
Ilkka Mellin

Todennäköisyyslaskenta

**Osa 2: Satunnaismuuttujat ja
todennäköisyysjakaumat**

**Satunnaismuuttujien muunnokset ja
niiden jakaumat**

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

- >> **Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat**
 - Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat**
 - Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma**
 - Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma**
 - Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat**

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Lineaarimuunnoksen jakauma

- Olkoon X jatkuva satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on

$$f_X(x)$$

- Muodostetaan satunnaismuuttujan X lineaarimuunnos

$$Y = a + bX$$

jossa a ja $b \neq 0$ ovat vakioita.

- Satunnaismuuttujan Y **tiheysfunktio** on

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Lineaarimuunnoksen jakauma:

Kommentti

- Satunnaismuuttujan X *lineaarimuunnoksen*

$$Y = a + bX \text{ (} a \text{ ja } b \neq 0 \text{ vakioita)}$$

jakauma on siis aina *samaa tyyppiä* kuin satunnaismuuttujan X jakauma.

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Lineaarimuunnoksen jakauma:

Todistus 1/4

- Olkoon *jatkuvan satunnaismuuttujan X tiheysfunktio $f_X(x)$.*
- Olkoon

$$Y = a + bX$$

jossa a ja $b \neq 0$ ovat *vakioita*.

- Muodostetaan ensin satunnaismuuttujan Y *kertymäfunktio*, josta satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktio* saadaan derivoimalla.
- Jaetaan tarkastelu *kahteen osaan*:
 - (i) $b > 0$
 - (ii) $b < 0$

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Lineaarimuunnoksen jakauma:

Todistus 2/4

- Jos $b > 0$, satunnaismuuttujan $Y = a + bX$ *kertymäfunktio* on

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) = \Pr(a + bX \leq y) \\ &= \Pr\left(X \leq \frac{y-a}{b}\right) \\ &= F_X\left(\frac{y-a}{b}\right)\end{aligned}$$

- Derivoimalla satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktio*ksi saadaan

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-a}{b}\right) \\ &= \frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)\end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Lineaarimuunnoksen jakauma:

Todistus 3/4

- Jos $b < 0$, satunnaismuuttujan $Y = a + bX$ *kertymäfunktio* on

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) = \Pr(a + bX \leq y) \\ &= \Pr\left(X \geq \frac{y-a}{b}\right) \\ &= 1 - \Pr\left(X \leq \frac{y-a}{b}\right) \\ &= 1 - F_X\left(\frac{y-a}{b}\right)\end{aligned}$$

- Derivoimalla satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktio*ksi saadaan

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = -\frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-a}{b}\right) \\ &= -\frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)\end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Lineaarimuunnoksen jakauma:

Todistus 4/4

- Kalvoilla 2/4 ja 3/4 johdetut kaavat satunnaismuuttujan Y tiheysfunktioille $f_Y(y)$ voidaan yhdistää yhdeksi kaavaksi:

Satunnaismuuttujan $Y = a + bX$ tiheysfunktio on kaikille $b \neq 0$:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Välillä (0,1) jatkuvaa tasaista jakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *jatkuvaa tasaista jakaumaa* (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) välillä (0,1):

$$X \sim \text{Uniform}(0,1)$$

- Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f_X(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$$

- Olkoon

$$Y = a + bX \text{ (} a \text{ ja } b > 0 \text{ vakioita)}$$

- Satunnaismuuttujan Y tiheysfunktioksi saadaan

$$f_Y(y) = \frac{1}{b}, a \leq y \leq a + b$$

- Siten Y noudattaa **jatkuvaa tasaista jakaumaa** välillä $(a, a + b)$:

$$Y \sim \text{Uniform}(a, a + b)$$

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Standardoitua normaalijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *standardoitua normaalijakaumaa* (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**):

$$X \sim N(0, 1)$$

- Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}$$

- Olkoon

$$Y = a + bX \text{ (} a \text{ ja } b \neq 0 \text{ vakioita)}$$

- Satunnaismuuttujan Y tiheysfunktioiksi saadaan

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-a}{b}\right)^2\right\}$$

- Siten Y noudattaa **normaalijakaumaa** parametrein a ja b^2 :

$$Y \sim N(a, b^2)$$

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Normaalijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *normaalijakaumaa* parametrein μ ja σ^2 (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**):

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

- Olkoon

$$Y = a + bX \text{ (} a \text{ ja } b \neq 0 \text{ vakioita)}$$

- Satunnaismuuttujan Y tiheysfunktioksi saadaan

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-a-b\mu}{b\sigma}\right)^2\right\}$$

- Siten Y noudattaa **normaalijakaumaa** parametrein $a + b\mu$ ja $b^2\sigma^2$:

$$Y \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$$

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Monotonisten muunnosten jakaumat

- Olkoon X jatkuva satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on

$$f_X(x)$$

- Muodostetaan satunnaismuuttujan X muunnos

$$Y = h(X)$$

jossa funktio h on *aidosti monotoninen* ja *jatkuvasti derivoituva*.

- Satunnaismuuttujan Y **tiheysfunktio** on

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Monotonisten muunnosten jakaumat:

Todistus 1/5

- Olkoon *jatkuva satunnaismuuttujan X tiheysfunktio $f_X(x)$.*
- Olkoon

$$Y = h(X)$$

jossa h on *aidosti monotoninen ja jatkuvasti derivoituva* funktio.

- Tällöin satunnaismuuttujan Y *kertymäfunktio* on

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(h(X) \leq y)$$

- Jaetaan tarkastelu *kahteen osaan*:
 - (i) Funktio h on *aidosti kasvava*.
 - (ii) Funktio h on *aidosti vähenevä*.

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Monotonisten muunnosten jakaumat:

Todistus 2/5

- Oletetaan ensin, että funktio h on *aidosti kasvava*.
- Koska funktio h oletettiin aidosti kasvavaksi, sillä on *käänteisfunktio* h^{-1} , joka myös on aidosti kasvava.
- Siten satunnaismuuttujan Y *kertymäfunktio* on

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) = \Pr(h(X) \leq y) \\ &= \Pr(h^{-1}(h(X)) \leq h^{-1}(y)) \\ &= \Pr(X \leq h^{-1}(y)) \\ &= F_X(h^{-1}(y))\end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Monotonisten muunnosten jakaumat:

Todistus 3/5

- Derivoimalla satunnaismuuttujan Y kertymäfunktion lauseke saadaan satunnaismuuttujan Y tiheysfunktiksi

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(h^{-1}(y)) \\ &= f_X(h^{-1}(y)) \left(\frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right) \end{aligned}$$

- Koska funktion h käänteisfunktio h^{-1} oletettiin aidosti kasvavaksi, niin

$$\frac{dh^{-1}(y)}{dy} > 0$$

- Voimme siis kirjoittaa:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Monotonisten muunnosten jakaumat:

Todistus 4/5

- Jos funktio h on *aidosti vähenevä*, myös sen käänteisfunktio h^{-1} on aidosti vähenevä, jolloin

$$\frac{dh^{-1}(y)}{dy} < 0$$

- Tällöin

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) = \Pr(h(X) \leq y) \\ &= \Pr(h^{-1}(h(X)) \geq h^{-1}(y)) \\ &= \Pr(X \geq h^{-1}(y)) \\ &= 1 - \Pr(X \leq h^{-1}(y)) \\ &= 1 - F_X(h^{-1}(y)) \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Monotonisten muunnosten jakaumat:

Todistus 5/5

- Derivoimalla satunnaismuuttujan Y kertymäfunktion lauseke saadaan satunnaismuuttujan Y tiheysfunktiksi

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} [1 - F_X(h^{-1}(y))] \\ &= -f_X(h^{-1}(y)) \left(\frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right) \end{aligned}$$

- Koska funktion h käänteisfunktio h^{-1} oletettiin aidosti väheneväksi, niin

$$\frac{dh^{-1}(y)}{dy} < 0$$

- Voimme siis tässäkin tapauksessa kirjoittaa:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Lineaarimuunnos monotonisten muunnosten erikoistapauksena

- Olkoon X jatkuva satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on

$$f_X(x)$$

- Muodostetaan satunnaismuuttujan X lineaarimuunnos

$$Y = a + bX$$

jossa a ja $b \neq 0$ ovat vakioita.

- Satunnaismuuttujan Y **tiheysfunktio** on

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Lineaarimuunnos monotonisten muunnosten erikoistapauksena: Todistus

- Olkoon *jatkuvan satunnaismuuttujan X tiheysfunktio $f_X(x)$.*

- Olkoon

$$Y = a + bX \text{ (} a \text{ ja } b \neq 0 \text{ vakioita)}$$

- Tällöin

$$y = h(x) = a + bx, b \neq 0$$

$$x = h^{-1}(y) = \frac{y - a}{b}$$

$$\frac{dh(x)}{dx} = b$$

joten

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{y - a}{b}\right)$$

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Cauchyn jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *jatkuvaa tasaista jakaumaa* (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) välillä $(-\pi/2, +\pi/2)$:

$$X \sim \text{Uniform}(-\pi/2, +\pi/2)$$

- Muodostetaan satunnaismuuttujan X *muunnos*

$$Y = \tan(X)$$

- Satunnaismuuttujan Y **tiheysfunktio** on

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}$$

- Satunnaismuuttujan Y jakaumaa kutsutaan **Cauchyn jakaumaksi**.

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Cauchyn jakauma:

Tiheysfunktion johto 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *jatkuvaa tasaista jakaumaa* välillä $(-\pi/2, +\pi/2)$, jolloin sen *tiheysfunktio* on

$$f_X(x) = 1/\pi, -\pi/2 \leq x \leq +\pi/2$$

- Olkoon

$$Y = h(X) = \tan(X)$$

- Muunnos

$$y = h(x) = \tan(x)$$

on *aidosti kasvava* ja sen käänteismuunnoksen

$$x = h^{-1}(y) = \arctan(y)$$

derivaatta on

$$\frac{dh^{-1}(y)}{dy} = \frac{d \arctan(y)}{dy} = \frac{1}{1+y^2}$$

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Cauchyn jakauma:

Tiheysfunktion johto 2/2

- Siten satunnaismuuttujan $Y = \tan(X)$ tiheysfunktiksi saadaan

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}$$

- Satunnaismuuttujan Y jakaumaa kutsutaan *Cauchyn jakaumaksi*.

Cauchyn jakauma ja Studentin t -jakauma

- Voidaan osoittaa, että Cauchyn jakauma on sama kuin **Studentin t -jakauma yhdellä vapausasteella** (ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**) eli, jos

$$X \sim \text{Uniform}(-\pi/2, +\pi/2)$$

ja

$$Y = \tan(X)$$

niin

$$Y \sim t(1)$$

- Huomautus:

Cauchyn jakaumalla *ei ole momentteja* eli sillä *ei ole edes odotusarvoa*.

Ei-monotonisten muunnosten jakaumat

- Jos satunnaismuuttujaan sovelletaan ei-monotonista muunnosta, *ei ole mahdollista löytää yleistä muunnoksen jakaumaa ja sen tiheysfunktiota koskevaa tulosta.*
- Ei-monotonisten muunnosten tapauksessa joudutaan tarkastelu tekemään tapauskohtaisesti.
- Seuraavassa tarkastellaan esimerkkinä **$\chi^2(1)$ -jakauman** (ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**) *tiheysfunktion johtoa.*

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

$\chi^2(1)$ -jakauma

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$X \sim N(0, 1)$$

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$Y = X^2$$

- Satunnaismuuttuja Y noudattaa χ^2 -jakauman määritelmän mukaan **χ^2 -jakaumaa yhdellä vapausasteella**:

$$Y \sim \chi^2(1)$$

- Satunnaismuuttujan Y **tiheysfunktio** on

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}$$

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

$\chi^2(1)$ -jakauma:

Tiheysfunktion johto 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$X \sim N(0, 1)$$

- Tällöin

$$Y = X^2 \sim \chi^2(1)$$

- Olkoon $\Phi(\cdot)$ standardoidun normaalijakauman $N(0, 1)$ *kertymäfunktio*.
- Satunnaismuuttujan $Y = X^2$ *kertymäfunktio* on

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) = \Pr(X^2 \leq y) \\ &= \Pr(|X| \leq \sqrt{y}) \\ &= \Pr(-\sqrt{y} \leq X \leq +\sqrt{y}) \\ &= \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) \\ &= 2\Phi(\sqrt{y}) - 1 \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

$\chi^2(1)$ -jakauma:

Tiheysfunktion johto 2/2

- Standardoidun normaalijakauman $N(0, 1)$ tiheysfunktio on

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

jossa $\Phi(\cdot)$ on standardoidun normaalijakauman $N(0, 1)$ kertymäfunktio.

- Siten satunnaismuuttujan $Y = X^2 \sim \chi^2(1)$ tiheysfunktioksi saadaan

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} [2\Phi(\sqrt{y}) - 1] \\ &= \Phi'(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

- >> Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat**
- Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma**
- Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma**
- Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat**

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Bijektiivisten muunnosten jakaumat 1/3

- Olkoot X ja Y *jatkuvia* satunnaismuuttuja, joiden yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f_{XY}(x, y)$$

- Määritellään satunnaismuuttujat

$$U = g(X, Y)$$

$$V = h(X, Y)$$

- Tehdään muunnoksesta

$$(*) \quad \begin{cases} u = g(x, y) \\ v = h(x, y) \end{cases}$$

seuraavalla kalvolla esitettävät oletukset.

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Bijektiivisten muunnosten jakaumat 2/3

- Oletukset muunnoksesta (*):
 - (i) Muuttujat x ja y voidaan ratkaista yhtälöryhmästä (*) yksikäsitteisesti muuttujien u ja v funktioina.
 - (ii) Funktioilla g ja h on *jatkuvat osittaisderivaatat* muuttujien x ja y suhteen.
 - (iii) Muunnoksen (*) *Jacobin determinantti* on *nollasta poikkeava* alueella, jossa tiheysfunktio $f_{XY}(x, y)$ on positiivinen:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$$

kaikille x ja y , joille $f_{XY}(x, y) > 0$.

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Bijektiivisten muunnosten jakaumat 3/3

- Jos oletukset (i)-(iii) pätevät, satunnaismuuttujien U ja V yhteisjakauman **tiheysfunktio** on

$$f_{UV}(u, v) = f_{XY}(x, y) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|^{-1}$$

jossa x ja y ratkaistaan kalvon 1/3 yhtälöryhmästä (*).

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Normaalijakauman generointi

jatkuvasta tasaisesta jakaumasta 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia* ja noudattavat *jatkuvaa tasaista jakaumaa* (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) välillä $(0, 1)$:

$$X \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

$$Y \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

$$X \perp Y$$

- Määritellään satunnaismuuttujat

$$U = \cos(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$

$$V = \sin(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Normaalijakauman generointi

jatkuvasta tasaisesta jakaumasta 2/2

- Satunnaismuuttujat U ja V ovat *riippumattomia* ja noudattavat **standardoitua normaalijakaumaa** (ks. lukua

Jatkuvia jakaumia):

$$U \sim N(0, 1)$$

$$V \sim N(0, 1)$$

$$U \perp V$$

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Normaalijakauman generointi

jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Todistus 1/5

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia* ja noudattavat *jatkuvaa tasaista jakaumaa* välillä $(0, 1)$:

$$X \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

$$Y \sim \text{Uniform}(0, 1)$$

$$X \perp Y$$

- Olkoot

$$U = \cos(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$

$$V = \sin(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$

- Tarkastellaan *yhtälöryhmää*

$$(*) \quad \begin{cases} u = \cos(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \\ v = \sin(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \end{cases}$$

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumia

Normaalijakauman generointi

jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Todistus 2/5

- Yhtälöryhmän

$$(*) \quad \begin{cases} u = \cos(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \\ v = \sin(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \end{cases}$$

ratkaisut muuttujien x ja y suhteen saadaan yhtälöistä

$$\begin{cases} \cos(2\pi x) = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \sin(2\pi x) = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ y = \exp\left\{-\frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right\} \end{cases}$$

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumia

Normaalijakauman generointi

jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Todistus 3/5

- Muunnoksen (*) *Jacobin determinantti* on

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \left[-2\pi \sin(2\pi x) \sqrt{-2 \log(y)} \right] \cdot \left[\frac{-\sin(2\pi x)}{y \sqrt{-2 \log(y)}} \right] \\ &\quad - \left[2\pi \cos(2\pi x) \sqrt{-2 \log(y)} \right] \cdot \left[\frac{-\cos(2\pi x)}{y \sqrt{-2 \log(y)}} \right] \\ &= \frac{2\pi}{y}\end{aligned}$$

- Koska $y > 0$, niin

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumia

Normaalijakauman generointi

jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Todistus 4/5

- Satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f_{XY}(x, y) = 1, 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

- Siten satunnaismuuttujien U ja V yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f_{UV}(u, v) = f_{XY}(x, y) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|^{-1} = \frac{y}{2\pi}, 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

- Sijoittamalla tähän x ja y lausuttuna muuttujien u ja v funktiona saadaan

$$f_{UV}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right\}$$

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumia

Normaalijakauman generointi

jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Todistus 5/5

- Nyt

$$\begin{aligned} (**) \quad f_{UV}(u, v) &= \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\} \\ &= f_U(u) f_V(v) \end{aligned}$$

jossa $f_U(u)$ ja $f_V(v)$ ovat standardoidun normaalijakauman $N(0, 1)$ tiheysfunktioita.

- Koska satunnaismuuttujien U ja V yhteisjakauman tiheysfunktio voidaan esittää satunnaismuuttujien U ja V reunajakaumien tiheysfunktioiden tulona, satunnaismuuttujat U ja V ovat *riippumattomia*.
- Yhtälöstä (***) nähdään lisäksi se, että satunnaismuuttujat U ja V noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa* $N(0, 1)$.

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumia
Normaalijakauman generointi
jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: Kommentteja

- Muunnosta

$$(*) \begin{cases} u = \cos(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \\ v = \sin(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \end{cases}$$

kutsutaan tavallisesti **Boxin ja Müllerin muunnokseksi**.

- Boxin ja Müllerin muunnos tarjoaa erään keinon *generoida normaalijakautuneita satunnaislukuja* tasaista jakaumaa välillä $(0, 1)$ noudattavista satunnaisluvuista.

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

>> Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Satunnaismuuttujien riippumattomuus

- Olkoot X ja Y riippumattomia ja jatkuvia satunnaismuuttujia.
- Tällöin niiden yhteisjakauman tiheysfunktio

$$f_{XY}(x, y)$$

voidaan esittää satunnaismuuttujien X ja Y reunajakaumien tiheysfunktioiden $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$ tulona:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

- Olkoot X ja Y riippumattomia ja jatkuvia satunnaismuuttujia, joiden tiheysfunktiot ovat $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.
- Muodostetaan satunnaismuuttujien X ja Y summa

$$U = X + Y$$

- Satunnaismuuttujan U **tiheysfunktio** on

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(u-x)f_X(x)dx$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma: Todistus 1/3

- Olkoot X ja Y riippumattomia ja jatkuvia satunnaismuuttujia, joiden tiheysfunktiot ovat $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.

- Koska satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia,

$$f_{XY}(x, y) = f_Y(y)f_X(x)$$

- Olkoot

$$U = X + Y$$

$$V = X$$

- Satunnaismuuttujien X ja Y summan jakauma saadaan määräämällä satunnaismuuttujan U reunajakauma satunnaismuuttujien U ja V yhteisjakaumasta.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma: Todistus 2/3

- Tarkastellaan muunnosta

$$(*) \quad \begin{cases} u = x + y \\ v = x \end{cases}$$

- Muunnoksen (*) *käänteismuunnos*:

$$\begin{cases} y = u - v \\ x = v \end{cases}$$

- Muunnoksen (*) *Jacobin determinantti*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ &= -1 \neq 0 \end{aligned}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma: Todistus 3/3

- Siten satunnaismuuttujien $U = X + Y$ ja $V = X$ yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$\begin{aligned} f_{UV}(u, v) &= f_{XY}(x, y) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|^{-1} \\ &= f_X(x) f_Y(y) |-1| \\ &= f_X(v) f_Y(u - v) \end{aligned}$$

- Summan $U = X + Y$ tiheysfunktio saadaan tästä satunnaismuuttujan U reunajakauman tiheysfunktiona:

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{UV}(u, v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(v) f_Y(u - v) dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(u - x) dx \end{aligned}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2 -jakauma 1/3

- Tarkastellaan riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakaumaa koskevan yleisen tuloksen sovelluksena **χ^2 -jakauman** (ks. lukua Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia) *tiheysfunktion lausekkeen johtoa*.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma χ^2 -jakauma 2/3

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

ovat *riippumattomia* ja noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

$$X_i \sim N(0, 1), i = 1, 2, \dots, n$$

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

- Satunnaismuuttuja Y_n noudattaa χ^2 -jakauman määritelmän mukaan **χ^2 -jakaumaa n :llä vapausasteella:**

$$Y_n \sim \chi^2(n)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma χ^2 -jakauma 3/3

- Satunnaismuuttujan

$$Y_n \sim \chi^2(n)$$

tiheysfunktio on

$$f_n(y) = C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

- Normeerausvakio C_n saadaan kaavasta

$$C_n = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

jossa $\Gamma(\cdot)$ on *Eulerin gammafunktio*:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2 -jakauma:

Tiheysfunktion johto 1/10

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

ovat *riippumattomia* ja noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

$$X_i \sim N(0, 1), i = 1, 2, \dots, n$$

- Tällöin

$$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

- Käytetään satunnaismuuttujan Y_n tiheysfunktion lausekkeen

$$f_n(y) = C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

perustelemiseen *täydellistä induktiota* ja yleistä tulosta riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakaumalle.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2 -jakauma:

Tiheysfunktion johto 2/10

- Olkoon $n = 1$.
- Tässä luvussa on jo todettu (ks. kappaletta **Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat**), että

$$Y_1 = X_1^2 \sim \chi^2(1)$$

ja satunnaismuuttujan Y_1 tiheysfunktio on

$$f_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y}$$

- Koska

$$C_1 = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

satunnaismuuttujan

$$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

tiheysfunktion lauseke pätee, kun $n = 1$.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2 -jakauma:

Tiheysfunktion johto 3/10

- Tarkastellaan seuraavaksi erikseen tapausta $n = 2$.
- Koska satunnaismuuttujat X_1 ja X_2 on oletettu riippumattomiksi, myös satunnaismuuttujat X_1^2 ja X_2^2 ovat riippumattomia.
- Siten voimme soveltaa satunnaismuuttujaan

$$Y_2 = X_1^2 + X_2^2 \sim \chi^2(2)$$

riippumattomien satunnaismuuttujien summan tiheysfunktion kaavaa:

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y-z)f_1(z)dz = C_2' \int_0^{\infty} (y-z)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(y-z)} z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z} dz \\ &= C_2' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (y-z)^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dz \end{aligned}$$

jossa C_2' on muuttujan y suhteen vakio.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2 -jakauma:

Tiheysfunktion johto 4/10

- Tapaus $n = 2$ jatkuu ...
- Sijoituksella $z = yt$ integraali

$$f_2(y) = C'_2 e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (y-z)^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dz$$

saadaan muokatuksi muotoon

$$f_2(y) = C'_2 e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (y-yt)^{-\frac{1}{2}} (yt)^{-\frac{1}{2}} y dt$$

$$= C'_2 e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= C_2 e^{-\frac{1}{2}y}$$

jossa $C_2 = C'_2 \int_0^{\infty} (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt$ on muuttujan y suhteen vakio.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2 -jakauma:

Tiheysfunktion johto 5/10

- Tapaus $n = 2$ jatkuu ...
- Siten satunnaismuuttujan

$$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

tiheysfunktion lauseke

$$f_n(y) = C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

pätee, kun $n = 2$:

$$f_2(y) = C_2 e^{-\frac{1}{2}y}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2 -jakauma:

Tiheysfunktion johto 6/10

- Yleinen induktio-askel $n - 1 \rightarrow n$.
- Induktio-oletus:

Satunnaismuuttujan

$$Y_{n-1} = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{n-1}^2 \sim \chi^2(n-1)$$

tiheysfunktio on

$$f_{n-1}(y) = C_{n-1} y^{\frac{1}{2}(n-1)-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2 -jakauma:

Tiheysfunktion johto 7/10

- Induktio-askel $n - 1 \rightarrow n$ jatkuu ...
- Koska satunnaismuuttujat X_1, X_2, \dots, X_n on oletettu riippumattomiksi, myös satunnaismuuttujat $Y_{n-1} = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{n-1}^2$ ja X_n^2 ovat riippumattomia.

- Siten voimme soveltaa satunnaismuuttujaan

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{n-1}^2 + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

riippumattomien satunnaismuuttujien summan tiheysfunktion kaavaa:

$$\begin{aligned} f_n(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y-z) f_{n-1}(z) dz = C'_n \int_0^{\infty} (y-z)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(y-z)} z^{\frac{1}{2}(n-1)-1} e^{-\frac{1}{2}z} dz \\ &= C'_n e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (y-z)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}} dz \end{aligned}$$

jossa C'_n on muuttujan y suhteen vakio.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2 -jakauma:

Tiheysfunktion johto 8/10

- Induktio-askel $n - 1 \rightarrow n$ jatkuu ...
- Sijoituksella $z = yt$ integraali

$$f_n(y) = C'_n e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (y - z)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}n - \frac{3}{2}} dz$$

saadaan muokatuksi muotoon

$$f_n(y) = C'_n e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (y - yt)^{-\frac{1}{2}} (yt)^{\frac{1}{2}n - \frac{3}{2}} y dz$$

$$= C'_n y^{\frac{1}{2}n - 1} e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (1 - t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}n - \frac{3}{2}} dt$$

$$= C_n y^{\frac{1}{2}n - 1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

jossa $C_n = C'_n \int_0^{\infty} (1 - t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}n - \frac{3}{2}} dt$ on muuttujan y suhteen vakio.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2 -jakauma:

Tiheysfunktion johto 9/10

- Induktiopäätely jatkuu ...
- Yhdistämällä kalvojen 2/10-8/10 tulokset nähdään, että satunnaismuuttujan

$$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

tiheysfunktion lauseke

$$f_n(y) = C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

pätee kaikille $n = 1, 2, 3, \dots$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

χ^2 -jakauma:

Tiheysfunktion johto 10/10

- Määrätään vielä *normeerausvakio* C_n .
- Todetaan ensin, että tiheysfunktio f_n toteuttaa seuraavan ehdon:

$$\int_0^{\infty} f_n(y) dy = C_n \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y} dy = 1$$

- Sijoituksella $y = 2t$ tämä integraali saadaan muokatuksi muotoon

$$2^{\frac{1}{2}n} C_n \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}n-1} e^{-t} dt = 1$$

- Siten normeerausvakion C_n arvoksi saadaan

$$C_n = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

jossa $\Gamma(\cdot)$ on *Eulerin gammafunktio*:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Momenttiemäfunktio

- Olkoon X satunnaismuuttuja.

- Oletetaan, että odotusarvo

$$m_X(t) = E(e^{tX})$$

on olemassa kaikille

$$t \in (-h, +h)$$

jossa $h > 0$ on vakio.

- Tällöin funktiota $m_X(t)$ kutsutaan satunnaismuuttujan X ja sen jakauman **momenttiemäfunktioksi** eli **momentit generoivaksi funktioksi**.
- Lisätietoja: ks. lukua **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio**.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktio

- Olkoot

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden *momenttiemäfunktiot* ovat

$$m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t)$$

- Tällöin **summan**

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

momenttiemäfunktio on satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_n momenttiemäfunktioiden *tulo*:

$$m_X(t) = m_1(t)m_2(t) \cdots m_n(t)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Bernoulli-jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma

- Olkoot

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat *samaa Bernoulli-jakaumaa* parametrilla p :

$$X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p), i = 1, 2, \dots, n$$

- Tällöin satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_n **summa**

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

noudattaa binomijakaumaa (ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**)
parametrein (n, p) :

$$Y \sim \text{Bin}(n, p)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Bernoulli-jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma: Perustelu 1/2

- Oletetaan, että

$$X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p), i = 1, 2, \dots, n$$

- Tällöin satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_n *momenttiemäfunktio* on muotoa

$$m_i(t) = q + pe^t, i = 1, 2, \dots, n$$

- Lisätietoja: ks. lukua **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio**.
- Muodostetaan satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_n *summa*:

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Bernoulli-jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma: Perustelu 2/2

- *Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktiota koskevan tuloksen mukaan satunnaismuuttujan*

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

momenttiemäfunktio on

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_1(t)m_2(t)\cdots m_n(t) \\ &= (q + pe^t)(q + pe^t)\cdots(q + pe^t) \\ &= (q + pe^t)^n \end{aligned}$$

- Koska $m_Y(t)$ on *binomijakauman* $\text{Bin}(n, p)$ momenttiemäfunktio, niin

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim \text{Bin}(n, p)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Binomijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma

- Olkoot

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat *binomijakaumia* parametrein $(n_1, p), (n_2, p), \dots, (n_k, p)$:

$$X_1, X_2, \dots, X_k \perp$$

$$X_i \sim \text{Bin}(n_i, p), i = 1, 2, \dots, k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_k **summa**

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_k$$

noudattaa binomijakaumaa (ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**) parametrein $(n_1 + n_2 + \dots + n_k, p)$:

$$Y \sim \text{Bin}(n_1 + n_2 + \dots + n_k, p)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Binomijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma: Perustelu 1/2

- Oletetaan, että

$$X_1, X_2, \dots, X_k \perp$$

$$X_i \sim \text{Bin}(n_i, p), i = 1, 2, \dots, k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_k *momenttiemäfunctiot* ovat muotoa

$$m_i(t) = (q + pe^t)^{n_i}, i = 1, 2, \dots, k$$

- Lisätietoja: ks. lukua **Momenttiemäfunctio ja karakteristinen functio**.
- Muodostetaan satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_k *summa*:

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_k$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Binomijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma: Perustelu 2/2

- *Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktiota koskevan tuloksen mukaan satunnaismuuttujan*

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

momenttiemäfunktio on

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_1(t)m_2(t)\cdots m_k(t) \\ &= (q + pe^t)^{n_1} (q + pe^t)^{n_2} \cdots (q + pe^t)^{n_k} \\ &= (q + pe^t)^{n_1+n_2+\cdots+n_k} \end{aligned}$$

- Koska $m_Y(t)$ on *binomijakauman* $\text{Bin}(n_1 + n_2 + \cdots + n_k, p)$ momenttiemäfunktio, niin

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim \text{Bin}(n_1 + n_2 + \cdots + n_k, p)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Poisson-jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma

- Olkoot

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat *Poisson-jakaumia* parametrein $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$:

$$X_1, X_2, \dots, X_k \perp$$

$$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_k **summa**

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_k$$

noudattaa Poisson-jakaumaa (ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**) parametrilla $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$:

$$Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Poisson-jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma: Perustelu 1/2

- Oletetaan, että

$$X_1, X_2, \dots, X_k \perp$$

$$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_k *momenttiemäfunctiot* ovat muotoa

$$m_i(t) = e^{\lambda_i(e^t - 1)}, i = 1, 2, \dots, k$$

- Lisätietoja: ks. lukua **Momenttiemäfunctio ja karakteristinen functio**.
- Muodostetaan satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_k *summa*:

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_k$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Poisson-jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma: Perustelu 2/2

- *Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktiota koskevan tuloksen mukaan satunnaismuuttujan*

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_k$$

momenttiemäfunktio on

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_1(t)m_2(t)\cdots m_k(t) \\ &= e^{\lambda_1(e^t-1)} e^{\lambda_2(e^t-1)} \dots e^{\lambda_k(e^t-1)} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_k)(e^t-1)} \end{aligned}$$

- Koska $m_Y(t)$ on *Poisson-jakauman* $\text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)$ momenttiemäfunktio, niin

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_k \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Normaalijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma

- Olkoot

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat *normaalijakaumia* parametrein $(\mu_1, \sigma_1^2), (\mu_2, \sigma_2^2), \dots, (\mu_k, \sigma_k^2)$:

$$X_1, X_2, \dots, X_k \perp$$

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, \dots, k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_k **summa**

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_k$$

noudattaa normaalijakaumaa (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**)

parametrein $(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2)$:

$$Y \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Normaalijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma: Perustelu 1/2

- Oletetaan, että

$$X_1, X_2, \dots, X_k \perp$$

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, \dots, k$$

- Tällöin satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_k *momenttiemäfunctiot* ovat muotoa

$$m_i(t) = \exp(\mu_i t + \frac{1}{2} \sigma_i^2 t^2), i = 1, 2, \dots, k$$

- Lisätietoja: ks. lukua **Momenttiemäfunctio ja karakteristinen functio**.
- Muodostetaan satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_k *summa*:

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_k$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Normaalijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakauma: Perustelu 2/2

- *Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktiota koskevan tuloksen mukaan satunnaismuuttujan*

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_k$$

momenttiemäfunktio on

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_1(t)m_2(t)\cdots m_k(t) \\ &= \exp(\mu_1 t + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2) \exp(\mu_2 t + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2) \cdots \exp(\mu_k t + \frac{1}{2}\sigma_k^2 t^2) \\ &= \exp((\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k)t + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2)t^2) \end{aligned}$$

- Koska $m_Y(t)$ on *normaalijakauman* $N(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2)$ momenttiemäfunktio, niin $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_k \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2)$

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

>> Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Satunnaismuuttujien riippumattomuus

- Olkoot X ja Y riippumattomia ja jatkuvia satunnaismuuttujia.
- Tällöin niiden yhteisjakauman tiheysfunktio

$$f_{XY}(x, y)$$

voidaan esittää satunnaismuuttujien X ja Y reunajakaumien tiheysfunktioiden $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$ tulona:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

- Olkoot X ja $Y > 0$ riippumattomia ja jatkuvia satunnaismuuttujia, joiden tiheysfunktiot ovat $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.
- Määritellään satunnaismuuttuja

$$U = X / Y$$

- **Osamäärän $U = X / Y$ tiheysfunktio on**

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(uy) f_Y(y) dy$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma: Todistus 1/3

- Olkoot X ja $Y > 0$ riippumattomia ja jatkuvia satunnaismuuttujia, joiden tiheysfunktiot ovat $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.

- Koska satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia,

$$f_{XY}(x, y) = f_Y(y)f_X(x)$$

- Olkoot

$$U = X / Y$$

$$V = Y$$

- Satunnaismuuttujien X ja Y osamäärän jakauma saadaan määräämällä satunnaismuuttujan U reunajakauma satunnaismuuttujien U ja V yhteisjakaumasta.

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma: Todistus 2/3

- Tarkastellaan muunnosta

$$(*) \quad \begin{cases} u = x/y \\ v = y \end{cases}$$

- Muunnoksen (*) *käänteismuunnos*:

$$\begin{cases} x = uv \\ y = v \end{cases}$$

- Muunnoksen (*) *Jacobin determinantti*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{1}{y} \cdot 1 - \left(-\frac{x}{y^2} \right) \cdot 0 \\ &= 1/y \neq 0 \end{aligned}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma: Todistus 3/3

- Siten satunnaismuuttujien $U = X / Y$ ja $V = Y$ yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$\begin{aligned} f_{UV}(u, v) &= f_{XY}(x, y) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|^{-1} \\ &= f_X(x) f_Y(y) y \\ &= v f_X(uv) f_Y(v) \end{aligned}$$

- Osamäärän $U = X / Y$ tiheysfunktio saadaan tästä satunnaismuuttujan U reunajakauman tiheysfunktiona:

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{UV}(u, v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} v f_X(uv) f_Y(v) dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(uy) f_Y(y) dy \end{aligned}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

F-jakauma 1/4

- Tarkastellaan riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakaumaa koskevan yleisen tuloksen sovelluksena **F-jakauman** (ks. lukua Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia) *tiheysfunktion lausekkeen johtoa*.
- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

$$X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

ovat *riippumattomia* ja noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n \perp$$

$$X_i \sim N(0, 1), i = 1, 2, \dots, m$$

$$Y_i \sim N(0, 1), i = 1, 2, \dots, n$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

F-jakauma 2/4

- Määritellään satunnaismuuttujat

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_m^2$$

$$Y = Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2$$

- Satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia* ja χ^2 -jakauman määritelmän mukaan X noudattaa χ^2 -jakaumaa m :llä vapausasteella ja Y noudattaa χ^2 -jakaumaa n :llä vapausasteella:

$$X \sim \chi^2(m)$$

$$Y \sim \chi^2(n)$$

$$X \perp Y$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

***F*-jakauma 3/4**

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$F = \frac{X / m}{Y / n} = \frac{n}{m} \cdot \frac{X}{Y}$$

jossa siis

$$X \sim \chi^2(m)$$

$$Y \sim \chi^2(n)$$

$$X \perp Y$$

- Satunnaismuuttuja F noudattaa F -jakauman määritelmän mukaan ***F*-jakaumaa vapausastein m ja n :**

$$F \sim F(m, n)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma **F-jakauma 4/4**

- Satunnaismuuttujan

$$F \sim F(m, n)$$

tiheysfunktio on

$$f_F(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

jossa $\Gamma(\cdot)$ on *Eulerin gammafunktio*:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

F-jakauma:

Tiheysfunktion johto 1/6

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$F = \frac{n}{m} \cdot \frac{X}{Y}$$

jossa

$$X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n), X \perp Y$$

- Tällöin

$$F \sim F(m, n)$$

- Käytetään satunnaismuuttujan F tiheysfunktion lausekkeen

$$f_F(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

perustelemiseen yleistä tulosta riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakaumalle.

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

F-jakauma:

Tiheysfunktion johto 2/6

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$Z = \frac{X}{Y}$$

jossa

$$X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n), X \perp Y$$

- $\chi^2(n)$ -jakauman tiheysfunktio on muotoa (ks. kappaletta **Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma**):

$$f_n(y) = C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

$$C_n = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

F-jakauma:

Tiheysfunktion johto 3/6

- *Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän tiheysfunktion kaavan* mukaan satunnaismuuttujan $Z = X/Y$ tiheysfunktio on

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(zy) f_Y(y) dy = C_m C_n \int_0^{\infty} y (zy)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}zy} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} dy \\ &= C_m C_n \int_0^{\infty} y (zy)^{\frac{m}{2}-1} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(1+z)y} dy \end{aligned}$$

- Kun integraalissa tehdään sijoitus $(1+z)y = t$, saadaan

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= C_m C_n \int_0^{\infty} \frac{t}{1+z} \left(z \frac{t}{1+z} \right)^{\frac{m}{2}-1} \left(\frac{t}{1+z} \right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}t} \frac{1}{1+z} dt \\ &= C_m C_n z^{\frac{m}{2}-1} (1+z)^{-\frac{m+n}{2}} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}(m+n)-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt \end{aligned}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

F-jakauma:

Tiheysfunktion johto 4/6

- Satunnaismuuttujan $Z = X/Y$ tiheysfunktion lausekkeen

$$f_Z(z) = C_m C_n z^{\frac{m}{2}-1} (1+z)^{-\frac{m+n}{2}} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}(m+n)-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

integraalin

$$\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}(m+n)-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

integroitava on $\chi^2(m+n)$ -jakauman tiheysfunktion *ydin*.

- Siten

$$\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}(m+n)-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt = \frac{1}{C_{m+n}}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

F-jakauma:

Tiheysfunktion johto 5/6

- Sijoittamalla vakioiden C_m , C_n ja C_{m+n} lausekkeet paikoilleen saadaan satunnaismuuttujan $Z = X/Y$ tiheysfunktioksi

$$f_Z(z) = \frac{C_m C_n}{C_{m+n}} z^{\frac{m}{2}-1} (1+z)^{-\frac{m+n}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} z^{\frac{m}{2}-1} (1+z)^{-\frac{m+n}{2}}$$

- Satunnaismuuttujan

$$F = \frac{n}{m} \cdot \frac{X}{Y} \sim F(m, n)$$

saadaan satunnaismuuttujan $Z = X/Y$ tiheysfunktioista *lineaari-*
muunnoksella

$$F = \frac{n}{m} Z$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

F-jakauma:

Tiheysfunktion johto 6/6

- Soveltamalla satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen tiheysfunktion kaavaa (ks. kappaletta **Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat**) saadaan $F(m, n)$ -jakauman tiheysfunktiksi

$$f_F(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma **t-jakauma 1/4**

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

$$X, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

ovat *riippumattomia* ja noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$X, Y_1, Y_2, \dots, Y_n \perp$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$Y_i \sim N(0, 1), i = 1, 2, \dots, n$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

t-jakauma 2/4

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$Y = Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2$$

- Satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, X noudattaa *standardoitua normaalijakaumaa* $N(0, 1)$ ja Y noudattaa χ^2 -jakauman määritelmän mukaan χ^2 -jakaumaa n :llä vapausasteella:

$$X \sim N(0, 1)$$

$$Y \sim \chi^2(n)$$

$$X \perp Y$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma ***t*-jakauma 3/4**

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} = \sqrt{n} \cdot \frac{X}{\sqrt{Y}}$$

jossa siis

$$X \sim N(0,1)$$

$$Y \sim \chi^2(n)$$

$$X \perp Y$$

- Satunnaismuuttuja t noudattaa t -jakauman määritelmän mukaan **Studentin t -jakaumaa vapausastein n** (ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**):

$$t \sim t(n)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma **t-jakauma 4/4**

- Satunnaismuuttujan

$$t \sim t(n)$$

tiheysfunktio on

$$f_t(y) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{n}y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

jossa $\Gamma(\cdot)$ on *Eulerin gammafunktio*:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

***t*-jakauma:**

Tiheysfunktion johto 1/4

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$t = \sqrt{n} \frac{X}{\sqrt{Y}}$$

jossa

$$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n), X \perp Y$$

- Tällöin

$$t \sim t(n)$$

- Käytetään satunnaismuuttujan t tiheysfunktion lausekkeen

$$f_t(y) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{n} y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

perustelemisessa hyväksi sitä, että selvästi

$$t^2 \sim F(1, n)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

***t*-jakauma:**

Tiheysfunktion johto 2/4

- Jakauman $F(1, n)$ tiheysfunktio on

$$\begin{aligned} f_F(z) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}-1} \left(1 + \frac{1}{n}z\right)^{-\frac{n+1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{z}} \left(1 + \frac{1}{n}z\right)^{-\frac{n+1}{2}} \end{aligned}$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

***t*-jakauma:**

Tiheysfunktion johto 3/4

- Koska

$$t = \sqrt{z}$$

jossa

$$z \sim F(1, n)$$

pätee seuraava tulos, kun $y > 0$:

$$\begin{aligned}\Pr(0 \leq t \leq y) &= \frac{1}{2} \Pr(0 \leq |t| \leq y) \\ &= \frac{1}{2} \Pr(0 \leq t^2 \leq y^2) \\ &= \frac{1}{2} \Pr(0 \leq z \leq y^2) \\ &= \frac{1}{2} F_F(y^2)\end{aligned}$$

jossa F_F on jakauman $F(1, n)$ *kertymäfunktio*.

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

***t*-jakauma:**

Tiheysfunktion johto 4/4

- Derivoimalla yhtälö

$$\Pr(0 \leq t \leq y) = \frac{1}{2} F_F(y^2)$$

saadaan satunnaismuuttujan t tiheysfunktiksi, kun $y > 0$:

$$f_t(y) = y f_F(y^2)$$

- Siten jakauman $t(n)$ tiheysfunktiksi saadaan lopulta

$$f_t(y) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{n} y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Satunnaismuuttujien muunnokset ja niiden jakaumat

Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

>> Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Satunnaismuuttujien minimin jakauma 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

ovat *riippumattomia* ja noudattavat *samaa jakaumaa*, jonka *kertymäfunktio* on $F(x)$:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

$$X_i \sim F(x), i = 1, 2, \dots, n$$

- Olkoon satunnaismuuttuja $X_{(1)}$ satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_n **minimi**:

$$X_{(1)} = \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

Satunnaismuuttujien minimin jakauma 2/2

- Satunnaismuuttujan

$$X_{(1)} = \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

kertymäfunktio on

$$F_{(1)} = 1 - [1 - F(x)]^n$$

- Jos satunnaismuuttujat X_1, X_2, \dots, X_n ovat lisäksi *jatkuvia* ja niiden *tiheysfunktio* on

$$f(x) = F'(x)$$

niin satunnaismuuttujan

$$X_{(1)} = \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

tiheysfunktio on

$$f_{(1)} = n[1 - F(x)]^{n-1}f(x)$$

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Satunnaismuuttujien minimin jakauma:

Perustelu 1/3

- Oletetaan, että

$$X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

$$X_i \sim F(x), i = 1, 2, \dots, n$$

- Olkoon

$$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Satunnaismuuttujien minimin jakauma:

Perustelu 2/3

- Soveltamalla *kertymäfunktion määritelmää, komplementti-todennäköisyyden kaavaa* ja satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_n *riippumattomuutta* satunnaismuuttujan

$$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

kertymäfunktiksi saadaan:

$$\begin{aligned} F_{(1)}(x) &= \Pr(X_{(1)} \leq x) \\ &= 1 - \Pr(X_{(1)} > x) \\ &= 1 - \Pr(X_1 > x \text{ ja } X_2 > x \text{ ja } \dots \text{ ja } X_n > x) \\ &= 1 - \Pr(X_1 > x) \Pr(X_2 > x) \cdots \Pr(X_n > x) \\ &= 1 - [1 - \Pr(X_1 \leq x)][1 - \Pr(X_2 \leq x)] \cdots [1 - \Pr(X_n \leq x)] \\ &= 1 - [1 - F(x)][1 - F(x)] \cdots [1 - F(x)] \\ &= 1 - [1 - F(x)]^n \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Satunnaismuuttujien minimin jakauma:

Perustelu 3/3

- Oletetaan lisäksi, että satunnaismuuttujat X_1, X_2, \dots, X_n ovat *jatkuvia* ja niiden tiheysfunktio on

$$f(x) = F'(x)$$

- Tällöin satunnaismuuttujan

$$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

tiheysfunktio saadaan derivoimalla satunnaismuuttujan $X_{(1)}$ kertymäfunktion lauseke:

$$\begin{aligned} f_{(1)}(x) = F'_{(1)}(x) &= \frac{d}{dx} \{1 - [1 - F(x)]^n\} \\ &= -n[1 - F(x)]^{n-1} [-F'(x)] \\ &= n[1 - F(x)]^{n-1} f(x) \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Satunnaismuuttujien minimin jakauma: Eksponenttijakauma 1/2

- Oletetaan, että riippumattomat satunnaismuuttujat X_1, X_2, \dots, X_n noudattavat *samaa eksponenttijakaumaa* (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) parametrinaan λ :

$$X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

$$X_i \sim \text{Exp}(\lambda), i = 1, 2, \dots, n$$

- Satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_n *kertymäfunktio*:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_n *tiheysfunktio*:

$$f(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Satunnaismuuttujien minimin jakauma: Eksponenttijakauma 2/2

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

- Satunnaismuuttujan $X_{(1)}$ *kertymäfunktio*:

$$\begin{aligned} F_{(1)}(x) &= 1 - [1 - F(x)]^n = 1 - [1 - (1 - e^{-\lambda x})]^n \\ &= 1 - e^{-n\lambda x} \end{aligned}$$

- Satunnaismuuttujan $X_{(1)}$ *tiheysfunktio*:

$$\begin{aligned} f_{(1)}(x) &= F'_{(1)}(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{-n\lambda x}) \\ &= n\lambda e^{-n\lambda x} \end{aligned}$$

- Siten *samaa* eksponenttijakaumaa $\text{Exp}(\lambda)$ noudattavien satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_n *minimi* $X_{(1)}$ *noudattaa eksponenttijakaumaa* parametrinaan $n\lambda$:

$$X_{(1)} \sim \text{Exp}(n\lambda)$$

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

ovat *riippumattomia* ja noudattavat *samaa jakaumaa*, jonka *kertymäfunktio* on $F(x)$:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

$$X_i \sim F(x), i = 1, 2, \dots, n$$

- Olkoon satunnaismuuttuja $X_{(n)}$ satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_n **maksimi**:

$$X_{(n)} = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma 2/2

- Satunnaismuuttujan

$$X_{(n)} = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

kertymäfunktio on

$$F_{(n)} = [F(x)]^n$$

- Jos satunnaismuuttujat X_1, X_2, \dots, X_n ovat lisäksi *jatkuvia* ja niiden *tiheysfunktio* on

$$f(x) = F'(x)$$

niin satunnaismuuttujan

$$X_{(n)} = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

tiheysfunktio on

$$f_{(n)} = n[F(x)]^{n-1}f(x)$$

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma:

Perustelu 1/3

- Oletetaan, että

$$X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

$$X_i \sim F(x), i = 1, 2, \dots, n$$

- Olkoon

$$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma:

Perustelu 2/3

- Soveltamalla *kertymäfunktion määritelmää* ja satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_n riippumattomuutta satunnaismuuttujan

$$X_{(n)} = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

kertymäfunktiksi saadaan:

$$\begin{aligned} F_{(n)}(x) &= \Pr(X_{(n)} \leq x) \\ &= \Pr(X_1 \leq x \text{ ja } X_2 \leq x \text{ ja } \dots \text{ ja } X_n \leq x) \\ &= \Pr(X_1 \leq x) \Pr(X_2 \leq x) \cdots \Pr(X_n \leq x) \\ &= F(x) F(x) \cdots F(x) \\ &= [F(x)]^n \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma:

Perustelu 3/3

- Oletetaan lisäksi, että satunnaismuuttujat X_1, X_2, \dots, X_n ovat *jatkuvia* ja niiden tiheysfunktio on

$$f(x) = F'(x)$$

- Tällöin satunnaismuuttujan

$$X_{(n)} = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

tiheysfunktio saadaan derivoimalla satunnaismuuttujan $X_{(n)}$ kertymäfunktion lauseke:

$$\begin{aligned} f_{(n)}(x) &= F'_{(n)}(x) = \frac{d}{dx} [F(x)]^n \\ &= n[F(x)]^{n-1} F'(x) \\ &= n[F(x)]^{n-1} f(x) \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma:

Eksponttijakauma 1/2

- Oletetaan, että riippumattomat satunnaismuuttujat X_1, X_2, \dots, X_n noudattavat *samaa* **eksponenttijakaumaa** (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) parametrinaan λ :

$$X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

$$X_i \sim \text{Exp}(\lambda), i = 1, 2, \dots, n$$

- Satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_n *kertymäfunktio*:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_n *tiheysfunktio*:

$$f(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Satunnaismuuttujien maksimin jakauma: Eksponenttijakauma 2/2

- Määritellään satunnaismuuttuja

$$X_{(n)} = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

- Satunnaismuuttujan $X_{(n)}$ *kertymäfunktio*:

$$F_{(n)}(x) = [F(x)]^n = (1 - e^{-\lambda x})^n$$

- Satunnaismuuttujan $X_{(n)}$ *tiheysfunktio*:

$$\begin{aligned} f_{(n)}(x) &= F'_{(n)}(x) = \frac{d}{dx} (1 - e^{-\lambda x})^n \\ &= n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} \end{aligned}$$

- Siten *samaa* eksponenttijakaumaan $\text{Exp}(\lambda)$ noudattavien satunnaismuuttujien X_1, X_2, \dots, X_n *maksimi* $X_{(n)}$ *ei noudata mitään tavanomaista jakaumaa* toisin kuin niiden *minimi* $X_{(1)}$, joka noudattaa eksponenttijakaumaa parametrinaan $n\lambda$.