Ilkka Mellin

Todennäköisyyslaskenta

Osa 1: Todennäköisyys ja sen laskusäännöt

Todennäköisyyden peruslaskusäännöt

Todennäköisyyden peruslaskusäännöt

>> Uusien tapahtumien muodostaminen

Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle

Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

Todennäköisyyslaskennan peruslaskutoimitukset ja -säännöt

- *Todennäköisyyslaskennalla tarkoitetaan* usein sellaisten **laskutoimitusten** ja **laskusääntöjen kokoelmaa**, joiden avulla voidaan määrätä jonkin satunnaisilmiön tapahtumista *joukko-opin operaatioiden* avulla johdettujen **uusien tapahtumien** todennäköisyydet.
- *Laskusääntöjä ei tässä kappaleessa* (yleensä) *todisteta*, mutta *säännöt tehdään ilmeisiksi Venn-diagrammien* ja *esimerkkien avulla*.
- Laskusääntöjen todistaminen: ks. lukua **Todennäköisyyden aksioomat.**

Johdetut tapahtumat

- Olkoot *A* ja *B* johonkin satunnaisilmiöön liittyviä *tapahtumia*.
- Tarkastelemme seuraavia **tapahtumista *A* ja *B* johdettuja tapahtumia**:

(i) **Tapahtuma *A* *ei* satu.**

(ii) **Tapahtuma *A* *tai* *B* sattuu:**

Tapahtuma *A* sattuu *tai* tapahtuma *B* sattuu *tai* molemmat sattuvat.

(iii) **Tapahtuma *A* sattuu *ja* tapahtuma *B* sattuu.**

(iv) **Tapahtuma *A* sattuu, *mutta* tapahtuma *B* *ei* satu.**

Todennäköisyyslaskenta ja joukko-oppi

- Todennäköisyyslaskennan historian tärkeimpiä teoreettisia oivalluksia on ollut se, että *satunnaisilmiöiden tapahtumia voidaan käsitellä* **joukkoina**.
- Siksi seuraavassa esitetään joukko-opin *peruskäsitteet*.
- Lisätietoja joukko-opista: ks. liitettä **Joukko-oppi.**

Joukko-oppia: Joukko ja sen alkiot

- **Joukko** on *kokoelma olioita*, joita kutsutaan joukon **alkioiksi**.
- Joukko on **hyvin määritelty**, jos *sen alkiot tunnetaan*.
- Merkitään **joukon ja sen alkioiden välistä relaatiota** seuraavasti:

(i) *s* **on** *joukon A* **alkio** eli *s* **kuuluu** *joukkoon A*:

$$s \in A$$

(ii) *s* **ei ole** *joukon A* **alkio** eli *s* **ei kuulu** *joukkoon A*:

$$s \notin A$$

Joukko-oppia: Osajoukko

- Olkoot A ja B kaksi joukkoa.
- Jos jokaiselle joukon B alkiolle s pätee, että

$$s \in B \Rightarrow s \in A$$

niin sanomme, että *joukko B on joukon A* **osajoukko** tai, että *joukko B* **sisältyy** *joukkoon A.*

- Merkintä:

$$B \subset A \text{ tai } A \supset B$$

Joukko-oppia: Tyhjä joukko

- Joukko on **tyhjä**, jos siihen ei kuulu yhtään alkiota.
- Tyhjää joukkoa merkitään symbolilla

$$\varnothing$$

- Jos joukko $\varnothing$ on tyhjä, *ei ole olemassa* oliota s, jolle

$$s \in \varnothing$$

- Tyhjä joukko $\varnothing$ on *jokaisen* joukon osajoukko eli mielivaltaiselle joukolle A pätee:

$$\varnothing \subset A$$

Otosavaruus ja alkeistapahtumat

- Satunnaisilmiön *kaikkien mahdollisten tulosvaihtoehtojen joukkoa* kutsutaan **otosavaruudeksi**.
- Otosavaruuden *alkioita* kutsutaan **alkeistapahtumiksi**.
- Merkinnät:

  Otosavaruus: S

  Otosavaruuden S alkio: s
- Jos siis alkeistapahtuma s kuuluu otosavaruuteen S, merkitään:

$$s \in S$$

Otosavaruus ja alkeistapahtumat: Kommentteja

- Otosavaruus muodostaa sen **perusjoukon**, jossa satunnais-ilmiön tulosvaihtoja tarkastellaan.
- Otosavaruuden alkiot ovat tarkasteltavan satunnaisilmiön alkeistapahtumia siinä mielessä, että satunnaisilmiötä ei voida ”purkaa” alkeistapahtumia *alkeellisempiin* tulosvaihtoehtoihin.

Tapahtuma 1/2

- Olkoon *S otosavaruus* eli tarkasteltavan satunnaisilmiön kaikkien mahdollisten tulosvaihtoehtojen joukko.
- Tarkasteltavan satunnaisilmiön **tapahtumat** ovat otosavaruuden *S alkeistapahtumien muodostamia joukkoja*.
- Siten tapahtumat ovat tarkasteltavaan satunnaisilmiöön liittyvän otosavaruuden *S osajoukkoja*.

Tapahtuma 2/2

- Jos siis A on jokin otosavaruuden S *tapahtuma*, niin

  $$A \subset S$$

  eli

  $$s \in A \Rightarrow s \in S$$

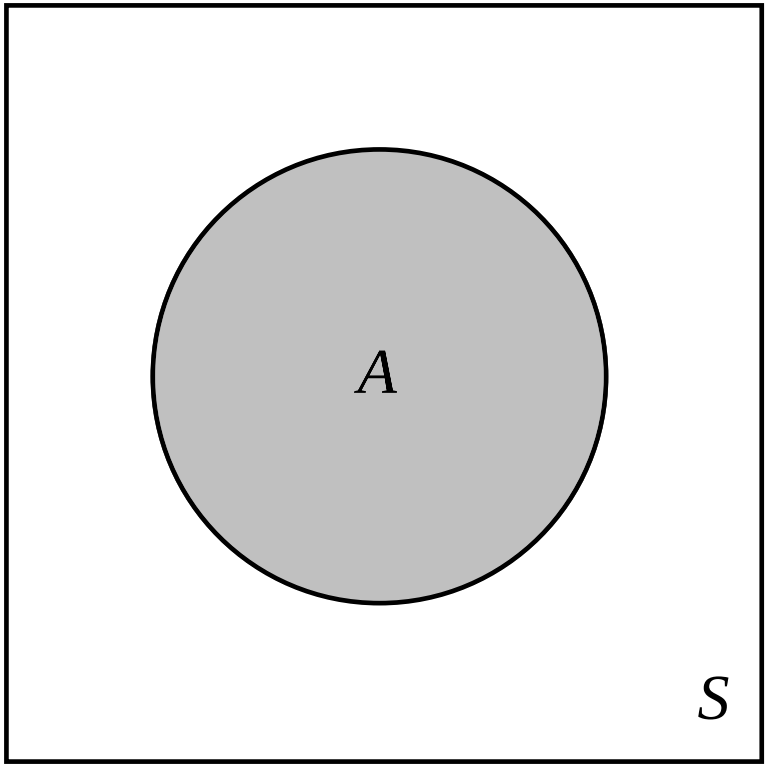
  jossa s on tapahtumaan A kuuluva *alkeistapahtuma*.
- **Kun sanomme, että tapahtuma A sattuu, tarkoitamme sitä, että jokin tapahtumaan A kuuluva alkeis-tapahtuma s sattuu.**

Uusien tapahtumien johtaminen ja joukko-opin operaatiot

Uusi tapahtuma	**Vastaava joukko-opin operaatio**
”*A ei* satu”	Komplementti: $A^c \quad = \{s \in S \mid s \notin A\}$
”*A tai B* sattuu *tai* molemmat sattuvat”	Yhdiste eli unioni: $A \cup B \quad = \{s \in S \mid s \in A \textit{ tai } s \in B\}$
”*A ja B* sattuvat”	Leikkaus: $A \cap B \quad = \{s \in S \mid s \in A \textit{ ja } s \in B\}$
”*A* sattuu, *mutta B ei* satu”	Erotus: $A \backslash B \quad = \{ s \in S \mid s \in A \textit{ ja } s \notin B\}$

Venn-diagrammi

- Kuvataan *otosavaruutta* eli *perusjoukkoa* S suorakaiteella.
- Suorakaiteen *pinta-ala* vastaa otosavaruuden S todennäköisyyttä $\Pr(S) = 1$.
- Kuvataan *tapahtumaa* $A \subset S$ suorakaiteen varjostettu osa-alueella.
- Osa-alueen A *pinta-ala* vastaa tapahtuman A todennäköisyyttä $\Pr(A)$.



Venn-diagrammi: Kommentteja

- Venn-diagrammien käyttö todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen *havainnollistuksissa* perustuu siihen, että todennäköisyys voidaan määritellä *tapahtumien sattumisen mahdollisuuden* **mittana**.
- *Todennäköisyys* käyttäytyy mittana samalla tavalla kuin *pinta-ala* paitsi, että todennäköisyysmitalla on ylärajana varman tapahtuman todennäköisyys 1.
- Todennäköisyyslaskennan laskusäännön *havainnollistus Venn-diagrammin avulla ei ole* säännön *todistus*.
- Todennäköisyyslaskennan laskusäännöt *voidaan todistaa Kolmogorovin aksioomajärjestelmässä*.

  Ks. lukua **Todennäköisyyden aksioomat.**

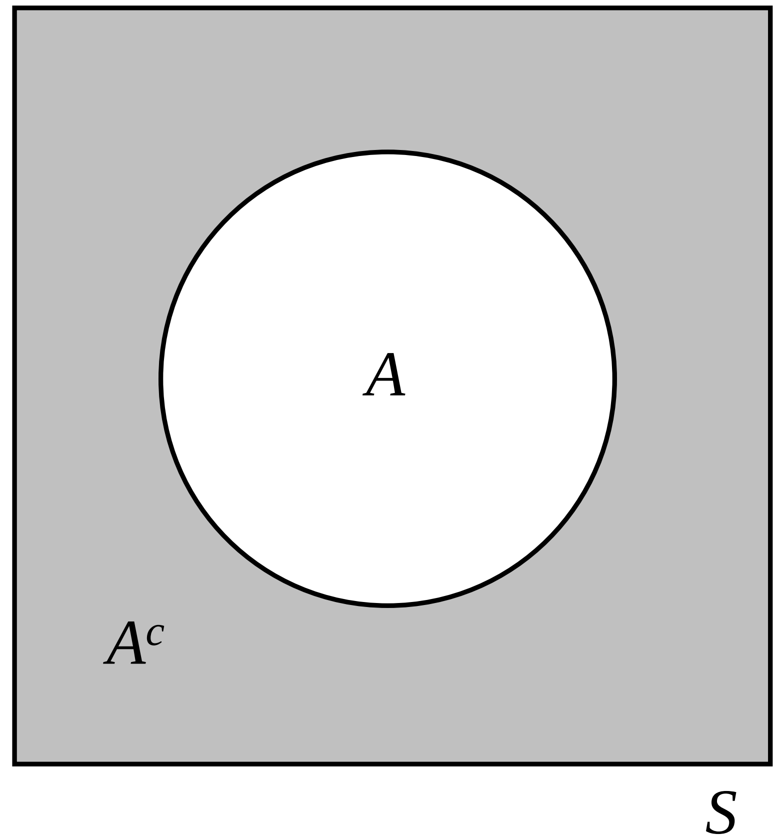
Tapahtuman *A* komplementti

- Olkoon $A \subset S$ otosavaruuden S tapahtuma.
- Tapahtuman A *komplementtitapahtuma*

  A^c = ”*A ei satu*” = *ei*-*A*

  on niiden alkeistapahtumien joukko, jotka *eivät* kuulu joukkoon A:

  $$A^c = \{s \in S \mid s \notin A\}$$



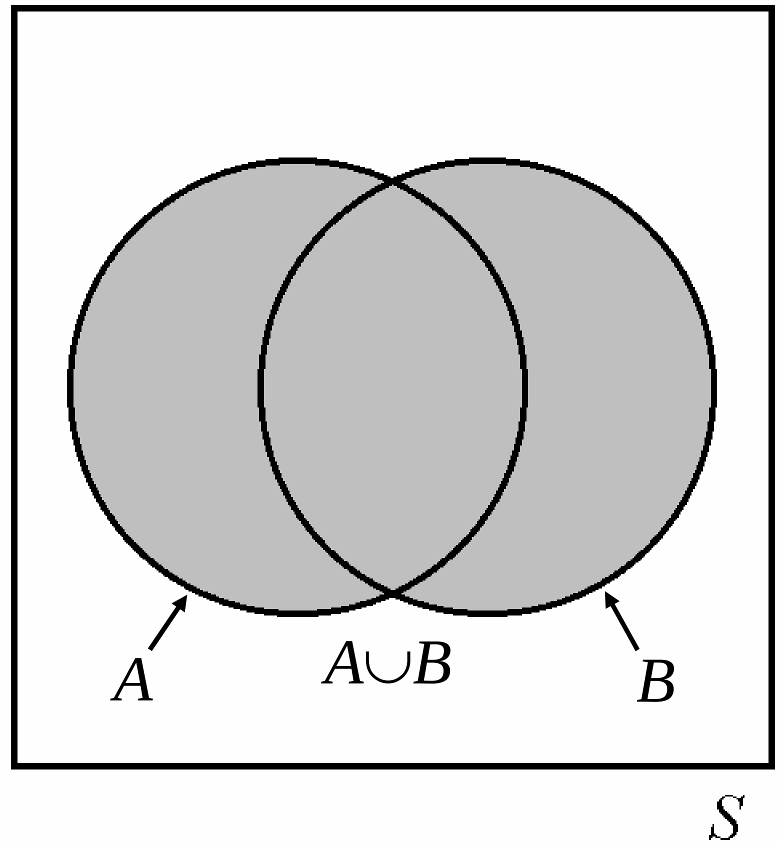
Tapahtumien *A* ja *B* yhdiste

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otos-avaruuden S tapahtumia.
- Yhdistetty tapahtuma

  $A \cup B$ = ”*A sattuu tai B sattuu tai molemmat sattuvat*”

  on niiden alkeistapahtumien joukko, jotka kuuluvat joukkoon A *tai* joukkoon B *tai* molempiin:

  $$A \cup B = \{s \in S \mid s \in A \text{ tai } s \in B\}$$



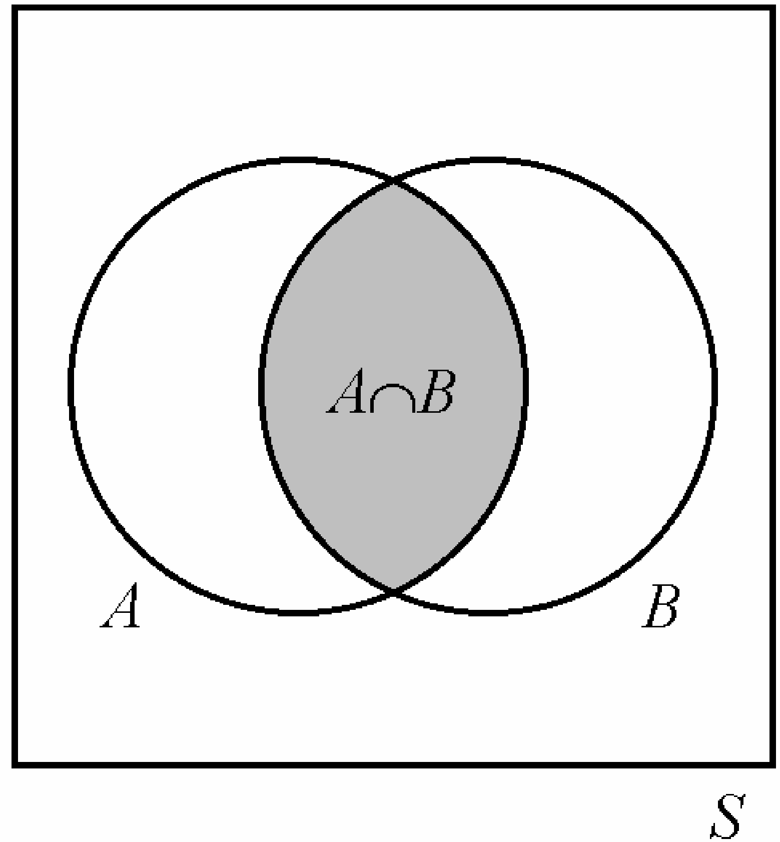
Tapahtumien *A* ja *B* leikkaus

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otos-avaruuden S tapahtumia.
- Yhdistetty tapahtuma

  $A \cap B$ = ”*A ja B sattuvat*”

  on niiden alkeistapahtumien joukko, jotka kuuluvat joukkoon *A ja* joukkoon *B*:

  $A \cap B$
  $= \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \in B\}$



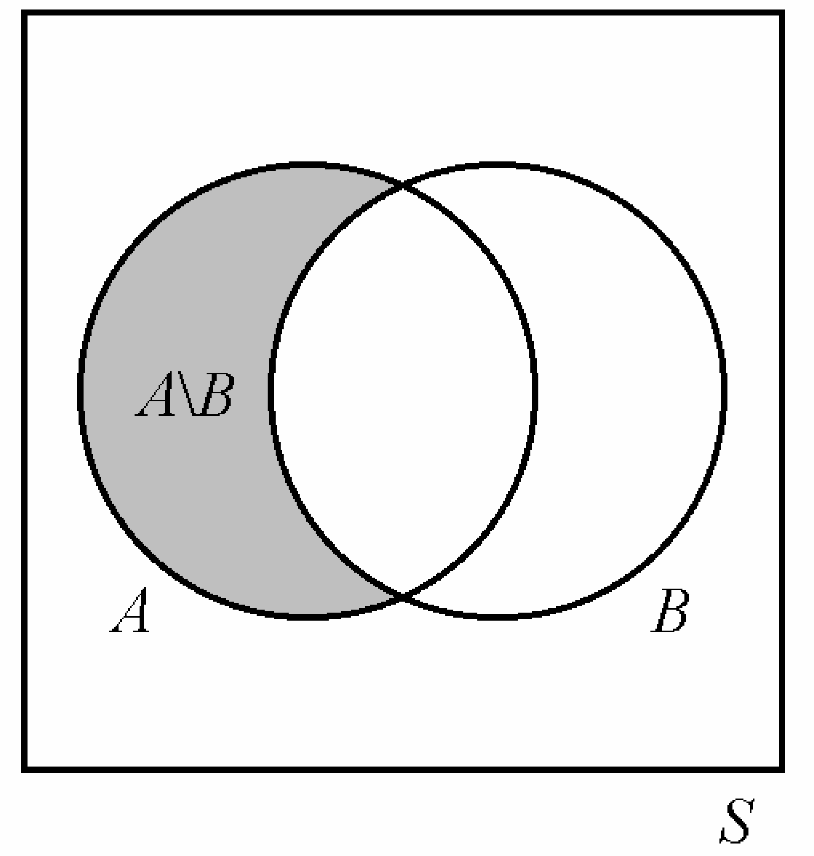
Tapahtumien *A* ja *B* erotus

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otos-avaruuden S tapahtumia.
- Yhdistetty tapahtuma

  $A \backslash B$ = ”*A sattuu, mutta B ei satu*”

  on niiden alkeistapahtumien joukko, jotka kuuluvat joukkoon A, *mutta eivät* kuulu joukkoon B:

  $$A \backslash B = \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \notin B\} = A \cap B^c$$



Esimerkkiaineisto 1: Eduskunnan kokoonpano – 1/3

- Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä havainnollistetaan tässä kappaleessa useilla esimerkeillä, joissa yksi tai useampia kansanedustajia valitaan *satunnaisesti* kaikkien kansanedustajien joukosta.
- Esimerkeissä eduskunnan kokoonpano on vuoden 1999 eduskuntavaalien tuloksen mukainen.
- Edustajan *satunnaista* valintaa voidaan kuvata *arvontana*, joka voidaan toteuttaa esim. seuraavalla tavalla:

  (1) Asetetaan jokaista edustajaa vastaamaan *arpalippu*.

  (2) Pannaan arpaliput *uurnaan*.

  (3) *Sekoitetaan* uurnan sisältö huolellisesti.

  (4) *Nostetaan* uurnasta arpalippu, jota vastaava edustaja valitaan.

Esimerkkiaineisto 1: Eduskunnan kokoonpano – 2/3

- Arvonta voidaan *toistaa* kahdella eri tavalla:

  (i) Arpalippu *palautetaan* noston jälkeen uurnaan ja uurnan sisältö *sekoitetaan* huolellisesti.

  Tällöin sama edustaja *voi* tulla valituksi *uudelleen*.

  (ii) Arpalippua *ei palauteta* noston jälkeen uurnaan.

  Tällöin sama edustaja *ei voi* tulla valituksi *kuin kerran*.
- Arvontamenetelmää (i) kutsutaan **otoksen poimimiseksi takaisinpanolla**.
- Arvontamenetelmää (ii) kutsutaan **otoksen poimimiseksi ilman takaisinpanoa**.
- Esimerkki:

  Lottoarvonnassa sovelletaan otantaa ilman takaisinpanoa.

Esimerkkiaineisto 1: Eduskunnan kokoonpano – 3/3

Edustajapaikkojen jakautuminen vuoden 1999 vaaleissa:

Puolue	Paikat	Miehet	Naiset
SDP	51	29	22
Kesk	48	35	13
Kok	46	29	17
Vas	20	14	6
RKP	12	9	3
Vihr	11	2	9
SKL	10	7	3
PS	1	1	0
Rem	1	1	0
Yhteensä	**200**	**127**	**73**

Esimerkkiaineisto 2: Korttipakka

- Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä havainnollistetaan tässä kappaleessa useilla esimerkeillä, joissa pelikortteja poimitaan *satunnaisesti* hyvin sekoitetusta korttipakasta.
- Korttipakassa on 52 korttia (ilman jokereita).
- Korttipakka jakautuu 4:ään *maahan*:

  pata, hertta, ruutu, risti
- Jokaisessa maassa on 13 korttia:

  A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2
- Kutsutaan kortteja

  A = ässä (kortti numero 1)
  K = kuningas
  Q = kuningatar
  J = sotilas

  kuvakorteiksi.

Todennäköisyyden peruslaskusäännöt

Uusien tapahtumien muodostaminen

>> Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle

Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

Todennäköisyyslaskennan peruslaskutoimitukset

- Oletetaan, että *tunnemme* tapahtumien *A* ja *B* todennäköisyydet.
- Tehtävänä on *määrätä* seuraavien tapahtumien todennäköisyydet:

(i) **Mikä on todennäköisyys sille, että *A ei* satu?**

(ii) **Mikä on todennäköisyys sille, että *A tai B* sattuu:**

Mikä on todennäköisyys sille, että *A* sattuu *tai* *B* sattuu *tai* molemmat sattuvat?

(iii) **Mikä on todennäköisyys sille, että *A ja B* sattuvat?**

(iv) **Mikä on todennäköisyys sille, että *A* sattuu, *mutta B ei* satu?**

Komplementtitapahtuman todennäköisyys 1/2

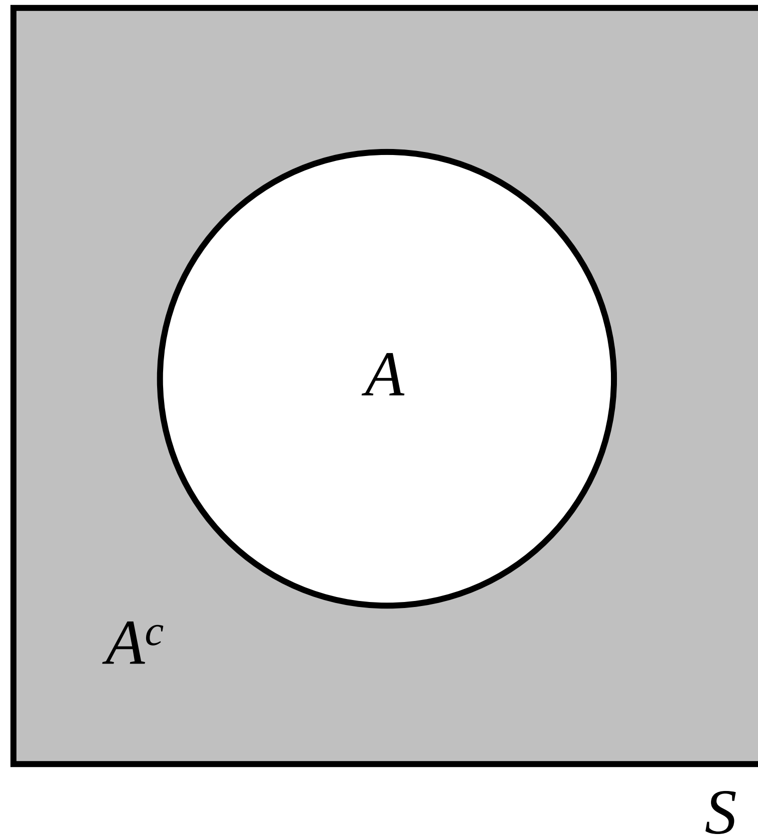
- Olkoon $A \subset S$ otos-avaruuden S tapahtuma.
- Olkoon

  A^c

  $=$ "*A ei satu*"

  $= \{s \in S \mid s \notin A\}$

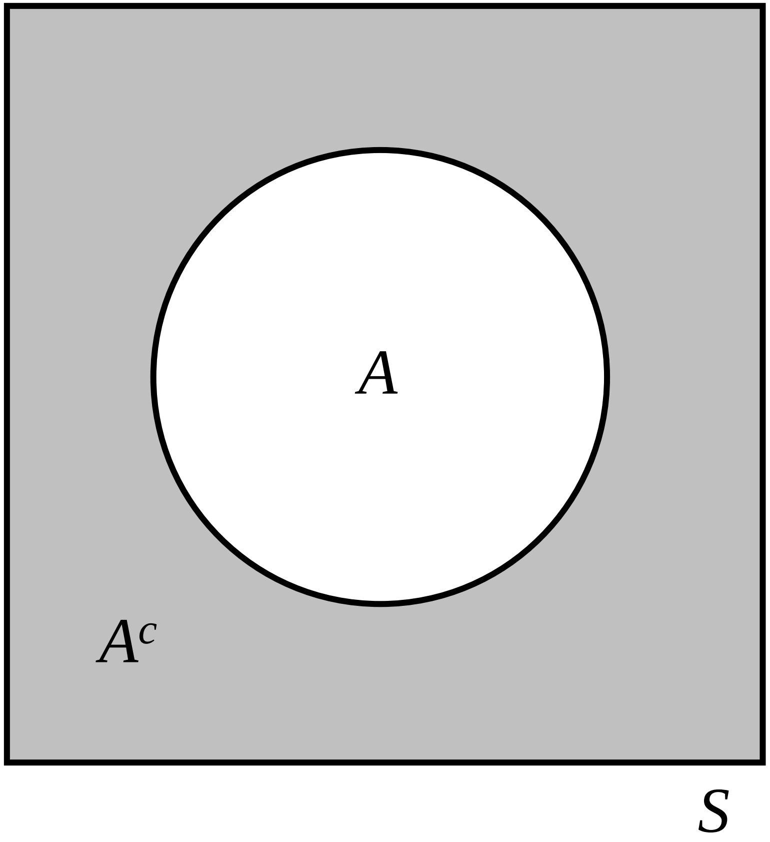
  tapahtuman A **komplementtitapahtuma**.



Komplementtitapahtuman todennäköisyys 2/2

- Olkoon tapahtuman A todennäköisyys $\Pr(A)$.
- Tällöin tapahtuman A **komplementtitapahtuman** A^c **todennäköisyys** on

  $$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$$



Komplementtitapahtuman todennäköisyys: Esimerkki eduskunnasta

- Vuoden 1999 eduskunnassa:

$$n_{Sosialistit} = n_{SDP} + n_{Vas} = 51 + 20 = 71$$
$$n_{Ei\text{-}sosialistit} = 200 - n_{Sosialistit} = 200 - 71 = 129$$

- Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu edustaja oli ei-sosialisti:

$$\begin{aligned}\Pr(\text{Ei-sosialisti}) &= 1 - \Pr(\text{Sosialisti}) \\ &= 1 - \frac{71}{200} \\ &= \frac{129}{200} \\ &= 0.645\end{aligned}$$

Toisensa poissulkevat tapahtumat 1/2

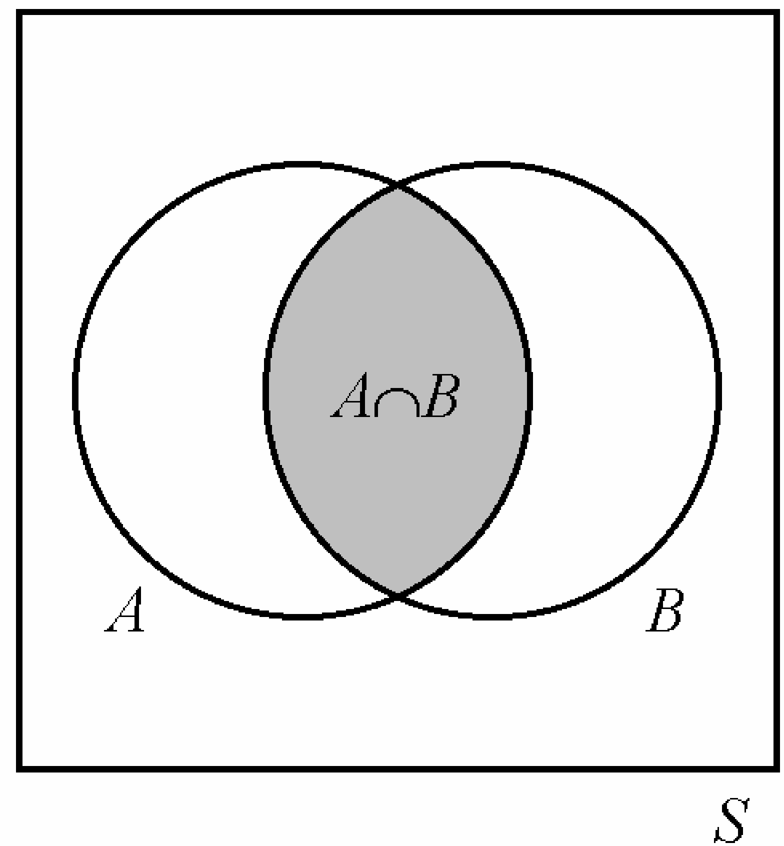
- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otos-avaruuden S tapahtumia.
- Olkoon

$A \cap B$

$= $ ”*A ja B sattuvat*”

$= \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \in B\}$

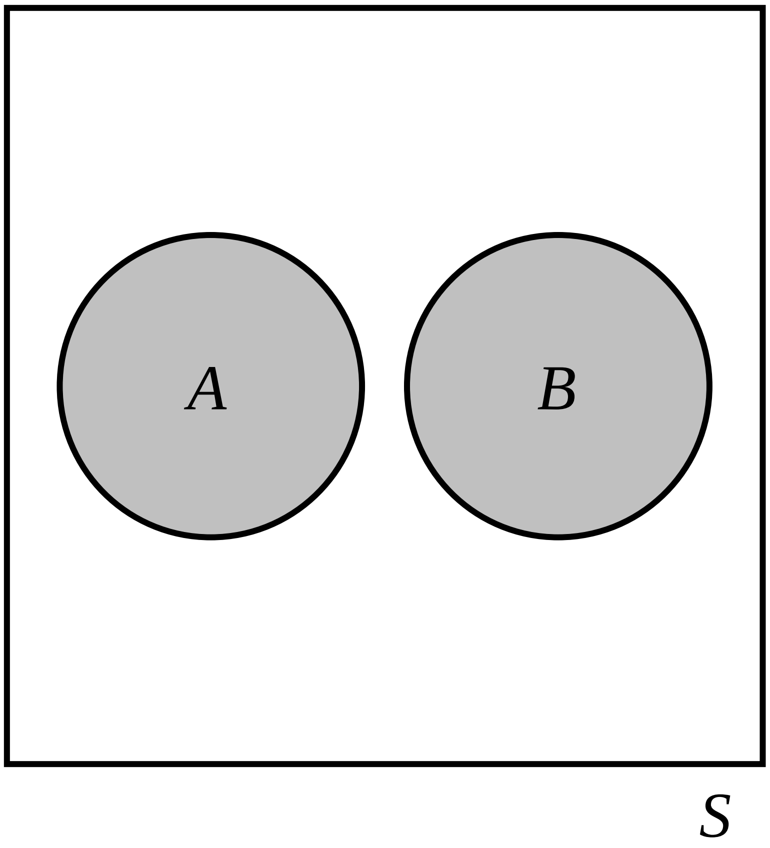
tapahtumien A ja B **leikkaus**.



Toisensa poissulkevat tapahtumat 2/2

- Tapahtumat *A* ja *B* ovat **toisensa poissulkevia**, jos *A* ja *B eivät voi sattua samanaikaisesti*.
- Tapahtumat *A* ja *B* ovat toisensa poissulkevia, jos ne ovat otosavaruuden *S* osajoukkoina *pistevieraita* eli

  $A \cap B = \varnothing$



Toisensa poissulkevat tapahtumat: Esimerkki eduskunnasta

- Kansanedustaja ei voi olla kahden puolueen jäsen.
- Olkoon

  A = ”Edustaja kuuluu vasemmistoliittoon”

  B = ”Edustaja kuuluu kokoomukseen”
- Tällöin tapahtumat A ja B ovat toisensa poissulkevia, koska yksikään kansanedustaja ei voi olla kahden puolueen jäsen, mikä merkitsee sitä, että joukot A ja B ovat pistevieraita:

  $$A \cap B = \varnothing$$

Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille 1/3

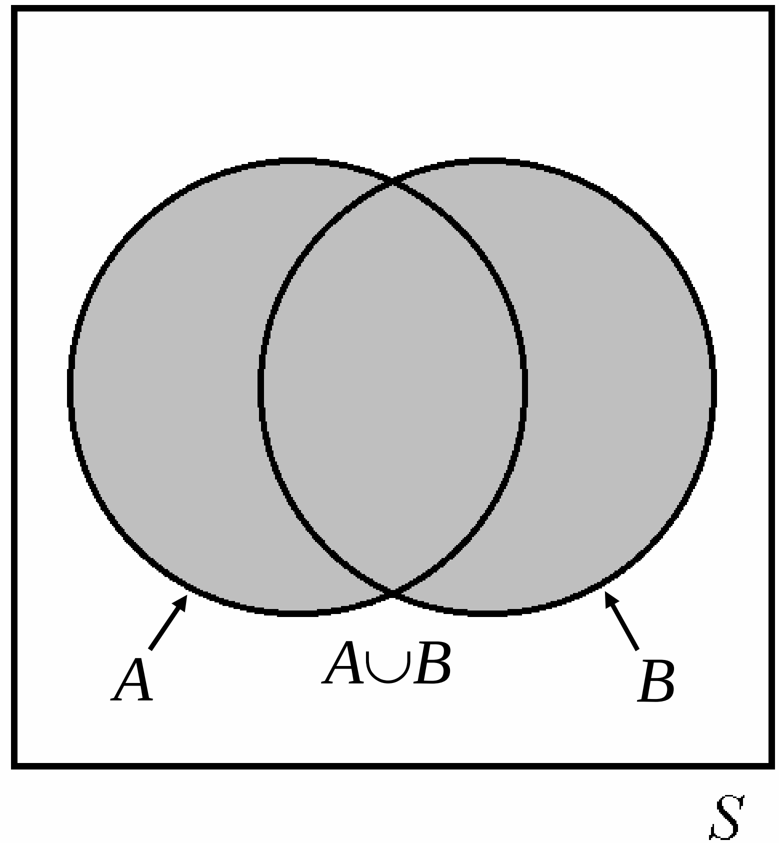
- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otos-avaruuden S tapahtumia.
- Olkoon

$A \cup B$

= ”*A tai B sattuu*”

$= \{s \in S \mid s \in A \text{ tai } s \in B\}$

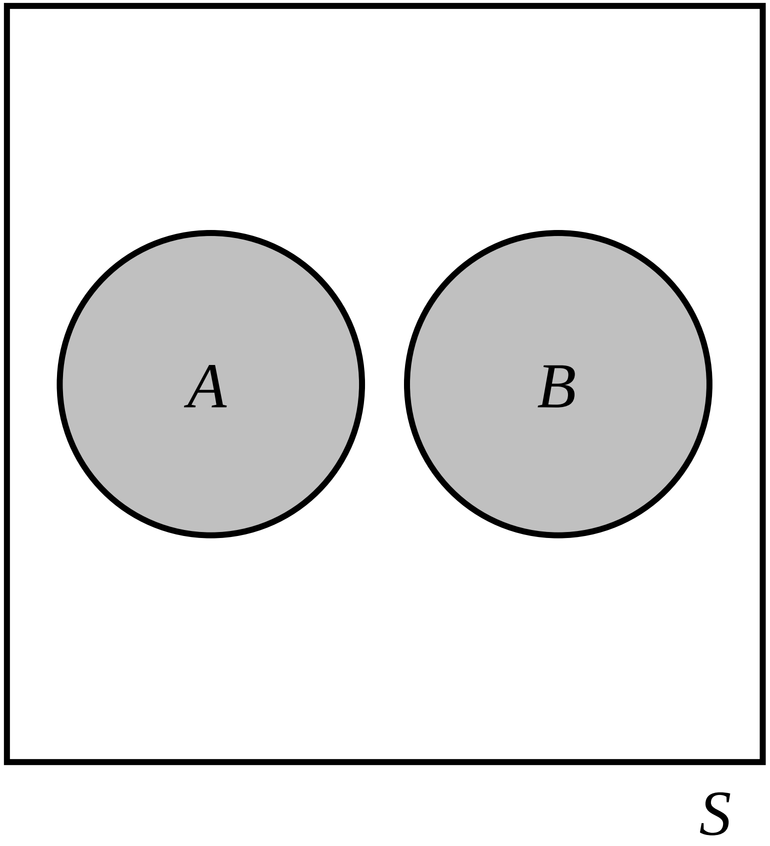
tapahtumien A ja B **yhdiste**.



Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille 2/3

- Olkoot tapahtumat A ja B **toisensa poissulkevia**.
- Tällöin A ja B ovat otos-avaruuden S osajoukkoina *pistevieraita* eli

  $A \cap B = \varnothing$



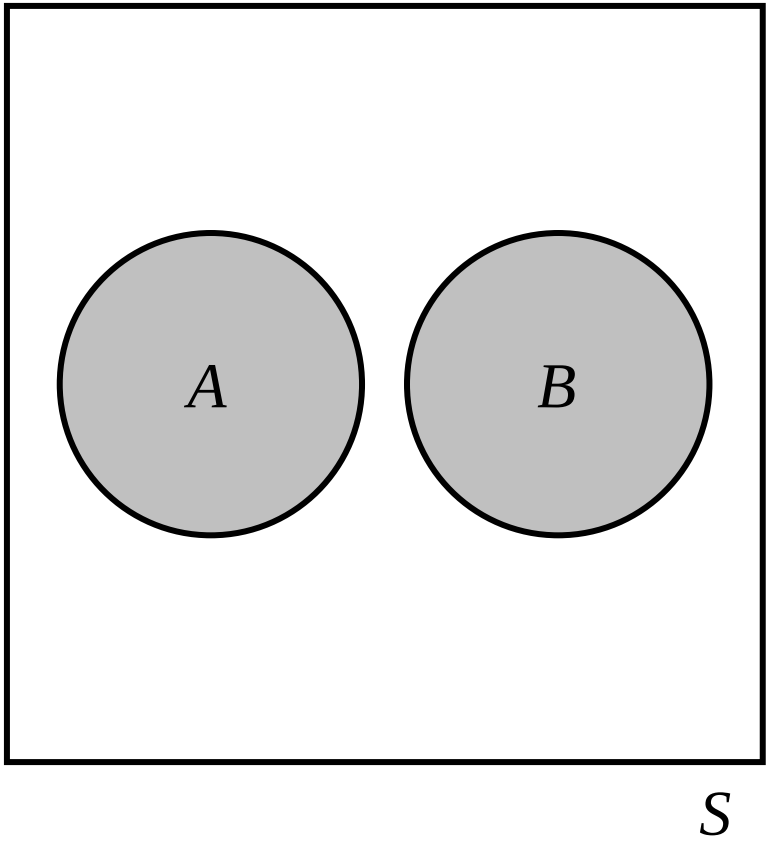
Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille 3/3

- Olkoon tapahtuman A todennäköisyys $\Pr(A)$.
- Olkoon tapahtuman B todennäköisyys $\Pr(B)$.
- Jos A ja B ovat *toisensa poissulkevia*, **yhdisteen**

  $A \cup B$ = ”*A tai B sattuu*”

  todennäköisyys on

  $$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$



Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille: Esimerkki eduskunnasta

- Vuoden 1999 eduskunnassa:

$$n_{Sosialistit} = n_{SDP} + n_{Vas} = 51 + 20 = 71$$

- Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu edustaja oli sosialisti:

$$\begin{aligned}\Pr(\text{Sosialisti}) &= \Pr(\text{SDP}) + \Pr(\text{Vas}) \\ &= \frac{51}{200} + \frac{20}{200} \\ &= \frac{71}{200} \\ &= 0.355.\end{aligned}$$

Komplementtitapahtuman todennäköisyys: Perustelu

- Tapahtuma A ja sen *komplementti-tapahtuma* A^c ovat toisensa pois-sulkevia:

  $A \cap A^c = \varnothing$

- Lisäksi otosavaruudelle S pätee aina:

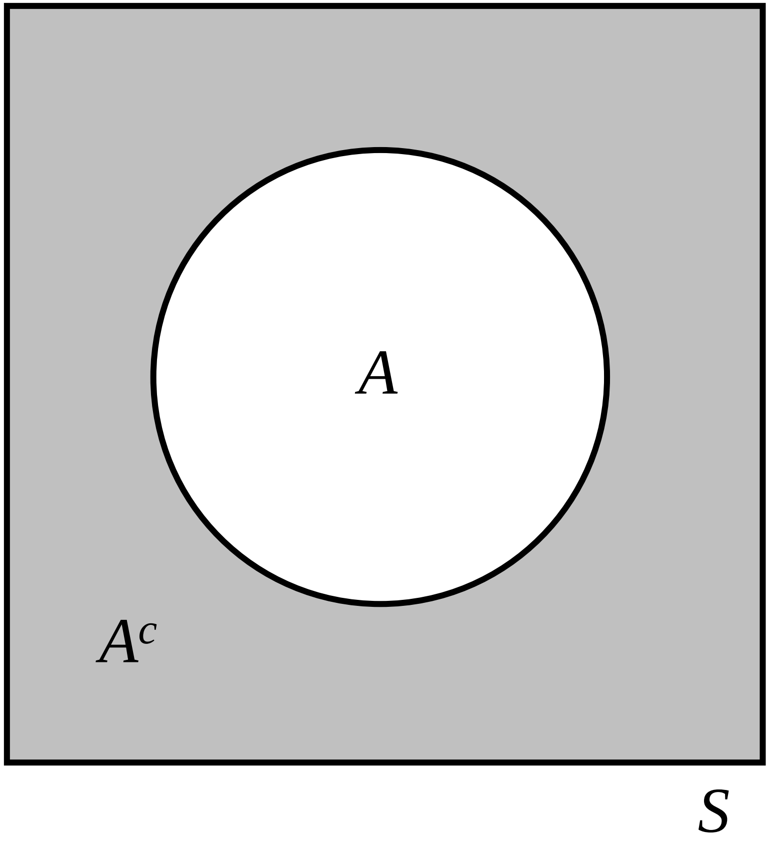
  $S = A \cup A^c$

- Siten *toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan*

  $\Pr(S) = 1 = \Pr(A) + \Pr(A^c)$

- Siten *komplementtitapahtuman* A^c *todennäköisyydeksi* saadaan:

  $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$



Yleistetty yhteenlaskusääntö pareittain toisensa poissulkeville tapahtumille

- Olkoot $A_1, A_2, \ldots , A_k$ **pareittain toisensa poissulkevia**.
- Tällöin $A_i \cap A_j = \emptyset$, kun $i \neq j$.
- Olkoon tapahtuman A_i todennäköisyys

  $\Pr(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots , k$.
- Tällöin **yhdisteen**

  ”A_1 *tai* A_2 *tai* … *tai* A_k *sattuu*”

  todennäköisyys on

$$\Pr(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \cdots + \Pr(A_k)$$

Riippumattomuus

- Tapahtuma A on **riippumaton** tapahtumasta B, jos B:n tapahtuminen (tai tapahtumatta jääminen) *ei vaikuta* A:n tapahtumisen todennäköisyyteen.
- Riippumattomuus on *symmetrinen* ominaisuus:

  Jos A on riippumaton B:stä, niin B on riippumaton A:sta.
- Riippumattomuuden symmetrisyyden takia sanomme yksinkertaisesti, että A ja B ovat riippumattomia.
- Merkitään tapahtumien A ja B riippumattomuutta:

$$A \perp B$$

- Riippumattomuuden käsite saa lisävalaistusta *ehdollisen todennäköisyyden* käsitteestä.

Riippumattomuus: Esimerkit rahanheitosta ja arvonnasta

- **Rahanheitto:**

  Heitetään toistuvasti rahaa.

  Tällöin on järkevää olettaa, että heittojen tulokset eivät riipu aikaisemmin tehtyjen heittojen tuloksista.

- **Arvonta:**

  Nostetaan uurnasta toistuvasti arpalippuja niin, että jokaisen noston jälkeen nostettu lippu palautetaan uurnaan ja uurnan sisältö sekoitetaan huolellisesti (otanta takaisinpanolla).

  Tällöin on järkevää olettaa, että nostojen tulokset eivät riipu aikaisemmin tehtyjen nostojen tuloksista.

Tulosääntö riippumattomille tapahtumille 1/2

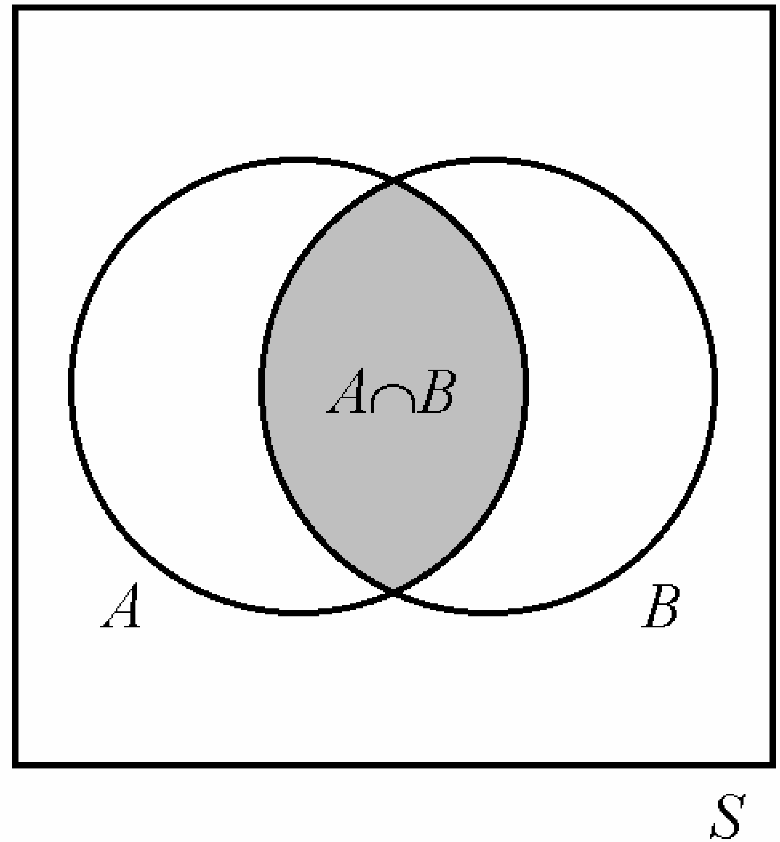
- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otos-avaruuden S tapahtumia.
- Olkoon

$A \cap B$

= ”*A ja B sattuvat*”

$= \{ s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \in B \}$

tapahtumien A ja B **leikkaus**.



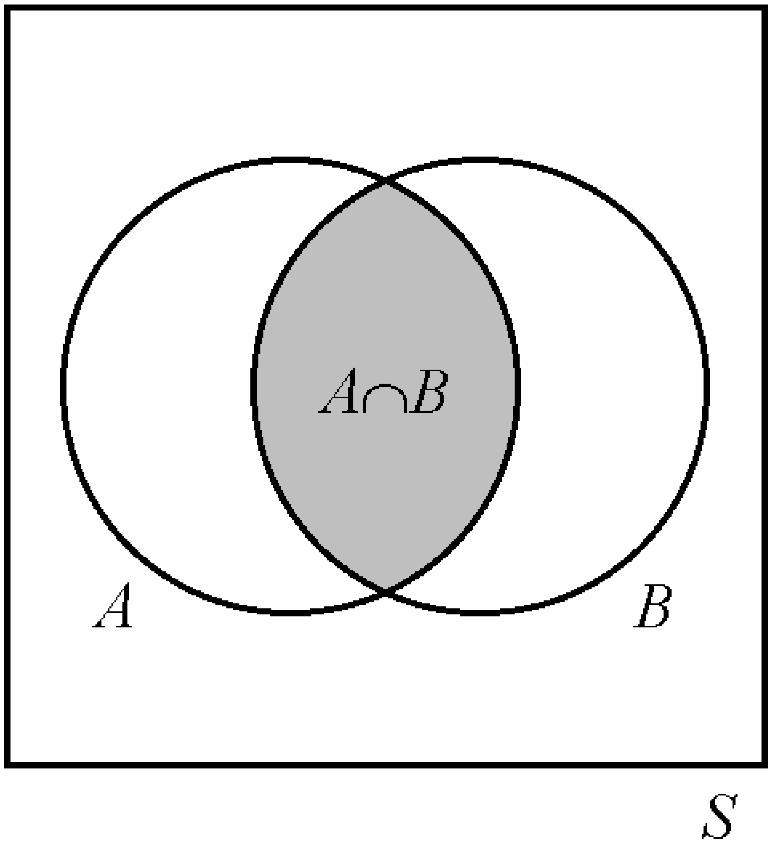
Tulosääntö riippumattomille tapahtumille 2/2

- Olkoon tapahtuman A todennäköisyys $\Pr(A)$.
- Olkoon tapahtuman B todennäköisyys $\Pr(B)$.
- Tapahtumat A ja B **riippumattomia**, jos ja vain jos **leikkauksen**

  $A \cap B$ = ”*A ja B sattuvat*”

  todennäköisyydelle pätee:

  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$



Tulosäännön intuitiivinen perustelu: Esimerkki laadunvalvonnasta 1/2

- Tarkastellaan TV-vastaanottimien valmistusta ja niiden laadunvalvontaa.
- Oletetaan, että valmistetuissa TV-vastaanottimissa voi esiintyä kaksi erilaista vikaa:

  A = ”Kuvaputki ei toimi”
  B = ”Vahvistin ei toimi”
- Vika A on 5 %:ssa TV-vastaanottimia.
- Vika B on 3 %:ssa TV-vastaanottimia.
- Oletetaan, että viat syntyvät *toisistaan riippumatta*.

Tulosäännön intuitiivinen perustelu: Esimerkki laadunvalvonnasta 2/2

- Vikojen *riippumattomuuden* takia:
  - (i) 3 %:ssa niistä TV-vastaanottimia, joissa on vika *A*, on *myös* vika *B*.
  - (ii) 5 %:ssa niistä TV-vastaanottimia, joissa on vika *B*, on *myös* vika *A*.
- Niiden TV-vastaanottimien osuus, joissa on *sekä* vika *A että* vika *B*:

$$0.03 \times 0.05 = 0.0015 = 0.15\ \%$$

Tulosääntö riippumattomille tapahtumille: Esimerkki rahanheitosta

- Heitetään rahaa kaksi kertaa.

  Pr(Kruuna) = Pr(Klaava) =1/2
  A = ”Saadaan kruuna 1. heitolla”
  B = ”Saadaan kruuna 2. heitolla”

- Voidaan olettaa, että A ja B ovat riippumattomia.
- Tällöin

$$\Pr(A \ \ ja \ B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Tulosääntö riippumattomille tapahtumille: Esimerkki korttipakasta 1/2

- A = ”Satunnaisesti korttipakasta valittu kortti on pata”

  $\Pr(A) = 13/52 = 1/4$

- B = ”Satunnaisesti korttipakasta valittu kortti on ässä”

  $\Pr(B) = 4/52 = 1/13$

- $A \cap B$ = ”Satunnaisesti korttipakasta valittu kortti on pataässä”
- Tällöin

$$\begin{aligned}\Pr(A \cap B) &= \Pr(A)\Pr(B) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{13} \\ &= \frac{1}{52}\end{aligned}$$

Tulosääntö riippumattomille tapahtumille: Esimerkki korttipakasta 2/2

Intuitiivinen perustelu tulosäännön käytölle:

- Korttipakan korteista 1/4 on patoja.
- Korttipakan korteista 1/13 on ässiä.
- Myös niistä korteista, jotka ovat patoja 1/13 on ässiä.
- Siten pataässien osuus korttipakan korteista on

$$\frac{1}{13} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{52}$$

- Koska pataässiä on korttipakassa täsmälleen yksi, saadaan tietysti myös suoraan

$$\Pr(\text{Satunnaisesti valittu kortti on pataässä}) = 1/52$$

Yleistetty tulosääntö riippumattomille tapahtumille

- Olkoon tapahtuman A_i todennäköisyys

$$\Pr(A_i)\ ,\ i = 1, 2, \ldots, k$$

- Tapahtumat A_1, A_2, … , A_k ovat **riippumattomia**, jos ja vain jos *kaikille* **leikkauksille**

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}$$

joissa

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$$

pätee:

$$\Pr(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}) = \Pr(A_{i_1}) \times \Pr(A_{i_2}) \times \cdots \times \Pr(A_{i_m})$$

- Merkitään tapahtumien A_1, A_2, … , A_k riippumattomuutta:

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \perp$$

Yleistetty tulosääntö riippumattomille tapahtumille: Esimerkki rahanheitosta

- Heitetään rahaa 10 kertaa.
- Pr(Kruuna) = 1/2.
- Tällöin

$$\begin{aligned}
\Pr(10\text{ kruunaa}) &= \Pr(\text{Kruuna 1. heitolla}) \times \cdots \times \Pr(\text{Kruuna 10. heitolla}) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2}}_{10\text{ kappaletta}} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \\
&= 0.000977
\end{aligned}$$

- *Todennäköisyyden frekvenssitulkinnasta* seuraa:

  Jos suuresta joukosta ihmisiä jokainen pannaan heittämään rahaa 10 kertaa, on odotettavissa, että suunnilleen 1/1000 heittäjistä saa tulokseksi 10 kruunaa!

Yleinen yhteenlaskusääntö 1/3

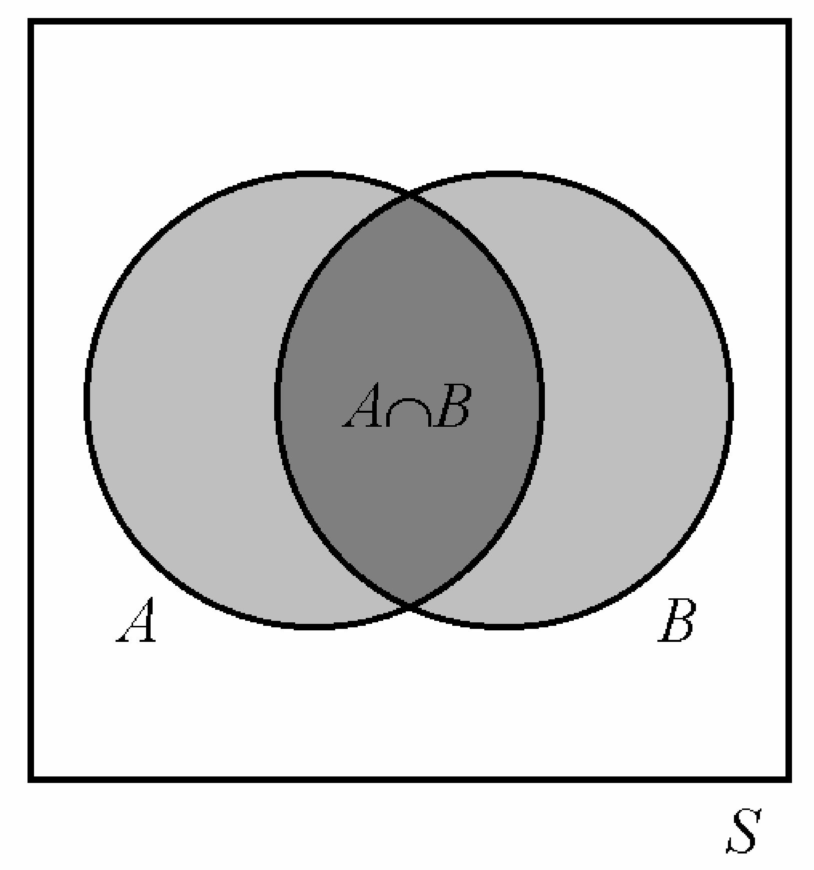
- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otosavaruuden S tapahtumia.
- Olkoon

$A \cup B$

$=$ ”*A tai B sattuu*”

$= \{s \in S \mid s \in A \text{ tai } s \in B\}$

tapahtumien A ja B **yhdiste**.



Yleinen yhteenlaskusääntö 2/3

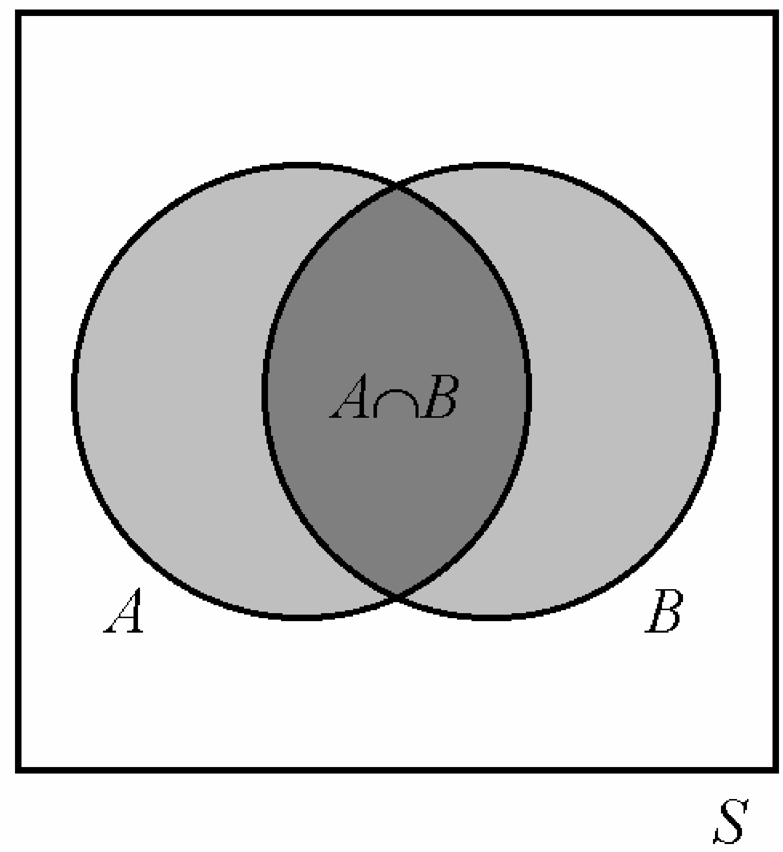
- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otos-avaruuden S tapahtumia.
- Olkoon

  $A \cap B$

  = ”*A ja B sattuvat*”

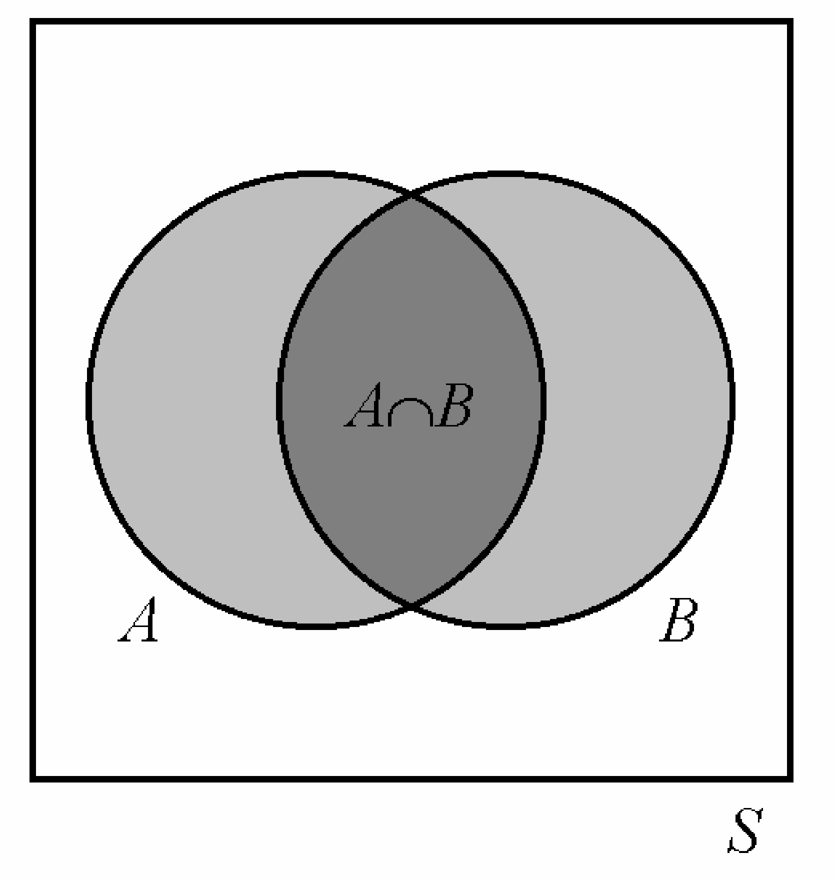
  $= \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \in B\}$

  tapahtumien A ja B **leikkaus**.



Yleinen yhteenlaskusääntö 3/3

- Olkoot tapahtumien
  A, B, $A \cap B$
  todennäköisyydet
  $\Pr(A)$, $\Pr(B)$, $\Pr(A \cap B)$
- Tällöin **yhdisteen**
  $A \cup B$ = ”*A tai B sattuu*”
  todennäköisyys on
  $\Pr(A \cup B)$
  $= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$



Yleinen yhteenlaskusääntö: Esimerkki uskonnoista Japanissa

- Tilastojen mukaan 80 % japanilaisista on shintolaisia ja
  80 % japanilaisista on buddhalaisia.
- Onko 160 % japanilaisista shintolaisia *tai* buddhalaisia?
- *Ei*, koska suuri osa japanilaisista noudattaa *kummankin* uskonnon menoja:

  Häät pidetään tavallisesti shintolaisten menojen mukaan,
  hautajaiset järjestetään tavallisesti buddhalaisten menojen mukaan.
- Annetuista tiedoista voidaan päätellä:
  - 80-100 % japanilaisista on *joko* shintolaisia *tai* buddhalaisia,
  - 60-80 % japanilaisista on *sekä* shintolaisia *että* buddhalaisia.

Yleinen yhteenlaskusääntö: Esimerkki levikkitutkimuksesta

- *Levikkitutkimuksessa* saatiin selville, että erään kunnan asukkaat lukevat Seuraa ja Apua seuraavasti:

Seura	20 %
Apu	16 %
Seura ja Apu	1 %

- Tällöin

$$
\begin{aligned}
\Pr(\text{Seura } \textit{tai} \text{ Apu}) &= \Pr(\text{Seura}) + \Pr(\text{Apu}) - \Pr(\text{Seura } \textit{ja} \text{ Apu}) \\
&= \frac{20}{100} + \frac{16}{100} - \frac{1}{100} \\
&= \frac{35}{100} \\
&= 0.35
\end{aligned}
$$

Erotustapahtuman todennäköisyys 1/2

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otos-avaruuden S tapahtumia.
- Olkoon

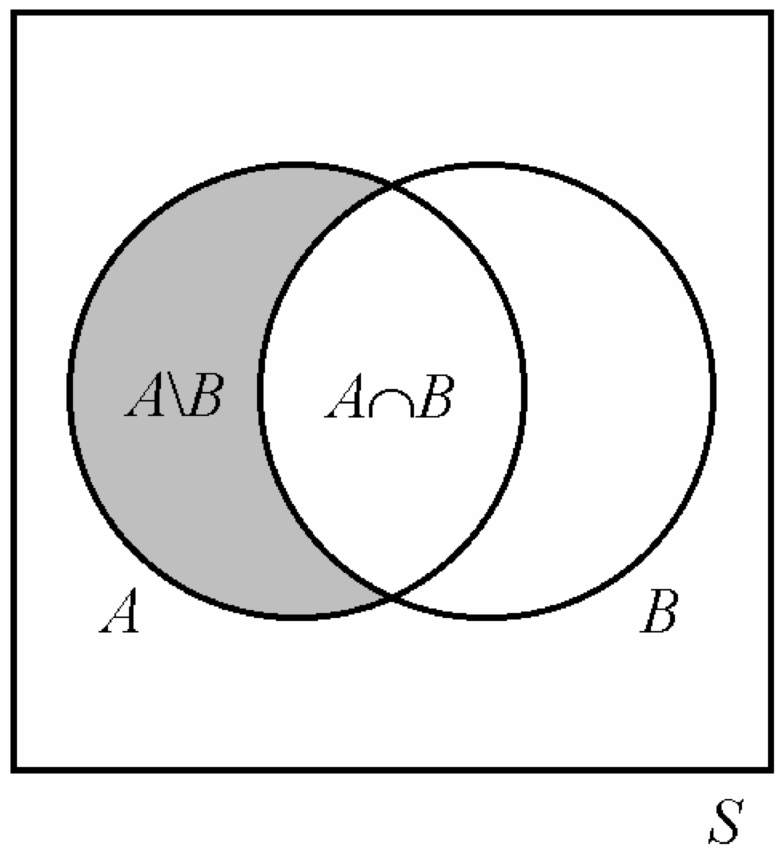
$A \backslash B$

= *"A sattuu, mutta B ei satu"*

$= \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \notin B\}$

$= A \cap B^c$

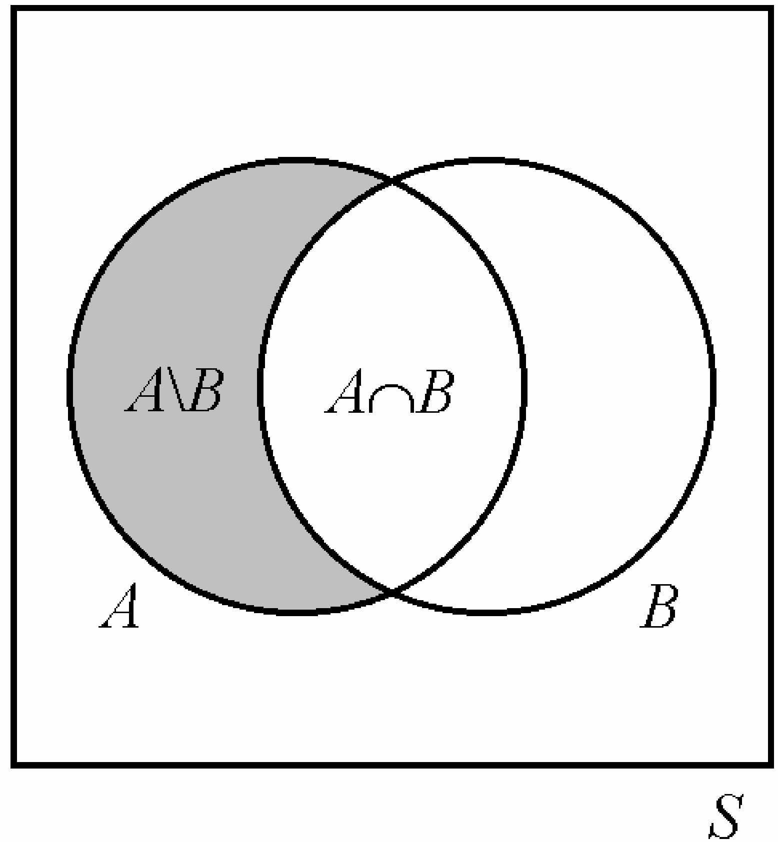
tapahtumien A ja B **erotus**.



Erotustapahtuman todennäköisyys 2/2

- Olkoon tapahtuman A todennäköisyys $\Pr(A)$.
- Olkoon tapahtuman $A \cap B$ todennäköisyys $\Pr(A \cap B)$.
- Tällöin **erotustapahtuman** $A \backslash B$ = ”*A sattuu, mutta B ei satu*” **todennäköisyys** on

$$\Pr(A \backslash B)$$
$$= \Pr(A \cap B^c)$$
$$= \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$$



Erotustapahtuman todennäköisyys: Esimerkki korttipakasta 1/2

- 52:n kortin pakassa on 16 kuvakorttia ja 13 patakorttia, joista 4 on kuvakortteja.
- Olkoon

  A = ”Satunnaisesti valittu kortti on pata”
  B = ”Satunnaisesti valittu kortti on kuva”

- Tällöin

  $A \backslash B$ = ”Satunnaisesti valittu kortti on pata, *mutta* ei ole kuvakortti”

Erotustapahtuman todennäköisyys: Esimerkki korttipakasta 2/2

- Tällöin

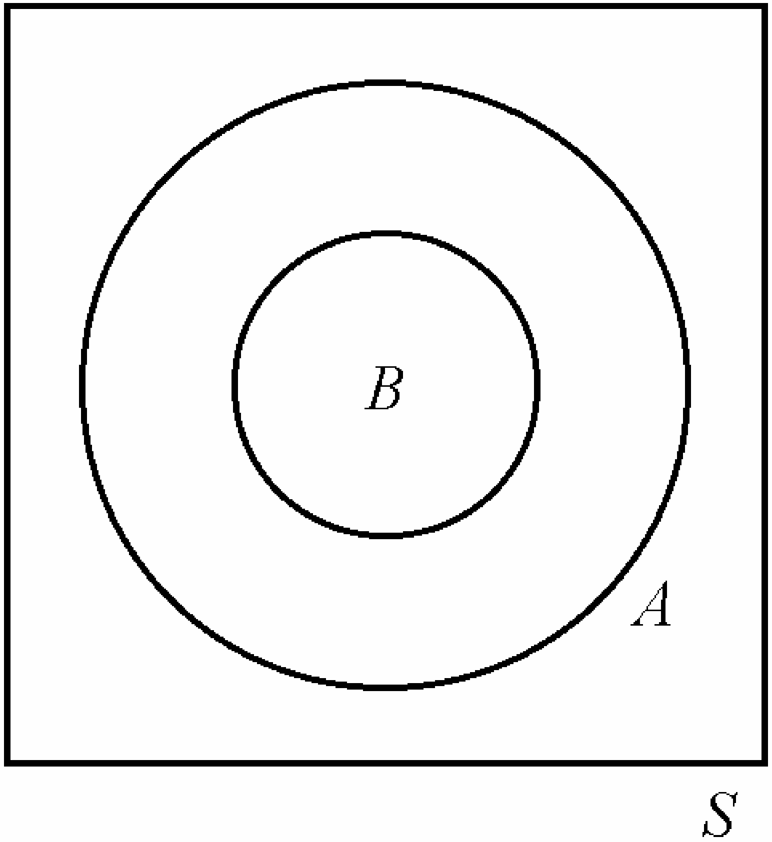
$$\begin{aligned}\Pr(A \setminus B) &= \Pr(A) - \Pr(A \cap B) \\ &= \frac{13}{52} - \frac{4}{52} \\ &= \frac{9}{52}\end{aligned}$$

- Tulos on tietysti selvä muutenkin, koska patoja, jotka eivät ole kuvia, on 9 kpl eli kortit 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.

Tapahtuman *B* sattumisesta seuraa tapahtuman *A* sattuminen

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otosavaruuden S tapahtumia.
- Oletetaan, että *jos B sattuu*, *niin A sattuu*.
- Tällöin $B \subset A$.
- Olkoot tapahtumien A ja B todennäköisyydet $\Pr(A)$ ja $\Pr(B)$.
- Tällöin:

  $\Pr(A) \geq \Pr(B)$



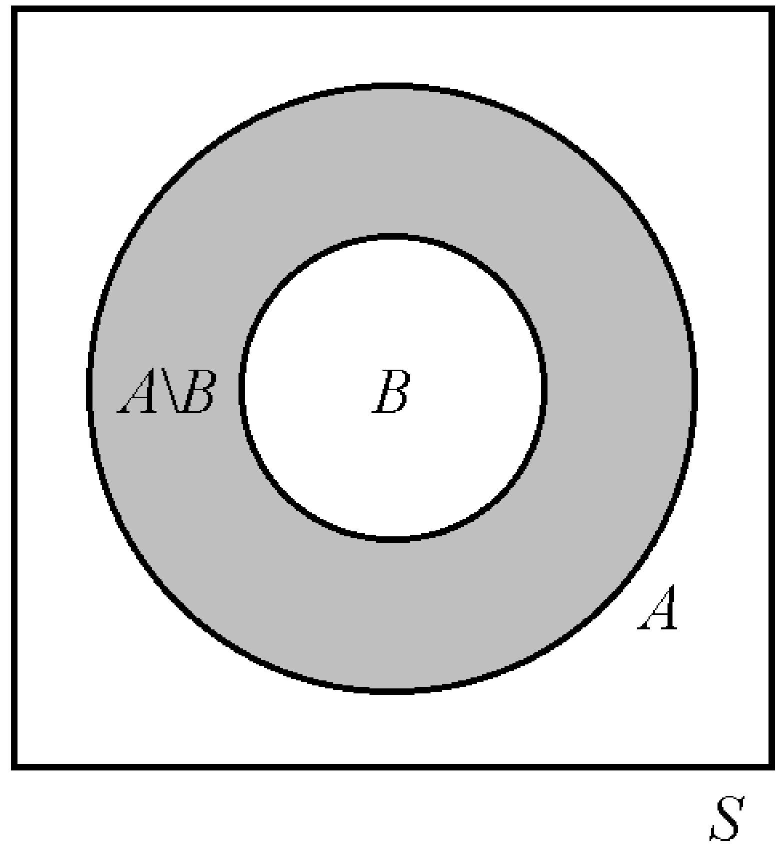
Erotustapahtuman todennäköisyys, kun *B*:n sattumisesta seuraa *A*:n sattuminen

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otosavaruuden S tapahtumia.
- Olkoon $B \subset A$.
- Olkoot tapahtumien A ja B todennäköisyydet $\Pr(A)$ ja $\Pr(B)$.
- Tällöin **erotustapahtuman**

  $A \backslash B$ = *"A sattuu, mutta B ei satu"*

  todennäköisyys on

  $$\Pr(A \backslash B) = \Pr(A) - \Pr(B)$$

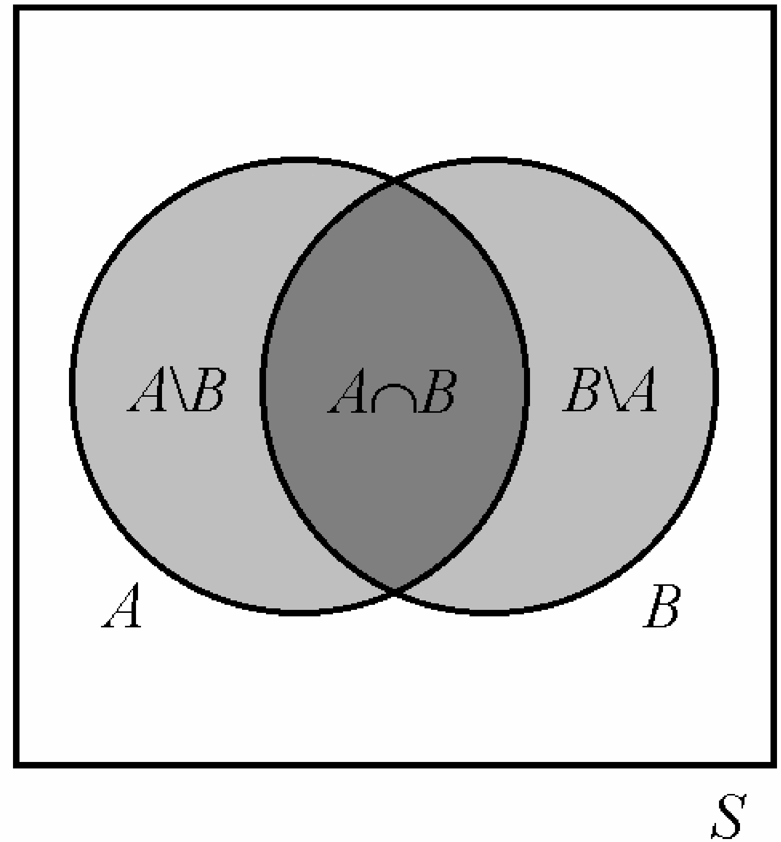


Yhdisteen *A*∪*B* todennäköisyys: Vaihtoehtoisia laskusääntöjä 1/2

- Olkoot $A \subset S$ ja $B \subset S$ otosavaruuden S tapahtumia.
- *Yhdistetyn tapahtuman*

  $A \cup B$ = ”*A tai B sattuu*”

  todennäköisyys voidaan aina esittää seuraavalla kalvolla esitetyissä muodoissa.



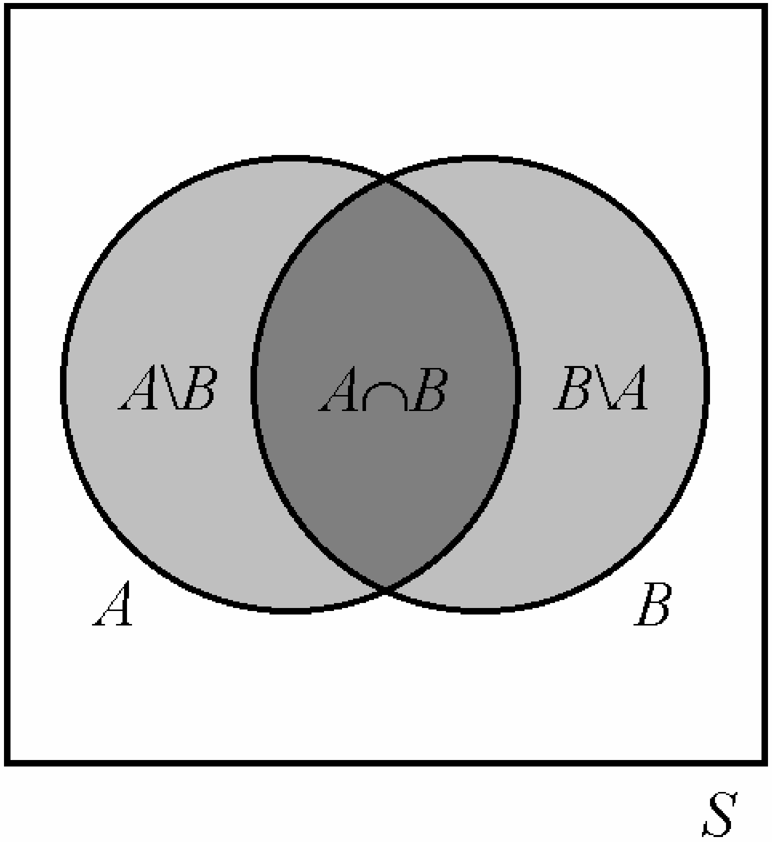
Yhdisteen *A*∪*B* todennäköisyys: Vaihtoehtoisia laskusääntöjä 2/2

- **Yhdisteen**

  $A \cup B$ = ”*A tai B sattuu*”

  todennäköisyys on

  $$\Pr(A \cup B)$$
  $$= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$
  $$= \Pr(A) + \Pr(B \backslash A)$$
  $$= \Pr(B) + \Pr(A \backslash B)$$
  $$= \Pr(A \backslash B) + \Pr(B \backslash A) + \Pr(A \cap B)$$



Todennäköisyyden peruslaskusäännöt

Uusien tapahtumien muodostaminen

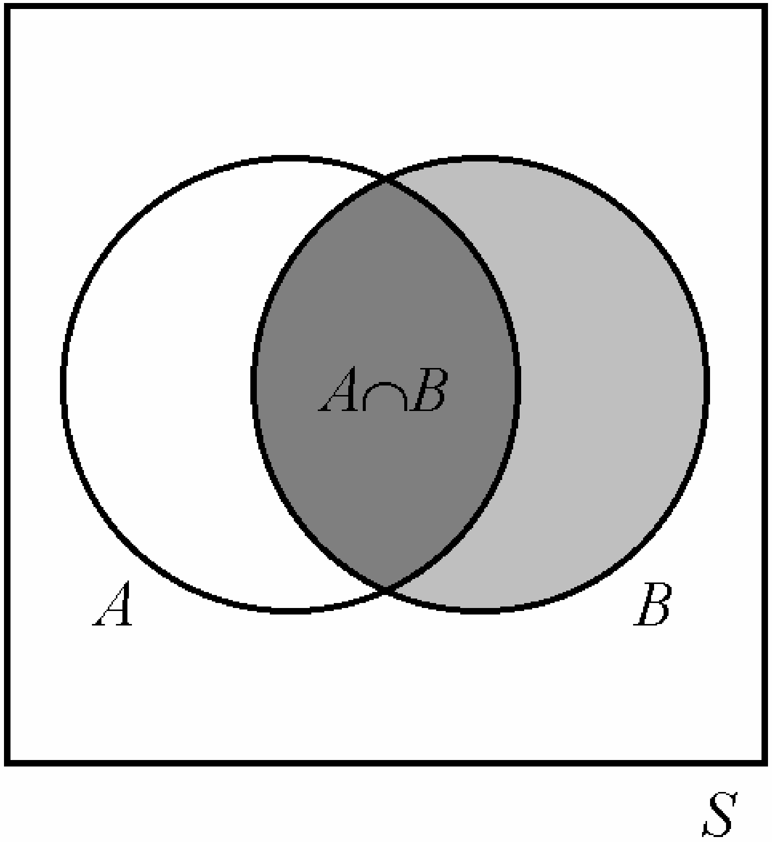
Peruslaskusäännöt todennäköisyydelle

\>> Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

Ehdollinen todennäköisyys

- Olkoon tapahtuman
  ”*A ja B sattuvat*”
  todennäköisyys $\Pr(A \cap B)$.
- Olkoon tapahtuman B todennäköisyys $\Pr(B) \neq 0$.
- Tällöin *tapahtuman A* **ehdollinen todennäköisyys** *ehdolla, että tapahtuma B on sattunut* on

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$



Ehdollinen todennäköisyys ja suhteellinen frekvenssi 1/3

- Ehdollisen todennäköisyyden määritelmää voidaan *havainnollistaa* seuraavassa esitettävällä tavalla.
- Tarkastellaan *toistuvaa* satunnaisilmiötä.
- Olkoot A ja B ko. satunnaisilmiöön liittyviä tapahtumia.
- Kun satunnaisilmiö toistuu, jokaisessa toistossa sattuu

  joko A tai *ei*-$A = A^c$

  ja

  joko B tai *ei*-$B = B^c$

Ehdollinen todennäköisyys ja suhteellinen frekvenssi 2/3

- Oletetaan, että ko. satunnaisilmiön toistuessa tuloksena on seuraava seitsemän tapahtumaparin jono:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
A^cB	AB^c	A^cB	AB	A^cB^c	A^cB	A^cB^c

- Tapahtuman A todennäköisyys tässä tapahtumajonossa on

$$\Pr(A) = \frac{2}{7}$$

- Muodostetaan ko. tapahtumaparien jonosta *karsittu* jono, johon otetaan *vain* ne tapahtumaparit, joissa B on sattunut:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
A^cB		A^cB	AB		A^cB	

Ehdollinen todennäköisyys ja suhteellinen frekvenssi 3/3

- Tapahtuman *A* todennäköisyys *karsitussa* jonossa on 1/4.
- Toisaalta *ehdollisen todennäköisyyden* kaavan mukaan

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

$$= \frac{1/7}{4/7}$$

$$= \frac{1}{4}$$

- Siten tapahtuman *A* ehdollinen todennäköisyys ehdolla, että *B* on sattunut, on tapahtuman *A* todennäköisyys *karsitussa* jonossa, johon on mukaan otettu vain ne tapahtumaparit, *joissa B on sattunut*.

Ehdollinen todennäköisyys: Esimerkki eduskunnasta 1/3

- Vuoden 1999 eduskunnan 200 kansanedustajasta 73 oli naisia.
- Mikä on todennäköisyys, että satunnaisesti valittu edustaja oli nainen?
- Merkitään

$$A = \text{"Edustaja oli nainen"}$$

- Tällöin

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= \frac{73}{200} \\ &= 0.365\end{aligned}$$

Ehdollinen todennäköisyys: Esimerkki eduskunnasta 2/3

- SDP:lla oli 51 kansanedustajaa, 29 miestä, 22 naista.
- Mikä on todennäköisyys, että satunnaisesti valittu edustaja, joka kuului SDP:n ryhmään, oli nainen?
- Tällöin *ehdollinen todennäköisyys*

$$\Pr(\text{Nainen} \mid \text{SDP}) = \frac{\Pr(\text{Nainen } \textit{ja} \text{ SDP})}{\Pr(\text{SDP})}$$

$$= \frac{22/200}{51/200} = \frac{22}{51} = 0.431 > 0.365 = \Pr(\text{Nainen})$$

- Johtopäätös: SDP:n ryhmässä oli *keskimääräistä enemmän* naisia.
- *Tässä tapauksessa* tieto siitä, että satunnaisesti valittu kansanedustaja oli SDP:stä muuttaa todennäköisyyttä, että hän oli nainen.

Ehdollinen todennäköisyys: Esimerkki eduskunnasta 3/3

- RKP:lla oli 12 kansanedustajaa, 9 miestä, 3 naista.
- Mikä on todennäköisyys, että satunnaisesti valittu edustaja, joka kuului RKP:en ryhmään, oli nainen?
- Tällöin *ehdollinen todennäköisyys*

$$\Pr(\text{Nainen} \mid \text{RKP}) = \frac{\Pr(\text{Nainen } \textit{ja} \text{ RKP})}{\Pr(\text{RKP})}$$

$$= \frac{3/200}{12/200} = \frac{3}{12} = 0.25 < 0.365 = \Pr(\text{Nainen})$$

- Johtopäätös: RKP:n ryhmässä oli *keskimääräistä vähemmän* naisia.
- *Tässä tapauksessa* tieto siitä, että satunnaisesti valittu kansanedustaja oli RKP:stä muuttaa todennäköisyyttä, että hän oli nainen.

Tapahtuman todennäköisyys ja tapahtuman ehdollinen todennäköisyys

- Tapahtuman *A ehdollinen todennäköisyys ehdolla*, *että tapahtuma B on sattunut* voi olla *pienempi*, *yhtä suuri* tai *suurempi* kuin tapahtuman *A* todennäköisyys; ks. edellistä esimerkkiä.
- Siten mikä tahansa seuraavista vaihtoehdoista *on mahdollinen*:

(i) $\Pr(A|B) > \Pr(A)$

(ii) $\Pr(A|B) = \Pr(A)$

(iii) $\Pr(A|B) < \Pr(A)$

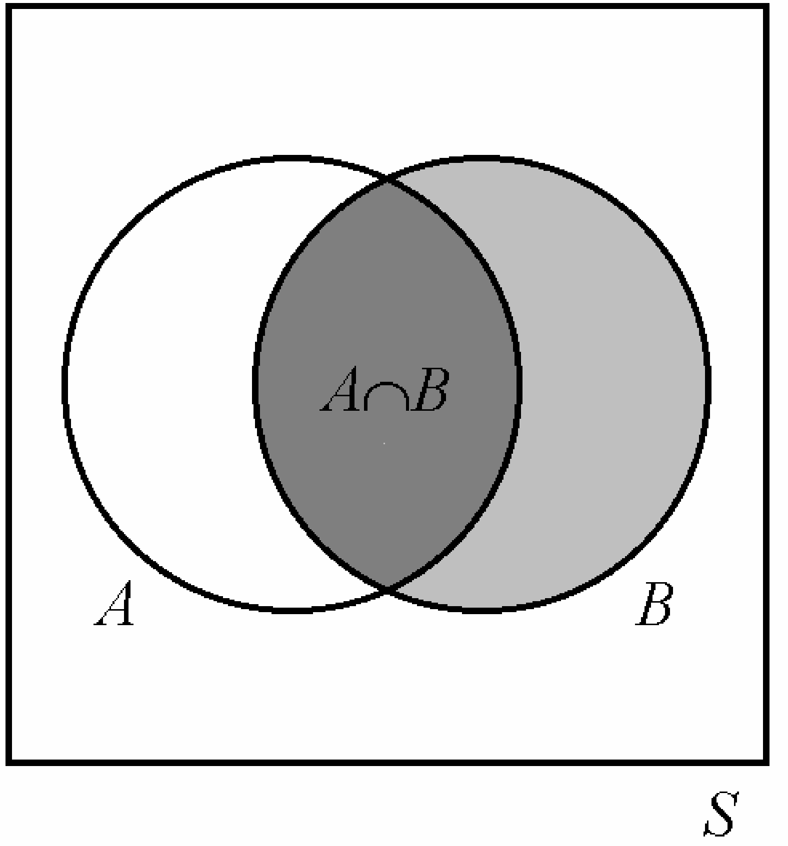
Ehdollinen todennäköisyys ja ehtotapahtuman sisältämä informaatio

- Jos
  $$\Pr(A|B) \neq \Pr(A)$$
  tieto siitä, *että tapahtuma B on sattunut*, *sisältää informaatiota*, jota voidaan käyttää hyväksi tapahtuman A todennäköisyyttä määrättäessä.
- Jos
  $$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$
  tieto siitä, *että tapahtuma B on sattunut*, *ei sisällä informaatiota*, jota voidaan käyttää hyväksi tapahtuman A todennäköisyyttä määrättäessä.
- Voidaan osoittaa, että jälkimmäinen on totta täsmälleen silloin, kun tapahtumat A ja B ovat *riippumattomia*.

Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

- Olkoon tapahtuman A todennäköisyys $\Pr(A)$.
- Olkoon tapahtuman A todennäköisyys ehdolla, että B on sattunut $\Pr(A|B)$.
- Tällöin tapahtumat A ja B ovat **riippumattomia**, jos ja vain jos

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$



Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus: Perustelu 1/2

- Oletetaan, että tapahtumat A ja B ovat *riippumattomia* ja todistetaan, että

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

- Riippumattomuuden määritelmän mukaan tällöin

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B) \qquad (1)$$

- *Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän* mukaan tapahtuman A ehdollinen todennäköisyys ehdolla, että tapahtuma B on sattunut, on

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \qquad (2)$$

- Sijoittamalla kaava (1) kaavaan (2) saadaan todistettava yhtälö

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus: Perustelu 2/2

- Oletetaan, että

$$\Pr(A \mid B) = \Pr(A)$$

ja todistetaan, että tapahtumat A ja B ovat *riippumattomia*.

- *Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän* mukaan tapahtumien A ja B leikkauksen todennäköisyys voidaan kirjoittaa muotoon

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A \mid B)\Pr(B)$$

- Siten oletuksesta seuraa suoraan, että

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

joten tapahtumat A ja B ovat *riippumattomia*.

Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus: Esimerkki 1/3

- Rutenian tasavallassa on 2 puoluetta: repijät ja säilyttäjät.
- Paikkajakauma 200-paikkaisessa parlamentissa:

Puolue	Miehet	Naiset	Paikat
Repijät	20	30	50
Säilyttäjät	60	90	150
Yhteensä	**80**	**120**	**200**

Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus: Esimerkki 2/3

- Olkoon

  A = ”Satunnaisesti valittu edustaja on mies”

  B = ”Satunnaisesti valittu edustaja on repijä”

- Tällöin

$$\Pr(A) = \frac{80}{200} = 0.4$$

$$\Pr(A \mid B) = \frac{20}{50} = 0.4$$

- Koska $\Pr(A|B) = \Pr(A)$, tapahtumat A ja B ovat riippumattomia.
- Huomaa, että myös tapahtumaparit A ja B^c , A^c ja B sekä A^c ja B^c ovat riippumattomia.

Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus: Esimerkki 3/3

- Edustajapaikkojen jakaumasta nähdään, että

$$\Pr(A \cap B) = \frac{20}{200}$$

$$\Pr(B) = \frac{50}{200}$$

- Siten myös ehdollisen todennäköisyyden kaavan mukaan

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{20/200}{50/200} = \frac{20}{50} = 0.4$$

Riippumattomuuden yhtäpitävät ehdot

- Edellä esitetyn perusteella tapahtumat A ja B ovat **riippumattomia**, jos ja vain jos mikä tahansa seuraavista *riippumattomuuden yhtäpitävistä ehdoista* pätee:

(i) $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$

(ii) $\Pr(A|B) = \Pr(A)$

(iii) $\Pr(B|A) = \Pr(B)$

Riippumattomuuden seurauksia

- Oletetaan, että tapahtumat A ja B ovat riippumattomia.
- Tällöin:

  (i) Tapahtumat A ja B^c ovat riippumattomia.

  (ii) Tapahtumat A^c ja B ovat riippumattomia.

  (iii) Tapahtumat A^c ja B^c ovat riippumattomia.
- Tapahtumien riippumattomuus siis ”*leviää*” myös niiden *komplementtitapahtumiin*.
- Ks. edellä esitettyä esimerkkiä Rutenian parlamentista.

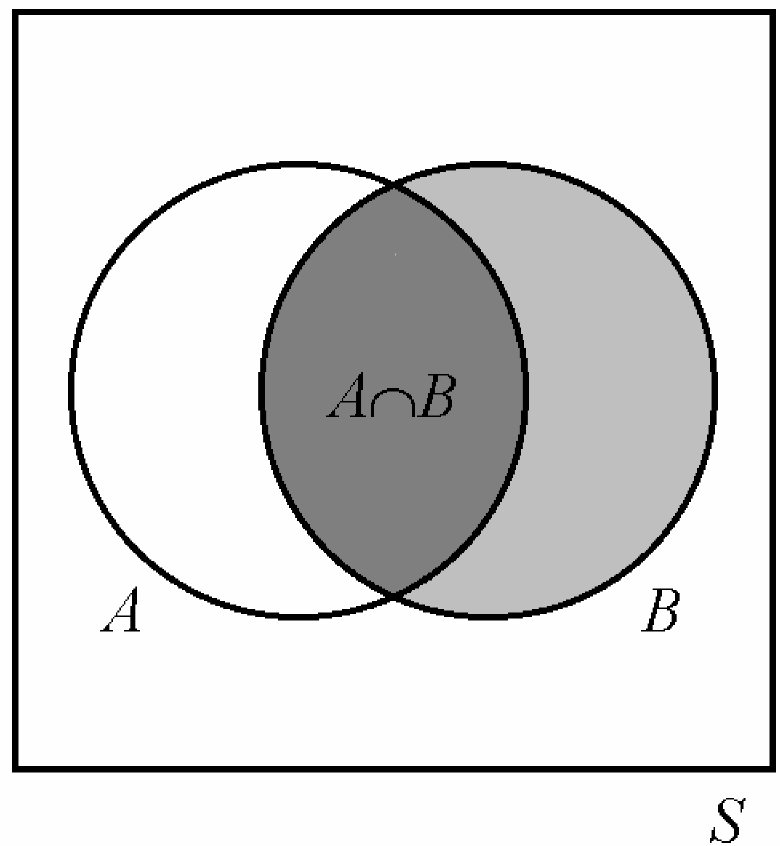
Yleinen tulosääntö

- Olkoon tapahtuman A *ehdollinen todennäköisyys ehdolla, että tapahtuma B on sattunut* $\Pr(A|B)$.
- Olkoon tapahtuman B todennäköisyys $\Pr(B) \neq 0$.
- Tällöin **leikkauksen**

  $A \cap B$ = ”*A ja B sattuvat*”

  todennäköisyys on

  $$\Pr(A \cap B) = \Pr(B)\Pr(A|B)$$



Yleistetty yleinen tulosääntö

- Tarkastellaan tapahtumia $A_1, A_2, \ldots, A_k$.
- Tällöin **leikkauksen**

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k = \text{"}A_1 \textit{ ja } A_2 \textit{ ja } \ldots \textit{ ja } A_k \textit{ sattuvat}\text{"}$$

todennäköisyys on

$$\begin{aligned}\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) &= \Pr(A_1) \times \Pr(A_2 \mid A_1) \times \Pr(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \\ &\quad \cdots \times \Pr(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1})\end{aligned}$$

Yleistetty yleinen tulosääntö: Perustelu

- Perustellaan *yleistetty yleinen tulosääntö* tapauksessa $k = 3$.
- Leikkauksen

  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 =$ ”A_1 *ja* A_2 *ja* A_3 *sattuvat*”

  todennäköisyys on

$$\begin{aligned}\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \Pr((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \\ &= \Pr(A_1 \cap A_2)\Pr(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \\ &= \Pr(A_1)\Pr(A_2 \mid A_1)\Pr(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\end{aligned}$$

- *Yleinen tapaus* voidaan todistaa *induktiolla*.

Yleistetty yleinen tulosääntö: Esimerkki korttipakasta

- Nostetaan korttipakasta *peräkkäin* 3 korttia.
- Mikä on todennäköisyys, että ne ovat kaikki patoja?
- Olkoon tapahtuma A_i = ”*i*. kortti on pata”, $i = 1, 2, 3$.
- Koska korttipakassa on 52 korttia, joista 13 on patoja, leikkauksen ”A_1 *ja* A_2 *ja* A_3 *sattuvat*” todennäköisyys on

$$\begin{aligned}\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \Pr(A_1)\Pr(A_2 \mid A_1)\Pr(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50} = \frac{33}{2550} \\ &= 0.0129\end{aligned}$$

- Huomautus:

  Korttien nosto toteutettiin *ilman takaisinpanoa*.