Ilkka Mellin

Todennäköisyyslaskenta

Osa 2: Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

Jakaumien tunnusluvut

Jakaumien tunnusluvut

>> Odotusarvo
Varianssi
Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt
Momentit
Vinous ja huipukkuus
Kvantiilit
Moodi
Suurten lukujen laki

Johdatteleva esimerkki: Arpajaiset 1/7

- Olkoon **arpajaisissa** 1000 *arpaa*.
- *Arpanumerot*: 1, 2, … , 1000.
- *Voitonjako*:

Voitot (mk)	Voittoja (kpl)
1000	1
100	10
20	100

Johdatteleva esimerkki: Arpajaiset 2/7

- *Arvotaan* voittonumerot seuraavalla tavalla:
  (1) Kirjoitetaan arpanumerot lipukkeille.
  (2) Pannaan lipukkeet uurnaan.
  (3) Poimitaan uurnasta *satunnaisesti* 111 arpaa:
    - 100 ensimmäistä saa voittona 20 mk
    - 10 seuraavaa saa voittona 100 mk
    - Viimeinen saa voittona 1000 mk
- *Voitot yhteensä* (mk):

  $$1000\times1 + 100\times10 + 20\times100 = 4000$$
- *Voitto yhtä ostettua arpaa kohden* eli *voitto*/*arpa* (mk):

  $$4000/1000 = 4$$

Odotusarvo

Johdatteleva esimerkki: Arpajaiset 3/7

- *Voitto*/*arpa* voidaan laskea myös *toisella tavalla*.
- *Arpanumerot*: 1, 2, … , 1000.
- *Voitonjako*:

Voitot (mk)	Voittoja (kpl)
1000	1
100	10
20	100
0	889

- *Voitto*/*arpa* (mk):

$$\begin{aligned}
&\frac{1\times 1000+10\times 100+100\times 20+889\times 0}{1000} \\
&=\frac{1}{1000}\times 1000+\frac{10}{1000}\times 100+\frac{100}{1000}\times 20+\frac{889}{1000}\times 0 \\
&=4
\end{aligned}$$

Johdatteleva esimerkki: Arpajaiset 4/7

- *Voitto*/*arpa* saadaan siis laskutoimituksella

$$\frac{1}{1000}\times 1000+\frac{10}{1000}\times 100+\frac{100}{1000}\times 20+\frac{889}{1000}\times 0=4$$

jossa *voitto*/*arpa* on laskettu voittojen *painotettuna summana*, jossa *painoina* on käytetty voittojen *todennäköisyyksiä*:

$$\Pr(\text{Voitto}=1000)=\frac{1}{1000}=0.001$$

$$\Pr(\text{Voitto}=100)=\frac{10}{1000}=0.01$$

$$\Pr(\text{Voitto}=20)=\frac{100}{1000}=0.1$$

$$\Pr(\text{Voitto}=0)=\frac{889}{1000}=0.889$$

Odotusarvo

Johdatteleva esimerkki: Arpajaiset 5/7

- Siten suure *voitto*/*arpa* on laskettu kaavalla

  $$\sum_i x_i p_i$$

  jossa

  x_i = voitto

  p_i = on voiton x_i todennäköisyys
- Kutsutaan suuretta *voitto*/*arpa* voiton **odotusarvoksi**.
- Voiton odotusarvo on siis *odotettavissa oleva voitto*, jos ostaa *yhden arvan*.
- Voiton odotusarvolle voidaan antaa seuraava *frekvenssitulkinta*:

  Jos ostat useita arpoja, voiton odotusarvo kertoo *keskimääräisen voiton yhtä arpaa kohden*.

Odotusarvo
Johdatteleva esimerkki: Arpajaiset 6/7

- Arpominen on *satunnaisilmiö*.
- Määritellään *satunnaismuuttuja* X = *voitto*.
- Satunnaismuuttujan X mahdolliset *arvot* x_i (voitot) ja niiden *todennäköisyydet* p_i :

x_i	$\Pr(X = x_i) = p_i$
1000	1/1000
100	10/1000
20	100/1000
0	889/1000

- **Huomautus**:

  Huomaa, että tulosvaihtoehto 0 mk ja sen todennäköisyys on otettava mukaan!

Odotusarvo

Johdatteleva esimerkki: Arpajaiset 7/7

- Satunnaismuuttujan X *arvot* x_i ja niiden *todennäköisyydet*

  $$\Pr(X = x_i) = p_i$$

  määrittelevät *diskreetin todennäköisyysjakauman*.
- Lauseke

  $$\sum_i x_i p_i = \sum_i x_i \Pr(X = x_i)$$

  määrittelee diskreetin satunnaismuuttujan X *odotusarvon*.
- **Huomautus**:

  Odotusarvo määritellään seuraavassa erikseen *diskreeteille* ja *jatkuville* jakaumille.

Diskreetin jakauman odotusarvo: Määritelmä

- Olkoon X *diskreetti satunnaismuuttuja*.
- Olkoon $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ satunnaismuuttujan X *tulos-vaihtoehtojen* eli arvojen joukko.
- Olkoon satunnaismuuttujan X *pistetodennäköisyysfunktio*

$$f(x_i) = \Pr(X = x_i) = p_i\ , \ i = 1, 2, 3, \ldots$$

- Satunnaismuuttujan X **odotusarvo** on *vakio*

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = \sum_i x_i \Pr(X = x_i) = \sum_i x_i f(x_i)$$

- Sanomme, että satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mathrm{E}(X)$ on sen *jakauman odotusarvo*, joka kuvaa satunnaismuuttujaan X liittyviä todennäköisyyksiä.

Diskreetin jakauman odotusarvo: Kommentteja

- Vaikka satunnaismuuttujan saama arvo vaihtelee satunnaisesti koetoistosta toiseen, satunnaismuuttuja saa *keskimäärin* arvoja, jotka vaihtelevat sen odotusarvon ympärillä.
- *Jos jakaumalla on odotusarvo*, se on jakauman todennäköisyysmassan **painopiste**.
- *Diskreetin* jakauman odotusarvon *ei tarvitse kuulua* ko. satunnaismuuttujan tulosvaihtoehtojen joukkoon.

  Nopanheiton tuloksen odotusarvo on 3.5 (ks. >), mikä ei esiinny mahdollisten tulosvaihtoehtojen joukossa.

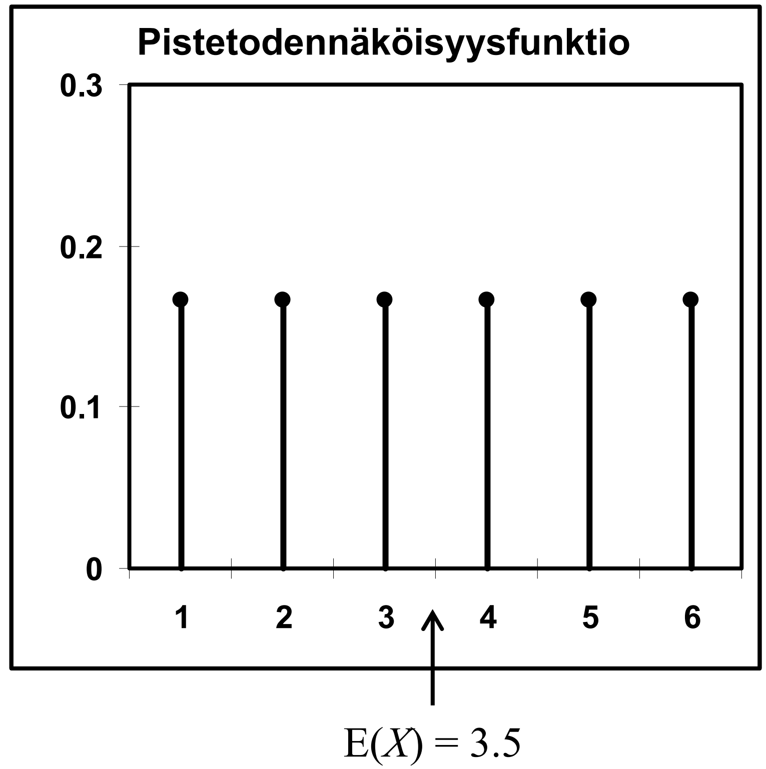
Diskreetin jakauman odotusarvo: Esimerkki nopanheitosta

- Nopanheittoon liittyvän **diskreetin tasaisen jakauman** *pistetodennäköisyysfunktio* on muotoa

$$\Pr(X = i) = \frac{1}{6}, \; i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- Satunnaismuuttujan X *odotusarvo*:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \sum_{i=1}^{6} i \Pr(X = i) = \sum_{i=1}^{6} i \frac{1}{6} \\ &= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} \\ &= 3.5 \end{aligned}$$

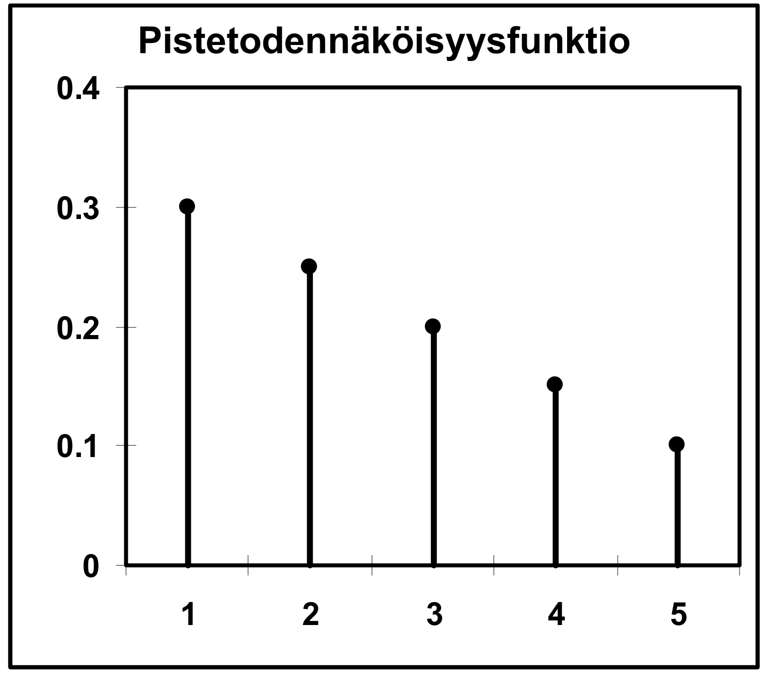


Diskreetin jakauman odotusarvo: Esimerkki onnenpyörästä 1/2

- Olkoon *diskreetin satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyysfunktio* muotoa

  $\Pr(X = 1) = 0.3$
  $\Pr(X = 2) = 0.25$
  $\Pr(X = 3) = 0.2$
  $\Pr(X = 4) = 0.15$
  $\Pr(X = 5) = 0.1$

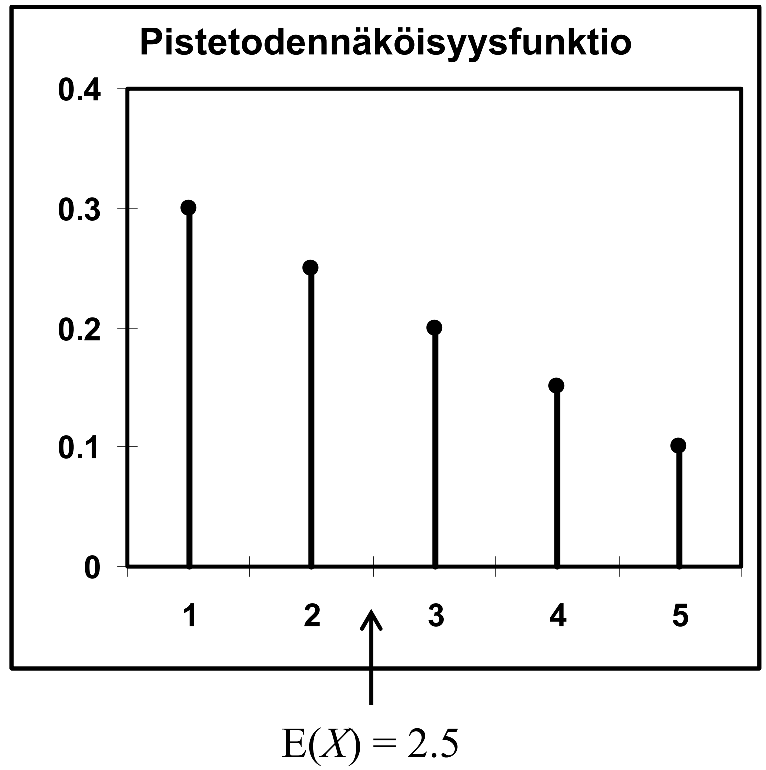
- Pistetodennäköisyysfunktio liittyy luvussa **Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat** käsiteltyyn esimerkkiin onnenpyörästä.



Diskreetin jakauman odotusarvo: Esimerkki onnenpyörästä 2/2

- Satunnaismuuttujan X *odotusarvo*:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{i=1}^{5} i \Pr(X=i) \\ &= 1\times 0.3 + 2\times 0.25 + 3\times 0.2 \\ &\quad + 4\times 0.15 + 5\times 0.1 \\ &= 2.5\end{aligned}$$



Jatkuvan jakauman odotusarvo: Määritelmä

- Olkoon X on *jatkuva satunnaismuuttuja*.
- Olkoon satunnaismuuttujan X *tiheysfunktio* $f(x)$.
- Satunnaismuuttujan X **odotusarvo** on *vakio*

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

- Sanomme, että satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mathrm{E}(X)$ on sen *jakauman odotusarvo*, joka kuvaa satunnaismuuttujaan X liittyviä todennäköisyyksiä.

Jatkuvan jakauman odotusarvo: Kommentteja

- Vaikka satunnaismuuttujan saama arvo vaihtelee satunnaisesti koetoistosta toiseen, satunnaismuuttuja saa *keskimäärin* arvoja, jotka vaihtelevat sen odotusarvon ympärillä.
- *Jos jakaumalla on odotusarvo*, se on jakauman todennäköisyysmassan **painopiste**.
- *Jatkuvan* jakauman odotusarvo *kuuluu aina* ko. satunnaismuuttujan tulosvaihtoehtojen joukkoon.

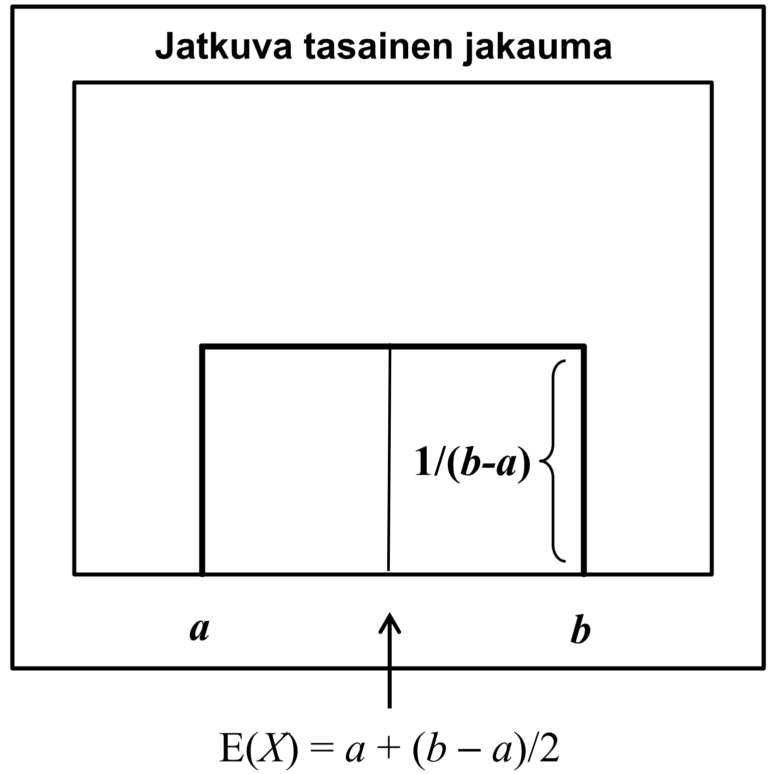
Jatkuvan jakauman odotusarvo: Esimerkki tasaisesta jakaumasta

- **Jatkuvan tasaisen jakauman** *tiheysfunktio* on

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

- Jakauman *odotusarvo* on

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\tfrac{1}{2} x^2 \right]_a^b \\ &= (b+a)/2 = a + (b-a)/2 \end{aligned}$$



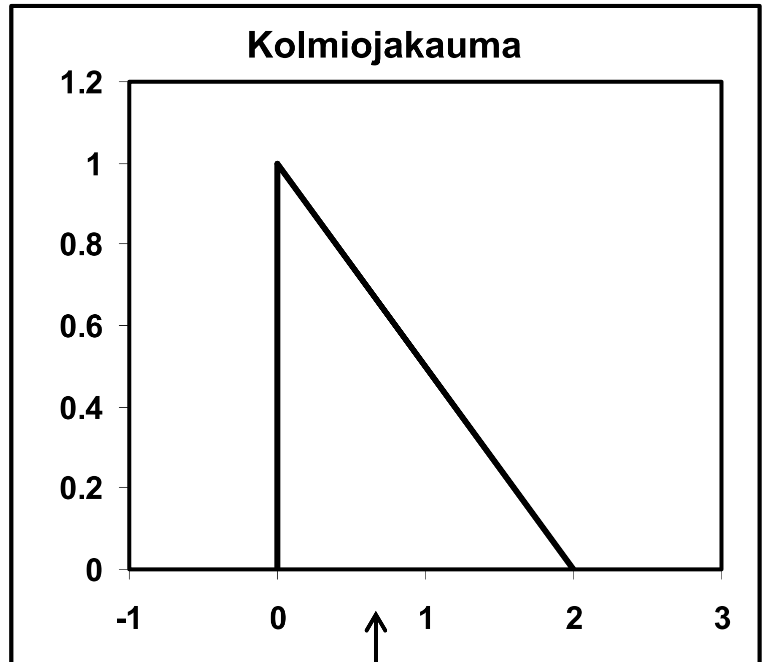
Jatkuvan jakauman odotusarvo: Esimerkki kolmiojakaumasta

- Erään **kolmiojakauman** *tiheysfunktio* on

$$f(x) = \begin{cases} -\tfrac{1}{2}x + 1\,, & 0 \le x \le 2 \\ 0\,, & \text{muulloin} \end{cases}$$

- Jakauman *odotusarvo* on

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{2} x\left(-\tfrac{1}{2}x + 1\right)dx \\ &= \left[-\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$



E(X) = 2/3

Jatkuvan jakauman odotusarvo: Esimerkki normaalijakaumasta

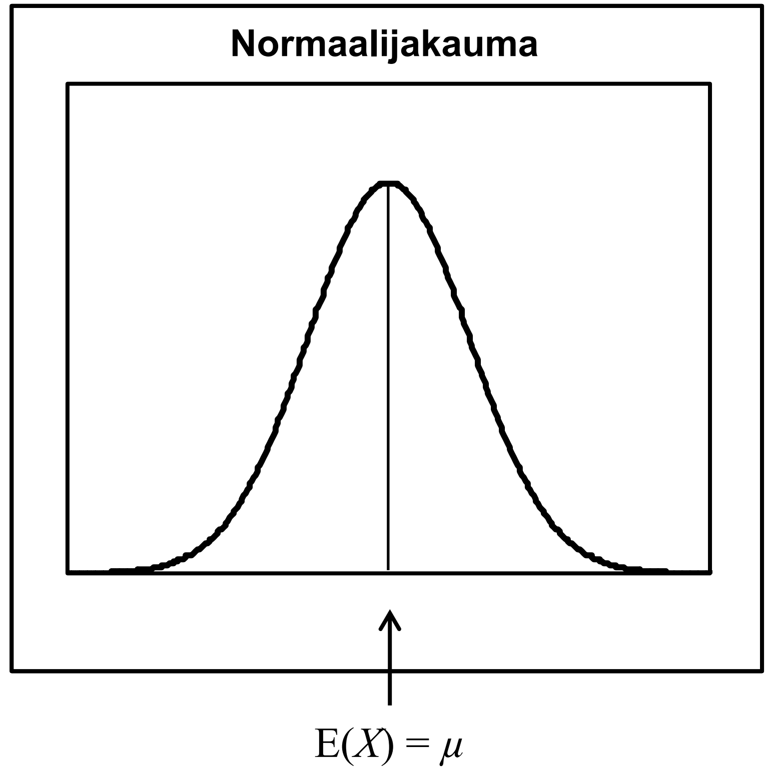
- **Normaalijakauman** *tiheysfunktio* on

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

- Normaalijakauman tiheysfunktio on *symmetrinen* suoran $x = \mu$ suhteen.
- Voidaan osoittaa, että normaalijakauman *odotusarvo*

  $\mathrm{E}(x) = \mu$

  ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.



Odotusarvon olemassaolo

- Jakaumalla *ei välttämättä ole* odotusarvoa.
- **Odotusarvon olemassaololla** tarkoitetaan diskreetin jakauman tapauksessa sitä, että

$$\sum_i |x_i| f(x_i) < \infty$$

ja jatkuvan jakauman tapauksessa sitä, että

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

Odotusarvo ja todennäköisyysmassan painopiste

- Jos jakaumalla on odotusarvo, se yhtyy aina ko. jakauman todennäköisyysmassan **painopisteeseen**.
- Olkoon

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

satunnaismuuttujan X odotusarvo.

- Jos satunnaismuuttujan X jakauma on *symmetrinen* suoran

$$x = a$$

suhteen, niin

$$\mathrm{E}(X) = \mu = a$$

Vakion odotusarvo

- Olkoon *a ei-satunnainen vakio*.
- **Vakion odotusarvo** on vakio itse:

$$\mathrm{E}(a) = a$$

- Kommentti:

  Vakio *ei vaihtele* koetoistosta toiseen.

Vakion odotusarvo: Perustelu

- **Väite**: *Vakiolle a* pätee

$$\mathrm{E}(a) = a$$

- **Perustelu** (*jatkuvan jakauman* tapauksessa):

$$\mathrm{E}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} af(x)dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a \cdot 1 = a$$

Lineaarimuunnoksen odotusarvo

- Olkoon satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mathrm{E}(X)$.
- **Satunnaismuuttujan X lineaarimuunnoksen**

$$Y = a + bX$$

(*a* ja *b* *vakioita*) odotusarvo $\mathrm{E}(Y)$ saadaan soveltamalla ko. lineaarimuunnosta odotusarvoon $\mathrm{E}(X)$:

$$\mathrm{E}(Y) = a + b\,\mathrm{E}(X)$$

Lineaarimuunnoksen odotusarvo: Perustelu

- **Väite**: *Lineaarimuunnokselle*

$$Y = a + bX$$

pätee

$$\mathrm{E}(Y) = a + b\mathrm{E}(X).$$

- **Perustelu** (*jatkuvan jakauman* tapauksessa):

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(a+bX) = \int_{-\infty}^{+\infty} (a+bx) f(x)dx$$

$$= a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$= a + b\,\mathrm{E}(X)$$

Lineaarimuunnoksen odotusarvo: Kommentteja

- Satunnaismuuttujan X kertominen vakiolla b merkitsee satunnaismuuttujan X saamien arvojen *mittakaavan muuttamista*.
- Satunnaismuuttujan X saamien arvojen mittakaavan muuttaminen *verrannollisuuskertoimella* b muuttaa satunnaismuuttujan X jakauman todennäköisyysmassan painopistettä samalla kertoimella.
- Vakion a lisääminen satunnaismuuttujaan X merkitsee satunnaismuuttujan X jakauman todennäköisyysmassan *siirtoa*.
- Todennäköisyysmassan siirtäminen vakion a verran siirtää todennäköisyysmassan painopistettä *saman* verran.

Odotusarvo jakauman sijaintiparametrina 1/2

- Koska odotusarvolla on *fysikaalinen tulkinta* todennäköisyysmassan *painopisteenä*, odotusarvoa voidaan kutsua jakauman **sijaintiparametriksi**.
- Oletetaan, että satunnaismuuttujien X ja Y *tiheysfunktiot yksihuippuisia* ja *symmetrisiä painopisteensä suhteen*.
- Tällöin satunnaismuuttujan X todennäköisyysmassan pääosa *sijaitsee vasemmalla* satunnaismuuttujan Y todennäköisyysmassan pääosasta, jos ja vain jos

  $$\mathrm{E}(X) < \mathrm{E}(Y)$$

  ks. havainnollistusta 1 >.

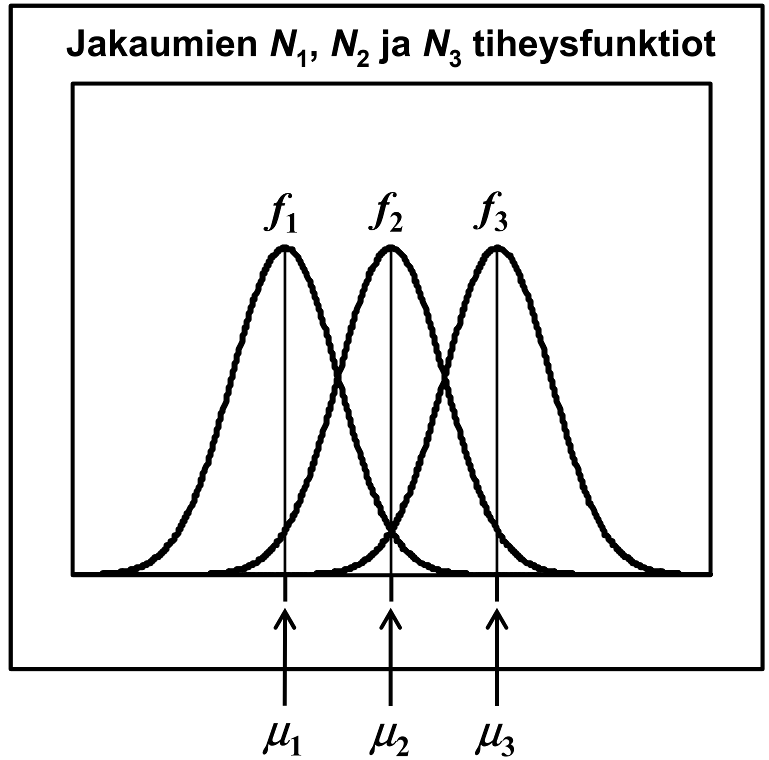
Odotusarvo jakauman sijaintiparametrina 2/2

- Myös jos jakauma on *yksihuippuinen*, mutta *vino*, odotusarvo kuvaa luontevalla tavalla jakauman todennäköisyysmassan pääosan *sijaintia*; ks. havainnollistusta 2 >.
- Sen sijaan, jos jakauma on *monihuippuinen*, jakauman todennäköisyysmassan pääosien ei tarvitse olla lähellä odotusarvoa; ks. havainnollistusta 3 >.

Odotusarvo jakauman sijaintiparametrina: Havainnollistus 1

- Kuva oikealla esittää kolmen **normaalijakauman** N_1, N_2 ja N_3 *tiheysfunktioita* f_1, f_2 ja f_3 .
- Tiheysfunktiot f_1, f_2 ja f_3 ovat *yksihuippuisia* ja *symmetrisiä* suorien $x = \mu_1$, $x = \mu_2$ ja $x = \mu_3$ suhteen.
- Jakaumat N_2 ja N_3 saadaan *siirtämällä* jakauman N_1 todennäköisyysmassaa *oikealle*.
- Jakaumien N_1, N_2 ja N_3 odotusarvot μ_1, μ_2 ja μ_3 toteuttavat epäyhtälöt

  $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$

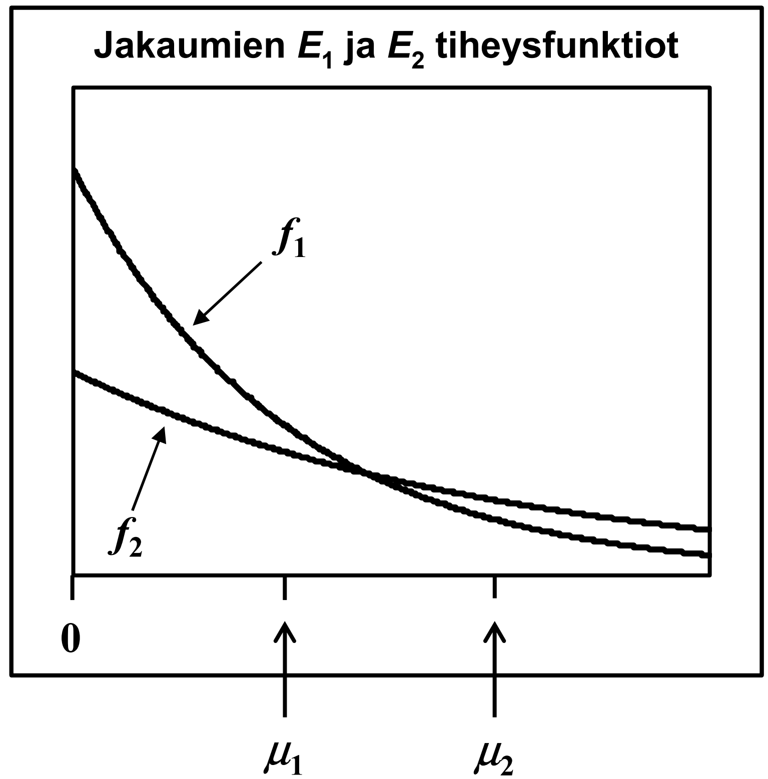


Odotusarvo

Odotusarvo jakauman sijaintiparametrina: Havainnollistus 2

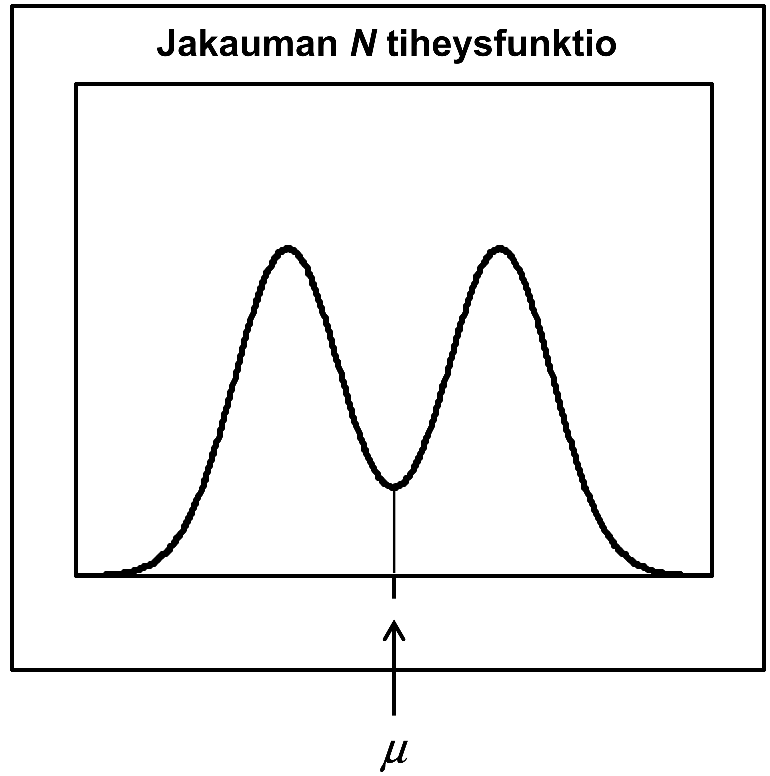
- Kuva oikealla esittää kahden **eksponenttijakauman** E_1 ja E_2 *tiheysfunktioita* f_1 ja f_2 .
- Tiheysfunktiot f_1 ja f_2 ovat *yksihuippuisia* ja *epäsymmetrisiä.*
- Jakauman E_1 todennäköisyysmassa *on keskittynyt* jakauman E_2 todennäköisyysmassaa *voimakkaammin origon lähelle*.
- Jakaumien E_1 ja E_2 odotusarvot μ_1 ja μ_2 toteuttavat epäyhtälön

  $\mu_1 < \mu_2$



Odotusarvo jakauman sijaintiparametrina: Havainnollistus 3

- Kuva oikealla esittää erään **sekoitetun normaalijakauman** *N tiheysfunktiota f*.
- Tiheysfunktio f on *kaksi-huippuinen* ja *symmetrinen* suoran $x = \mu$ suhteen.
- Jakauman N todennäköisyys-massalla *on* vaaka-akselilla *kaksi keskittymää*.
- Jakauman N odotusarvo μ on todennäköisyysmassojen keskittymien *välissä*.



Summan ja erotuksen odotusarvo

- Satunnaismuuttujien X ja Y **summan** $\boldsymbol{X + Y}$ **odotusarvo** on

$$\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)$$

- Satunnaismuuttujien X ja Y **erotuksen** $\boldsymbol{X - Y}$ **odotusarvo** on

$$\mathrm{E}(X-Y)=\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(Y)$$

- Tämä merkitsee sitä, että odotusarvo on *lineaarinen operaattori*.
- Huomautus:

  Todistus vaatii *kaksiulotteisten satunnaismuuttujien* määrittelemistä ja esitetään luvussa **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja jakaumat**.

Summman odotusarvo: Yleistys

- Olkoot X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *satunnaismuuttujia* ja a_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *vakioita*.
- Satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ **painotetun summan**

  $$\sum a_i X_i$$

  odotusarvo on

  $$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \,\mathrm{E}(X_i)$$

Diskreetin satunnaismuuttujan funktion odotusarvo: Määritelmä

- Olkoon X *diskreetti satunnaismuuttuja*, jonka *piste-todennäköisyysfunktio* on

  $$f(x_i) = \Pr(X = x_i) = p_i\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

- Olkoon g reaaliarvoinen funktio.
- Satunnaismuuttujan $g(X)$ odotusarvo on vakio

  $$\mathrm{E}(g(X)) = \mu_{g(X)} = \sum_i g(x_i) f(x_i)$$

Jatkuvan satunnaismuuttujan funktion odotusarvo: Määritelmä

- Olkoon X *jatkuva satunnaismuuttuja*, jonka *tiheysfunktio* on

  $$f(x)$$

- Olkoon g reaaliarvoinen funktio.
- Satunnaismuuttujan $g(X)$ odotusarvo on vakio

$$\mathrm{E}(g(X)) = \mu_{g(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

Jakaumien tunnusluvut

Odotusarvo
>> Varianssi
Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt
Momentit
Vinous ja huipukkuus
Kvantiilit
Moodi
Suurten lukujen laki

Varianssi: Yleinen määritelmä

- Olkoon satunnaismuuttujan X odotusarvo

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X$$

- Satunnaismuuttujan X **varianssi** on *vakio*

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \mathrm{E}(X - \mu_X)^2$$

- Satunnaismuuttujan X varianssi on satunnaismuuttujan X omasta odotusarvostaan μ_X määrätyn *poikkeaman neliön odotusarvo*.

Diskreetin jakauman varianssi

- Olkoon X *diskreetti satunnaismuuttuja*.
- Olkoon $\{x_1, x_2, \ldots\}$ satunnaismuuttujan X *tulosvaihtoehtojen* eli arvojen joukko.
- Olkoon satunnaismuuttujan X *pistetodennäköisyysfunktio*

$$f(x_i) = \Pr(X = x_i) = p_i \,,\ i = 1, 2, \ldots$$

- Tällöin satunnaismuuttujan X **varianssi** on *vakio*

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 p_i$$

Jatkuvan jakauman varianssi

- Olkoon X on *jatkuva satunnaismuuttuja*.
- Olkoon satunnaismuuttujan X *tiheysfunktio* $f(x)$.
- Tällöin satunnaismuuttujan X **varianssi** on *vakio*

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f(x)dx$$

Varianssin olemassaolo

- Jakaumalla *ei välttämättä ole* varianssia.
- **Varianssin olemassaololla** tarkoitetaan sitä, että varianssin määrittelevä summa (diskreetin jakauman tapauksessa) tai integraali (jatkuvan jakauman tapauksessa) on äärellinen.

Varianssin määritelmä: Kommentteja

- Varianssi kuvaa todennäköisyysmassan **hajaantuneisuutta** tai – mikä on sama asia – **keskittyneisyyttä** jakauman *painopisteen* suhteen.
- Jos

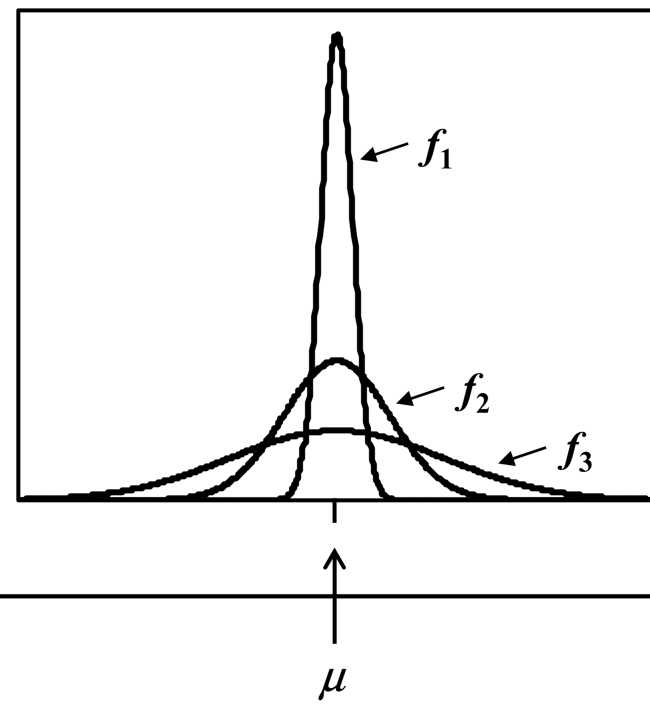
  $$\mathrm{Var}(X) > \mathrm{Var}(Y)$$

  niin satunnaismuuttujan X todennäköisyysmassa on hajaantunut *voimakkaammin oman painopisteeseensä suhteen* kuin satunnaismuuttujan Y todennäköisyysmassa *oman painopisteeseensä suhteen*.
- Koska varianssi kuvaa todennäköisyysmassan hajaantuneisuutta, sitä voidaan kutsua **hajonta-parametriksi**.

Varianssi jakauman hajaantuneisuuden mittana: Esimerkki normaalijakaumista 1/2

- Kuva oikealla esittää kolmen **normaalijakauman** N_1, N_2 ja N_3 *tiheysfunktioita* f_1, f_2 ja f_3 .
- Kaikilla jakaumilla on *sama* odotusarvo μ.
- Tiheysfunktiot f_1, f_2 ja f_3 ovat *yksihuippuisia* ja *symmetrisiä* suoran $x = \mu$ suhteen.

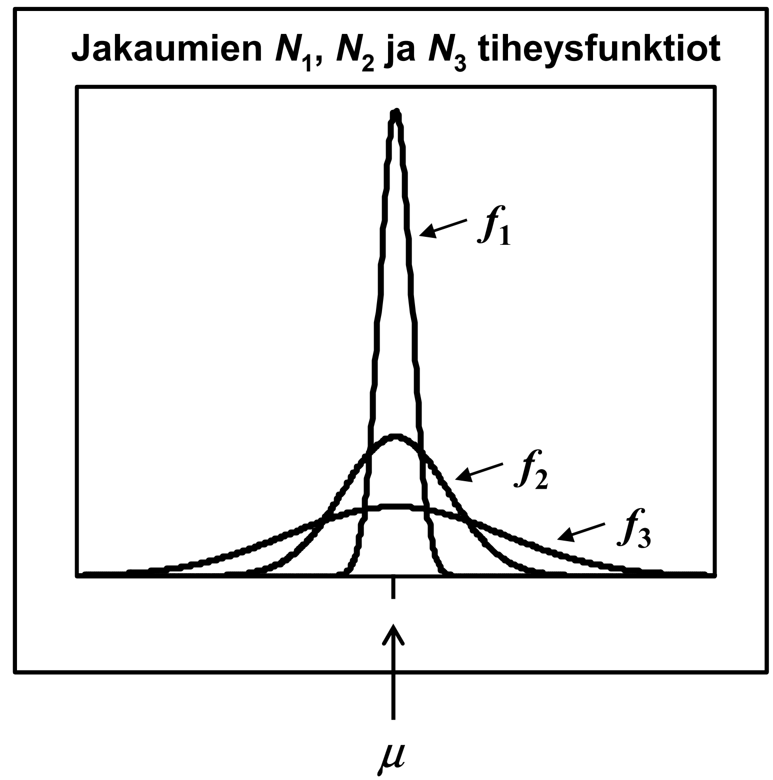
Jakaumien N_1, N_2 ja N_3 tiheysfunktiot



Varianssi jakauman hajaantuneisuuden mittana: Esimerkki normaalijakaumista 2/2

- Jakauman N_1 todennäköisyysmassa *on keskittynein*, kun taas jakauman N_3 todennäköisyysmassa on *hajaantunein*.
- Jakaumien varianssit toteuttavat epäyhtälöt:

  $\mathrm{Var}(X_1) < \mathrm{Var}(X_2) < \mathrm{Var}(X_3)$



Varianssi: Toinen laskukaava

- Olkoon satunnaismuuttujan X *odotusarvo*

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

- Satunnaismuuttujan X *varianssi* voidaan laskea myös kaavalla

$$\mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \mu^2$$

jossa

$$\alpha_2 = \mathrm{E}(X^2)$$

on satunnaismuuttujan X *toinen* (*origo*-) *momentti*.

Varianssin toinen laskukaava: Perustelu

- Olkoot satunnaismuuttujan X *odotusarvo*

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

ja *toinen momentti*

$$\mathrm{E}(X^2) = \alpha_2$$

- Satunnaismuuttujan X *varianssi* on

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X-\mu)^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\
&= \mathrm{E}(X^2) - 2\mu\,\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(\mu^2) \\
&= \alpha_2 - 2\mu \times \mu + \mu^2 \\
&= \alpha_2 - \mu^2
\end{aligned}$$

Standardipoikkeama: Määritelmä

- Olkoon satunnaismuuttujan X odotusarvo

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X$$

- Satunnaismuuttujan X **standardipoikkeama** on vakio

$$\mathrm{D}(X) = \sigma_X = \sqrt{\mathrm{E}(X - \mu_X)^2}$$

- Standardipoikkeamaa käytetään samaan tapaan kuin varianssia todennäköisyysmassan *hajaantuneisuuden* (*keskittyneisyyden*) mittana.
- Standardipoikkeama on – toisin kuin varianssi – samoissa *mittayksiköissä* kuin odotusarvo.

Diskreetin jakauman varianssi: Esimerkki nopanheitosta 1/2

- Nopanheiton tulosta satunnaisilmiönä kuvaavan **diskreetin tasaisen jakauman** *pistetodennäköisyysfunktio*:

$$\mathrm{P}(X = i) = \frac{1}{6}\,,\ i = 1,2,3,4,5,6$$

- Satunnaismuuttujan X *odotusarvo*:

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \sum_{i=1}^{6} i\,\Pr(X = i) = \sum_{i=1}^{6} i\,\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

- Satunnaismuuttujan X *toinen momentti*:

$$\mathrm{E}(X^2) = \alpha_2 = \sum_{i=1}^{6} i^2\,\Pr(X = i) = \sum_{i=1}^{6} i^2\,\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6} = \frac{91}{6}$$

Diskreetin jakauman varianssi: Esimerkki nopanheitosta 2/2

- Satunnaismuuttujan X *varianssi*:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{35}{12} \approx 2.917$$

- Satunnaismuuttujan X *standardipoikkeama* eli *keskihajonta*:

$$\mathrm{D}(X) = \sigma = \sqrt{2.917} \approx 1.708$$

Diskreetin jakauman odotusarvo ja varianssi: Laskujen järjestäminen 1/5

- Nopanheiton tulosta satunnaisilmiönä kuvaavan **diskreetin tasaisen jakauman** *odotusarvon* ja *varianssin* määräämistä varten tarvittavat laskutoimitukset voidaan järjestää seuraavan taulukon muotoon:

	Keskiarvo			Varianssi 1		Varianssi 2		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
i	x_i	p_i	$x_i p_i$	x_i^2	$x_i^2 p_i$	$x_i - \mu$	$(x_i - \mu)^2$	$(x_i - \mu)^2 p_i$
1	1	1/6	1/6	1	1/6	–2.5	6.25	25/24
2	2	1/6	2/6	4	4/6	–1.5	2.25	9/24
3	3	1/6	3/6	9	9/6	–0.5	0.25	1/24
4	4	1/6	4/6	16	16/6	+0.5	0.25	1/24
5	5	1/6	5/6	25	25/6	+1.5	2.25	9/24
6	6	1/6	6/6	36	36/6	+2.5	6.25	25/24
Σ	21	1	21/6	91	91/6	0	17.5	70/24

Diskreetin jakauman odotusarvo ja varianssi: Laskujen järjestäminen 2/5

- Taulukon rivillä Σ on sarakesummat riveiltä 1-6:

Sarake 2: $\sum x_i = 21$

Sarake 3: $\sum p_i = 1$

Sarake 4: $\sum x_i p_i = \mu = 21/6 = 3.5$

Sarake 5: $\sum x_i^2 = 91$

Sarake 6: $\sum x_i^2 p_i = \alpha_2 = 91/6 = 15.167$

Sarake 7: $\sum (x_i - \mu) = 0$

Sarake 8: $\sum (x_i - \mu)^2 = 17.5$

Sarake 9: $\sum (x_i - \mu)^2 p_i = \sigma^2 = 70/24 = 2.917$

Diskreetin jakauman odotusarvo ja varianssi: Laskujen järjestäminen 3/5

- Satunnaismuuttujan X *odotusarvon* määräämistä varten tarvittavat laskutoimitukset on suoritettu sarakkeissa 2-4.
- Odotusarvo saadaan rivin Σ sarakkeesta 4:

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \sum x_i p_i = 21/6 = 3.5$$

Diskreetin jakauman odotusarvo ja varianssi: Laskujen järjestäminen 4/5

- Satunnaismuuttujan X *varianssi* voidaan määrätä kahdella eri tavalla:
- Kaava 1:

$$\mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \mu^2$$

jossa

$$\alpha_2 = \mathrm{E}(X^2) = \sum x_i^2 p_i$$

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \sum x_i p_i$$

- Kaava 2:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X - \mu)^2 = \sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 p_i$$

jossa μ on kuten kaavassa 1.

Diskreetin jakauman odotusarvo ja varianssi: Laskujen järjestäminen 5/5

- Kaavan 1 vaatimat laskutoimitukset on tehty sarakkeissa 2-4 ja 5-6:

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \sum x_i p_i = 21/6 = 3.5$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \alpha_2 = \sum x_i^2 p_i = 91/6 = 15.167$$

- Kaavan 1 mukaan

$$\mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \mu^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{35}{12} = 2.917$$

- Kaavan 2 vaatimat laskutoimitukset on tehty sarakkeissa 2-4 ja 7-9:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X-\mu)^2 = \sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 p_i = \frac{70}{24} = 2.917$$

- Kaavan 2 soveltaminen on siinä mielessä monimutkaisempaa kuin kaavan 1 soveltaminen, että kaavassa 2 on erotuksien $(x_i - \mu)$ määräämiseksi *ensin* määrättävä odotusarvo μ.

Jatkuvan jakauman odotusarvo ja varianssi: Esimerkki tasaisesta jakaumasta 1/2

- Erään **jatkuvan tasaisen jakauman** *tiheysfunktio*:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b}, & 0 \le x \le b \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

- Satunnaismuuttujan X *odotusarvo*:

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^b x\frac{1}{b}dx = \left[\frac{1}{2b}x^2\right]_0^b = \frac{b}{2}$$

- Satunnaismuuttujan X *toinen momentti*:

$$\mathrm{E}(X^2) = \alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^b x^2\frac{1}{b}dx = \left[\frac{x^3}{3b}\right]_0^b = \frac{b^2}{3}$$

Jatkuvan jakauman odotusarvo ja varianssi: Esimerkki tasaisesta jakaumasta 2/2

- Satunnaismuuttujan X *varianssi*:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = \frac{b^2}{3} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{12}$$

- Satunnaismuuttujan X *standardipoikkeama*:

$$\mathrm{D}(X) = \sigma = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

Vakion varianssi

- Olkoon *a ei-satunnainen vakio*.
- **Vakion varianssi** on nolla:

$$\mathrm{Var}(a) = 0$$

- Tulkinta:

  Vakio *ei vaihtele* satunnaiskokeesta toiseen.

Vakion varianssi: Perustelu

- **Väite**: Vakiolle a pätee

  $$\mathrm{Var}(a) = 0$$

- **Perustelu**:

  $$\mathrm{Var}(a) = \mathrm{E}\left(a - \mathrm{E}(a)\right)^2 = \mathrm{E}(a-a)^2 = \mathrm{E}(0) = 0$$

  koska vakiolle a pätee:

  $$\mathrm{E}(a) = a$$

Lineaarimuunnoksen varianssi

- Olkoon satunnaismuuttujan X varianssi $\mathrm{Var}(X)$.
- **Satunnaismuuttujan *X* lineaarimuunnoksen**

$$Y = a + bX$$

(*a* ja *b vakiota*) varianssi on

$$\mathrm{Var}(Y) = b^2\,\mathrm{Var}(X)$$

Lineaarimuunnoksen varianssi: Perustelu

- **Väite**: *Lineaarimuunnokselle*

  $$Y = a + bX$$

  pätee

  $$\mathrm{Var}(Y) = b^2\mathrm{Var}(X).$$

- **Perustelu**:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(a+bX) &= \mathrm{E}\left[(a+bX)-\mathrm{E}\left(a+bX\right)\right]^2 \\ &= \mathrm{E}\left[a+bX-a-b\,\mathrm{E}(X)\right]^2 \\ &= \mathrm{E}\left[bX-b\,\mathrm{E}(X)\right]^2 \\ &= b^2\,\mathrm{E}\left[X-\mathrm{E}(X)\right]^2 \\ &= b^2\,\mathrm{Var}(X)\end{aligned}$$

Lineaarimuunnoksen varianssi: Kommentteja

- Satunnaismuuttujan X kertominen vakiolla b merkitsee satunnaismuuttujan X saamien arvojen *mittakaavan muuttamista*.
- Satunnaismuuttujan X saamien arvojen mittakaavan muuttaminen *verrannollisuuskertoimella* b muuttaa satunnaismuuttujan X varianssia kertoimella b^2.
- Vakion a lisääminen satunnaismuuttujaan X merkitsee satunnaismuuttujan X jakauman todennäköisyysmassan *siirtoa*.
- Todennäköisyysmassan siirtäminen *ei muuta* todennäköisyysmassan hajaantuneisuutta.

Varianssi

Standardointi

- Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo $\mathrm{E}(X) = \mu$ ja varianssi $\mathrm{D}^2(X) = \sigma^2$.
- Tällöin **standardoidun satunnaismuuttujan**

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

odotusarvo

$$\mathrm{E}(Z) = 0$$

ja varianssi

$$\mathrm{D}^2(Z) = 1$$

Varianssi

Standardointi: Perustelu

- Olkoot $\mathrm{E}(X) = \mu$ ja $\mathrm{D}^2(X) = \sigma^2$.
- Standardoidaan satunnaismuuttuja X:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- Tällöin

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X) - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\mu - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

$$\mathrm{D}^2(Z) = \mathrm{D}^2\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{D}^2(X) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1$$

Summan ja erotuksen varianssi 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*.
- Tarkastellaan satunnaismuuttujien X ja Y *summan* $X + Y$ ja *erotuksen* $X - Y$ varianssia.
- Huomautus:

  Satunnaismuuttujien X ja Y *riippumattomuudella* tarkoitetaan seuraavaa:

  Se, mitä arvoja satunnaismuuttuja X saa, ei saa riippua siitä, mitä arvoja satunnaismuuttuja Y saa ja kääntäen, se, mitä arvoja satunnaismuuttuja Y saa, ei saa riippua siitä, mitä arvoja satunnaismuuttuja X saa; käsite täsmennetään luvussa **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja jakaumat**.

Summan ja erotuksen varianssi 2/2

- Riippumattomien satunnaismuuttujien X ja Y **summan $X + Y$ varianssi** on

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

- Riippumattomien satunnaismuuttujien X ja Y **erotuksen $X - Y$ varianssi** on

$$\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

- Huomautus:

  Todistus vaatii *kaksiulotteisen satunnaismuuttujan* määrittelemistä ja esitetään luvussa **Moniulotteiset satunnais-muuttujat ja jakaumat**.

Summan ja erotuksen varianssi: Kommentteja

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*.
- Tällöin satunnaismuuttujien X ja Y *summan* ja *erotuksen* varianssille pätee

$$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

- Huomaa:

$$\mathrm{Var}(X - Y) \neq \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y)$$

$$\mathrm{D}(X + Y) \neq \mathrm{D}(X) + \mathrm{D}(Y)$$

$$\mathrm{D}(X - Y) \neq \mathrm{D}(X) - \mathrm{D}(Y)$$

Summan varianssi: Yleistys

- Olkoot satunnaismuuttujat X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *riippumattomia* ja a_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *vakioita*.
- Tällöin satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ **painotetun summan**

$$\sum a_i X_i$$

varianssi on

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \,\mathrm{Var}(X_i)$$

Varianssi

Empiirinen jakauma 1/3

- Oletetaan, että *diskreetin satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot* ovat

$$x_i\,,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

- Liitetään satunnaismuuttujan X arvoihin *symmetriset todennäköisyydet*

$$\Pr(X = x_i) = p_i = \frac{1}{n}\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

- Otannan perustyypissä, *yksinkertaisessa satunnais-otannassa*, *havaintoarvot* x_i noudattavat tätä, ns. **empiiristä jakaumaa**.

Varianssi

Empiirinen jakauma 2/3

- Suoraan diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvon ja varianssin määritelmistä saadaan:

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \alpha_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

Varianssi

Empiirinen jakauma 3/3

- Huomaa, että odotusarvo

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

on lukujen x_i **aritmeettinen keskiarvo** ja

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

on lukujen x_i ns. **otosvarianssi**.

Aritmeettisen keskiarvon odotusarvo ja varianssi 1/2

- Olkoot X_i , i = 1, 2, … , n *riippumattomia* satunnaismuuttujia.
- Oletetaan lisäksi, että satunnaismuuttujilla X_i , i = 1, 2, … , n on *sama* odotusarvo ja varianssi:

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu \,,\ \mathrm{D}^2(X_i) = \sigma^2 \,,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

- Olkoon

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, … , n *aritmeettinen keskiarvo*.

Varianssi

Aritmeettisen keskiarvon odotusarvo ja varianssi 2/2

- Tällöin

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = \mu$$

$$\mathrm{D}^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- Huomautuksia:
  - Satunnaismuuttujien X_i aritmeettisen keskiarvon odotusarvo on sama kuin yksittäisten muuttujien yhteinen odotusarvo.
  - Satunnaismuuttujien X_i aritmeettinen keskiarvo vaihtelee varianssilla mitattuna *vähemmän* kuin muuttujat itse.

Aritmeettisen keskiarvon odotusarvo ja varianssi: Perustelu

- Olkoot X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *riippumattomia* satunnaismuuttujia, joille

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu \text{ , } \mathrm{D}^2(X_i) = \sigma^2 \text{ , } i = 1, 2, \ldots, n$$

- Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\bar{X}) &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i\right) = \frac{1}{n}\mathrm{E}\left(\sum_i X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_i \mathrm{E}(X_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_i \mu = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^2(\bar{X}) &= \mathrm{D}^2\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{D}^2\left(\sum_i X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_i \mathrm{D}^2(X_i) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_i \sigma^2 = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

Jakaumien tunnusluvut

Odotusarvo
Varianssi
>> Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt
Momentit
Vinous ja huipukkuus
Kvantiilit
Moodi
Suurten lukujen laki

Markovin epäyhtälö

- Olkoon $g(X)$ satunnaismuuttujan X *positiivinen* reaaliarvoinen funktio, jonka *odotusarvo* on

$$\mathrm{E}(g(X))$$

- Tällöin jokaiselle reaaliselle vakiolle $a > 0$ pätee **Markovin epäyhtälö**

$$\Pr\left(g(X) \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{E}(g(X))}{a}$$

Markovin epäyhtälö: Todistus

- Todistetaan Markovin epäyhtälön *jatkuvien* satunnaismuuttujien tapauksessa.
- Olkoon $g(X)$ satunnaismuuttujan X *positiivinen* reaaliarvoinen funktio, jonka odotusarvo on $\mathrm{E}(g(X))$.
- Olkoon satunnaismuuttujan X *tiheysfunktio* $f(x)$ ja olkoon $a > 0$ *vakio*.
- *Markovin epäyhtälö* saadaan epäyhtälöketjusta

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(g(X)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \\ &\geq a\int_S f(x)dx \\ &= a\Pr(g(X) \geq a)\end{aligned}$$

jossa

$$S = \{x \mid g(x) \geq a\}$$

Markovin epäyhtälö: Kommentteja 1/2

- Markovin epäyhtälön

$$\Pr\big(g(X) \geq a\big) \leq \frac{\mathrm{E}(g(X))}{a}$$

mukaan todennäköisyys sille, että mielivaltaisen satunnaismuuttujan X (jolle odotusarvo $\mathrm{E}(g(X))$ on olemassa) *positiivinen* funktio $g(X)$ saa *suurempia* arvoja kuin $a > 0$, on *korkeintaan*

$$\frac{\mathrm{E}(g(X))}{a}$$

Markovin epäyhtälö: Kommentteja 2/2

- Markovin epäyhtälön erikoistapauksena saadaan *positiivisille* satunnaismuuttujille X epäyhtälö

$$\Pr\left(X \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{a}$$

jossa $a > 0$.

- Siten mielivaltaisen *positiivisen* satunnaismuuttujan (jonka odotusarvo $\mathrm{E}(X)$ on olemassa) todennäköisyysjakauman todennäköisyysmassasta *korkeintaan*

$$100 \times \frac{\mathrm{E}(X)}{a}\ \%$$

on etäisyyttä $a > 0$ *kauempana* origosta.

Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt
Tshebyshevin epäyhtälö

- Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka *odotusarvo* on

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

ja *varianssi* on

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

- Tällöin pätee **Tshebyshevin epäyhtälö**

$$\Pr\left(\left|X-\mu\right| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

Tshebyshevin epäyhtälö: Todistus

- Todistetaan Tshebyshevin epäyhtälön *jatkuvien* satunnaismuuttujien tapauksessa.
- Olkoon X *jatkuva* satunnaismuuttuja.
- Olkoon satunnaismuuttujan X *tiheysfunktio* $f(x)$, sen *odotusarvo* $\mathrm{E}(X) = \mu$ ja *varianssi* $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ sekä olkoon $k > 0$ *vakio*.
- *Tshebyshevin epäyhtälö* seuraa *Markovin epäyhtälöstä*

$$\Pr\big(g(X) \geq a\big) \leq \frac{\mathrm{E}(g(X))}{a}$$

valitsemalla

$$g(x) = (x-\mu)^2 \ ; \mu = \mathrm{E}(X)$$

$$a = k^2\sigma^2 \ ; \sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[g(X)]$$

Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt

Tshebyshevin epäyhtälö: Kommentteja 1/3

- Tshebyshevin epäyhtälön

$$\Pr\left(\left|X-\mu\right|\geq k\sigma\right)\leq\frac{1}{k^2}$$

mukaan mielivaltaisen satunnaismuuttujan X (jonka odotusarvo $\mathrm{E}(X)=\mu$ ja varianssi $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$ ovat olemassa) todennäköisyysmassasta *korkeintaan*

$$100\times\frac{1}{k^2}\ \%$$

on etäisyyttä $k\sigma$ *kauempana* jakauman painopisteestä μ.

Tshebyshevin epäyhtälö: Kommentteja 2/3

- Jos X on mielivaltainen satunnaismuuttuja, jolla on odotusarvo ja varianssi, Tshebyshevin epäyhtälö antaa *absoluuttisen ylärajan* satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauman "häntäalueiden" todennäköisyysmassan osuudelle.
- Jos satunnaismuuttujan X jakauma spesifioidaan tarkemmin, "häntäalueiden" todennäköisyysmassan osuudesta voidaan antaa tarkempia arvioita.

Tshebyshevin epäyhtälö: Kommentteja 3/3

- Esimerkki:

  Tshebyshevin epäyhtälön mukaan *kaikille satunnaismuuttujille* X, joilla on odotusarvo $\mathrm{E}(X) = \mu$ ja varianssi $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, pätee

  $$\Pr\left(\left|X-\mu\right| \geq 3\sigma\right) \leq \frac{1}{9}$$

  Jos tiedämme, että X noudattaa *normaalijakaumaa* (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**), saadaan (esimerkiksi normaalijakaumien taulukoiden avulla) tarkempi tulos:

  $$\Pr\left(\left|X-\mu\right| \geq 3\sigma\right) \approx 0.3\ \%$$

Jakaumien tunnusluvut

Odotusarvo
Varianssi
Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt
>> Momentit
Vinous ja huipukkuus
Kvantiilit
Moodi
Suurten lukujen laki

Origomomentit

- Olkoon X satunnaismuuttuja.
- Tällöin satunnaismuuttujan X^k odotusarvo

$$\mathrm{E}(X^k) = \alpha_k$$

on satunnaismuuttujan X ***k*. momentti** eli k. momentti *origon suhteen*.

Origomomentit: Erikoistapauksia

- Olkoon

$$\mathrm{E}(X^k) = \alpha_k$$

satunnaismuuttujan X ***k*. momentti**

- Erityisesti:

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = \mathrm{E}(X) = \mu$$

- Siten satunnaismuuttujan X 1. momentti on satunnaismuuttujan X *odotusarvo*.

Momentit
Keskusmomentit

- Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo on
$$\mathrm{E}(X)=\mu$$
- Tällöin satunnaismuuttujan $(X-\mu)^k$ odotusarvo
$$\mathrm{E}\left[(X-\mu)^k\right]=\mu_k$$
on satunnaismuuttujan X ***k*. keskusmomentti** eli
k. momentti painopisteen μ suhteen.

Keskusmomentit: Erikoistapauksia

- Olkoon
$$\mathrm{E}\left[(X-\mu)^k\right]=\mu_k$$
satunnaismuuttujan X ***k*. keskusmomentti** eli
k. momentti painopisteen μ suhteen.
- Erityisesti:
$$\mu_1=0$$
$$\mu_2=\mathrm{E}\left[(X-\mu)^2\right]=\sigma^2=\mathrm{Var}(X)=\mathrm{D}^2(X)$$
- Siten satunnaismuuttujan X 1. keskusmomentti *häviää aina* ja 2. keskusmomentti on satunnaismuuttujan X *varianssi*.

Momenttien olemassaolo

- Satunnaismuuttujan X ***k*. origomomentti on olemassa**, jos

$$\mathrm{E}(|X|^k) < \infty$$

- Satunnaismuuttujan X ***k*. keskusmomentti on olemassa**, jos vastaava origomomentti on olemassa.
- Voidaan osoittaa, että jos

$$\mathrm{E}(|X|^n) < \infty$$

jollekin $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\mathrm{E}(|X|^k) < \infty \text{ kaikille } k < n$$

- Jos siis satunnaismuuttujalla on n. origomomentti, sillä on myös kaikki alempien kertalukujen momentit.

Jakaumien tunnusluvut

Odotusarvo
Varianssi
Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt
Momentit
\>> Vinous ja huipukkuus
Kvantiilit
Moodi
Suurten lukujen laki

Momentit

- Olkoon on

$$\alpha_k = \mathrm{E}(X^k)\,,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

satunnaismuuttujan X ***k*. origomomentti**.

- Olkoon

$$\mu_k = \mathrm{E}\left[(X - \alpha_1)^k\right], k = 1, 2, 3, \ldots$$

satunnaismuuttujan X ***k*. keskusmomentti**.

- Huomaa:

$$\alpha_1 = \mathrm{E}(X) = \mu$$

$$\mu_2 = \mathrm{E}\left[(X - \mu)^2\right] = \mathrm{Var}(X)$$

Vinous

- Tunnuslukua

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

käytetään *todennäköisyysjakaumien* **vinouden** *mittana*.

Todennäköisyysjakaumien vinous

- Jos todennäköisyysjakauman pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio on *yksihuippuinen*, pätee seuraava:

  $\gamma_1 < 0$: Jakauma on **negatiivisesti vino** eli **vino vasemmalle**, jolloin jakauman vasen häntä on pitempi kuin oikea häntä.

  $\gamma_1 = 0$: Jakauma on **symmetrinen**.

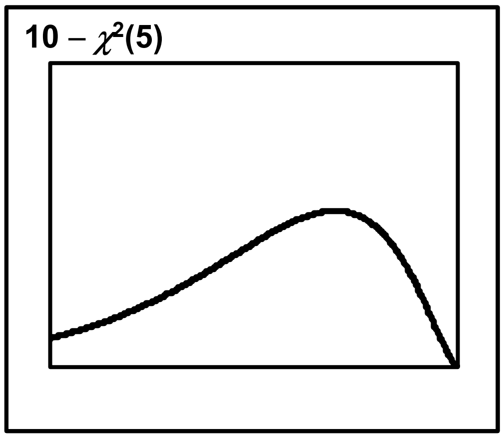
  $\gamma_1 > 0$: Jakauma on **positiivisesti vino** eli **vino oikealle**, jolloin jakauman oikea häntä on pitempi kuin vasen häntä.

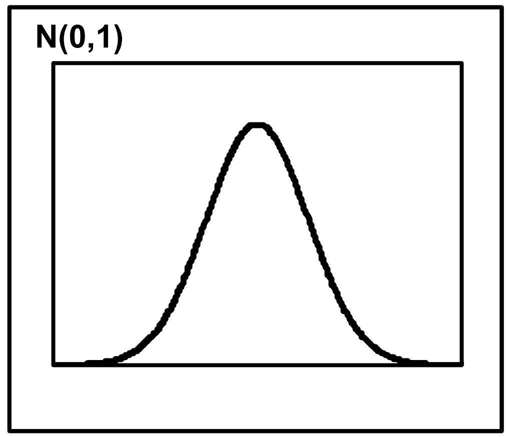
- Huomautus:

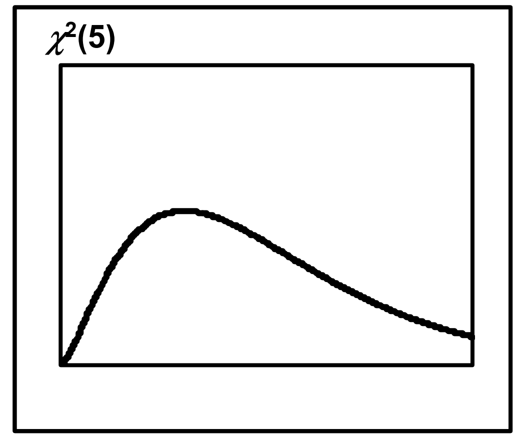
  Normaalijakaumalle $\gamma_1 = 0$.

Todennäköisyysjakaumien vinous: Havainnollistus

Alla on kuvattuna kolme *yksihuippuista* tiheysfunktiota.







$\gamma_1 < 0$:

Jakauma on **negatiivisesti vino** eli **vino vasemmalle**.

$\gamma_1 = 0$:

Jakauma on **symmetrinen**.

$\gamma_1 > 0$:

Jakauma on **positiivisesti vino** eli **vino oikealle**.

Huipukkuus

- Tunnuslukua

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

käytetään *todennäköisyysjakaumien* **huipukkuuden** *mittana*.

Todennäköisyysjakaumien huipukkuus

- Jos todennäköisyysjakauman pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio on *yksihuippuinen*, pätee seuraava:

  $\gamma_2 > 0$: Jakauma on **huipukas** (normaalijakaumaan verrattuna).

  $\gamma_2 = 0$: Jakauma on **yhtä huipukas kuin normaalijakauma**.

  $\gamma_2 < 0$: Jakauma on **laakea** (normaalijakaumaan verrattuna).

- Huomautus:

  Normaalijakaumalle $\gamma_2 = 0$.

Jakaumien tunnusluvut

Odotusarvo
Varianssi
Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt
Momentit
Vinous ja huipukkuus
>> Kvantiilit
Moodi
Suurten lukujen laki

Kvantiilin määritelmä

- Olkoon X satunnaismuuttuja.
- Olkoon lisäksi

$$0 < p < 1$$

- Jos luku x_p toteuttaa ehdot

$$\Pr(X \le x_p) \ge p$$

$$\Pr(X \ge x_p) \ge 1 - p$$

sanomme, että x_p on satunnaismuuttujan X ja sen jakauman **kvantiili** kertalukua p.

- Kvantiili x_p toteuttaa siis epäyhtälöt

$$\Pr(X < x_p) \le p \le \Pr(X \le x_p)$$

Kvantiilin määritelmä: Kommentteja

- Kvantiilit voidaan määrätä myös sellaisille satunnais-muuttujille, joilla *ei ole* momentteja.
- Kvantiilit *eivät välttämättä ole yksikäsitteisiä*:

  (i) *Diskreettien* satunnaismuuttujien kvantiilit *ovat usein monikäsitteisiä*.

  (ii) *Jatkuvien* satunnaismuuttujien kvantiilit *ovat yksikäsitteisiä*; ks. seuraavaa kalvoa.

Jatkuvan satunnaismuuttujan kvantiilit

- Olkoon

  $$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

  jatkuvan satunnaismuuttujan X kertymäfunktio.
- Tällöin satunnaismuuttujan X kvantiili x_p toteuttaa yhtälön

  $$F(x_p) = p$$
- Kvantiili x_p jakaa satunnaismuuttujan X jakauman todennäköisyysmassan *kahteen osaan* niin, että massasta

  $$p \times 100\ \%$$

  on kvantiilista x_p *vasemmalla* ja

  $$(1 - p) \times 100\ \%$$

  on kvantiilista x_p *oikealla*.

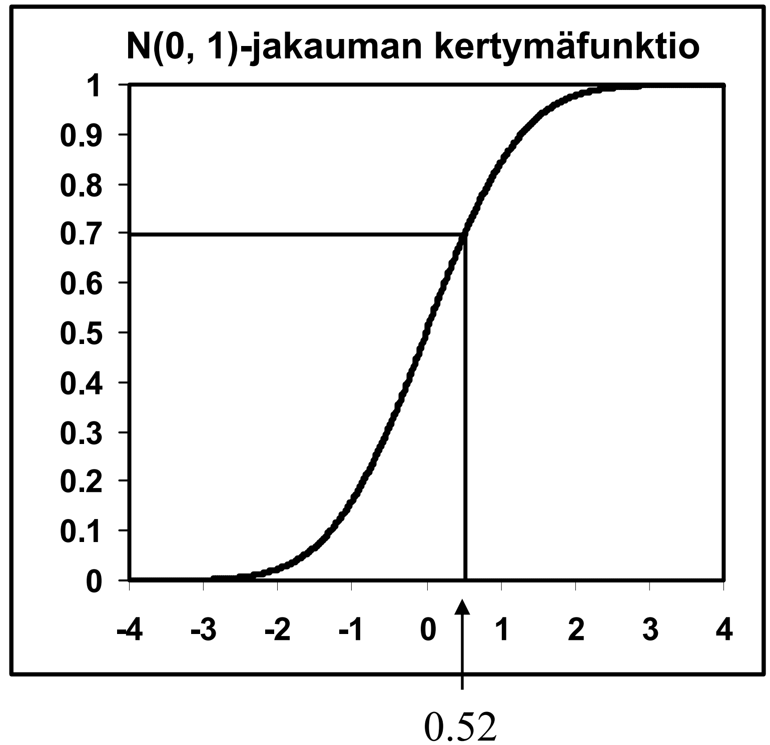
Jatkuvan satunnaismuuttujan kvantiilit: Esimerkki 1/2

- Kuva oikealla esittää **standardoidun normaali-jakauman** N(0, 1) *kertymä-funktiota* $\Phi(z)$.
- Standardoidun normaalijakauman N(0, 1) taulukoiden mukaan:

$$\Phi(0.52) = \Pr(Z \le 0.52) \approx 0.7$$

- Siten

$$x_{0.7} \approx 0.52$$



Jatkuvan satunnaismuuttujan kvantiilit: Esimerkki 2/2

- Kuva oikealla esittää **standardoidun normaalijakauman** N(0, 1) *tiheysfunktiota*.
- Standardoidun normaalijakauman N(0, 1) taulukoiden mukaan:

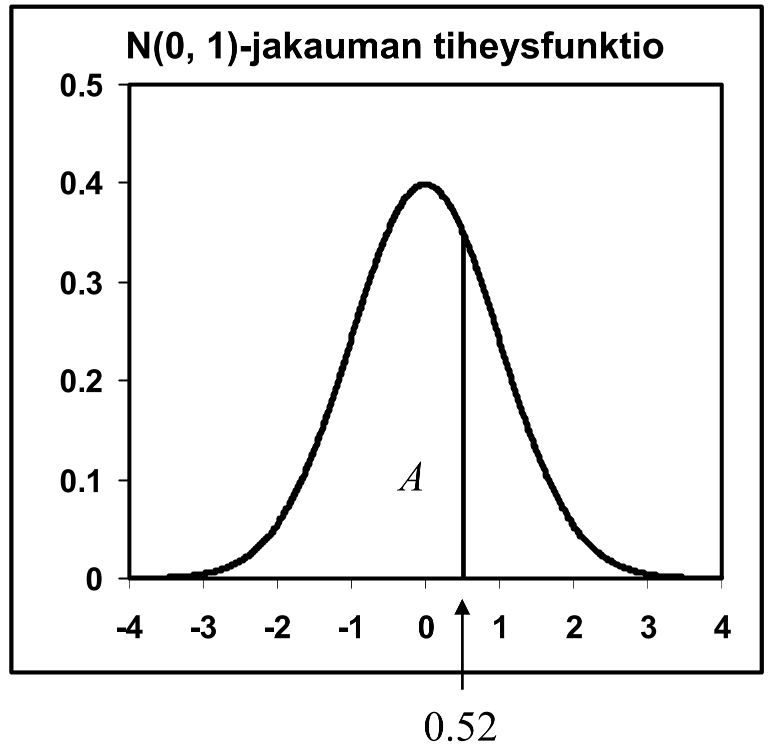
  Alueen A pinta-ala

  $$= \int_{-\infty}^{0.52} f_Z(z)dz$$

  $$= \Pr(Z \leq 0.52)$$

  $$\approx 0.7$$
- Siten

  $$x_{0.7} \approx 0.52$$



Kvantiilit ja tilastolliset taulukot

- Useimmissa *todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen oppikirjoissa on taulukoituna* keskeisten *tilastollisessa päättelyssä* käytettävien jatkuvien jakaumien (standardoitu normaalijakauma N(0,1), χ^2-, t- ja F-jakaumat) kvantiileja x_p ja niitä vastaavia todennäköisyyksiä p.
- Useimmissa *tilastollisissa tietokoneohjelmissa on aliohjelmia*, jotka laskevat tavallisimpien jatkuvien jakaumien kvantiileja x_p ja niitä vastaavia todennäköisyyksiä p.
- Lisätietoja: ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia.**

Prosenttipisteet

- Jos p on muotoa

  $$p = q/100 \,,\ q = 1, 2, \ldots , 99$$

  kvantiilia x_p kutsutaan ***q*. prosenttipisteeksi**.
- Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa q. prosenttipiste jakaa jakauman todennäköisyysmassan *kahteen osaan* niin, että massasta

  $$q\ \%$$

  on q. prosenttipisteestä *vasemmalla* ja

  $$(100 - q)\ \%$$

  on q. prosenttipisteestä *oikealla*.

Desiilit

- Jos p on muotoa

  $$p = 10 \times q/100 \text{ , } q = 1, 2, \ldots , 9$$

  kvantiilia x_p kutsutaan ***q*. desiiliksi**.
- Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa q. desiili jakaa jakauman todennäköisyysmassan *kahteen osaan* niin, että massasta

  $$10 \times q \text{ \%}$$

  on q. desiilistä *vasemmalla* ja

  $$(100 - 10 \times q) \text{ \%}$$

  on q. desiilistä *oikealla*.

Kvartiilit 1/2

- Jos p on muotoa

  $$p = 25\times q/100 \text{ , } q = 1, 2, 3$$

  kvantiilia x_p kutsutaan ***q*. kvartiiliksi**.
- Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa q. kvartiili jakaa satunnaismuuttujan X jakauman todennäköisyys-massan *kahteen osaan* niin, että massasta

  $$25\times q \text{ \%}$$

  on q. kvartiilista *vasemmalla* ja

  $$(100 - 25\times q) \text{ \%}$$

  on q. kvartiilista *oikealla*.

Kvartiilit 2/2

- Kvartiileja merkitään tavallisesti symboleilla Q_1, Q_2, Q_3 ja sanotaan, että

  Q_1 = **alakvartiili**
  Q_2 = **keskikvartiili**
  Q_3 = **yläkvartiili**

- Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa kvartiilit jakavat jakauman todennäköisyysmassan *neljään yhtä suureen osaan*:

  25 % massasta on kvartiilista Q_1 *vasemmalle*
  25 % massasta on kvartiilien Q_1 ja Q_2 *välissä*
  25 % massasta on kvartiilien Q_2 ja Q_3 *välissä*
  25 % massasta on kvartiilista Q_3 *oikealle*

Mediaani

- Jos

  $$p = 0.5$$

  kvantiilia x_p kutsutaan **mediaaniksi**.
- Mediaania merkitään tavallisesti symbolilla Me.
- Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa mediaani Me jakaa jakauman todennäköisyysmassan *kahteen yhtä suureen osaan* niin, että massasta

  50 %

  on mediaanista *vasemmalla* ja

  50 %

  on mediaanista *oikealla*.

Mediaani: Kommentteja

- Jakauman mediaani *ei välttämättä ole* yksikäsitteinen.
- Jakauman mediaani yhtyy jakauman 50. *prosenttipisteeseen*, 5. *desiiliin* ja *keskikvartiiliin* Q_2.
- Mediaani voidaan määrätä myös sellaisille satunnaismuuttujille, joilla *ei ole* odotusarvoa.
- Jos satunnaismuuttujan X jakauma on *symmetrinen* suoran $x = a$ suhteen, niin jakauman mediaani yhtyy pisteeseen a:

$$Me = a$$

- Jos symmetrisellä jakaumalla *on odotusarvo* $\mathrm{E}(X) = \mu$, niin jakauman mediaani yhtyy pisteeseen μ:

$$Me = \mu$$

Mediaani: Esimerkki

- Kuva oikealla esittää **eksponenttijakauman** Exp(1) *tiheysfunktiota*

  $$f(x) = e^{-x}\ ,\ x \ge 0$$

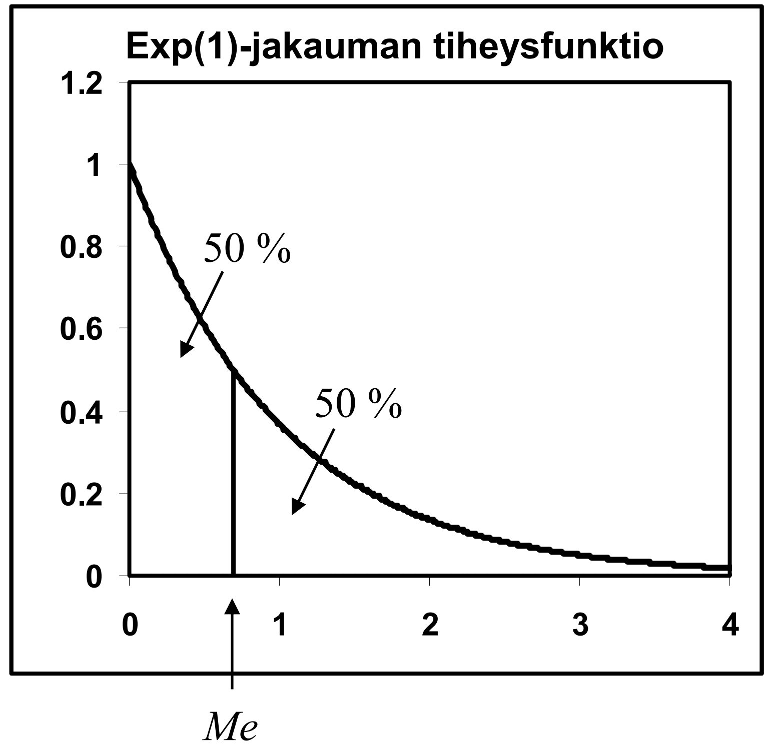
  välillä [0, 4].
- Jakauman *mediaani* saadaan ratkaisemalla yhtälö

  $$\int_0^x e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x$$

  $$= 1 - e^{-x} = 0.5$$

  x:n suhteen.
- Siten

  $$Me = x = \log(2) \approx 0.69$$



Jakaumien tunnusluvut

Odotusarvo
Varianssi
Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt
Momentit
Vinous ja huipukkuus
Kvantiilit
>> Moodi
Suurten lukujen laki

Diskreetin satunnaismuuttujan moodi

- Olkoon X *diskreetti* satunnaismuuttuja, jonka *pistetodennäköisyysfunktio* on

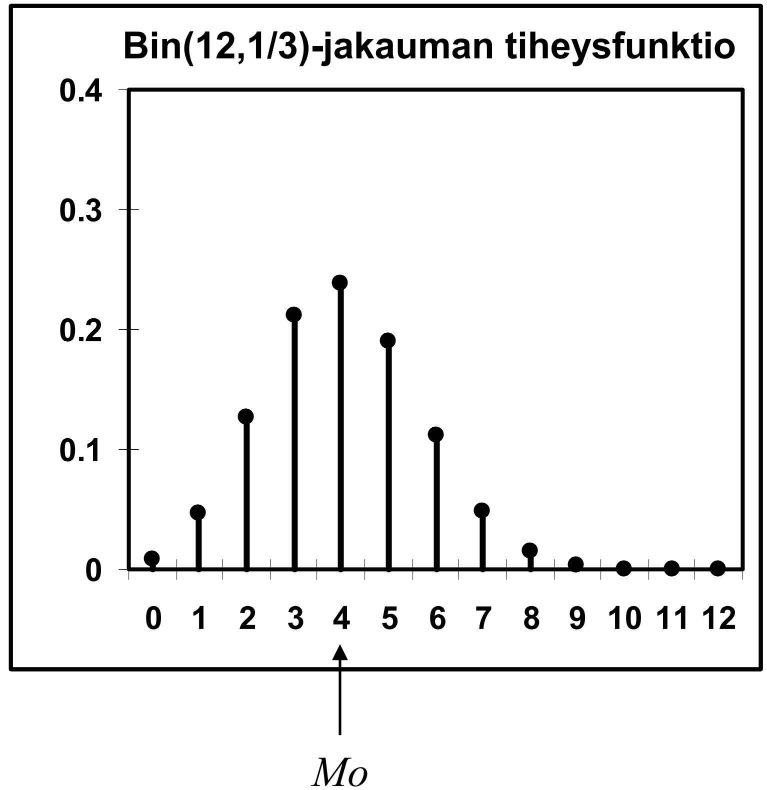
$$f(x) = \Pr(X = x)$$

- Piste Mo on *diskreetin satunnaismuuttujan* X ja sen jakauman **moodi**, jos pistetodennäköisyysfunktio $f(x)$ saavuttaa maksiminsa pisteessä $x = Mo$:

$$f(Mo) = \max_x f(x)$$

Moodi
Diskreetin satunnaismuuttujan moodi: Esimerkki

- Kuva oikealla esittää **binomijakauman** Bin(12, 1/3) *pistetodennäköisyysfunktiota*
$$f(x) = \binom{12}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{12-x}$$
- Jakauman *moodi Mo* on pisteessä
$x = 4$



Jatkuvan satunnaismuuttujan moodi

- Olkoon X *jatkuva* satunnaismuuttuja, jonka *tiheysfunktio* on

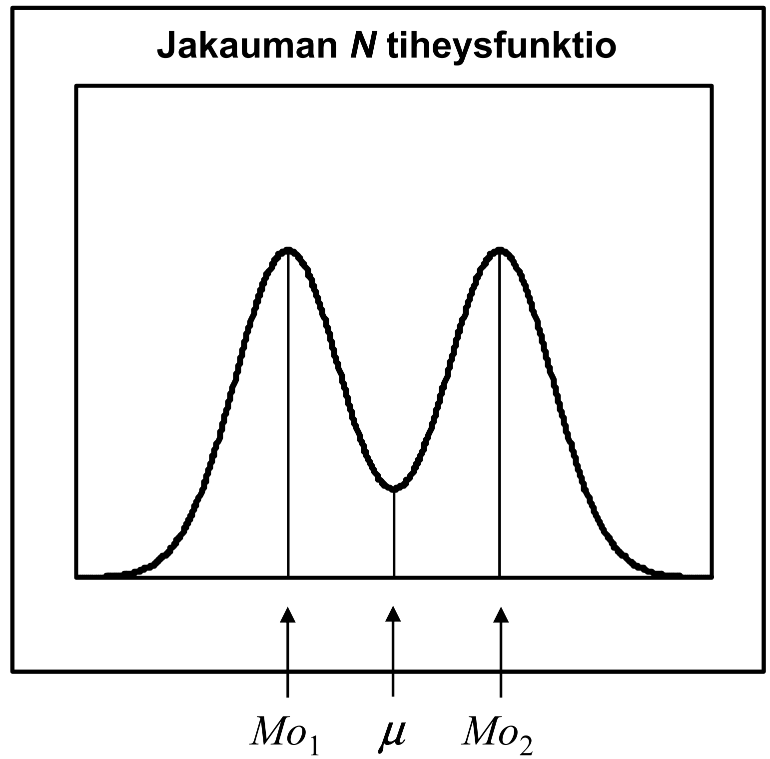
$$f(x)$$

- Piste Mo on *jatkuvan satunnaismuuttujan* X ja sen jakauman **moodi**, jos tiheysfunktio $f(x)$ saavuttaa maksiminsa pisteessä $x = Mo$:

$$f(Mo) = \max_x f(x)$$

Moodi
Jatkuvan satunnaismuuttujan moodi: Esimerkki

- Kuva oikealla esittää erään **sekoitetun normaalijakauman** *N tiheysfunktiota f*.
- Tiheysfunktio f on *kaksihuippuinen* ja *symmetrinen* suoran $x = \mu$ suhteen.
- Jakaumalla N on *kaksi lokaalia moodia* Mo_1 ja Mo_2 .



Satunnaismuuttujan moodi: Kommentteja

- Jakauman moodi *ei välttämättä ole* yksikäsitteinen; ks. edellistä kalvoa.
- Moodi voidaan määrätä myös sellaisille satunnais-muuttujille, joilla *ei ole* odotusarvoa.

Jakaumien tunnusluvut

Odotusarvo
Varianssi
Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt
Momentit
Vinous ja huipukkuus
Kvantiilit
Moodi
>> Suurten lukujen laki

Suurten lukujen laki: Formulointi

- Olkoon X_i , $i = 1, 2, 3, \ldots$ jono *riippumattomia* satunnaismuuttujia, joilla on *sama* odotusarvo ja varianssi:

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu \text{ , } \mathrm{D}^2(X_i) = \sigma^2 \text{ , } i = 1, 2, 3, \ldots$$

- Määritellään satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *aritmeettinen keskiarvo*:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Tällöin pätee (heikko) **suurten lukujen laki**:

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr\left(\left|\bar{X}_n - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Suurten lukujen laki: Kommentteja 1/2

- Suurten lukujen laille esitetään *todistus* luvussa **Stokastiikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet.**
- *Suurten lukujen laki* ilmaistaan usein sanoin seuraavasti:

  Samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien *aritmeettinen keskiarvo lähestyy muuttujien lukumäärän kasvaessa muuttujien yhteistä odotusarvoa* sellaisella tavalla, että **poikkeamien todennäköisyys satunnaismuuttujien yhteisestä odotusarvosta lähestyy lukua nolla eli poikkeamat tulevat yhä *harvinaisemmiksi***.
- Suurten lukujen lakia voidaan pitää matemaattisena formulointina **tilastollisen stabiliteetin** käsitteelle.

Suurten lukujen laki: Kommentteja 2/2

- Tässä formuloitua suurten lukujen lakia kutsutaan *heikoksi suurten lukujen laiksi*.
- Suurten lukujen laki koskee satunnaismuuttujien **asymptoottista käyttäytymistä** samaan tapaan kuin luvussa **Jatkuvia jakaumia** esitettävä **keskeinen raja-arvolause**.
- Suurten lukujen laissa esiintyvä *rajakäyttäytymisen muoto* on esimerkki **stokastiikan konvergenssikäsitteistä**; ks. lukua **Stokastiikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet.**
- Suurten lukujen laista on olemassa *yleisempiä muotoja*, joissa voidaan lieventää *samoinjakautuneisuus*- ja *riippumattomuusoletuksia*.