Ilkka Mellin

Todennäköisyyslaskenta

Osa 1: Todennäköisyys ja sen laskusäännöt

Johdanto: Deterministisyys ja satunnaisuus

Todennäköisyyden määritteleminen

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet

Todennäköisyys ja sen laskusäännöt

>> Johdanto: Deterministisyys ja satunnaisuus

Todennäköisyyden määritteleminen

Todennäköisyyden perusominaisuudet

Deterministiset ilmiöt

- Reaalimaailman ilmiö on **deterministinen**, jos *ilmiön alkutilan perusteella voidaan tarkasti ennustaa ilmiön lopputila* eli *tulos*.
- Deterministisessä ilmiössä *ilmiön alkutila määrää tarkasti ilmiön lopputilan* eli *tuloksen*.
- Deterministinen ilmiö ~ **eksakti** tai **kausaalinen ilmiö**.

Deterministiset ilmiöt: Esimerkkejä

- Monia *fysiikan*, kuten *klassisen mekaniikan*, tutkimia ilmiöitä pidetään deterministisinä.

  Kappaleen lentorata voidaan ennustaa hyvin tarkasti, jos tunnetaan kappaleen paino, lähtönopeus, lähtökulma, lähtösuunta, ilmanvastus jne.

- Huomautuksia:
  - Deterministisistä ilmiöistä tehtäviin *havaintoihin* liittyy hyvin usein luonteeltaan *satunnaisia havaintovirheitä*.
  - Deterministisiin ilmiöihin saattaa liittyä *ennustamattomuutta*, jota kutsutaan *kaaokseksi*.

Satunnaisilmiöt

- Reaalimaailman ilmiö on **stokastinen ilmiö** eli **satunnaisilmiö**, jos sillä on seuraavat ominaisuudet:

  (i) Ilmiö voi päätyä *alkutilastaan* useisiin erilaisiin *lopputiloihin* eli ilmiöllä on useita erilaisia *vaihto-ehtoisia tuloksia*.

  (ii) Ilmiön alkutilan perusteella *ei voida* tarkasti *ennustaa* ilmiön lopputilaa eli sitä, mikä mahdollisista *tulos-vaihtoehdoista realisoituu* eli *toteutuu*.

  (iii) Vaikka ilmiön lopputilaa ei voida ennustaa tarkasti, tulosvaihtoehtojen *suhteellisten frekvenssien* eli *osuuksien nähdään* ilmiön toistuessa *käyttäytyvän säännönmukaisesti*.

Satunnaisilmiöt: Esimerkkejä 1/2

- Biologiset ilmiöt
  - sukupuolen määräytyminen
  - perinnöllisyys
- Havaintovirheiden syntyminen empiirisissä tutkimuksessa
- Ihmisen ominaisuuksien periytyminen
  - fyysiset tai henkiset ominaisuudet
  - fyysinen tai henkinen suorituskyky
- Kvanttimekaniikan ilmiöt
  - radioaktiivinen hajoaminen
  - hiukkasfysiikan ilmiöt
- **Tilastollisten tutkimus-aineistojen kerääminen**
  - *otoksen* poiminta
  - *satunnaistus* empiirisissä kokeissa
- Uhkapelit
  - rahanheitto
  - korttipelit
  - lotto
  - ruletti
  - arpajaiset
- Yhteiskunnalliset ilmiöt
  - sosiologiset ilmiöt
  - taloustieteelliset ilmiöt

Satunnaisilmiöt: Esimerkkejä 2/2

- *Satunnaisilmiöiden* tulosta *ei voida ennustaa tarkasti*, mutta ilmiön *toistuessa* mahdollisten tulosvaihtoehtojen suhteellisten frekvenssien eli osuuksien havaitaan *käyttäytyvän säännönmukaisesti*.
- Esimerkkejä säännönmukaisuuksista satunnaisilmiöissä:
  - Satunnaisesti valitun ihmisen älykkyysosamäärää ei tiedetä, mutta älykkyysosamäärät *jakautuvat* suurissa ihmisjoukoissa ns. *normaalijakauman mukaan*.
  - Havaintovirheen suuruutta ei voida ennustaa yksittäiselle havainnolle, mutta havaintovirheet *jakautuvat* suurissa havaintomäärissä usein ns. *normaalijakauman mukaan*.
  - Radioaktiivisen aineen yksittäisen atomin hajoamishetkeä ei voida ennustaa, mutta *puoliintumisaika* on jokaiselle radioaktiiviselle aineelle ominainen *vakio*.

Satunnaisuus *ei ole* mielivaltaisuutta

- Ilmiön satunnaisuudella tarkoitetaan tavallisesti sitä, että ilmiön tulos *vaihtelee* ilmiön toistuessa tavalla, jota *ei voida ennustaa tarkasti*.
- Satunnaisilmiön tulos *ei saa kuitenkaan ilmiön toistuessa vaihdella mielivaltaisella tavalla*.
- Satunnaisilmiön *säännönmukaisten piirteiden on tultava esille ilmiön toistuessa*.

Tilastollinen stabiliteetti

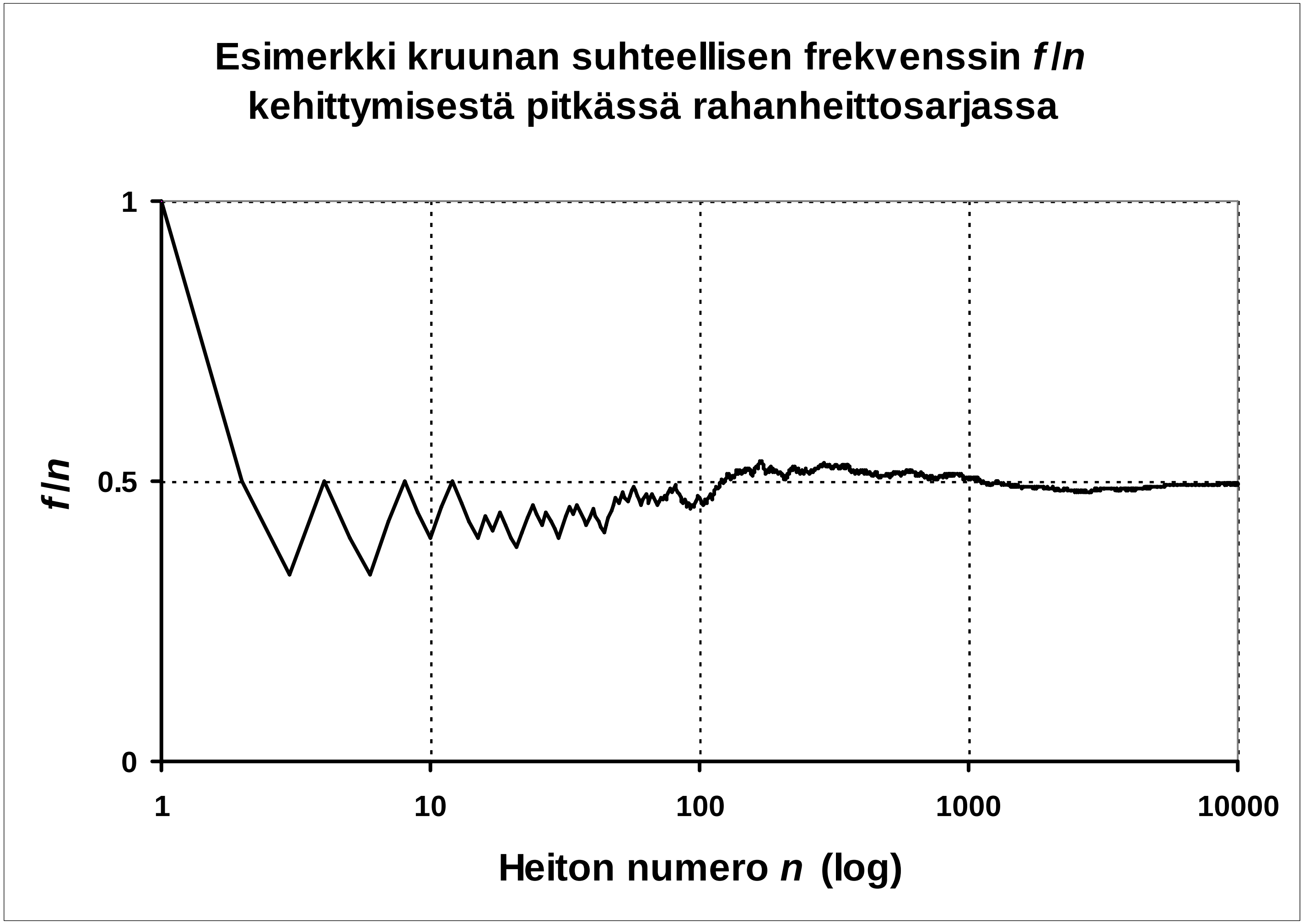
- Satunnaisilmiön toistuessa ilmenevää *säännönmukaisuutta* kutsutaan todennäköisyyslaskennassa ja tilastotieteessä **tilastolliseksi stabiliteetiksi**.
- Jos satunnaisilmiö *ei ole tilastollisesti stabiili*, sitä *ei voida mallintaa* tilastollisilla malleilla.
- Huomautus:

  Tilastollisen stabiliteetin idea saa matemaattisesti täsmällisen muotoilun ns. *suurten lukujen laissa*; ks. lukua **Stokastiikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet**.

Tilastollinen stabiliteetti: Esimerkki 1/2

- Heitetään *virheetöntä* eli *harhatonta* rahaa toistuvasti ja pidetään kirjaa kruunien *suhteellisesta osuudesta* eli *frekvenssistä*.
- *Yksittäisen heiton tulosta* ei voida ennustaa.
- Kruunien suhteellinen frekvenssi *vaihtelee* heittoja toistettaessa, mutta *lähestyy* virheettömän rahan tapauksessa lukua 1/2 siten, että *suuret poikkeamat* luvusta 1/2 tulevat yhä *epätodennäköisemmiksi* eli *harvinaisemmiksi*.
- Huomautuksia:
  - Luku 1/2 *ei ole* kruunien suhteellisen frekvenssin *raja-arvo* tavanomaisessa mielessä.
  - Tapa, jolla kruunien suhteellinen frekvenssi lähestyy lukua 1/2, on esimerkki ns. *stokastisesta konvergenssista*.

Tilastollinen stabiliteetti: Esimerkki 2/2



Satunnaisilmiöt, tilastolliset mallit ja todennäköisyyslaskenta 1/2

- Tilastotieteen tehtävänä on rakentaa (*tilastollisia*) *malleja*, joiden avulla voidaan *kuvata* ja *selittää mekanismit*, jotka *tuottavat* **tiedot** tutkimuksen kohteena olevasta reaalimaailman ilmiöstä.
- Koska tilastollisissa tutkimusasetelmissa ilmiötä koskeviin tietoihin sisältyy *satunnaisuutta* ja *epävarmuutta*, tilastollisia malleja rakennettaessa sovelletaan *todennäköisyyslaskentaa*.

Satunnaisilmiöt, tilastolliset mallit ja todennäköisyyslaskenta 2/2

- Satunnaisilmiölle voidaan rakentaa tilastollisia malleja vain, jos *ilmiöiden tulokset eivät vaihtele mielivaltaisella tavalla*.
- *Ei-mielivaltaisuudella* tarkoitetaan sitä, että ilmiön toistuessa tulosvaihtoehtojen *suhteelliset frekvenssit* eli *osuudet* käyttäytyvät *tilastollisesti stabiilisti*.

Satunnaiskokeet ja koetoistot: Määritelmät

- Kutsumme *satunnaisilmiötä* **satunnaiskokeeksi**.

  Esimerkkejä:

  – Lapsen sukupuolen *määräytymismekanismi* munasolun hedelmöittyessä on satunnaiskoe.

  – Nopanheitto on satunnaiskoe.

- Kutsumme *satunnaisilmiön esiintymiskertaa* **koetoistoksi**.

  Esimerkkejä:

  – Yksittäisen lapsen sukupuolen *määräytyminen* on koetoisto.

  – Yksittäinen nopanheitto on koetoisto.

Satunnaiskokeet ja koetoistot, tilastollinen stabiliteetti ja reilun pelin vaatimus

- Satunnaiskokeen toistaminen *samoissa olosuhteissa* – ts. kokeen *olosuhteiden vakiointi* – takaa tavallisesti sen, että satunnaiskokeen tulokset käyttäytyvät *tilastollisesti stabiilisti*.
- Vaatimus satunnaiskokeen tulosten käyttäytymisen tilastollisesta stabiliteetista voidaan tulkita vaatimukseksi **reilusta pelistä**.

Reilu *vs* epäreilu peli: Esimerkki 1/3

- Pelaat Mr. Ebenezer Scroogea vastaan *peliä*, jolla on seuraavat *säännöt*:

  (i) Mr. Scroogella on hallussaan useita *erilaisia* noppia, joiden silmälukuja *et tiedä*.

  (ii) Mr. Scrooge valitsee nopistaan *yhden*.

  (iii) Et saa ottaa Mr. Scroogen valitsemaa noppaa käteesi, mutta Mr. Scroogen on heitettävä valitsemaansa noppaa *niin monta kertaa kuin haluat*.

  (iv) Jokaisen heiton jälkeen Mr. Scroogen on näytettävä sinulle heiton *tulos* eli silmäluku, joka on nopan ylösjääneellä tahkolla.

  (v) Voitat ennalta sovitun rahasumman, jos saat selville Mr. Scroogen heittämän nopan silmäluvut.

Reilu *vs* epäreilu peli: Esimerkki 2/3

- Saat Mr. Scroogen heittämän nopan silmäluvut (suurella todennäköisyydellä) selville, jos *toistatat nopanheittoa* riittävän monta kertaa ja *tarkkailet* heittojen tuloksena esiintyvien silmälukujen *suhteellisia frekvenssejä*.
- Oletetaan esimerkiksi, että Mr. Scroogen valitseman nopan silmäluvut ovat

  1, 1, 1, 2, 2, 3
- Tällöin tuntuu ilmeiseltä, että silmälukujen

  1, 2, 3

  suhteellisten frekvenssien on *jakauduttava* pitkässä heittosarjassa suunnilleen suhteessa

  3 : 2 : 1

Reilu *vs* epäreilu peli: Esimerkki 3/3

- Oletetaan, että Mr. Scrooge *vaihtaa jatkuvasti salaa* noppaansa pelin aikana.
- Tällöin *et pysty voittamaan* peliä, koska Mr. Scrooge *rikkoo tietämättäsi pelin sääntöä* (ii) *vastaan*.
- *Vaatimus reilusta pelistä* tarkoittaa sitä, että tällaista sääntöjen rikkomista *ei saa* tapahtua.

Tilastollinen tutkimus on peliä luontoa vastaan 1/3

- *Tilastollinen tutkimus* on **peliä luontoa vastaan**.
- Tilastollisessa tutkimuksessa pyritään *tekemään luonnon tilaa koskevia* **johtopäätöksiä** *tilasta kerättyjen havaintojen perusteella*.
- **Luonnon tila** on sitä, että luonnolla on kädessään joukko ”pelikortteja”.
- Tutkijan tavoitteena on *ottaa selville* luonnon kädessä olevat ”kortit”.
- Luonnon tavoitteena on *salata* kädessään olevat ”kortit” tutkijalta.

Tilastollinen tutkimus on peliä luontoa vastaan 2/3

- Peli koostuu eristä, joissa jokaisessa tutkija voi katsoa luonnon kädestä yhden *satunnaisesti valitsemansa* ”kortin” – tämä on *havaintojen keräämistä*.
- Tutkija voi saada selville luonnon tilan eli luonnon kädessä olevat ”kortit” *pelaamalla riittävän monta erää* eli *keräämällä riittävästi havaintoja*.

Tilastollinen tutkimus on peliä luontoa vastaan 3/3

- *Tilastollisessa tutkimuksessa* pyritään satunnaisilmiötä koskevien *havaintojen* perusteella *päättelemään*, millainen on *havainnot tuottanut mekanismi*.
- Päättely *ei onnistu*, jos *havainnot tuottanut mekanismi* ei ole jossakin mielessä *pysyvä* eli *tilastollisesti stabiili*.
- Oletus havainnot tuottaneen mekanismin pysyvyydestä voidaan tulkita oletukseksi siitä, että luonto *pelaa reilusti* eikä *riko pelin sääntöjä vastaan* vaihtamalla pelin aikana *salaa* kädessään olevia ”kortteja”.

Todennäköisyys ja sen laskusäännöt

Johdanto: Deterministisyys ja satunnaisuus

>> Todennäköisyyden määritteleminen

Todennäköisyyden perusominaisuudet

Todennäköisyyden *naiivit* määritelmät

- Satunnaisilmiöiden tapahtumien todennäköisyydelle voidaan esittää seuraavat *naiivit* **määritelmät**:

  (i) Tapahtuman (**klassinen**) **todennäköisyys** on tapahtumalle suotuisien tulosvaihtoehtojen suhteellinen frekvenssi.

  (ii) Tapahtuman (**empiirinen**) **todennäköisyys** on tapahtuman suhteellinen frekvenssi ilmiön toistokertojen joukossa.

  (iii) Tapahtuman **todennäköisyys on** tapahtuman sattumisen mahdollisuuden **mitta**.

Klassinen todennäköisyys: Määritelmä

- Tarkastellaan *satunnaisilmiötä*, johon liittyy

  n kpl

  yhtä todennäköisiä tulosvaihtoehtoja.
- Tarkastellaan satunnaisilmiön puitteissa *tapahtumaa*, johon liittyy tulosvaihtoehdoista

  k kpl

  joita sanotaan ko. tapahtumalle *suotuisiksi*.
- Tapahtuman **klassinen todennäköisyys** *p* on tapahtumalle *suotuisien* tulosvaihtoehtojen *suhteellinen frekvenssi*:

$$p = \frac{k}{n}$$

Klassinen todennäköisyys: Kommentteja

- Klassisen todennäköisyyden käsite sopii erityisesti *uhkapelien* analysointiin.
- Uhkapeleissä pelitapahtumien todennäköisyydet voidaan tavallisesti määrätä *päättelemällä* ne pelin säännöistä.
- *Historiallisesti* todennäköisyyslaskenta sai alkunsa 1600-luvulla juuri uhkapeleihin liittyvien ongelmien ratkaisu-yrityksistä.
- Tulosvaihtoehtojen *lukumäärien laskeminen* on usein epätriviaali tehtävä ja apuna tarvitaan *kombinatoriikaksi* kutsuttua matematiikan osa-aluetta; ks. lukua **Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka.**

Klassinen todennäköisyys: Ongelmat määritelmässä

- Klassisen todennäköisyyden määritelmä *ei anna* mahdollisuutta puhua sellaisten tapahtumien todennäköisyyksistä, *joihin liittyvät tulosvaihtoehdot eivät ole yhtä todennäköisiä*.
- Klassisen todennäköisyyden määritelmä *ei anna* mahdollisuutta puhua sellaisten tapahtumien todennäköisyyksistä, joihin liittyy *äärettömän monta tulosvaihtoehtoa*.

Klassinen todennäköisyys ja todennäköisyyden frekvenssitulkinta

- Oletetaan, että *toistamme* jotakin satunnaiskoetta ja tarkkailemme jonkin *tulosvaihtoehdon suhteellista frekvenssiä* koetoistojen aikana.
- **Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan** mukaan ko. *tulosvaihtoehdon suhteellinen frekvenssi vaihtelee satunnaisesti koetoistosta toiseen*, *mutta saa keskimäärin tulosvaihtoehdon todennäköisyyttä lähellä olevia arvoja*.
- *Vahvistavatko havainnot tämän on empiirinen kysymys*.

Klassinen todennäköisyys: Esimerkki nopanheitosta 1/2

- Heitetään noppaa.
- Tällöin tulosvaihtoehtoja on 6 kpl:

  Silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Tarkastellaan tapahtumia

  A = ”Silmäluku on parillinen”

  B = ”Silmäluku < 3”
- Tapahtumalle A *suotuisia* tulosvaihtoehtoja on 3 kpl:

  Silmäluvut 2, 4, 6
- Tapahtumalle B *suotuisia* tulosvaihtoehtoja on 2 kpl:

  Silmäluvut 1, 2

Klassinen todennäköisyys: Esimerkki nopanheitosta 2/2

- Tapahtuman *A* = ”Silmäluku on parillinen” todennäköisyys on

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

- Tapahtuman *B* = ”Silmäluku < 3” todennäköisyys on

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.333$$

- Siten tapahtuma *A* on *todennäköisempi* kuin tapahtuma *B*.
- Oletetaan, että heität noppaa useita kertoja.
- *Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan* mukaan *on odotettavissa*, että keskimäärin 1/3 heitoista antaa tulokseksi tapahtuman *B* ja tapahtuma *A* esiintyy heittojen tuloksena useammin kuin tapahtuma *B*.

Empiirinen todennäköisyys: Määritelmä

- Tarkastellaan *satunnaiskoetta*, jota voidaan *toistaa* siten, että seuraavat ehdot pätevät:
  - (i) Kokeen olosuhteet *säilyvät muuttumattomina* koetoistosta toiseen.
  - (ii) Koetoistot *ovat riippumattomia*.
- Tarkkaillaan jonkin *tulosvaihtoehdon* esiintymistä koetoistojen aikana.
- Jos tulosvaihtoehdon *suhteellinen frekvenssi* eli *osuus* lähestyy jotakin kiinteätä lukua koetoistojen lukumäärän kasvaessa rajatta, lukua kutsutaan tulosvaihtoehdon **empiiriseksi todennäköisyydeksi**.

Empiirinen todennäköisyys ja suhteellinen frekvenssi 1/2

- *Toistetaan* satunnaiskoetta n kertaa.
- Tarkkaillaan jonkin *tulosvaihtoehdon* esiintymistä koe-toistojen aikana.
- Olkoon f ko. tulosvaihtoehdon **frekvenssi** eli *lukumäärä* koetoistojen joukossa.
- Tällöin

$$\frac{f}{n}$$

on ko. tulosvaihtoehdon **suhteellinen frekvenssi**.

Empiirinen todennäköisyys ja suhteellinen frekvenssi 2/2

- Annetaan koetoistojen lukumäärän *n* kasvaa rajatta.
- Oletetaan, että (jossakin mielessä)

$$\frac{f}{n} \to p, \text{ kun } n \to +\infty$$

- Tällöin luku *p* on ko. tulosvaihtoehdon **empiirinen todennäköisyys**.
- Huomautus:

  Suhteellisen frekvenssin *f*/*n* rajakäyttäytyminen koetoistojen lukumäärän *n* kasvaessa ei ole tavanomaista lukujono-konvergenssia.

  Todennäköisyyslaskennan konvergenssikäsitteitä käsitellään luvussa **Stokastiikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet**.

Empiirinen todennäköisyys: Kommentteja

- Tulosvaihtoehdon empiirinen todennäköisyys on tulosvaihtoehdon suhteellinen frekvenssi ”*pitkässä juoksussa*”.
- Empiirisen todennäköisyyden määritelmä edellyttää tulosvaihtoehtojen suhteellisilta frekvensseiltä *tilastollista stabiliteettia*:

  Tulosvaihtoehdon empiirisestä todennäköisyydestä ei ole mielekästä puhua, ellei tulosvaihtoehdon suhteellinen frekvenssi käyttäydy satunnaiskoetta toistettaessa *tilastollisesti stabiilisti*.
- *Matemaattista todennäköisyyttä* voidaan pitää empiirisen todennäköisyyden käsitteen *idealisointina*.

Empiirinen todennäköisyys: Ongelmat määritelmässä 1/2

- Empiirinen todennäköisyys on *empiirinen käsite* siinä mielessä, että tulosvaihtoehdon suhteellisen frekvenssin f/n määrääminen vaatii satunnaiskokeen *toistamista* ja *havaintojen keräämistä* satunnaiskokeen tuloksista.
- Tulosvaihtoehdon *empiiristä todennäköisyyttä ei kuitenkaan voida* – nimestään huolimatta – *määrätä kokeellisesti*, koska suhteellisen frekvenssin tilastollisen stabiliteetin empiirinen todentaminen vaatisi satunnais-kokeen toistamista *äärettömän* monta kertaa.
- Empiirisen todennäköisyyden käsite *ei anna* mahdollisuutta puhua sellaisten tapahtumien todennäköisyyksistä, *joista ei ole havaintoja*.

Empiirinen todennäköisyys: Ongelmat määritelmässä 2/2

- Empiirisen todennäköisyyden määritelmässä esiintyvä suhteellisen frekvenssin raja-arvo *ei ole hyvin määritelty*:

  Mikään ei takaa, että määritelmässä esiintyvä raja-arvo *on olemassa*.
- Empiiristä todennäköisyyttä voidaan pikemminkin pitää *tilastollisesti stabiilisti käyttäytyvän suhteellisen frekvenssin ominaisuutena* kuin *todennäköisyyden määritelmänä*.

Empiirinen todennäköisyys ja todennäköisyyden frekvenssitulkinta

- Oletetaan, että *toistamme* jotakin satunnaiskoetta ja tarkkailemme jonkin *tulosvaihtoehdon suhteellista frekvenssiä* koetoistojen aikana.
- **Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan** mukaan ko. *tulosvaihtoehdon suhteellinen frekvenssi vaihtelee satunnaisesti koetoistosta toiseen*, *mutta saa keskimäärin tulosvaihtoehdon todennäköisyyttä lähellä olevia arvoja*.
- *Vahvistavatko havainnot tämän on empiirinen kysymys*.

Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki laadunvalvonnasta 1/3

- Tehdas valmistaa erästä sähkölaitetta 300 kpl päivässä.
- Osa laitteista ei täytä ankaria laatukriteereitä.
- Merkitään:

  K = Laite on kelvollinen

  V = Laite on viallinen
- Oletetaan, että vialliset laitteet syntyvät tuotannossa *täysin satunnaisesti*.
- Eräänä päivänä valmistettujen laitteiden joukossa on 6 viallista laitetta.

Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki laadunvalvonnasta 2/3

- Satunnaisilmiö: Laitteen laatu
- Koetoisto: Valmistetaan 1 laite
- Koetoistojen lkm n: 300
- Tulosvaihtoehto V: Laite on viallinen
- Viallisten laitteiden *frekvenssi*:

$$f = 6$$

- Viallisten laitteiden *suhteellinen frekvenssi*:

$$\frac{f}{n} = \frac{6}{300} = \frac{1}{50} = 0.02$$

Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki laadunvalvonnasta 3/3

- Oletetaan, että viallisten laitteiden suhteellinen osuus pysyy päivästä toiseen *suunnilleen samana* eli että viallisten laitteiden suhteellinen osuus käyttäytyy *tilastollisesti stabiilisti*.
- Tällöin suhteellista frekvenssiä

$$p = \frac{f}{n} = \frac{6}{300} = \frac{1}{50} = 0.02$$

on järkevää kutsua *todennäköisyydeksi* saada viallinen laite, jos tehtaalla valmistettujen laitteiden joukosta *poimitaan satunnaisesti* 1 laite tarkastettavaksi.

Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki otannasta 1/4

- Väestötilaston mukaan Suomen väestö jakautui vuoden 1998 lopussa miehiin ja naisiin seuraavasti:

Miehet	2 516 000
Naiset	2 643 600
Yhteensä	**5 159 600**

- Tyypillisessä *otantatutkimuksessa* tutkimuksen kohteet valitaan *poimimalla satunnaisotos* kaikkien suomalaisten joukosta.
- Satunnaisotoksen poimintaa voidaan kuvata *arvontana*, jossa jokaista suomalaista vastaa yksi arpalippu.
- *Todennäköisyys* poimia tietty henkilö on

$$\frac{1}{5159600}$$

Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki otannasta 2/4

- Suomalaisten lukumäärä: 5 159 600
- Miesten *lukumäärä* eli *frekvenssi*: 2 516 000
- Miesten *suhteellinen osuus* eli *suhteellinen frekvenssi* kaikkien suomalaisten joukosta:

$$\frac{2516000}{5159600} = 0.488$$

- Naisten *lukumäärä* eli *frekvenssi*: 2 643 600
- Naisten *suhteellinen osuus* eli *suhteellinen frekvenssi* kaikkien suomalaisten joukosta:

$$\frac{2643600}{5159600} = 0.512$$

Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki otannasta 3/4

- Koska suomalaisia on näinkin paljon, miesten ja naisten suhteelliset frekvenssit voidaan *tulkita* empiirisen todennäköisyyden määritelmän mukaan todennäköisyyksiksi.
- Siten *todennäköisyys*, että umpimähkään suomalaisten joukosta poimittu henkilö on *mies*, on

$$\frac{2516000}{5159600} = 0.488$$

- Siten *todennäköisyys*, että umpimähkään suomalaisten joukosta poimittu henkilö on *nainen*, on

$$\frac{2643600}{5159600} = 0.512$$

- Todennäköisyys poimia suomalaisten joukosta nainen on *suurempi kuin* todennäköisyys poimia mies, koska naisia on *enemmän*.

Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki otannasta 4/4

- Oletetaan, että suomalaisten joukosta poimitaan *arpomalla* yhä uusia 1 000 henkilön *satunnaisotoksia*.
- Tällöin otokseen poimittujen miesten ja naisten suhteelliset osuudet *vaihtelevat otoksesta toiseen*, mutta otokseen poimituista henkilöistä *keskimäärin*

  $$100 \times \frac{2516000}{5159600} = 48.8\ \%$$

  on miehiä ja *keskimäärin*

  $$100 \times \frac{2643600}{5159600} = 51.2\ \%$$

  on naisia.
- *Tilastollinen stabiliteetti* on sitä, että nämä suhdeluvut pysyvät otoksesta toiseen *suunnilleen samoina*.

Todennäköisyys *mittana*: Määritelmä

- Hyödyllisen *mielikuvan* todennäköisyyden luonteesta antaa seuraava *naiivi määritelmä*:

  Todennäköisyys on **mitta**, jolla mitataan satunnaisilmiön tapahtumavaihtoehtojen *sattumisen mahdollisuutta*.

Todennäköisyys *mittana*: Kommentteja 1/2

- Määritelmä *ei täytä hyvän määritelmän tunnusmerkkejä*, koska se on *kehämääritelmä*:

  Sattumisen mahdollisuus ja todennäköisyys *tarkoittavat* suunnilleen *samaa*.

- Kuitenkin on totta, että ns. **Kolmogorovin aksioomien** mukaan todennäköisyys on *mitta matemaattisen mitta-teorian tarkoittamassa mielessä*; ks. lukua **Todennäköisyyden aksioomat.**
- Kolmogorovin aksioomien mukaan *todennäköisyysmitta* käyttäytyy samalla tavalla kuin *pinta-alamitta* paitsi, että todennäköisyysmitalla on ylärajana ns. varman tapahtuman todennäköisyys.

Todennäköisyys *mittana*: Kommentteja 2/2

- Todennäköisyyden laskusääntöjä voidaan havainnollistaa joukko-opissa käytettävien **Venn-diagrammien** avulla.
- Venn-diagrammien idea:

  (i) Tapahtumia kuvataan *tasoalueilla*.

  (ii) Tapahtumien todennäköisyyksiä kuvataan *tasoalueiden pinta-aloilla*.
- Venn-diagrammien käyttö todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen havainnollistamisessa perustuu siihen, että *todennäköisyydellä on mittana* (lähes kaikki) *samat ominaisuudet kuin pinta-alalla*.

Todennäköisyys ja sen laskusäännöt

Johdanto: Deterministisyys ja satunnaisuus

Todennäköisyyden määritteleminen

>> Todennäköisyyden perusominaisuudet

Satunnaisilmiöt ja niiden tilastolliset mallit

- Tilastotieteen tehtävänä on kehittää satunnaisilmiöille **tilastollisia malleja**, joiden avulla pyritään tekemään satunnaisilmiöitä koskevia *johtopäätöksiä*.
- Satunnaisilmiöiden tilastolliset mallit perustuvat **todennäköisyyslaskentaan** ja siksi niitä kutsutaan usein myös *stokastisiksi malleiksi* eli *todennäköisyysmalleiksi*.

Todennäköisyysmalli satunnaisilmiön tilastollisena mallina

- Satunnaisilmiön **tilastollisessa mallissa** eli **todennäköisyysmallissa** eli **stokastisessa mallissa** on kaksi osaa:

  (i) Satunnaisilmiön *kaikkien mahdollisten* **tulosvaihtoehtojen** kuvaus.

  (ii) Tulosvaihtoehtojen **todennäköisyyksien** kuvaus.

- Satunnaisilmiön tilastollinen malli esitetään tavallisesti satunnaisilmiön tulosvaihtoja numeerisessa muodossa kuvaavaan *satunnaismuuttujan* ja sen *todennäköisyysjakauman* avulla; ks. lukua **Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat.**

Tilastollisten mallien rakentaminen ja tilastollisen tutkimuksen tavoitteet

- *Tilastollisen tutkimuksen* päätavoitteena on *tilastollisen mallin rakentaminen* tutkimuksen kohteena olevalle satunnaisilmiöille.
- Tilastollisen mallin rakentamisen työvaiheet:

  (1) *Mallin muodostaminen* ilmiölle.

  (2) Ilmiötä koskevien *havaintojen kerääminen*.

  (3) Mallin *parametrien estimointi*.

  (4) Mallin ja havaintojen *yhteensopivuuden testaaminen*.

  Jos mallissa havaitaan puutteita vaiheessa (4), palataan vaiheeseen (1).

Todennäköisyyslaskenta ja joukko-oppi

- Todennäköisyyslaskennan historian tärkeimpiä teoreettisia oivalluksia on ollut se, että satunnaisilmiön tapahtumia voidaan käsitellä **joukkoina**.
- Siksi seuraavassa palautetaan mieleen **joukko-opin** *perus-määritelmät*.

Joukko-opin perusmääritelmät: Joukko ja sen alkiot

- **Joukko** on *kokoelma olioita*, joita kutsutaan joukon **alkioiksi**.
- Joukko on **hyvin määritelty**, jos *sen alkiot tunnetaan* eli voimme sanoa *jokaisesta* oliosta onko se joukon alkio vai ei.
- Merkitään **joukon ja sen alkioiden välistä relaatiota** seuraavasti:

(i) *s* **on** *joukon A* **alkio** eli *s* **kuuluu** *joukkoon A*:

$$s \in A$$

(ii) *s* **ei ole** *joukon A* **alkio** eli *s* **ei kuulu** *joukkoon A*:

$$s \notin A$$

Joukko-opin perusmääritelmät: Osajoukko

- Olkoot A ja B kaksi joukkoa.
- Jos jokaiselle joukon B alkiolle s pätee, että

  $$s \in B \Rightarrow s \in A$$

  niin sanomme, että *joukko B on joukon A* **osajoukko** tai, että *joukko B* **sisältyy** *joukkoon A*.
- Merkintä:

  $$B \subset A \text{ tai } A \supset B$$

Joukko-opin perusmääritelmät: Tyhjä joukko

- Joukko on **tyhjä**, jos siihen ei kuulu yhtään alkiota.
- Tyhjää joukkoa merkitään symbolilla

$$\varnothing$$

- Jos joukko $\varnothing$ on tyhjä, *ei ole olemassa* oliota s, jolle

$$s \in \varnothing$$

- Tyhjä joukko $\varnothing$ on *jokaisen* joukon osajoukko eli mielivaltaiselle joukolle A pätee:

$$\varnothing \subset A$$

Otosavaruus ja alkeistapahtumat

- Satunnaisilmiön *kaikkien mahdollisten tulosvaihtoehtojen joukkoa* kutsutaan **otosavaruudeksi**.
- Otosavaruuden *alkioita* kutsutaan **alkeistapahtumiksi**.
- Merkinnät:

(i) *Otosavaruutta* (engl. *sample space*) *merkitään* tavallisesti isolla kirjaimella S.

(ii) *Otosavaruuden S mielivaltaista alkiota merkitään* usein vastaavalla pienellä kirjaimella s.

- Jos siis alkeistapahtuma s kuuluu otosavaruuteen S, merkitään:

$$s \in S$$

Otosavaruus ja alkeistapahtumat: Kommentteja

- Otosavaruus muodostaa *perusjoukon*, jossa satunnais-ilmiön tulosvaihtoehtoja tarkastellaan.
- Satunnaisilmiötä ei voida “purkaa” otosavaruuden alkeistapahtumia *alkeellisempiin* tulosvaihtoehtoihin.

Tapahtumat 1/2

- Olkoon *S otosavaruus* eli tarkasteltavan satunnaisilmiön kaikkien mahdollisten tulosvaihtoehtojen joukko.
- Tarkasteltavan satunnaisilmiön **tapahtumat** ovat otosavaruuden *S alkeistapahtumien muodostamia joukkoja*.
- Siten tapahtumat ovat tarkasteltavaan satunnaisilmiöön liittyvän otosavaruuden *S osajoukkoja*.

Tapahtumat 2/2

- Jos siis A on jokin otosavaruuden S *tapahtuma*, niin

$$A \subset S$$

eli

$$s \in A \Rightarrow s \in S$$

jossa s on tapahtumaan A kuuluva *alkeistapahtuma*.

- **Kun sanomme, että tapahtuma *A* sattuu, tarkoitamme aina sitä, että jokin tapahtumaan *A* kuuluva alkeis-tapahtuma *s* sattuu**.

Otosavaruus, alkeistapahtumat ja tapahtumat: Esimerkki sukupuolen määräytymisestä

- Satunnaisilmiö:

  Lapsen sukupuolen määräytyminen

- Otosavaruus:

  $S = \{\text{Tyttö, Poika}\}$

- Alkeistapahtumat:

  $s_1 = \text{Tyttö}$

  $s_2 = \text{Poika}$

Otosavaruus, alkeistapahtumat ja tapahtumat: Esimerkki 1 nopanheitosta

- Satunnaisilmiö:

  Nopanheiton tulos

- Otosavaruus:

  Silmälukujen joukko $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Alkeistapahtumat:

  Silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5, 6

- Esimerkki tapahtumasta:

  A = ”Silmäluku on parillinen” = $\{2, 4, 6\}$

Otosavaruus, alkeistapahtumat ja tapahtumat: Esimerkki 2 nopanheitosta 1/3

- Satunnaisilmiö:

  Tulokset kahdesta nopanheitosta

- Otosavaruus S:

  Silmälukuparien (i, j) (36 kpl) joukko, jossa

  i = 1. nopanheiton silmäluku, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

  j = 2. nopanheiton silmäluku, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$
\begin{aligned}
S = \{&(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),\\
&(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6),\\
&(3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\\
&(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6),\\
&(5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (5,6),\\
&(6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\}
\end{aligned}
$$

Otosavaruus, alkeistapahtumat ja tapahtumat: Esimerkki 2 nopanheitosta 2/3

- Otosavaruuden alkiot voidaan esittää seuraavana *taulukkona*:

(*i*, *j*)	***j* = tulos 2. nopanheitosta**					
***i* = tulos 1. nopan- heitosta**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Otosavaruus, alkeistapahtumat ja tapahtumat: Esimerkki 2 nopanheitosta 3/3

- Esimerkki tapahtumasta:

$$\begin{aligned} A &= \text{"Kummallakin nopalla saadaan sama silmäluku"} \\ &= \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \end{aligned}$$

- Esimerkiksi:

$$(2,2) \in A$$

$$(6,1) \notin A$$

$$A \subset S$$

Varma tapahtuma ja mahdoton tapahtuma

Varma tapahtuma

- Tapahtuma on **varma**, jos se *esiintyy aina*, kun satunnaisilmiö toistuu.
- *Otosavaruus S* itse on varma tapahtuma.

Mahdoton tapahtuma

- Tapahtuma on **mahdoton**, jos se *ei voi esiintyä koskaan*, kun satunnaisilmiö toistuu.
- *Tyhjä joukko* $\emptyset$ on mahdoton tapahtuma.

Varma tapahtuma ja mahdoton tapahtuma: Esimerkit rahan- ja nopanheitosta

Esimerkki 1:

- Rahaa heitettäessä tuloksena on aina joko kruuna tai klaava.
- Tapahtuma

$$S = \{\text{Kruuna, Klaava}\}$$

  on *varma*.

Esimerkki 2:

- Tavallista noppaa heitettäessä silmäluku 7 ei voi olla tuloksena.
- Tapahtuma $\{7\}$ on *mahdoton*.

Todennäköisyyden perusominaisuudet

- Olkoon S *otosavaruus*, jossa satunnaisilmiötä tarkastellaan.
- *Jokaisen* **tapahtuman**

$$A \subset S$$

todennäköisyys $\Pr(A)$ on reaaliluku välillä [0,1]:

$$0 \leq \Pr(A) \leq 1$$

- **Varman tapahtuman** S **todennäköisyys** on 1:

$$\Pr(S) = 1$$

- **Mahdottoman tapahtuman** $\varnothing$ **todennäköisyys** on 0:

$$\Pr(\varnothing) = 0$$

Todennäköisyyksien vertailu

- Jos

$$\Pr(A) > \Pr(B)$$

niin sanomme:

”Tapahtuma A on **todennäköisempi** kuin tapahtuma B”

tai

”Tapahtuma B on **epätodennäköisempi** kuin tapahtuma A”

Todennäköisyyksien vertailu ja todennäköisyyden frekvenssitulkinta

- Mitä *todennäköisempi* tapahtuma on,
  sitä *useammin* tapahtumalla on taipumus esiintyä satunnaisilmiön toistuessa eli sitä *suurempi* on tapahtuman havaittu suhteellinen frekvenssi.
- Mitä *epätodennäköisempi* tapahtuma on,
  sitä *harvemmin* tapahtumalla on taipumus esiintyä satunnaisilmiön toistuessa eli sitä *pienempi* on tapahtuman havaittu suhteellinen frekvenssi.

Lukumääräfunktio

- Olkoon

$$n(A)$$

funktio, joka kertoo *joukon A alkioiden lukumäärän*.

- Kutsumme funktiota $n(\cdot)$ **lukumääräfunktioksi**.
- Jos siis joukon A alkioiden lukumäärä on k, niin

$$n(A) = k$$

Äärelliset otosavaruudet

- Olkoon **otosavaruus *S* äärellinen joukko** ja olkoon

$$n(S) = n$$

otosavaruuden *S alkeistapahtumien* eli alkioiden lukumäärä.

- Merkitään alkeistapahtumia seuraavalla tavalla:

$$s_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

- Tällöin otosavaruus *S* voidaan määritellä luettelemalla sen alkiot:

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$$

Äärelliset otosavaruudet: Alkeistapahtumien todennäköisyydet

- Äärellisen otosavaruuden

  $$S = \{s_1, s_2, \ldots , s_n\}$$

  alkeistapahtumien $s_1, s_2, \ldots , s_n$ todennäköisyyksien

  $$\Pr(s_i) = p_i \text{ , } i = 1, 2, \ldots , n$$

  on toteuttava ehto

  $$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Äärelliset otosavaruudet: Tapahtumien todennäköisyydet

- Olkoon A äärellisen otosavaruuden S *tapahtuma* eli $A \subset S$.
- Tällöin **tapahtuman *A* todennäköisyys** $\Pr(A)$ on

$$\Pr(A) = \sum_{i \mid s_i \in A} p_i$$

- Summassa lasketaan yhteen kaikki todennäköisyydet

$$p_i = \Pr(s_i)$$

joille

$$s_i \in A$$

Symmetriset alkeistapahtumat ja niiden todennäköisyydet

- Oletetaan, että äärellisen otosavaruuden

$$S = \{s_1, s_2, \ldots , s_n\}$$

  alkeistapahtumien $s_1, s_2, \ldots , s_n$ todennäköisyydet ovat *yhtä suuria*:

$$\Pr(s_i) = \frac{1}{n}, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

- Tällöin sanomme, että alkeistapahtumat $s_1, s_2, \ldots , s_n$ ovat **symmetrisiä**.

Symmetriset alkeistapahtumat ja klassinen todennäköisyys 1/2

- Olemme määritelleet tapahtuman *klassisen todennäköisyyden* tapahtumalle suotuisien tulosvaihtoehtojen suhteellisena frekvenssinä satunnaisilmiön kaikista tulosvaihtoehdoista (ks. kappaletta **Todennäköisyyden määritteleminen**).
- Olkoot otosavaruuden

$$S = \{s_1, s_2, \ldots , s_n\}$$

alkeistapahtumat $s_1, s_2, \ldots , s_n$ *symmetrisiä*:

$$\Pr(s_i) = \frac{1}{n}, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

Symmetriset alkeistapahtumat ja klassinen todennäköisyys 2/2

- Olkoon A otosavaruuden S tapahtuma, johon liittyvien alkeistapausten lukumäärä on k:

$$A \subset S$$

$$n(A) = k \le n = n(S)$$

- Tällöin tapahtuman A **klassinen todennäköisyys** on

$$\Pr(A) = \frac{k}{n}$$

jossa siis

$$k = n(A)$$

$$n = n(S)$$

Symmetriaoletus ja uhkapelit

- Useimmissa *uhkapeleissä* pelin *säännöt edellyttävät*, *että peliin liittyvät alkeistapahtumat ovat symmetrisiä*.
- Tyypillisiä uhkapelien säännöissä esitettyjä symmetria-vaatimuksia ovat seuraavat:

  (i) Käytettävien pelivälineiden (esim. nopan, rahan tai rulettipyörän) on oltava *fysikaalisesti symmetrisiä*.

  (ii) Käytettävillä pelivälineillä (esim. arpalipuilla tai korteilla) on oltava *sama todennäköisyys tulla valituiksi* tai *jaetuiksi*.
- Huomaa, että vaatimus (ii) edellyttää pelivälineiden (esim. arpalippujen tai korttien) huolellista *sekoittamista*.

Symmetriaoletus: Kommentteja

- Otosavaruuden alkeistapahtumien symmetrisyyttä voidaan vain harvoin *perustella* uhkapelien ulkopuolella.
- Oletus alkeistapahtumien symmetrisyydestä on *oletus*, jota voidaan *testata* tilastollisesti, jos ko. satunnaisilmiöstä kerätään *havaintoja*.
- *Klassisen todennäköisyyden määritelmä* edellyttää sitä, että otosavaruus on äärellinen ja sen alkeistapahtumat ovat symmetrisiä.

Symmetriset alkeistapahtumat: Esimerkki

- Satunnaisilmiö:

  Tulos nopanheitosta

- Otosavaruus S:

  Silmälukujen i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 joukko:

  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Oletus nopan **virheettömyydestä** voidaan pukea seuraavaan muotoon:

$$\Pr(i) = \frac{1}{6}\,,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- Siten oletus noppien virheettömyydestä merkitsee oletusta alkeistapahtumien i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 *symmetrisyydestä*.