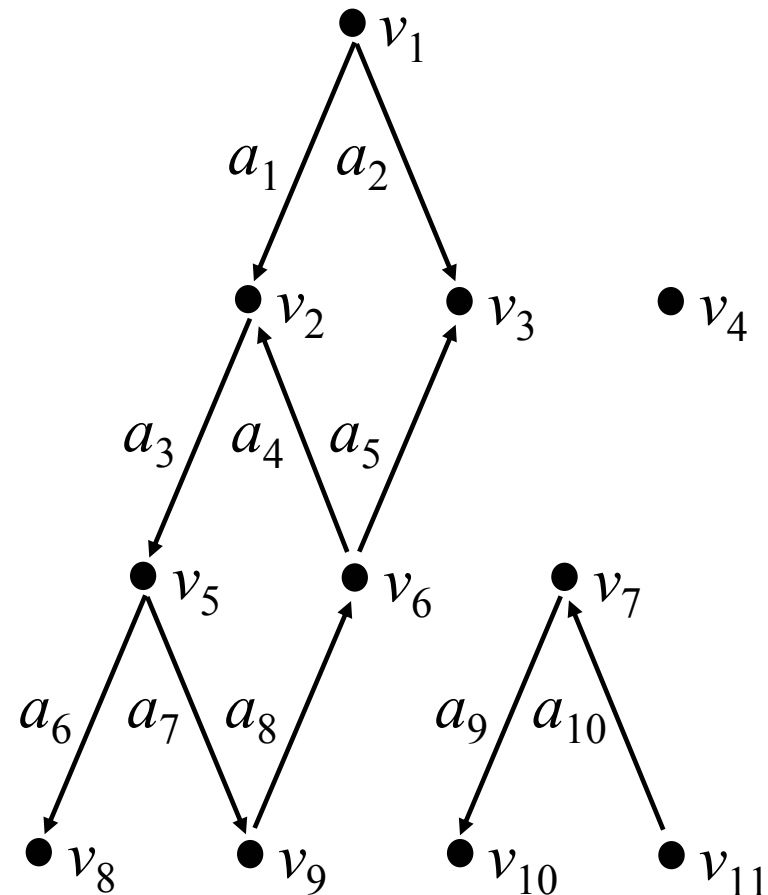
- Jos pisteestä v_1 pisteeseen v_k on reitti, sanotaan, että reitti *vie* pisteestä v_1 pisteeseen v_k tai, että pisteestä v_1 *pääsee* pisteeseen v_k .

Verkot

Reitti:

Esimerkki

- Viereisen diagrammin verkosta voidaan löytää useita *reittejä*.
- Pisteestä v_1 *pääsee* pisteisiin $v_2, v_3, v_5, v_6, v_8, v_9$ vähintään yhtä reittiä pitkin.
- Pisteestä v_1 pisteeseen v_3 *vie* kaksi reittiä:
Reitti 1: $\{a_2\}$
Reitti 2: $\{a_1, a_3, a_7, a_8, a_5\}$
- Pisteestä v_6 *ei pääse* pisteeseen v_1 ja pisteestä v_1 *ei pääse* pisteisiin v_4, v_7, v_{10}, v_{11} .



Verkot

Silmukka

- Reitti

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$$

muodostaa **silmukan**, jos on olemassa pisteet v_1, v_2, \dots, v_k siten, että

$$\Delta(a_i) = (v_i, v_{i+1}), i = 1, 2, \dots, k-1$$

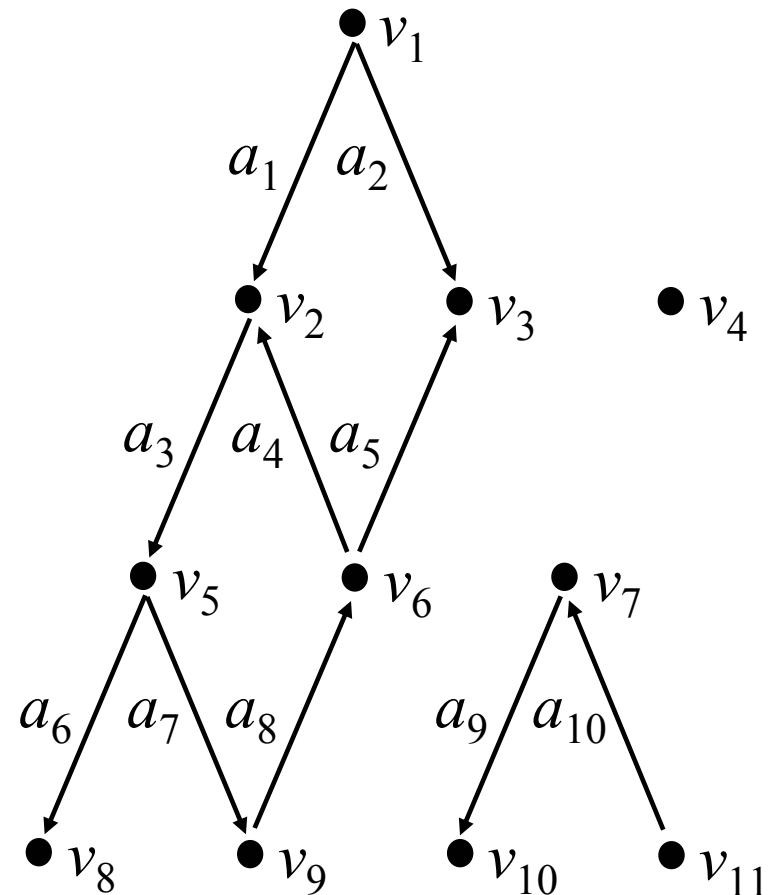
ja $v_1 = v_k$.

Verkot

Silmukka:

Esimerkki

- Viereisen diagrammin verkossa on yksi *silmukka*:
 $\{a_3, a_7, a_8, a_4\}$
- Huomaa, että esimerkiksi särmät
 $\{a_1, a_4, a_5, a_2\}$
eivät muodosta silmukkaa.



Verkon yhtenäisyys 1/2

- Verkko on **yhtenäinen**, jos sen pisteiden joukkoa V ei voida osittaa kahdeksi *epätyhjäksi* osajoukoksi siten, että verkon *jokaisen* särmän alkupiste ja loppupiste kuuluvat *samaan* osajoukkoon.
- Siten yhtenäisen verkon pisteiden joukkoa V ei voida osittaa kahteen *epätyhjään* osajoukkoon V_1 ja V_2 seuraavalla tavalla:

Jos $a = (v, w)$ on verkon mielivaltainen särmä, niin *täsmälleen toinen ehdoista (i) tai (ii) pätee*:

(i) $v \in V_1$ ja $w \in V_1$

(ii) $v \in V_2$ ja $w \in V_2$

Verkon yhtenäisyys 2/2

- Verkko on **epäyhtenäinen**, jos se *ei ole yhtenäinen*.
- Epäyhtenäisen verkon pisteet *voidaan* osittaa kahdeksi (tai useammaksi) *epätyhjäksi* osajoukoksi siten, että verkon *jokaisen* särmän alkupiste ja loppupiste kuuluvat *täsmälleen yhteen* osajoukoista.

Verkot

Yhtenäisyys: Esimerkki 1/2

- Viereisen diagrammin verkko on *epäyhtenäinen*, mutta se koostuu kolmesta *yhtenäisestä aliverkosta*:

Aliverkko 1:

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_8, v_9\}$$

$$A_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$$

Aliverkko 2:

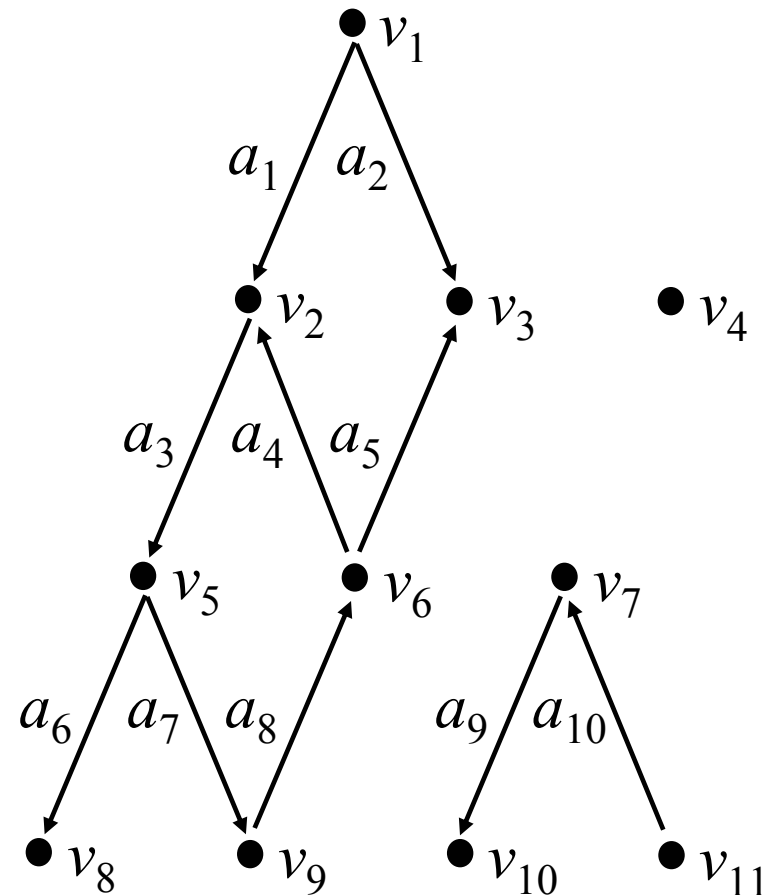
$$V_2 = \{v_4\}$$

$$A_2 = \emptyset$$

Aliverkko 3:

$$V_3 = \{v_7, v_{10}, v_{11}\}$$

$$A_3 = \{a_9, a_{10}\}$$



Verkot

Puu

- Verkko on **puu**, jonka *juuri* on piste v_1 , jos seuraavat ehdot pätevät:
 - (i) Verkko on *yhtenäinen*.
 - (ii) Verkossa ei ole *silmukoita*.
 - (iii) Jos $w \neq v_1$ on mielivaltainen verkon piste, pisteestä v_1 pisteeseen w pääsee *täsmälleen yhtä reittiä* pitkin.

Puun määritelmä: Kommentteja

- Puulla on täsmälleen yksi *alkupiste*, sen *juuri* v_1 .
- Puun alkupisteestä v_1 vie *täsmälleen yksi reitti* puun jokaiseen muuhun pisteeseen.
- Puun alkupisteeseen v_1 *ei tule* yhtään särmää.
- Puulla on yksi tai useampia *loppupisteitä*.
- Puun loppupisteestä *ei lähde* yhtään särmää.
- Jokaisen särmän loppupiste (ellei se ole samalla koko puun loppupiste) on *yhden tai useamman* särmän alkupiste.

Puudiagrammi

- **Puudiagrammi** on puun *graafinen esitys*.
- Puudiagrammi voidaan konstruoida seuraavalla tavalla:
 - (i) Merkitään puun pisteet tasoon.
 - (ii) Piirretään jokaisen särmän $a = (v, w)$ alkupisteestä v *nuoli* särmän loppupisteeseen w .

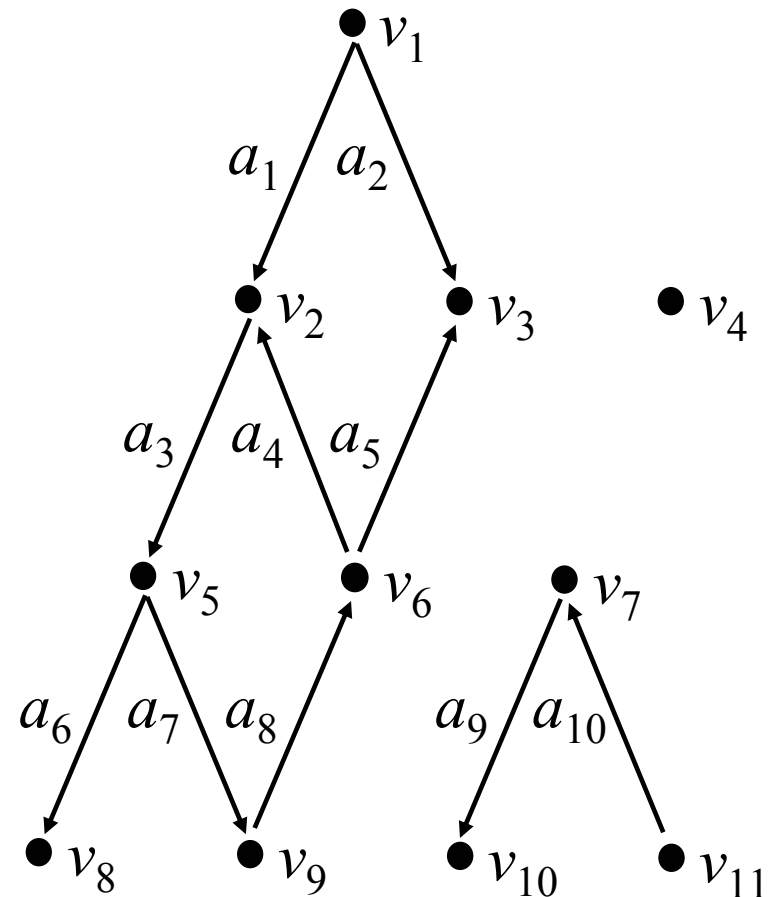
Puudiagrammin piirtäminen

- Puudiagrammin *piirtämisessä* käytetään tavallisesti toista seuraavista tavoista:
 - (i) Puu piirretään *ylösalaisin* niin, että sen juuri eli alkupiste on ylhäällä ja sen loppupisteet ovat alhaalla.
 - (ii) Puu piirretään *makaavaan asentoon* niin, että sen juuri eli alkupiste on vasemmalla ja sen loppupisteet ovat oikealla.

Verkot

Puut ja puudiagrammit: Esimerkki 1

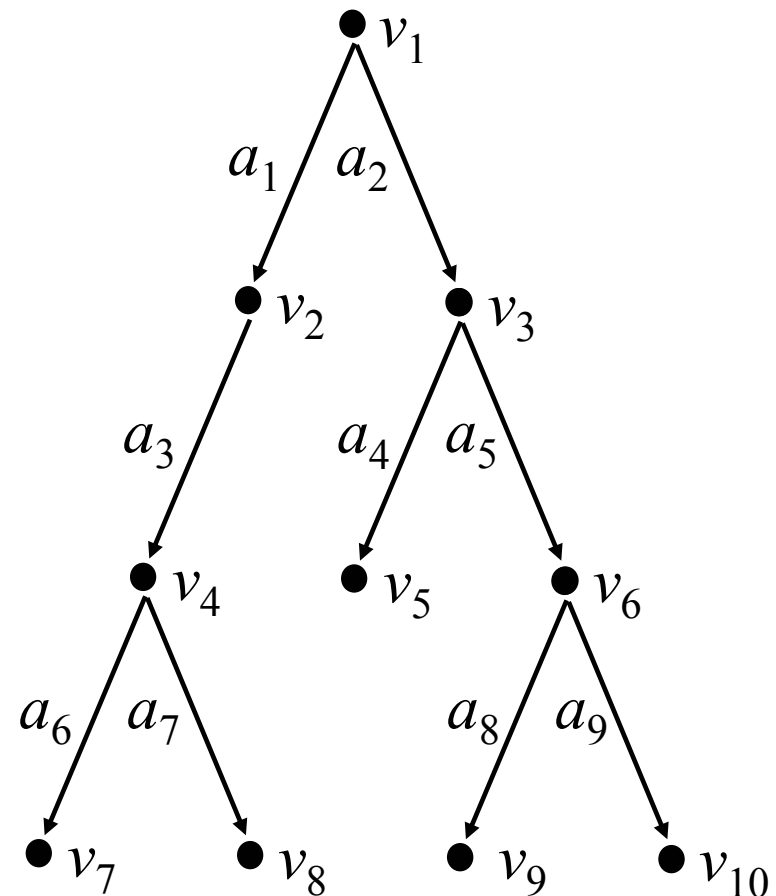
- Viereisen diagrammin verkko *ei ole* puu.
- Perustelut:
 - (i) Verkko ei ole *yhtenäinen*, koska se koostuu kolmesta *aliverkosta*, joiden välillä ei ole yhtään särmää.
 - (ii) Verkossa on *silmukka*.



Verkot

Puut ja puudiagrammit: Esimerkki 2 – 1/2

- Viereisen diagrammin verkko on puu.
- Perustelut:
 - (i) Verkko on yhtenäinen.
 - (ii) Verkossa ei ole *silmukoita*.
 - (iii) Verkon *alkupisteestä* eli juuresta v_1 vie reitti verkon jokaiseen muuhun pisteeseen.
- Puun *loppupisteiden* joukko:
 $\{v_5, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$



Verkot

Puut ja puudiagrammit: Esimerkki 2 – 2/2

- Viereisen puudiagrammin alkupisteestä v_1 loppupisteisiin $v_5, v_7, v_8, v_9, v_{10}$ vievät *reitit*:
 1. Loppupisteeseen v_5 vie reitti $\{a_2, a_4\}$
 2. Loppupisteeseen v_7 vie reitti $\{a_1, a_3, a_6\}$
 3. Loppupisteeseen v_8 vie reitti $\{a_1, a_3, a_7\}$
 4. Loppupisteeseen v_9 vie reitti $\{a_2, a_5, a_8\}$
 5. Loppupisteeseen v_{10} vie reitti $\{a_2, a_5, a_9\}$

