
Ilkka Mellin

Todennäköisyyslaskenta

Osa 1: Todennäköisyys ja sen laskusäännöt

Verkot ja todennäköisyyslaskenta

Verkot ja todennäköisyyslaskenta

- >> Puudiagrammit todennäköisyyslaskennassa: Johdanto
Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit
Toimintaverkot

Puudiagrammit todennäköisyyslaskennassa: Johdanto

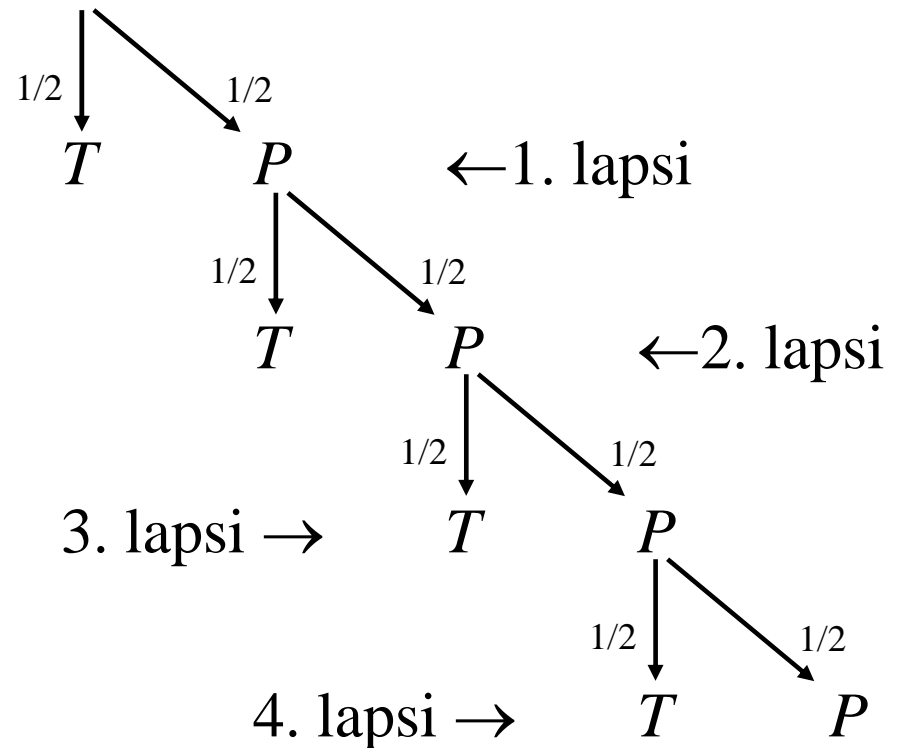
Esimerkki: Lastenhankkimisstrategian onnistumisen todennäköisyys 1/6

- Tehdään lasten syntymisestä seuraavat (yksinkertaistavat) oletukset:
 - (i) Lapset syntyvät aina yksi kerrallaan.
 - (ii) Syntyvän lapsen sukupuoli *ei riipu* aikaisemmin syntyneiden lasten sukupuolesta.
 - (iii) $\Pr(\text{Poika}) = \Pr(\text{Tyttö}) = 1/2$.
- Eräs pariskunta haluaa saada *tytön*, mutta *ei halua* hankkia *neljää lasta enempää*.
- Pariskunta päättää käyttää lasten hankkimisessa seuraavaa *strategiaa*:
 - (i) Lapsia hankitaan *kunnes* saadaan tyttö.
 - (ii) Lapsia ei kuitenkaan hankita *neljää enempää*.
- Jos siis neljäskin lapsi on poika, pariskunta on *epäonnistunut* strategiassaan.
- Mikä on todennäköisyys, että pariskunta *onnistuu* strategiassaan?

Puudiagrammit todennäköisyyslaskennassa: Johdanto

Esimerkki: Lastenhankkimisstrategian onnistumisen todennäköisyys 2/6

- Pariskuntaa kohtaavia *tapahtumavaihtoehtoja* vastaava puudiagrammi on esitetty oikealla.
- Puudiagrammissa:
 T = Tyttö ja P = Poika
- Diagrammin vasemmanpuoleiset *särmät* johtavat strategian onnistumiseen.
- Diagrammin oikeanpuoleiset *särmät* johtavat strategian epäonnistumiseen.
- Jokaisen särmän *todennäköisyys* = $1/2$.



Puudiagrammit todennäköisyyslaskennassa: Johdanto

Esimerkki: Lastenhankkimisstrategian onnistumisen todennäköisyys 3/6

- Olkoon

A = Pariskunta onnistuu strategiassaan

T_i = i . lapsi on tyttö

P_i = i . lapsi on poika

T = Syntyy tyttö

P = Syntyy poika

- Tapahtumat T_1, T_2, T_3, T_4 muodostavat joukon A osituksen:

$$A = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4, \quad T_i \cap T_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

Puudiagrammit todennäköisyyslaskennassa: Johdanto

Esimerkki: Lastenhankkimisstrategian onnistumisen todennäköisyys 4/6

- Tapahtumien T_i ja P_i todennäköisyydet $\Pr(T_i)$ ja $\Pr(P_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ voidaan määrätä *rekursiivisesti*.
- Riippumattomien tapahtumien *tulosäännön* nojalla:

$$\Pr(T_1) = \Pr(T) = \frac{1}{2} = \Pr(P_1)$$

$$\Pr(T_2) = \Pr(T \cap P_1) = \Pr(T) \Pr(P_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \Pr(P_2)$$

$$\Pr(T_3) = \Pr(T \cap P_2) = \Pr(T) \Pr(P_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \Pr(P_3)$$

$$\Pr(T_4) = \Pr(T \cap P_3) = \Pr(T) \Pr(P_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16} = \Pr(P_4)$$

Esimerkki: Lastenhankkimisstrategian onnistumisen todennäköisyys 5/6

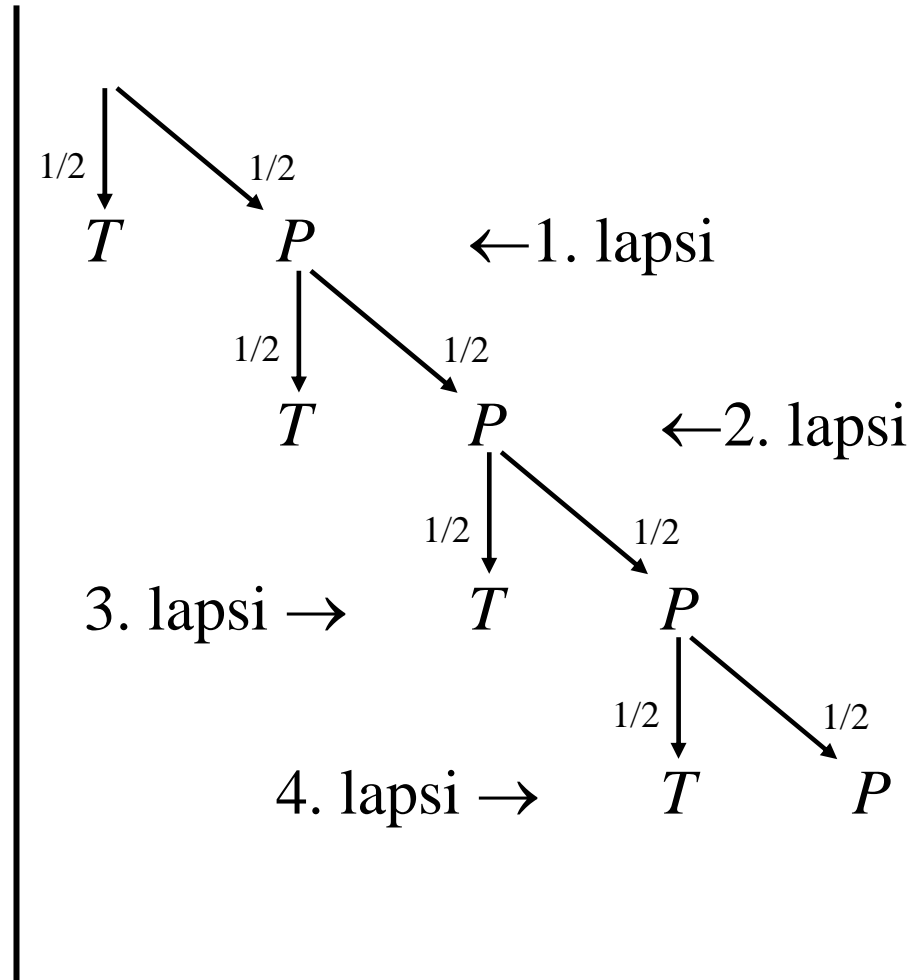
- Strategian *onnistumisen todennäköisyydeksi* saadaan toisensa poissulkevien tapahtumien *yhteenlaskusäännön* nojalla:

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= \Pr(T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4) \\ &= \Pr(T_1) + \Pr(T_2) + \Pr(T_3) + \Pr(T_4) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{15}{16}\end{aligned}$$

Puudiagrammit todennäköisyyslaskennassa: Johdanto

Esimerkki: Lastenhankkimisstrategian onnistumisen todennäköisyys 6/6

- Todennäköisyydet $1/2, 1/4, 1/8, 1/16$ saadaan määrämällä *loppupisteisiin T vievien reittien todennäköisyydet*.
- Reittien todennäköisyydet saadaan *reitien muodostavien särmien todennäköisyyksien tulona*.
- Strategian onnistumisen todennäköisyys $15/16$ saadaan laskemalla *loppupisteisiin T vievien reittien todennäköisyydet yhteen*.



Verkot ja todennäköisyyslaskenta

Puudiagrammit todennäköisyyslaskennassa: Johdanto

>> Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit
Toimintaverkot

Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

Puudiagrammien käyttö todennäköisyyslaskennassa

- Periaatteessa jokainen *alkeistodennäköisyyslaskennan* tehtävä voidaan ratkaista käyttämällä apuna ns. **puudiagrammeja**.
- Jos tehtävän satunnaisilmiötä osataan kuvata puudiagrammilla, tehtävän ratkaisemisessa tarvittavat **puutodennäköisyydet** saadaan määrätyksi käyttämällä kahta yksinkertaista laskusääntöä, **tulosääntöä** ja **yhteenlaskusääntöä**.

Puudiagrammin konstruointi 1/2

- Satunnaisilmiötä voidaan kuvata **puudiagrammilla**, jos ilmiö osataan esittää seuraavassa muodossa:
 - (i) Ilmiöllä on yksi **alkutila** ja yksi tai useampia **lopputiloja**.
 - (ii) Ilmiö koostuu *vaihtoehtoisista tapahtumajonoista*.
 - (iii) Tapahtumajonoissa edetään **vaiheittain** *tapahtumasta toiseen* lähtien ilmiön alkutilasta ja päätyen johonkin ilmiön lopputiloista.
 - (iv) Jokaisessa **vaiheessa** kohdataan yksi tai useampia **tapahtumavaihtoehtoja**, joista yksi *realisoituu* ja johtaa *uusin* tapahtumavaihtoehtoihin.

Puudiagrammin konstruointi 2/2

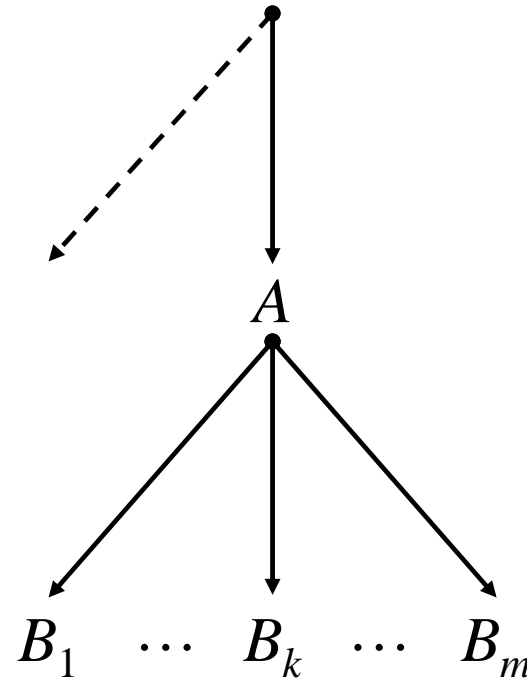
- Satunnaisilmiötä vastaavan **puudiagrammin konstruointi**:
 - (i) Asetetaan puun **juuri** vastaamaan ilmiön *alkutilaa*.
 - (ii) Asetetaan puun **loppupisteet** ("oksien kärjet") vastaamaan ilmiön *lopputiloja*.
 - (iii) Asetetaan puun **pisteet** ("oksien haarautumiskohdat") vastaamaan ilmiön *tapahtumia*.
 - (iv) Viedään puun jokaisesta pisteestä **särmä** ("oksa") kaikkiin sellaisiin pisteisiin, joita vastaavat *tapahtumavaihtoehdot* ovat ilmiön *siinä vaiheessa mahdollisia*.
 - (v) Liitetään jokaiseen pisteestä *lähtevään* särmään *siinä vaiheessa* mahdollisten **tapahtumavaihtoehtojen todennäköisyydet**.
-

Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

Puudiagrammin konstruointi:

Esimerkki 1/3

- Puudiagrammin konstruointia voidaan havainnollistaa viereisellä kaaviolla.
- Tarkastellaan satunnaisilmiötä *vaiheessa*, jossa tapahtuma A on sattunut.
- Olkoot A :n sattumisen jälkeen *mahdolliset tapahtumavaihtoehdot* B_i , $i = 1, 2, \dots, m$

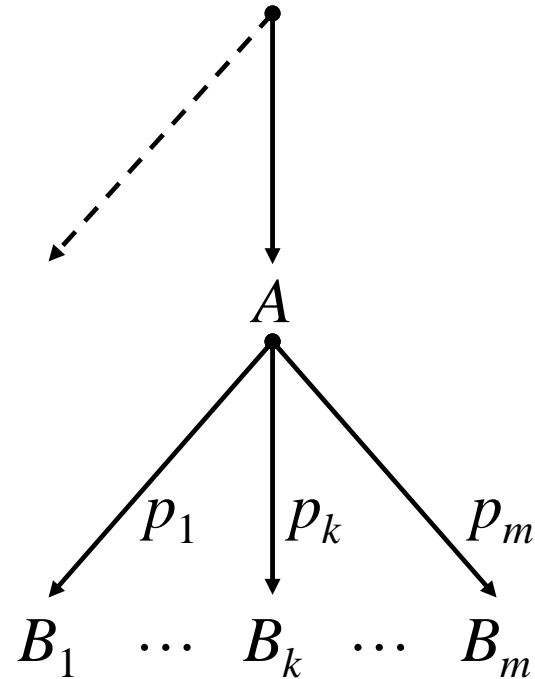


Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

Puudiagrammin konstruointi:

Esimerkki 2/3

- Viedään pisteestä A *särmä* jokaiseen pisteistä B_i , $i = 1, 2, \dots, m$
- Liitetään jokaiseen särmään (A, B_i) , $i = 1, 2, \dots, m$ *ehdollinen todennäköisyys* $p_i = \Pr(B_i | \vec{A})$ jossa \vec{A} on tapahtumajono, joka on tuonut pisteeseen A .



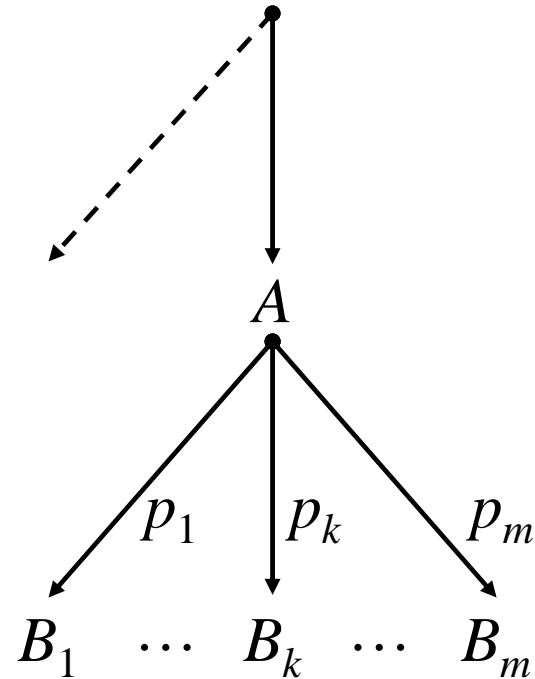
Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

Puudiagrammin konstruointi:

Esimerkki 3/3

- Koska A :n sattumisen jälkeen *ei ole muita mahdollisia tapahtumavaihtoehtoja* kuin B_i , $i = 1, 2, \dots, m$, niin todennäköisyyksien p_i , $i = 1, 2, \dots, m$ pitää toteuttaa ehto

$$\sum_{i=1}^m p_i = \sum_{i=1}^m \Pr(B_i | \vec{A}) = 1$$



Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

Puudiagrammin konstruointi: Kommentteja

- Puudiagrammi *piirretään* tavallisesti *joko* niin, että sen alkupiste on ylhäällä ja loppupisteet ovat alhaalla *tai* niin, että sen alkupiste on vasemmalla ja loppupisteet ovat oikealla.
- Useat puun pisteet voivat vastata *samaa* tapahtumaa.
- Mistä tahansa puun pisteestä *lähtevien särmien* todennäköisyyksien summa on 1.

- **Puutodennäköisyydellä** tarkoitetaan todennäköisyyttä päästä *puun alkupisteestä yhden tai useamman muun puun pisteen määräämään yhdistettyyn tapahtumaan*.
- *Pisteen todennäköisyys* saadaan määräämällä alkupisteestä ko. pisteeseen vievän *reitin todennäköisyys*.
- *Reitin todennäköisyys* saadaan soveltamalla reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksiin **tulosääntöä**.
- *Usean pisteen määräämän yhdistetyn tapahtuman todennäköisyys* saadaan soveltamalla ko. pisteisiin vievien reittien todennäköisyyksiin **yhteenlaskusääntöä**.

Puutodennäköisyydet:

Tulosääntö 1/4

- *Reitin todennäköisyys* saadaan määrämällä reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksien *tulo*.
- Sääntöä kutsutaan **puutodennäköisyyksien tulosäännöksi**.
- Tulosäännön perustelu:
 - (1) Reitti on *tapahtumajono*, jonka muodostavat reitin pisteet.
 - (2) Reitin muodostava tapahtumajono sattuu, jos *jokainen jonon tapahtumista sattuu*.
 - (3) Todennäköisyyslaskennan *yleisen tulosäännön mukaan* reitin todennäköisyys saadaan määrämällä reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksien *tulo*.

Puutodennäköisyydet:

Tulosääntö 2/4

- Olkoon

$$L, A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$$

yksi niistä vaihtoehtoisista *tapahtumajonoista*, joista satunnaisilmiö muodostuu.

- Tällöin parit

$$(L, A_1), (A_1, A_2), (A_2, A_3), \dots, (A_{k-1}, A_k)$$

muodostavat satunnaisilmiön *alkutilasta* L satunnaisilmiön (*loppu-*) tilaan A_k vievän reitin särmät.

Puutodennäköisyydet:

Tulosääntö 3/4

- Liitetään reitin

$$(L, A_1), (A_1, A_2), (A_2, A_3), \dots, (A_{k-1}, A_k)$$

särmiin *todennäköisyydet* seuraavalla tavalla:

$$(L, A_1) \rightarrow \Pr(A_1) = p_1$$

$$(A_1, A_2) \rightarrow \Pr(A_2 | A_1) = p_2$$

$$(A_2, A_3) \rightarrow \Pr(A_3 | A_1 \cap A_2) = p_3$$

...

$$(A_{k-1}, A_k) \rightarrow \Pr(A_k | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{k-1}) = p_k$$

Puutodennäköisyydet:

Tulosääntö 4/4

- Reitin

$$(L, A_1), (A_1, A_2), (A_2, A_3), \dots, (A_{k-1}, A_k)$$

todennäköisyys on **yleisen tulosäännön** nojalla:

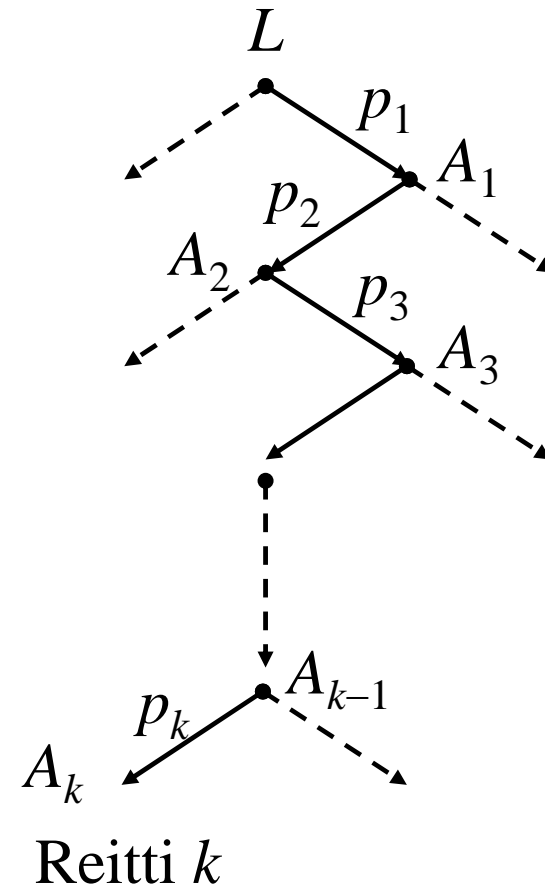
$$\begin{aligned} & \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_k) \\ &= \Pr(A_1) \times \Pr(A_2 \mid A_1) \times \Pr(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \\ & \quad \dots \times \Pr(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{k-1}) \\ &= p_1 \times p_2 \times p_3 \times \dots \times p_k \end{aligned}$$

Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

Puutodennäköisyydet:

Tulosäännön havainnollistus

- Puutodennäköisyyksien tulosääntöä voidaan havainnollistaa viereisellä puudiagrammilla.
- Reitin k todennäköisyys on puutodennäköisyyksien tulosäännön mukaan
$$\Pr(\text{Reitti } k) = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k$$



Puutodennäköisyydet: Yhteenlaskusääntö 1/2

- Jos useita (loppu-) tiloja yhdistetään yhdeksi tapahtumaksi, niin näin saadun *yhdistetyn tapahtuman* todennäköisyys saadaan määräämällä ko. tiloihin vievien reittien todennäköisyyksien *summa*.
- Sääntöä kutsutaan **puutodennäköisyyksien yhteenlaskusäännöksi**.
- Yhteenlaskusäännön perustelu:
 - (1) Puun eri pisteisiin vievät reitit ovat *toisensa poissulkevia*.
 - (2) *Toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan* useista (loppu-) pisteistä yhdistämällä saatavan tapahtuman todennäköisyys saadaan määräämällä ko. pisteisiin vievien reittien todennäköisyyksien *summa*.

Puutodennäköisyydet:

Yhteenlaskusääntö 2/2

- Yhdistetään satunnaisilmiön (*loppu-*) tilat B_1, B_2, \dots, B_k yhdeksi tapahtumaksi

$$C = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$$

- Olkoot *tiloja* B_1, B_2, \dots, B_k vastaavat *reitit*

Reitti 1, Reitti 2, \dots , Reitti k

- Koska puun eri pisteisiin vievät reitit ovat *toisensa poissulkevia*, tapahtuman C todennäköisyys on **toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön** nojalla:

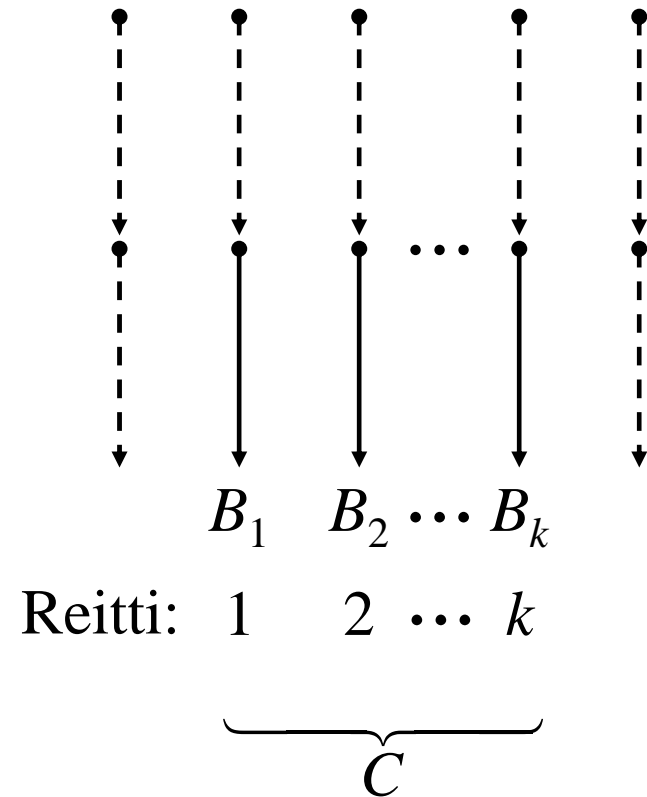
$$\begin{aligned} \Pr(C) &= \Pr(\text{Reitti 1 tai Reitti 2 tai } \dots \text{ tai Reitti } k) \\ &= \Pr(\text{Reitti 1}) + \Pr(\text{Reitti 2}) + \dots + \Pr(\text{Reitti } k) \end{aligned}$$

Puutodennäköisyydet:

Yhteenlaskusäännön havainnollistus

- *Puutodennäköisyyksien yhteenlaskusääntöä voidaan havainnollistaa viereisellä puudiagrammilla:*

$$\begin{aligned} \Pr(C) = & \Pr(\text{Reitti 1}) \\ & + \Pr(\text{Reitti 2}) \\ & \dots \\ & + \Pr(\text{Reitti } k) \end{aligned}$$



Puuverkkojen käyttö päätöstilanteissa: Esimerkki 1/6

- Tarkastellaan seuraavaa **päätöstilannetta**.
- *Munuaistaudissa* potilaan munuaiset lopettavat vähitellen toimintansa, mikä johtaa potilaan kuolemaan.
- Oletetaan, että potilas voisi vapaasti valita hoidoksi joko *dialyysin* (munuaiskoneen) tai *munuaisensiirron*.
- *Kumpi hoidoista potilaan kannattaa valita*, jos hoitojen tuloksista on käytettävissä seuraavalla kalvolla esitetyt tiedot ja potilas haluaa maksimoida todennäköisyyden sille, että hän on elossa 5:n vuoden kuluttua?

Puuverkkojen käyttö päätöstilanteissa: Esimerkki 2/6

- Dialyysipotilaat:
 - ☞ 68 % elää 5:n vuoden kuluttua
 - ☞ 32 % on kuollut 5:n vuoden kuluttua
- Munuaisensiirtopotilaat:
 - ☞ 48 %:lla siirretty munuainen toimii normaalisti ja potilas elää 5:n vuoden kuluttua
 - ☞ 43 %:lla siirretty munuainen ei toimi kunnolla ja he joutuvat dialyysiin
 - 42 % näistä potilaista elää 5:n vuoden kuluttua
 - 58 % näistä potilaista on kuollut 5:n vuoden kuluttua
 - ☞ 9 % kuolee siirron aiheuttamiin komplikaatioihin

Puuverkkojen käyttö päätöstilanteissa: Esimerkki 3/6

- Merkitään:

D = ”Potilasta hoidetaan dialyysillä”

S = ”Potilaalle tehdään munuaisensiirto”

SD = ”Siirtopotilas joutuu dialyysiin”

E = ”Potilas elää 5 vuoden kuluttua”

K = ”Potilas on kuollut 5 vuoden kuluttua”

- Hoitotulokset voidaan esittää seuraavina *ehdollisina todennäköisyyksinä*:

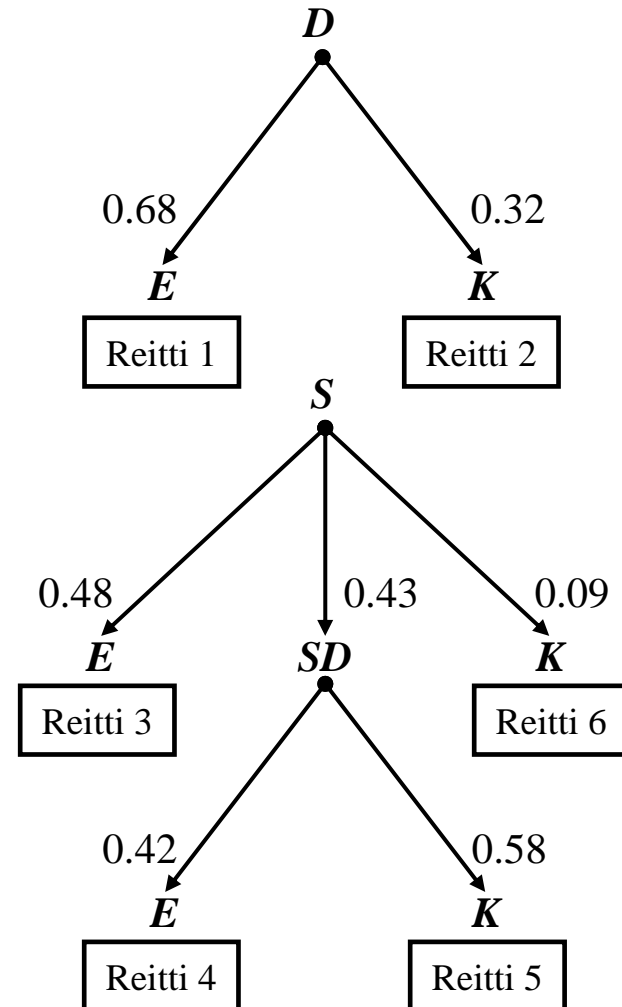
$$\Pr(E|D) = 0.68 \quad \Pr(K|D) = 0.32$$

$$\Pr(E|S) = 0.48 \quad \Pr(SD|S) = 0.43 \quad \Pr(K|S) = 0.09$$

$$\Pr(E|SD) = 0.42 \quad \Pr(K|SD) = 0.58$$

Puuverkkojen käyttö päätöstilanteissa: Esimerkki 4/6

- Potilaalle tarjolla olevia vaihtoehtoja voidaan kuvata viereisellä *diagrammilla*, joka koostuu kahdesta *puudiagrammista*.
- Koska potilas haluaa *maksimoida* todennäköisyyden olla elossa 5:n vuoden kuluttua, hänen on *verrattava* reitin 1 määräämän tapahtuman todennäköisyyttä reittien 3 ja 4 määräämän yhdistetyn tapahtuman todennäköisyyteen.



Puuverkkojen käyttö päätöstilanteissa: Esimerkki 5/6

- Reitin 1 määräämän tapahtuman todennäköisyys:

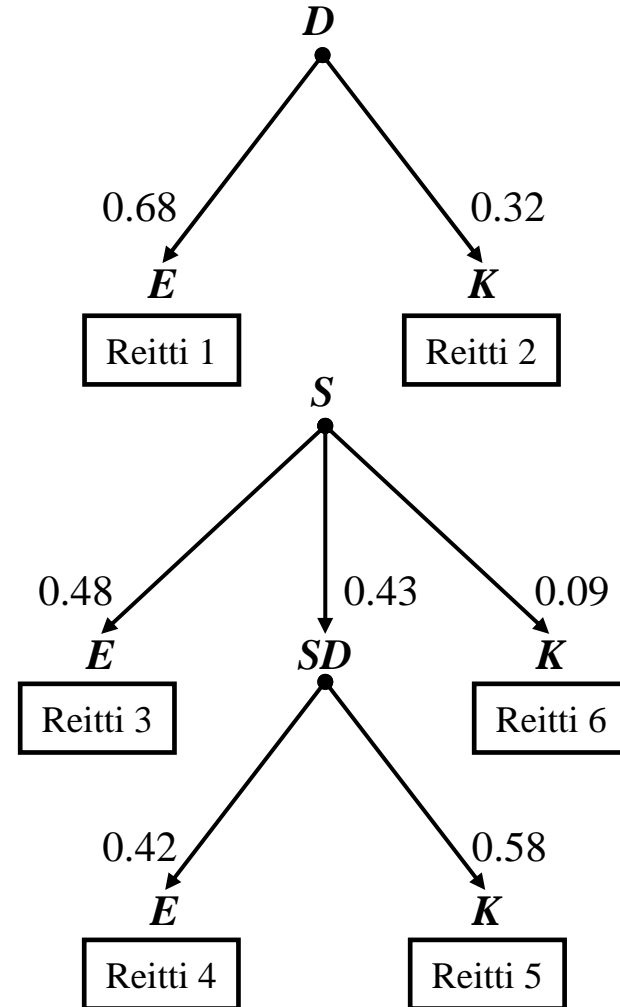
$$\Pr(\text{Reitti 1}) = 0.68$$

- Reitin 3 määräämän tapahtuman todennäköisyys:

$$\Pr(\text{Reitti 3}) = 0.48$$

- Reitin 4 määräämän tapahtuman todennäköisyys on *puutodennäköisyyksien tulosäännön* mukaan:

$$\begin{aligned} \Pr(\text{Reitti 4}) &= 0.43 \times 0.42 \\ &= 0.1806 \end{aligned}$$



Puuverkkojen käyttö päätöstilanteissa: Esimerkki 6/6

- Reittien 3 ja 4 määräämän yhdistetyn tapahtuman todennäköisyys on *puutodennäköisyyksien yhteenlaskusäännön* mukaan:

$$\Pr(\text{Reitti 3 tai Reitti 4})$$

$$= 0.48 + 0.1806$$

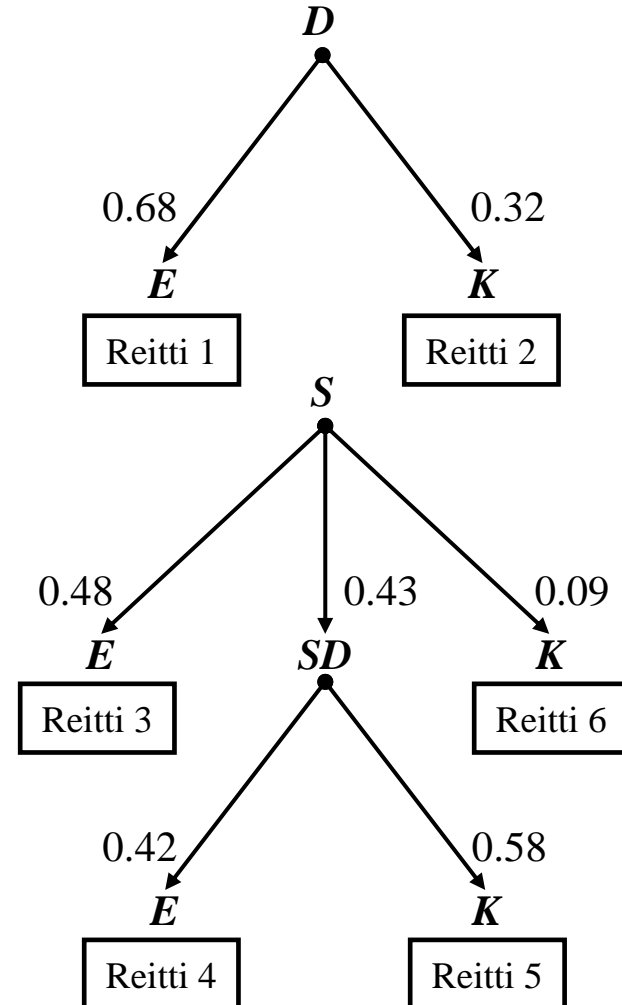
$$= 0.6606$$

- Koska

$$\Pr(\text{Reitti 3 tai Reitti 4}) = 0.6606$$

$$< \Pr(\text{Reitti 1}) = 0.68$$

potilaan kannattaa valita dialyysi.



Verkot ja todennäköisyyslaskenta

Puudiagrammit todennäköisyyslaskennassa: Johdanto

Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

>> Toimintaverkot

Systemi ja sen toimintatodennäköisyys

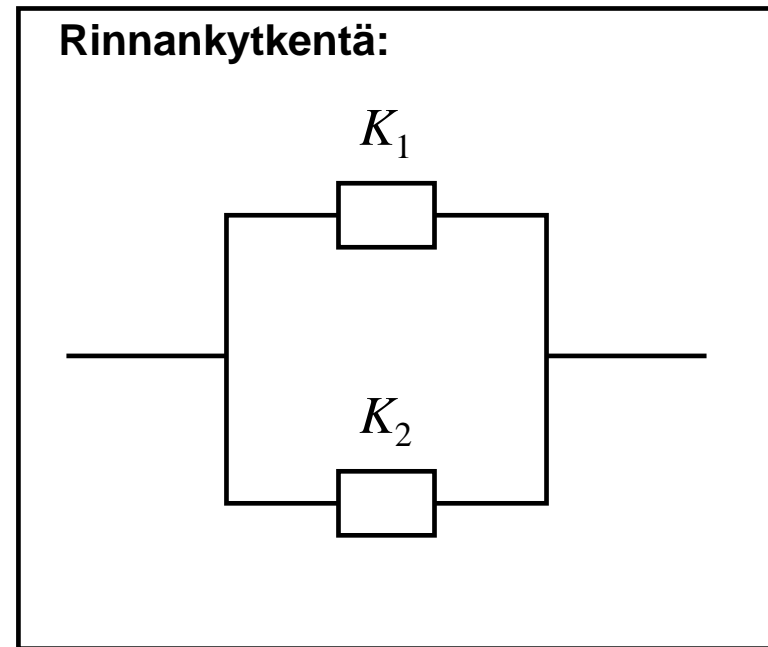
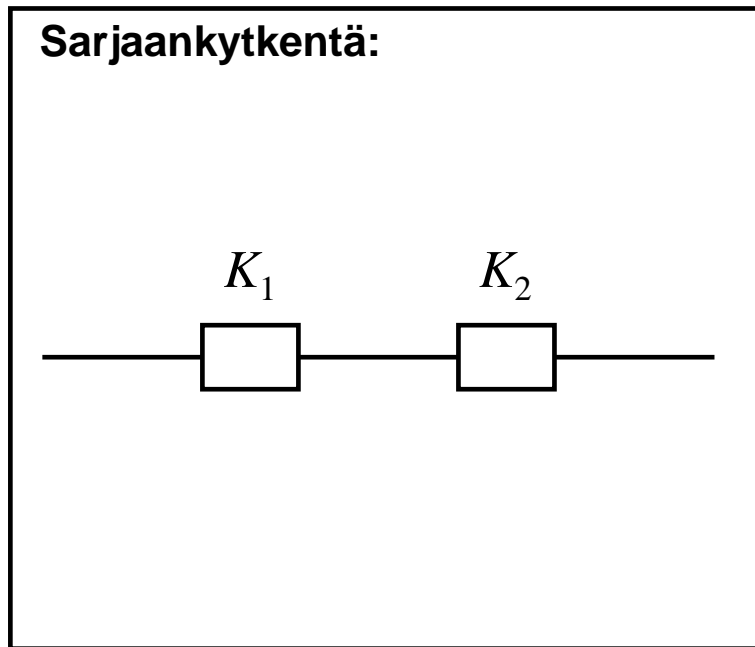
- Tehtävänä on määrätä sellaisen **systemin toimintatodennäköisyys**, joka koostuu **komponenteista**, jotka on kytketty joko **sarjaan** tai **rinnan**.
- Tehdään komponenteista seuraavat oletukset:
 - (i) Jokaisen komponentin toimintatodennäköisyys *tunnetaan*.
 - (ii) Jokaisen komponentin toiminta (tai toimimattomuus) on *riippumatonta* muiden komponenttien toiminnasta.

Systemit ja toimintaverkot

- Sarjaan ja rinnan kytketyistä komponenteista koostuvia systeemejä voidaan kuvata **toimintaverkoilla**.
- Sarjaan- ja rinnankytkennöistä koostuvien toimintaverkkojen toimintatodennäköisyys voidaan *palauttaa* sarjaan- ja rinnankytkentöjen toimintatodennäköisyyksiin.

Sarjaankytkentä ja rinnankytkentä

- *Toimintaverkot* koostuvat sarjaan- ja rinnankytkennöistä.
- Alla olevat *kytkentäkaaviot* esittävät kahden komponentin K_1 ja K_2 muodostamia sarjaan- ja rinnankytkentöjä.



Sarjaankytkennän toiminta

- Merkitään

T = Komponentti *toimii*

F = Komponentti *ei toimi*

- Komponenttien K_1 ja K_2 sarjaankytkentä toimii, jos K_1 toimii ja K_2 toimii:

K_1	K_2	K_1 ja K_2
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Rinnankytkennän toiminta

- Merkitään

T = Komponentti *toimii*

F = Komponentti *ei toimi*

- Komponenttien K_1 ja K_2 rinnankytkentä toimii, jos K_1 toimii *tai* K_2 toimii *tai* molemmat toimivat:

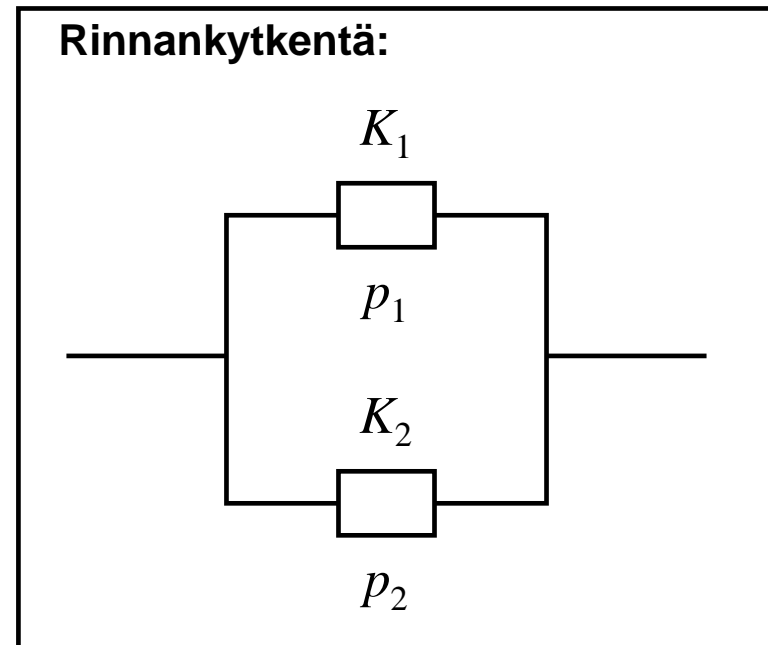
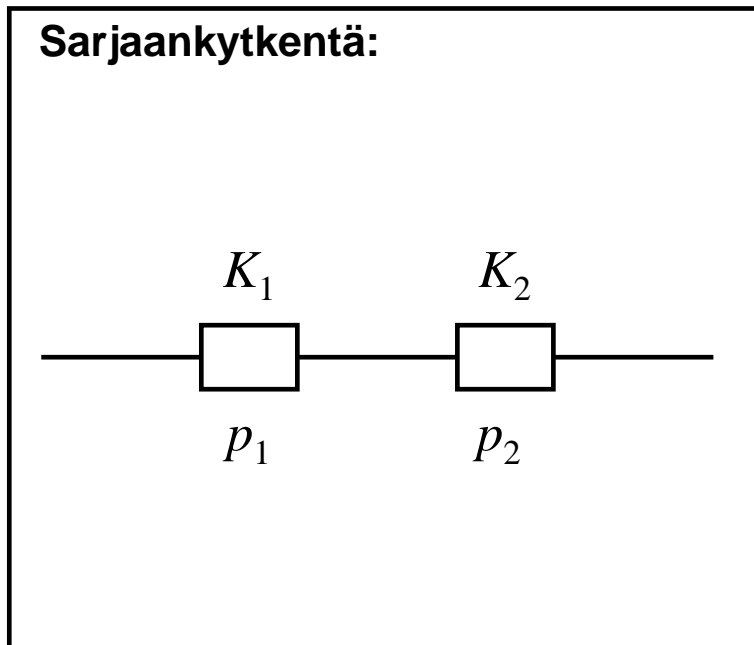
K_1	K_2	K_1 tai K_2
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Sarjaan- ja rinnankytkentöjen toimintatodennäköisyydet 1/2

- Määritellään *tapahtumat* A_1 ja A_2 :
 $A_1 = \text{"Komponentti } K_1 \text{ toimii"}$
 $A_2 = \text{"Komponentti } K_2 \text{ toimii"}$
- Olkoot tapahtumien A_1 ja A_2 *todennäköisyydet*:
 $\Pr(A_1) = p_1$
 $\Pr(A_2) = p_2$
- *Sarjaankytkennän toimintatodennäköisyys* on
 $\Pr(A_1 \cap A_2)$
- *Rinnankytkennän toimintatodennäköisyys* on
 $\Pr(A_1 \cup A_2)$

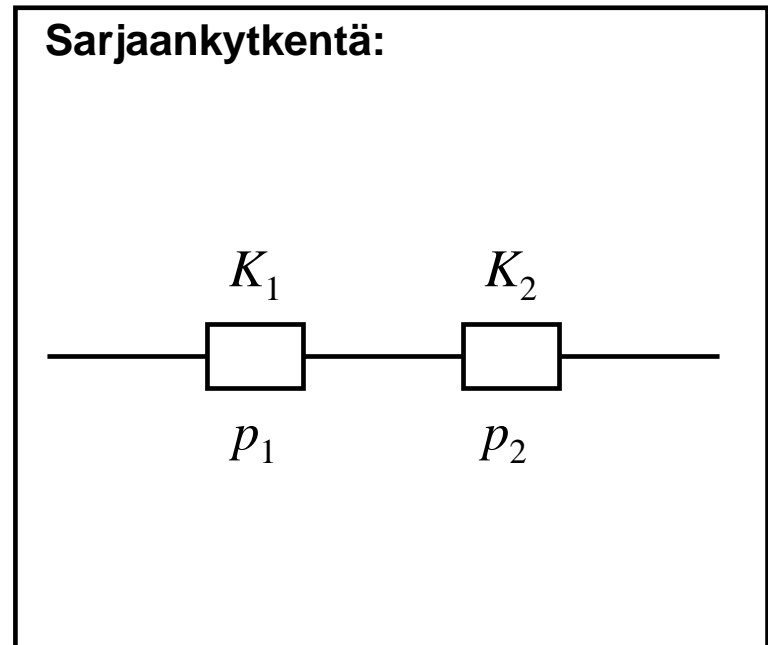
Sarjaan- ja rinnankytkentöjen toimintatodennäköisyydet 2/2

- Määrätään komponenttien K_1 ja K_2 muodostamien *sarjaan- ja rinnankytkentöjen toimintatodennäköisyydet komponenttien K_1 ja K_2 toimintatodennäköisyyksien avulla.*



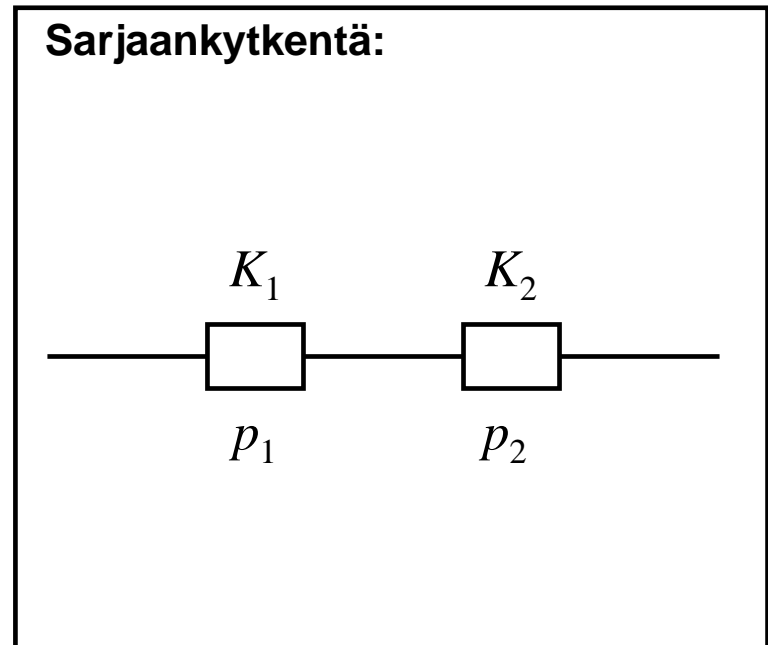
Sarjaankytkennän toimintatodennäköisyys 1/2

- Oletetaan, että toimintaverkko koostuu komponenteista K_1 ja K_2 , jotka on kytketty *sarjaan*.
- Olkoot
$$\Pr(K_1 \text{ toimii}) = p_1$$
$$\Pr(K_2 \text{ toimii}) = p_2$$
- Oletetaan, että tapahtumat ” K_1 toimii” ” K_2 toimii” ovat *riippumattomia*.



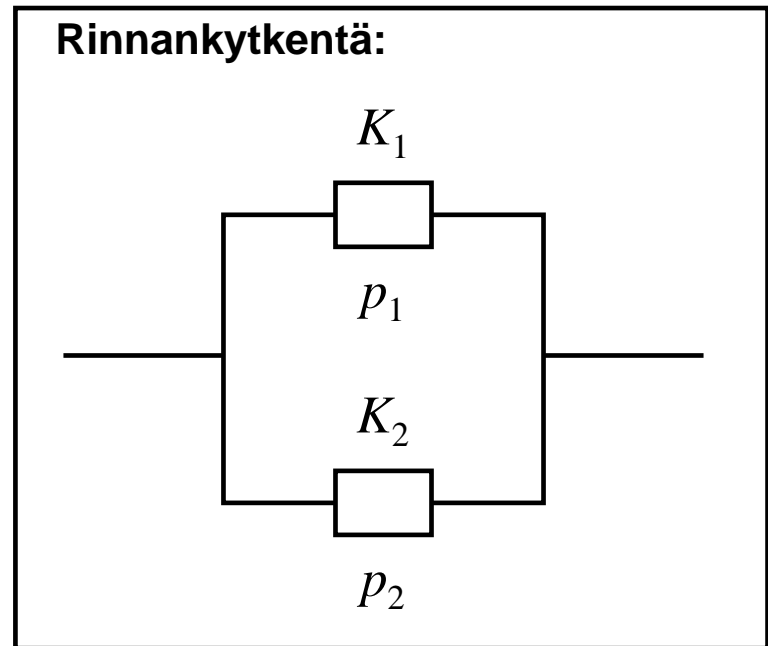
Sarjaankytkennän toimintatodennäköisyys 2/2

- Riippumattomien tapahtumien tulosäännön perusteella *sarjaankytkennän toimintatodennäköisyys* on
 $\Pr(K_1 \text{ toimii ja } K_2 \text{ toimii}) = p_1 p_2$



Rinnankytkennän toimintatodennäköisyys 1/2

- Oletetaan, että toimintaverkko koostuu komponenteista K_1 ja K_2 , jotka on kytketty *rinnan*.
- Olkoot
$$\Pr(K_1 \text{ toimii}) = p_1$$
$$\Pr(K_2 \text{ toimii}) = p_2$$
- Oletetaan, että tapahtumat ” K_1 toimii” ” K_2 toimii” ovat *riippumattomia*.



Rinnankytkennän toimintatodennäköisyys 2/2

- Yleisen yhteenlaskusäännön ja riippumattomien tapahtumien tulosäännön perusteella *rinnankytkennän toimintatodennäköisyys* on

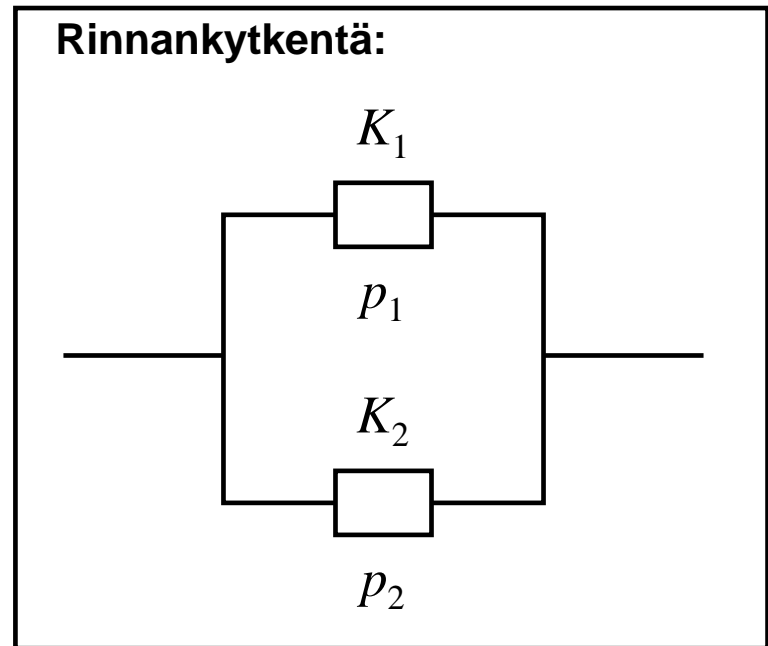
$$\Pr(K_1 \text{ toimii tai } K_2 \text{ toimii})$$

$$= \Pr(K_1 \text{ toimii})$$

$$+ \Pr(K_2 \text{ toimii})$$

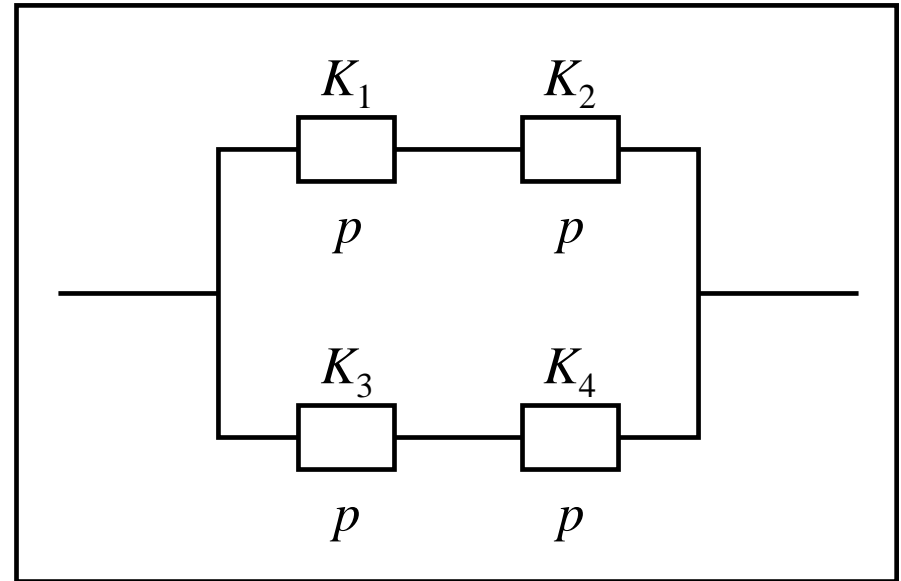
$$- \Pr(K_1 \text{ toimii ja } K_2 \text{ toimii})$$

$$= p_1 + p_2 - p_1 p_2$$



Esimerkki 1/3

- Oletetaan, että toimintaverkko koostuu 4:stä komponentista K_1 , K_2 , K_3 , K_4 viereisen kaavion mukaisesti.
- Komponentit K_1 ja K_2 on kytketty *sarjaan*.
- Komponentit K_3 ja K_4 on kytketty *sarjaan*.
- Komponenttipari K_1 ja K_2 on kytketty *rinnan* komponenttiparin K_3 ja K_4 kanssa.



Toimintaverkot

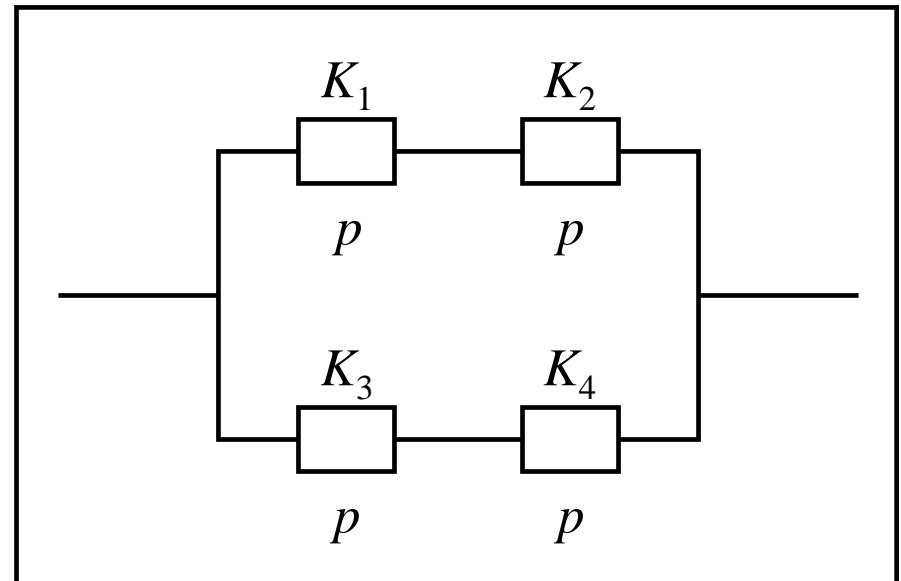
Esimerkki 2/3

- Olkoon
 $\Pr(K_i \text{ toimii}) = p, i = 1, 2, 3, 4$
- Oletetaan lisäksi, että yhdenkään komponentin toiminta *ei riipu* muiden komponenttien toiminnasta.
- Edellä esitetyn nojalla:

$$\Pr(K_1 \text{ toimii ja } K_2 \text{ toimii}) \\ = p \times p = p^2$$

$$\Pr(K_3 \text{ toimii ja } K_4 \text{ toimii}) \\ = p \times p = p^2$$

$$\Pr(\text{Systemi toimii}) \\ = p^2 + p^2 - p^2 \times p^2 \\ = 2p^2 - p^4$$



Toimintaverkot

Esimerkki 3/3

- Kuvio esittää esimerkin systeemin toimintatodennäköisyyttä

$$f(p) = 2p^2 - p^4$$

yksittäisen komponentin toimintatodennäköisyyden p funktiona.

- Kuvioon on piirretty myös suora

$$f(p) = p$$

- Kuviosta nähdään:

- $f(p)$ on p :n kasvava funktio.
- Koko systeemin toimintatodennäköisyys $f(p)$ voi olla suurempi, pienempi tai yhtä suuri kuin yksittäisen komponentin toimintatodennäköisyys p .

