
Ilkka Mellin

Todennäköisyyslaskenta

**Osa 2: Satunnaismuuttujat ja
todennäköisyysjakaumat**

**Satunnaismuuttujat ja
todennäköisyysjakaumat**

Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

- >> **Satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat**
 - Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat**
 - Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat**

Johdatteleva esimerkki 1:

Rahanheitto – 1/2

- Tarkastellaan rahanheittoa *satunnaisilmiönä*.
- Alkeistapahtumat:
Kruuna, Klaava
- Otosavaruus:
 $S = \{\text{Kruuna, Klaava}\}$
- Määritellään reaaliarvoinen *funktio* $\xi : S \rightarrow \mathbb{R}$, joka liittää otosavaruuden S alkioihin *reaaliluvun* eli *numeerisen koodin* seuraavalla tavalla:
Kruuna $\rightarrow 1$
Klaava $\rightarrow 0$
- *Funktiota* ξ kutsutaan **satunnaismuuttujaksi**, koska *sattuma* määrää mikä funktion arvoista *realisoituu*, vaikka ξ on kyllä funktiona *täysin määrätty*.

Satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki 1:

Rahanheitto – 2/2

- Tehdään seuraava *oletus* niistä *todennäköisyyksistä*, joilla ξ saa arvonsa:

$$\Pr(\xi = 1) = 1/2$$

$$\Pr(\xi = 0) = 1/2$$

- Satunnaismuuttujan ξ arvot ja niihin liitetyt *todennäköisyydet* muodostavat yhdessä satunnaismuuttujan ξ **todennäköisyysjakauman**.
- Satunnaismuuttuja ξ ja sen todennäköisyysjakauma muodostavat **tilastollisen mallin** eli **todennäköisyysmallin** rahanheitolle satunnaisilmiönä.
- Koska määritelty satunnaismuuttuja ξ saa vain erillisiä arvoja, sitä sanotaan **diskreetiksi**.
- Satunnaismuuttuja ξ noudattaa **Bernoulli-jakaumaa**; ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.

Johdatteleva esimerkki 2:

Sukupuolen määräytyminen – 1/2

- Tarkastellaan sukupuolen määräytymistä *satunnaisilmiönä*.
- Alkeistapahtumat:
Tyttö, Poika
- Otosavaruus:
 $S = \{\text{Tyttö, Poika}\}$
- Määritellään reaaliarvoinen *funktio* $\xi : S \rightarrow \mathbb{R}$, joka liittää otosavaruuden S alkioihin *numeerisen koodin* eli *reaaliluvun* seuraavalla tavalla:
Tyttö $\rightarrow 1$
Poika $\rightarrow 0$
- *Funktiota* ξ kutsutaan **satunnaismuuttujaksi**, koska *sattuma* määrää mikä funktion arvoista *realisoituu*, vaikka ξ on kyllä funktiona *täysin määrätty*.

Satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki 2:

Sukupuolen määräytyminen – 2/2

- Tehdään seuraava, Suomen väkilukutilastoihin vuosilta 1991 – 95 perustuva *oletus* niistä *todennäköisyyksistä*, joilla ξ saa arvonsa:

$$\Pr(\xi = 1) = 0.4902$$

$$\Pr(\xi = 0) = 0.5098$$

- Satunnaismuuttujan ξ arvot ja niihin liitetyt *todennäköisyydet* muodostavat yhdessä satunnaismuuttujan ξ **todennäköisyysjakauman**.
- Satunnaismuuttuja ξ ja sen todennäköisyysjakauma muodostavat **tilastollisen mallin** eli **todennäköisyysmallin** sukupuolen määräytymiselle satunnaisilmiönä.
- Koska määritelty satunnaismuuttuja ξ saa vain erillisiä arvoja, sitä sanotaan **diskreetiksi**.
- Satunnaismuuttuja ξ noudattaa **Bernoulli-jakaumaa**; ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.

Johdatteleva esimerkki 3:

Nopanheitto – 1/2

- Tarkastellaan nopanheittoa *satunnaisilmiönä*.
- Alkeistapahtumat:
Silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Otosavaruus:
 $S = \{\text{Silmäluvut } 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Määritellään reaaliarvoinen *funktio* $\xi : S \rightarrow \mathbb{R}$, joka liittää otosavaruuden S alkioihin *numeerisen koodin* eli *reaaliluvun* siten, että jokaiseen silmälukuun liitetään vastaava kokonaisluku:
Silmäluku $i \rightarrow i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
- *Funktiota* ξ kutsutaan **satunnaismuuttujaksi**, koska *sattuma* määrää mikä funktion arvoista *realisoituu*, vaikka ξ on kyllä funktiona *täysin määrätty*.

Satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki 3:

Nopanheitto – 2/2

- Tehdään seuraava *oletus* niistä *todennäköisyysistä*, joilla ξ saa arvonsa:

$$\Pr(\xi = i) = 1/6, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- Satunnaismuuttujan ξ arvot ja niihin liitetyt *todennäköisyydet* muodostavat *yhdessä* satunnaismuuttujan ξ **todennäköisyysjakauman**.
- Satunnaismuuttuja ξ ja sen todennäköisyysjakauma muodostavat **tilastollisen mallin** eli **todennäköisyysmallin** nopanheitolle satunnaisilmiönä.
- Koska määritelty satunnaismuuttuja ξ saa vain erillisiä arvoja, sitä sanotaan **diskreetiksi**.
- Satunnaismuuttuja ξ noudattaa **diskreettiä tasaista jakaumaa**; ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.

Johdatteleva esimerkki 4:

Nopanheitto – 1/2

- Heitetään noppaa toistuvasti ja tarkastellaan *satunnaisilmiönä* sen heiton järjestysnumeron määräytymistä, jolla saadaan *ensimmäisen kuutonen*.
- Alkeistapahtumat:
Järjestysnumerot 1, 2, 3, ...
- Otosavaruus:
 $S = \{1, 2, 3, \dots\}$ on (numeroituvasti) *ääretön*.
- Määritellään reaaliarvoinen *funktio* $\xi : S \rightarrow \mathbb{R}$, joka liittää otosavaruuden S alkioihin *numeerisen koodin* eli *reaaliluvun* siten, että jokaiseen järjestysnumeroon liitetään vastaava kokonaisluku:
Järjestysnumero $i \rightarrow i, i = 1, 2, 3, \dots$
- *Funktiota* ξ kutsutaan **satunnaismuuttujaksi**, koska *sattuma* määrää mikä funktion arvoista *realisoituu*, vaikka ξ on kyllä funktiona *täysin määrätty*.

Satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki 4:

Nopanheitto – 2/2

- Määräämme myöhemmin *todennäköisyydet*, joilla ξ saa arvonsa.
- Satunnaismuuttujan ξ saamien arvojen todennäköisyydet noudattavat *diskreettiä jakaumaa*, jota kutsutaan **geometriseksi jakaumaksi**.
- Satunnaismuuttuja ξ ja sen todennäköisyysjakauma muodostavat **tilastollisen mallin** eli **todennäköisyysmallin** sen heiton järjestysnumeron määräytymiselle, jolla saadaan *ensimmäinen kuutonen*.
- *Lisätietoja* geometrisesta jakaumasta:
 - (i) Tämän luvun diskreettejä satunnaismuuttujia ja niiden jakaumia käsittelevässä kappaleessa käsitellään *esimerkkiä* geometrisestä jakaumasta.
 - (ii) Geometrista jakamaa käsitellään *yleisesti* luvussa **Diskreettejä jakaumia**.

Johdatteleva esimerkki 5:

Onnenpyörä – 1/3

- Onnenpyörän keskipisteeseen on asetettu vapaasti pyörivä osoitin, jota pyöräytetään pelissä.
- Tarkastellaan *satunnaisilmiönä* kulmaa, jonka osoitin pysähtyttyään muodostaa lähtöasentoonsa verrattuna.
- Alkeistapahtumat:
Kulmat välillä $[0^\circ, 360^\circ)$
- Otosavaruus:
 $S = [0^\circ, 360^\circ)$ on (ylinumeroituvasti) *ääretön*.

Johdatteleva esimerkki 5:

Onnenpyörä – 2/3

- Määritellään reaaliarvoinen *funktio* $\xi : S \rightarrow \mathbb{R}$, joka liittää otosavaruuden S alkioihin *numeerisen koodin* eli *reaaliluvun* seuraavasti siten, että jokaiseen kulmaan liitetään vastaava reaaliluku:

Kulma $x \rightarrow x \in [0, 360)$

- *Funktiota* ξ kutsutaan **satunnaismuuttujaksi**, koska *sattuma* määrää mikä funktion arvoista *realisoituu*, vaikka ξ on kyllä funktiona *täysin määrätty*.
- Tarkastelemme myöhemmin *todennäköisyyksiä*, joilla ξ saa arvoja joltakin väliltä $[a, b] \subset [0, 360)$.
- Satunnaismuuttuja ξ noudattaa **jatkuvaa tasaista jakaumaa**; ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Johdatteleva esimerkki 5:

Onnenpyörä – 3/3

- *Lisätietoja* jatkuvasta tasaisesta jakaumasta:
 - (i) Tämän luvun jatkuvia satunnaismuuttujia ja niiden jakaumia käsittelevässä kappaleessa käsitellään *esimerkkiä* jatkuvasta tasaisesta jakaumasta.
 - (ii) Jatkuvaa tasaista jakamaa käsitellään *yleisesti* jatkuvia todennäköisyysjakaumia käsittelevässä luvussa.

Satunnaismuuttuja:

Määritelmä

- Olkoon ξ *funktio* otosavaruudesta S reaalilukujen joukkoon \mathbb{R} :

$$\xi : S \rightarrow \mathbb{R}$$

- Tällöin ξ on **satunnaismuuttuja**.
- Jos haluamme korostaa sitä, että satunnaismuuttuja ξ on otosavaruuden S *kuvau*s reaalilukujen joukkoon \mathbb{R} , merkitsemme

$$\xi(s) \in \mathbb{R} , s \in S$$

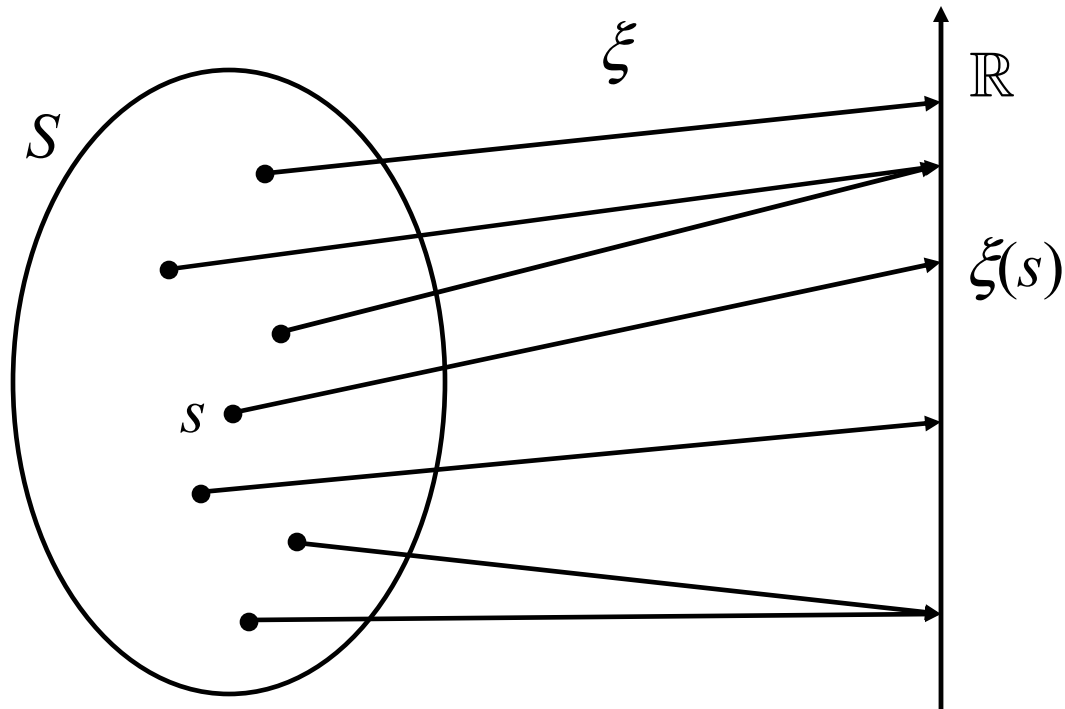
- Huomautus:

Merkitsemme *tässä luvussa* satunnaismuuttujia tavallisesti kreikan kielen aakkosten kirjaimella ξ ("ksi").

Satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Satunnaismuuttujan määritelmä: Havainnollistus

$$\xi : S \rightarrow \mathbb{R}$$



Satunnaismuuttujan määritelmä:

Kommentteja 1/2

- *Satunnaismuuttuja on funktiona täysin määrätty, mutta sattuma määrää mikä funktion arvoista realisoituu.*
- *Satunnaismuuttuja kuvaa satunnaisilmiön tulosvaihtoehtoja numeerisessa muodossa.*
- *Satunnaismuuttuja liittyy jokaiseen satunnaisilmiön tulosvaihtoehtoon reaaliluvun eli numeerisen koodin.*
- **Huomautus:**

Satunnaismuuttuja on terminä epäonnistunut, koska se ei kerro sitä olennaista asiaa, että satunnaismuuttuja on itse asiassa funktio.

Satunnaismuuttujan määritelmä:

Kommentteja 2/2

- Tässä esitetty satunnaismuuttujan määritelmä *on* siinä mielessä *epätarkka*, että mikä tahansa otosavaruuden reaaliarvoinen funktio *ei kelpaa satunnaismuuttujaksi*.
- Jotta funktio kelpaisi satunnaismuuttujaksi, sen on oltava *mitallinen*.
- Voidaan osoittaa, että *diskreetit ja jatkuvat satunnaismuuttujat* – joita tässä esityksessä pelkästään käsitellään – *ovat mitallisia funktioita*.
- Mitallisuuden käsittely *sivuutetaan* tässä esityksessä.

Todennäköisyysjakauma:

Määritelmä 1/2

- Olkoon kolmikko $(S, \mathfrak{F}, \text{Pr})$ otosavaruudessa S määritelty **todennäköisyyskenttä**, jossa on seuraavat elementit:

S = otosavaruus

\mathfrak{F} = otosavaruuden S osajoukkojen joukossa määritelty *σ -algebra*

Pr = σ -algebran \mathfrak{F} alkioille määritelty *todennäköisyysmitta*

- Olkoon ξ otosavaruudessa S määritelty **satunnaismuuttuja** eli (mitallinen) funktio otosavaruudesta S reaalilukujen joukkoon \mathbb{R} :

$$\xi : S \rightarrow \mathbb{R}$$

Todennäköisyysjakauma:

Määritelmä 2/2

- *Satunnaismuuttuja ξ määrittelee otosavaruuden S (mitallisena) kuvauksena todennäköisyysmitan reaali-lukujen joukossa.*
- **Satunnaismuuttujan ξ todennäköisyysjakaumalla (tai jakaumalla)** tarkoitetaan kuvauksen

$$\xi : S \rightarrow \mathbb{R}$$

reaalilukujen joukkoon indusoimaa todennäköisyysmittaa.

Satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Todennäköisyysjakauman määritelmä:

Kommentteja

- *Satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauma* kuvaa otosavaruuden **todennäköisyysmassan** ($= 1$) *jakautumista* satunnaismuuttujan arvoalueelle.
- *Satunnaisilmiöön liittyvät todennäköisyydet hallitaan täydellisesti*, jos satunnaisilmiön tulosvaihtoehtoja kuvaava satunnaismuuttuja ja sen todennäköisyysjakauma *tunnetaan*:

Kaikkien satunnaisilmiöön liittyvien tapahtumien todennäköisyydet voidaan määrätä ilmiön tulosvaihtoehtoja numeerisessa muodossa kuvaavan satunnaismuuttujan ja sen todennäköisyysjakauman avulla.

Satunnaisilmiöt ja niiden tilastolliset mallit

- Tilastotiede kehittää *menetelmiä* ja *malleja*, joiden avulla reaali maailmasta pyritään tekemään *johtopäätöksiä* reaali maailmaa kuvaavien *numeeristen tietojen* perusteella tilanteissa, joissa tietoihin sisältyy *epävarmuutta* ja *satunnaisuutta*.
- Tilastollisten menetelmien ja mallien avulla pyritään *erottamaan* ja *kuvaamaan* reaali maailman ilmiöiden *säännönmukaiset* ja *satunnaiset* piirteet.
- Koska tilastotieteen tutkimiin ilmiöihin sisältyy epävarmuutta ja satunnaisuutta, tilastolliset menetelmät ja mallit perustuvat *todennäköisyyslaskentaan*.

Todennäköisyysjakaumat tilastollisina malleina

- Satunnaisilmiön *tilastollinen malli* kuvaa ilmiön tulosvaihtoehtoja ja niiden todennäköisyyksiä *matemaattisessa muodossa*.
- Satunnaisilmiön **tilastollisessa mallissa** eli **todennäköisyysmallissa** on seuraavat osat:
 - (1) Satunnaisilmiön tulosvaihtoehtoja numeerisessa muodossa kuvaava **satunnaismuuttuja**.
 - (2) Otosavaruuden todennäköisyysmassan jakautumista satunnaismuuttujan arvoalueelle kuvaava **todennäköisyysjakauma**.

Satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Tilastollisten mallien muodostaminen

- Kun satunnaisilmiölle *konstruoidaan* tilastollinen malli, vaaditaan *tilastotieteen* ja *todennäköisyyslaskennan* tietojen lisäksi hyviä tietoja ilmiötä selittävästä *taustateoriasta*.
- Taustateorian tuottaa se *tieteenala*, jonka alueeseen ilmiö kuuluu.
Esimerkiksi *taloustiede* toimii taustateoriana taloudellisten ilmiöiden tilastollisessa analyysissä eli *ekonometriassa*.
- *Tilastollinen tutkimus on parhaimmillaan* tilastotieteen, todennäköisyyslaskennan ja tutkimuksen kohteena olevaa ilmiötä selittävän taustateorian *yhteispeliä*.

Satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Tilastollinen malli vs havainnot

- *Teoreettisen tilastotieteen* tehtävänä on konstruoida tutkimuksen kohteena olevalle satunnais-ilmiiölle *tilastollinen malli*, joka *selittää* ilmiöstä saatujen *havaintojen käyttäytymisen*.
- *Empiirisen tilastotieteen* tehtävänä on selvittää, onko konstruoitu tilastollinen malli *sopuoinnussa* havaintojen kanssa.
- Huomaa, että tilastollinen malli on *teoreettinen oletus*, joka pitää aina asettaa *testiin havaintojen tuottamaa informaatioita vastaan*.

Satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Satunnaismuuttujien tyyppejä

- **Satunnaismuuttuja** määriteltiin (mitallisena) *funktiona* otosavaruudesta reaalilukujen joukkoon.
- Mitalliset funktiot voivat olla funktioina hyvinkin *monimutkaisia*.
- Kaikissa tilastotieteen *tavanomaisissa* sovelluksissa tullaan kuitenkin yleensä hyvin toimeen seuraavien satunnaismuuttujien tyyppien kanssa:
 - (1) **Diskreetit satunnaismuuttujat.**
 - (2) **Jatkuvat satunnaismuuttujat.**
- Jatkossa rajoitutaan pelkästään diskreettien ja jatkuvien satunnaismuuttujien käsittelyyn.

Satunnaismuuttujien tyyppejä:

Diskreetit satunnaismuuttujat

- Satunnaismuuttujaa on **diskreetti**, jos sen arvoalue on *diskreetti joukko* eli sen arvoalue *muodostuu erillisistä reaaliakselin pisteistä*.
- Diskreetin satunnaismuuttujan arvoalue on joko *äärellinen* tai korkeintaan *numeroituvasti ääretön*.
- Diskreetin satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauma määrittelee *alkeistapahtumien* todennäköisyydet.
- *Kaikkien* muiden tapahtumien todennäköisyydet saadaan alkeistapahtumien todennäköisyyksistä todennäköisyyden *laskusääntöjen avulla*.

Satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Satunnaismuuttujien tyyppejä:

Jatkuvat satunnaismuuttujat

- Satunnaismuuttujaa on **jatkuva**, jos sen arvoalue on jokin *reaaliakselin osaväli*.
- Jatkuvan satunnaismuuttujan arvoalue on reaalilukujen joukon osavälinä *ylinumeroituva*.
- Jatkuvan satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauma määrittelee satunnaismuuttujan arvoalueeseen kuuluvien reaaliakselin *välien* todennäköisyydet.
- *Kaikkien* muiden tapahtumien todennäköisyydet saadaan näiden välien todennäköisyyksistä todennäköisyyden *laskusääntöjen avulla*.

Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

Satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

>> Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

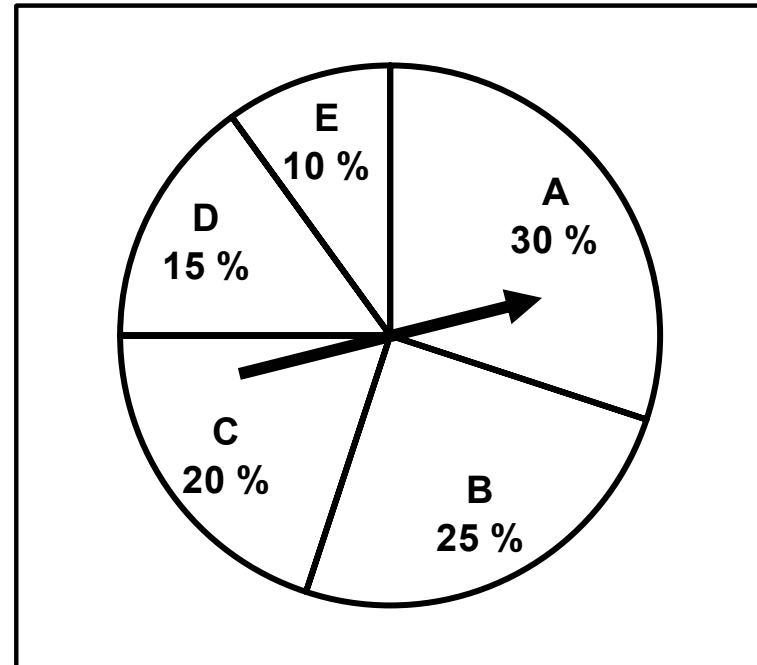
Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki:

Onnenpyörä – 1/10

- Kuva oikealla esittää onnenpyörää, jonka pinta on jaettu viiteen sektoriin A, B, C, D, E
- Alla on esitetty sektoreiden pinta-alojen osuudet onnenpyörän kokonaispinta-alasta:

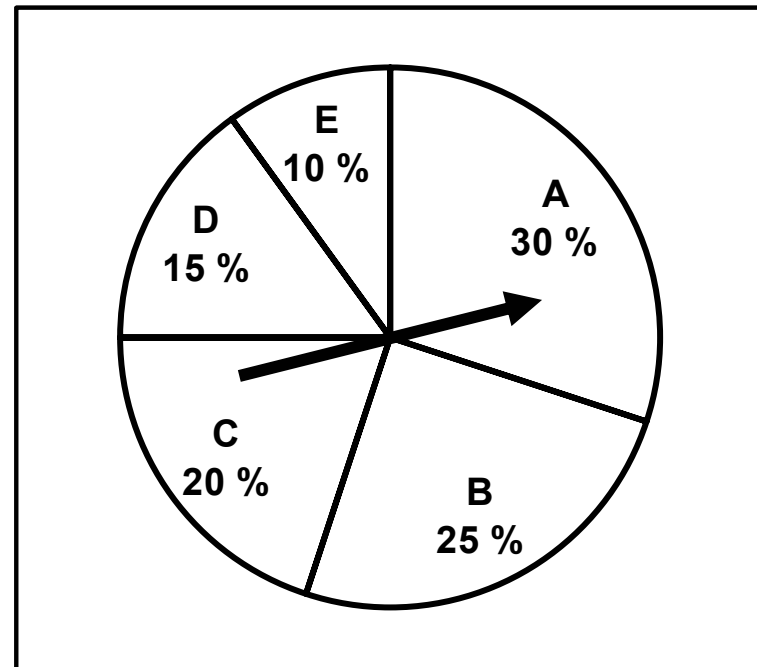
Sektori	%
A	30
B	25
C	20
D	15
E	10
Summa	100



Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki: Onnenpyörä – 2/10

- Onnenpyörän keskipisteeseen on asetettu vapaasti pyörivä osoitin.
- Tarkastellaan peliä, jossa osoitinta pyöräytetään ja pelaaja yrittää *arvata* mihin sektoriin osoitin pysähtyy.
- Peliä voidaan pitää *satunnaisilmiönä*, johon liittyvä **otosavaruus** eli *mahdollisten tulosvaihtoehtojen joukko* on $S = \{\text{Sektorit A, B, C, D, E}\}$



Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki:

Onnenpyörä – 3/10

- Oletetaan, että todennäköisyydet, joilla osoitin pysähtyy sektoreihin A, B, C, D, E, suhtautuvat toisiinsa kuten sektoreiden pinta-alat.

- Siten

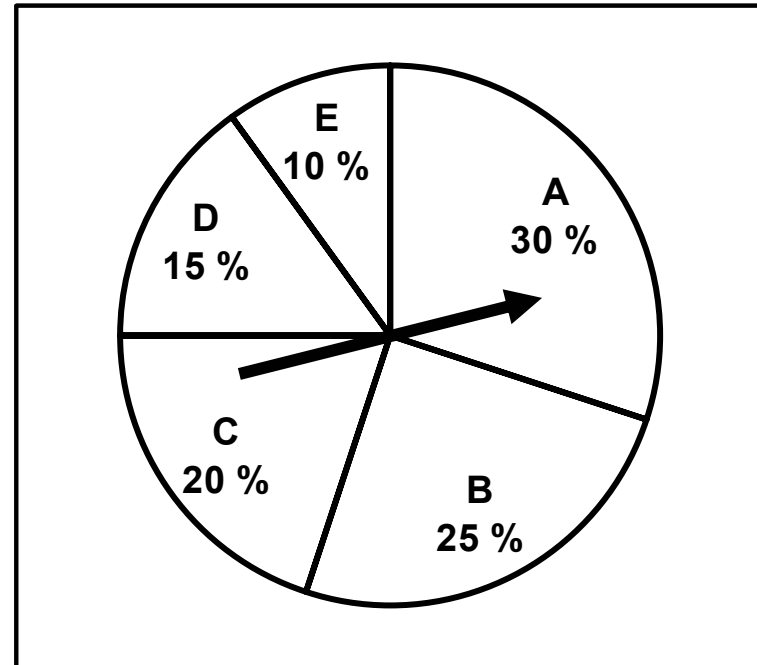
$$\Pr(A) = 0.30$$

$$\Pr(B) = 0.25$$

$$\Pr(C) = 0.20$$

$$\Pr(D) = 0.15$$

$$\Pr(E) = 0.10$$

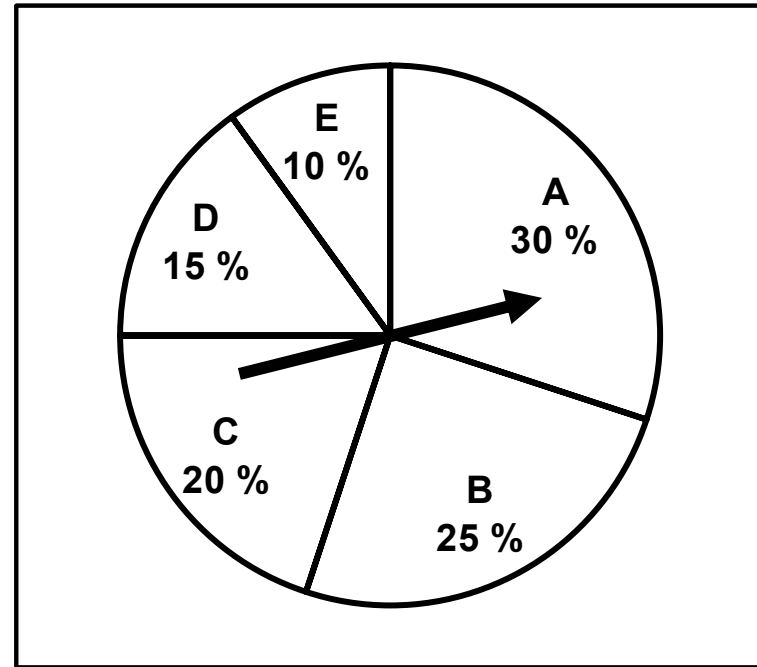


Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdattelleva esimerkki:

Onnenpyörä – 4/10

- Määritellään **satunnaismuuttuja** ξ , joka liittää tulosvaihtoehtoihin A, B, C, D, E
reaaliluvut seuraavalla tavalla:
A \rightarrow 1
B \rightarrow 2
C \rightarrow 3
D \rightarrow 4
E \rightarrow 5



Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki:

Onnenpyörä – 5/10

- Satunnaismuuttuja ξ saa arvonsa seuraavilla todennäköisyyksillä:

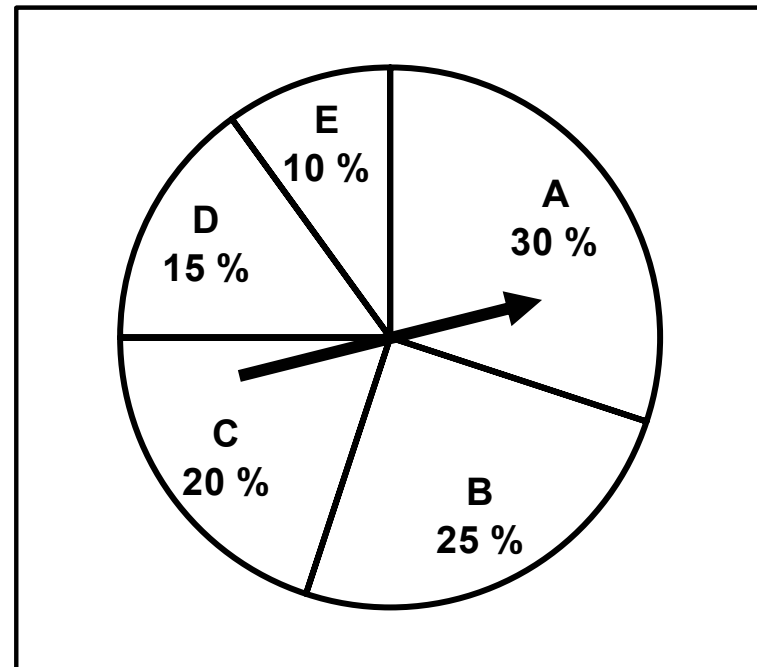
$$\Pr(\xi = 1) = 0.30 = \Pr(A)$$

$$\Pr(\xi = 2) = 0.25 = \Pr(B)$$

$$\Pr(\xi = 3) = 0.20 = \Pr(C)$$

$$\Pr(\xi = 4) = 0.15 = \Pr(D)$$

$$\Pr(\xi = 5) = 0.10 = \Pr(E)$$



Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki:

Onnenpyörä – 6/10

- Satunnaismuuttujaa ξ sanotaan **diskreetiksi**, koska se saa vain erillisiä arvoja.
- Satunnaismuuttujan ξ arvoihin liittyviä todennäköisyyksiä sanotaan **pistetodennäköisyyksiksi**, koska ne liittyvät erillisiin pisteisiin reaaliakselilla.
- Diskreetin satunnaismuuttujan ξ arvot ja niihin liittyvät pistetodennäköisyydet muodostavat satunnaismuuttujan ξ **todennäköisyysjakauman**.

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki:

Onnenpyörä – 7/10

- Diskreetin satunnaismuuttujan ξ todennäköisyysjakaumaa voidaan kuvata sen **pistetodennäköisyysfunktiolla**.
- Diskreetin satunnaismuuttujan ξ pistetodennäköisyysfunktio kertoo miten otosavaruuden S *todennäköisyysmassa* ($= 1$) *jakautuu* satunnaismuuttujan ξ mahdollisille arvoille.
- Pistetodennäköisyysfunktio f on funktiona *epäjatkua* ja se saa *positiivisia arvoja vain erillisissä pisteissä*.

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki:

Onnenpyörä – 8/10

- Esimerkin tapauksessa satunnaismuuttujan ξ pistetodennäköisyysfunktio f voidaan määritellä seuraavalla tavalla:

$$f(1) = \Pr(\xi = 1) = 0.30 = \Pr(A)$$

$$f(2) = \Pr(\xi = 2) = 0.25 = \Pr(B)$$

$$f(3) = \Pr(\xi = 3) = 0.20 = \Pr(C)$$

$$f(4) = \Pr(\xi = 4) = 0.15 = \Pr(D)$$

$$f(5) = \Pr(\xi = 5) = 0.10 = \Pr(E)$$

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki:

Onnenpyörä – 9/10

- Olkoon x diskreetin satunnaismuuttujan ξ mahdollinen arvo ja

$$\Pr(\xi = x) = p_x$$

vastaava pistetodennäköisyys.

- Satunnaismuuttujan ξ *pistetodennäköisyysfunktio* voidaan kuvata *graafisesti piikkifunktioksi* kutsutulla kuviolla, joka saadaan yhdistämällä pisteet

$$(x, 0) \text{ ja } (x, p_x)$$

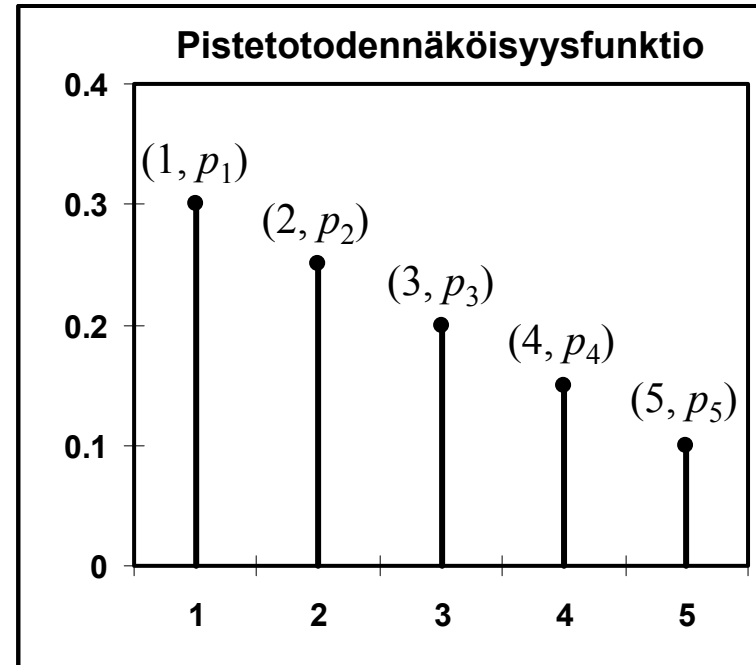
toisiinsa janoilla.

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdattelleva esimerkki:

Onnenpyörä – 10/10

- Kuvio oikealla esittää esimerkin diskreetin satunnaismuuttujan ξ todennäköisyysjakauman pistetodennäköisyysfunktioita vastaavaa *piikki-funktiota*.
- Piikkien pituudet vastaavat niitä todennäköisyyksiä, joilla satunnaismuuttuja ξ saa arvonsa.



Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Äärelliset ja numeroituvasti äärettömät otosavaruudet

- Olkoon otosavaruus S *äärellinen* tai *numeroituvasti ääretön* joukko ja olkoon s_i otosavaruuden alkeistapahtuma.
- Tällöin voimme merkitä

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

jos S on *äärellinen* ja

$$S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$$

jos S on *numeroituvasti ääretön*.

Diskreetti satunnaismuuttuja:

Määritelmä

- Olkoon otosavaruus S *äärellinen* tai *numeroituvasti ääretön*.
- Tällöin reaaliarvoinen funktio

$$\xi : S \rightarrow \mathbb{R}$$

joka saa *äärellisen* tai *numeroituvasti äärettömän* määrän erillisiä arvoja on **diskreetti satunnaismuuttuja**.

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Esimerkki 1:

Laadunvalvonta

- Kone tekee erästä tuotetta sarjatuotantona n kpl päivässä.
- Tuotteista osa on viallisia.
- Vialliset tuotteet syntyvät valmistusprosessissa täysin sattumanvaraisesti.
- Oletetaan, että viallisten tuotteiden suhteellinen osuus valmistetuista tuotteista on keskimäärin p .
- Tällöin voimme asettaa:
$$p = \text{todennäköisyys, että satunnaisesti valittu tuote on viallinen}$$
- *Viallisten tuotteiden lukumäärä päivän aikana tehtyjen tuotteiden joukossa* on diskreetti satunnaismuuttuja, joka noudattaa **binomi-jakaumaa**; ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.

Esimerkki 2:

Laadunvalvonta

- Kone tekee erästä tuotetta sarjatuotantona.
- Tuotteista osa on viallisia.
- Vialliset tuotteet syntyvät valmistusprosessissa täysin sattumanvaraisesti.
- Oletetaan, että viallisten tuotteiden suhteellinen osuus valmistetuista tuotteista on keskimäärin p .
- Tällöin voimme asettaa:
$$p = \text{todennäköisyys, että satunnaisesti valittu tuote on viallinen}$$
- Poimitaan tuotteita tarkastettavaksi, *kunnes löydetään ensimmäinen viallinen*.
- *Ensimmäisen viallisen tuotteen järjestysnumero tarkastettujen tuotteiden joukossa* on diskreetti satunnaismuuttuja, joka noudattaa **geometrista jakaumaa**; ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.

Esimerkki 3:

Jonot

- Palvelujonoon tulee asiakkaita keskimääriin k kappaletta aikayksikköä kohti.
- *Jonakin aikavälinä jonoon tulevien asiakkaiden lukumäärä on diskreetti satunnaismuuttuja, joka noudattaa (tietyin oletuksin) **Poisson-jakaumaa**; ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.*
- Huomautus:

Tällöin 1. asiakkaan *odotusaika* on *jatkuva satunnaismuuttuja*, joka noudattaa **eksponenttijakaumaa**; ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Esimerkki 4:

Kalakannan koon määrittäminen

- Pyydystetään järvestä joukko kaloja elävinä, merkitään pyydystetyt kalat ja lasketaan ne takaisin järveen.
- Odotetaan niin kauan, että merkityt kalat ovat sekoittuneet merkitsemättömien kalojen joukkoon.
- Pyydystetään järvestä uusi joukko kaloja.
- *Merkittyjen kalojen lukumäärä uudessa pyynnissä* on diskreetti satunnaismuuttuja, joka noudattaa **hypergeometrista jakaumaa**; ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.
- Huomautus:

Kuvattua merkintä-takaisinpyynti-menetelmää voidaan soveltaa riista- ja kalakantojen laskemiseen.

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Diskreetit suureet

- Diskreetit satunnaismuuttujat liittyvät sellaisiin todennäköisyyslaskennan sovelluksiin, joissa tarkastellaan **diskreettejä suureita**.
- Esimerkkejä:
 - *laatuerot* (koodattuina numeerisiksi)
 - *luokittelut ja ryhmittelyt* (koodattuina numeerisiksi)
 - *järjestysluvut*
 - *lukumäärät*

Pistetodennäköisyysfunktio:

Määritelmä 1/2

- Olkoon otosavaruus S äärellinen tai numeroituvasti ääretön.
- Olkoot diskreetin satunnaismuuttujan $\xi : S \rightarrow \mathbb{R}$ saamat arvot eli numeeriset tulosvaihtoehdot:

$$x_i, i = 1, 2, \dots, n, \text{ jos } S \text{ on äärellinen}$$

$$x_i, i = 1, 2, 3, \dots, \text{ jos } S \text{ on numeroituvasti ääretön}$$

- Merkitään diskreetin satunnaismuuttujan ξ arvojen joukkoa kirjaimella T :

$$T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \text{ jos } S \text{ on äärellinen}$$

$$T = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}, \text{ jos } S \text{ on numeroituvasti ääretön}$$

Pistetodennäköisyysfunktio:

Määritelmä 2/2

- Reaaliarvoinen funktio f määrittelee *diskreetin satunnaismuuttujan* ξ **pistetodennäköisyysfunktion** , jos

$$(1) \quad f(x_i) = \Pr(\xi = x_i) \text{ kaikille } x_i \in T$$

$$(2) \quad f(x_i) \geq 0 \text{ kaikille } x_i \in T$$

$$(3) \quad \sum_{i | x_i \in T} f(x_i) = 1$$

- Todennäköisyys

$$\Pr(\xi = x_i) = f(x_i) = p_i$$

on satunnaismuuttujan ξ arvoa x_i vastaava **pistetodennäköisyys**.

Pistetodennäköisyysfunktio:

Toinen määritelmä

- Olkoot f diskreetin satunnaismuuttujan ξ *pistetodennäköisyysfunktio*, T sen *tulosvaihtoehtojen joukko* ja

$$f(x_i) = \Pr(\xi = x_i) = p_i, \quad x_i \in T$$

satunnaismuuttujan ξ arvoa x_i vastaava *pistetodennäköisyys*.

- Satunnaismuuttujan ξ **pistetodennäköisyysfunktio** voidaan määritellä *kaikille reaalityyppisille* kaavalla

$$f(x) = \Pr(\xi = x) = \begin{cases} p_i, & x \in T \\ 0, & x \notin T \end{cases}$$

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Pistetodennäköisyysfunktion määritelmä:

Kommentteja

- Pistetodennäköisyysfunktio f on *epäjatkuva* funktio.
- Määritelmän ehdon (2) mukaan pistetodennäköisyysfunktio f on kaikkialla *ei-negatiivinen*.
- Määritelmän ehto (2) on välttämätön ehto, koska pistetodennäköisyydet ovat *todennäköisyyksiä*.
- Määritelmän ehdon (3) mukaan *kaikkien* pistetodennäköisyyksien *summa* = 1.

Diskreetti todennäköisyysjakauma:

Määritelmä

- Diskreetin satunnaismuuttujan ξ *pistetodennäköisyysfunktio* f määrittelee satunnaismuuttujan ξ **todennäköisyysjakauman**.
- Jos f on diskreetin satunnaismuuttujan ξ pistetodennäköisyysfunktio, sanomme tavallisesti, että ξ **noudattaa diskreettiä todennäköisyysjakaumaa** f .

Diskreetin todennäköisyysjakauman määritelmä: Kommentteja

- Diskreetin satunnaismuuttujan ξ pistetodennäköisyysfunktio f kertoo, miten otosavaruuden S todennäköisyysmassa ($= 1$) jakautuu satunnaismuuttujan ξ arvoille.
- Diskreetin satunnaismuuttujan ξ pistetodennäköisyysfunktion avulla voidaan määrätä *kaikki* ko. satunnaisilmiöön liittyvät *todennäköisyydet*.

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat
Pistetodennäköisyysfunktion kuvaaja:
Piikkifunktio 1/2

- Olkoot f diskreetin satunnaismuuttujan ξ *pistetodennäköisyysfunktio*, T sen *tulosvaihtoehtojen joukko* ja
$$f(x_i) = \Pr(\xi = x_i) = p_i, x_i \in T$$
satunnaismuuttujan ξ arvoa x_i vastaava *pistetodennäköisyys*.
- Pistetodennäköisyysfunktioita f voidaan *kuvata graafisesti* ns. **piikkifunktiolla**.

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat
Pistetodennäköisyysfunktion kuvaaja:
Piikkifunktio 2/2

- Pistetodennäköisyysfunktioita

$$f(x_i) = \Pr(\xi = x_i) = p_i, x_i \in T$$

vastaava **piikkifunktio** piirretään seuraavalla tavalla:

- (i) Merkitään vastinpisteet

$$(x_i, 0) \text{ ja } (x_i, p_i)$$

kaikille $x_i \in T$ tasoon.

- (ii) Yhdistetään vastinpisteet

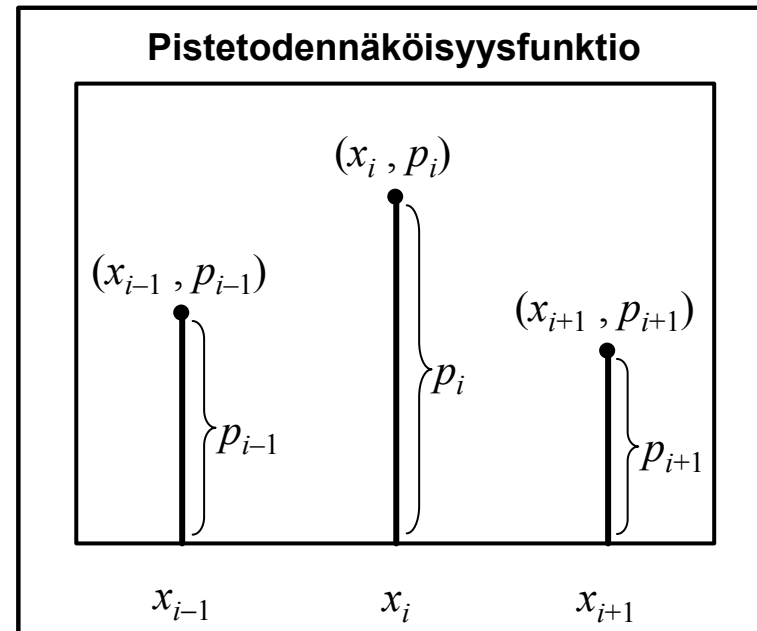
$$(x_i, 0) \text{ ja } (x_i, p_i)$$

kaikille $x_i \in T$ toisiinsa janalla.

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Pistetodennäköisyysfunktion kuvaaja: Havainnollistus

- Satunnaismuuttujan ξ pistetodennäköisyysfunktiota $f(x_i) = \Pr(\xi = x_i) = p_i, x_i \in T$ kuvataan graafisesti piirtämällä pisteisiin x_i ”piikit”, joiden pituudet vastaavat pistetodennäköisyyksiä $\Pr(\xi = x_i) = p_i$
- ”Piikin” kärkipiste (x_i, p_i) piirretään tavallisesti niin, että se erottuu selvästi pisteitä $(x_i, 0)$ ja (x_i, p_i) yhdistävästä janasta.



Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Pistetodennäköisyyksien vertailu

- Olkoon

$$\Pr(\xi = x_i) = p_i, i = 1, 2$$

- Jos

$$p_1 > p_2$$

niin tulosvaihtoehto x_1 on *todennäköisempi kuin* tulosvaihtoehto x_2 .

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Reaaliakselin välien todennäköisyydet

- Diskreetin jakauman tapauksessa välin $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *todennäköisyys* on

$$\Pr(a \leq \xi \leq b) = \sum_{i | x_i \in [a, b]} \Pr(\xi = x_i)$$

- Summassa *lasketaan yhteen* kaikki pistetodennäköisyydet

$$p_i = \Pr(\xi = x_i)$$

joita vastaavat satunnaismuuttujan ξ arvot $x_i \in [a, b]$.

- *Geometrisesti* ko. summan määrääminen merkitsee niiden piikkifunktion *piikkien pituuksien yhteenlaskemista*, joita vastaavat satunnaismuuttujan ξ arvot $x_i \in [a, b]$.

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Tapahtumien todennäköisyydet

- Todennäköisyyden *aksiomia* käsittelevässä luvussa todetaan seuraavaa:
 - (1) Jokainen *tapahtuma* reaalilukujen joukossa voidaan muodostaa reaaliakselin väleistä yhdistelemällä välejä sopivasti joukko-opin operaatioilla.
 - (2) Jokaisen *tapahtuman todennäköisyys* saadaan reaaliakselin välien todennäköisyyksistä todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen avulla.
- Jos siis diskreetin satunnaismuuttujan pistetodennäköisyysfunktio tunnetaan, se *satunnaisilmiö*, jonka tulosvaihtoehtoja ko. satunnaismuuttuja kuvaa, hallitaan täydellisesti.

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Diskreetin jakauman parametointi 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja ξ noudattaa diskreettiä todennäköisyysjakaumaa, jonka *pistetodennäköisyysfunktio* on f .
- Pistetodennäköisyysfunktio f riippuu tavallisesti **parametreista** eli *vakioista*, jotka määräävät funktion f *muodon*.
- Pistetodennäköisyysfunktion muodon määräviä parametreja kutsutaan usein sen **todennäköisyysjakauman parametreiksi**, jonka todennäköisyydet ko. pistetodennäköisyysfunktio määrittelee.

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Diskreetin jakauman parametointi 2/2

- Olkoot pistetodennäköisyysfunktion f muodon määräävät parametrit

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$$

- Jos halutaan korostaa pistetodennäköisyysfunktion f riippuvuutta sen muodon määräävistä parametreista, pistetodennäköisyysfunktiota *merkitään*:

$$f(x ; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$$

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Diskreetin jakauman parametrien merkitys

- Diskreetin satunnaismuuttujan ξ pistetodennäköisyysfunktion f muodon määräävillä parametreilla $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ on usein jokin sisällöllinen *tulkinta* siinä satunnaisilmiössä, jonka malliksi f on konstruoitu.
- Parametrien $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ arvot ovat sovelluksissa tavallisesti *tuntemattomia* ja niiden arvot on **estimoitava** eli arvioitava havaintojen perusteella.
Ks. monisteen **Tilastolliset menetelmät** lukua **Estimointi**.
- Parametreja $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ koskeva *hypoteeseja* eli oletuksia voidaan **testata** tilastollisin testein.
Ks. monisteen **Tilastolliset menetelmät** lukua **Tilastollinen testaus**.

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Esimerkki: Kuutosen odottaminen nopanheitossa

Tehtävät (a) – (d)

- Heitetään *virheetöntä* noppaa, kunnes saadaan *kuutonen*.
- Olkoon
$$\xi = \text{”Sen heiton numero, jolla saadaan ensimmäinen kuutonen”}$$
- ξ on *diskreetti satunnaismuuttuja*.
- Ratkaistaan seuraavat tehtävät:
 - (a) Määrää satunnaismuuttujan ξ *todennäköisyysjakauma*.
 - (b) Määrää todennäköisyys, että noppaa joudutaan heittämään *täsmälleen 6 kertaa*.
 - (c) Määrää todennäköisyys, että noppaa joudutaan heittämään *6 kertaa tai enemmän*.
 - (d) Määrää todennäköisyys, että noppaa joudutaan heittämään *36 kertaa tai enemmän*.

Esimerkki: Kuutosen odottaminen nopanheitossa

Oletukset

- Oletamme, että nopanheitot ovat toisistaan *riippumattomia* siinä mielessä, että yhdenkään heiton tulos ei riipu aikaisempien heittojen tuloksista.

- Määritellään tapahtumat:

A = ”Noppaa heitettäessä tuloksena *saadaan kuutonen*”

A^c = ”Noppaa heitettäessä tuloksena *ei saada kuutosta*”

- Koska noppa oletettiin *virheettömäksi*,

$$\Pr(A) = \frac{1}{6}$$

- *Komplementtitapahtuman* todennäköisyyden kaavan mukaan

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A) = \frac{5}{6}$$

Esimerkki: Kuutosen odottaminen nopanheitossa

Tehtävän (a) ratkaisu

- Tehtävä (a):

Määrää satunnaismuuttujan.

$\xi =$ ”Sen heiton numero, jolla saadaan *ensimmäinen kuutonen*”
todennäköisyysjakauma.

- Koska *ensimmäinen kuutonen* voidaan saada ensimmäisellä, toisella, kolmannella jne. heitolla, ξ on *diskreetti satunnaismuuttuja*, joka saa *kaikki* kokonaislukuarvot 1, 2, 3, ...
- Seuraavassa osoitetaan, että satunnaismuuttujan ξ *todennäköisyysjakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$\Pr(\xi = i) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

- Kaava ratkaisee tehtävän (a).

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Esimerkki: Kuutosen odottaminen nopanheitossa

Pistetodennäköisyysfunktion johto – 1/2

- Satunnaismuuttujan ξ todennäköisyysjakauman pistetodennäköisyysfunktion lausekkeen perustelu:

- (1) Oletetaan, että ensimmäinen kuutonen saadaan i . heitolla, $i = 1, 2, 3, \dots$
- (2) Tällöin ennen i . heittoa on täytynyt tapahtua $i - 1$ heittoa, joiden tuloksena ei ole saatu kuutosta:

Heiton numero:	1	2	...	$i - 1$	i
Tapahtuma:	A^c	A^c	...	A^c	A

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat
Esimerkki: Kuutosen odottaminen nopanheitossa
Pistetodennäköisyysfunktion johto – 2/2

(3) Tapahtumajonon

$$\underbrace{A^c \ A^c \ \dots \ A^c}_{(i-1) \text{ kpl}} \ A$$

todennäköisyys on *riippumattomien tapahtumien tulosäännön* nojalla

$$\underbrace{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{5}{6}}_{(i-1) \text{ kpl}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$$

- Kaava pätee kaikille $i = 1, 2, 3, \dots$ ja ratkaisee siis tehtävän (a).

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Esimerkki: Kuutosen odottaminen nopanheitossa

Todennäköisyysjakauma

- Pistetodennäköisyydet

$$\Pr(\xi = i) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}, i = 1, 2, 3, \dots$$

kelpaavat todennäköisyyksiksi, koska ne muodostavat *suppenevan geometrisen sarjan*, jonka summa = 1:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Pr(\xi = i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^i = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1$$

- Koska pistetodennäköisyydet $\Pr(\xi = i)$ muodostavat geometrisen sarjan, satunnaismuuttujan ξ todennäköisyysjakaumaa sanotaan **geometriseksi jakaumaksi** (lisätietoja: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**).

Esimerkki: Kuutosen odottaminen nopanheitossa

Pistetodennäköisyydet – 1/2

- Geometrisen jakauman

$$\Pr(\xi = i) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}, i = 1, 2, 3, \dots$$

pistetodennäköisyydet *vähenevät eksponentiaalista vauhtia* eli kuten *suppenevassa geometrisessa sarjassa*, kun i kasvaa.

- Tämä merkitsee seuraavaa:
 - (1) Todennäköisyys, että *ensimmäinen kuutonen* saadaan heti ensimmäisellä heitolla *on kaikkein suurin*.
 - (2) Todennäköisyys, että *ensimmäinen kuutonen* saadaan i . heitolla, *pienenee* heittojen lukumäärän i funktiona *eksponentiaalista vauhtia*.

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Esimerkki: Kuutosen odottaminen nopanheitossa

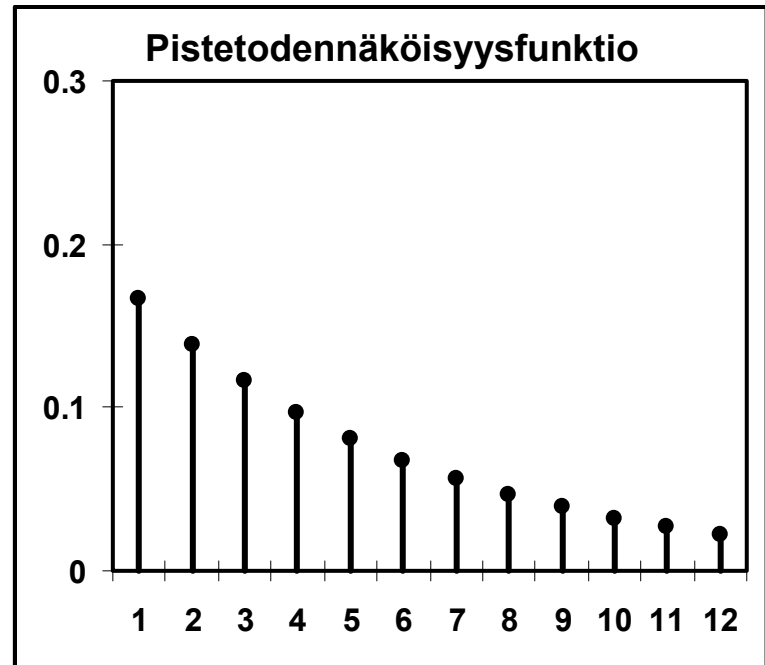
Pistetodennäköisyydet – 2/2

- Viereinen taulukko ja kuvio esittävät esimerkissä johdetun geometrisen jakauman pistetodennäköisyyksiä

$$\Pr(\xi = i) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$$

kun $i = 1, 2, \dots, 12$.

i	$\Pr(\xi = i)$
1	0.1667
2	0.1389
3	0.1157
4	0.0965
5	0.0804
6	0.0670
7	0.0558
8	0.0465
9	0.0388
10	0.0323
11	0.0269
12	0.0224



Esimerkki: Kuutosen odottaminen nopanheitossa

Tehtävän (b) ratkaisu

- Tehtävä (b):

Mikä on todennäköisyys, että *ensimmäinen kuutonen* saadaan 6. heitolla?

- Satunnaismuuttujan ξ pistetodennäköisyysfunktioista saadaan:

$$\Pr(\xi = 6) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0.0670$$

- *Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan* mukaan tämä merkitsee seuraavaa:

Jos 1000 henkilöä heittää noppaa, *keskimäärin* n. 70 saa *ensimmäisen kuutosen* 6. heitolla.

Esimerkki: Kuutosen odottaminen nopanheitossa

Aputulos – 1/2

- Edellä esitettyjen tehtävien (c) ja (d) ratkaisemiseksi johdetaan seuraava aputulos:

Todennäköisyys sille, että noppaa joudutaan heittämään k kertaa tai enemmän ennen kuutosen saamista on

$$\Pr(\xi \geq k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Esimerkki: Kuutosen odottaminen nopanheitossa

Aputulos – 2/2

- *Komplementtitapahtuman todennäköisyyden ja geometrisen sarjan osasumman kaavojen nojalla ko. todennäköisyydeksi saadaan:*

$$\begin{aligned}\Pr(\xi \geq k) &= 1 - \Pr(\xi < k) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \Pr(\xi = i) \\ &= 1 - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \\ &= 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - (5/6)^{k-1}}{1 - 5/6} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

Esimerkki: Kuutosen odottaminen nopanheitossa

Tehtävän (c) ratkaisu

- Tehtävä (c):

Määrää todennäköisyys, että noppaa joudutaan heittämään *6 kertaa tai enemmän* ennen *ensimmäisen kuutosen* saamista.

- Todennäköisyys, että noppaa joudutaan heittämään *6 kertaa tai enemmän* ennen *ensimmäisen kuutosen* saamista on aputuloksen nojalla

$$\Pr(\xi \geq 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0.402$$

- *Todennäköisyyden frekvenssintulkinnan* mukaan tämä merkitsee seuraavaa:

Suuressa joukossa ihmisiä *keskimäärin* 40 % joutuu heittämään noppaa *6 kertaa tai enemmän* ennen kuin he saavat *ensimmäisen kuutosen*.

Esimerkki: Kuutosen odottaminen nopanheitossa

Tehtävän (d) ratkaisu

- Tehtävä (d):
Määrää todennäköisyys, että noppaa joudutaan heittämään *36 kertaa tai enemmän* ennen *ensimmäisen kuutosen* saamista.
- Todennäköisyys, että noppaa joudutaan heittämään *36 kertaa tai enemmän* ennen *ensimmäisen kuutosen* saamista on aputuloksen nojalla

$$\Pr(\xi \geq 36) = \left(\frac{5}{6}\right)^{35} \approx 0.00169$$

- *Todennäköisyyden frekvenssintulkinnan* mukaan tämä merkitsee seuraavaa:

Jos 1000 henkilöä heittää noppaa, *keskimäärin* 1 – 2 henkilöä joutuu heittämään noppaa *36 kertaa tai enemmän* ennen kuin he saavat *ensimmäisen kuutosen*.

Esimerkki: Kuutosen odottaminen nopanheitossa

Tehtävän (d) ratkaisu: Kommentti

- Edellä todettiin, että jos 1000 henkilöä heittää noppaa, *keskimäärin* 1 – 2 henkilöä joutuu heittämään noppaa 36 *kertaa tai enemmän* ennen kuin he saavat *ensimmäisen kuutosen*.
- Nämä 1 – 2 henkilöä varmasti *ihmettelevät* heittosarjaansa.
- Tässä kohdataan *tilastotieteilijän selitys ihmeille*:

Harvinaisetkin tapahtumat yleensä sattuvat ennemmin tai myöhemmin, jos satunnaisilmiö toistuu riittävän monta kertaa.

Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

Satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

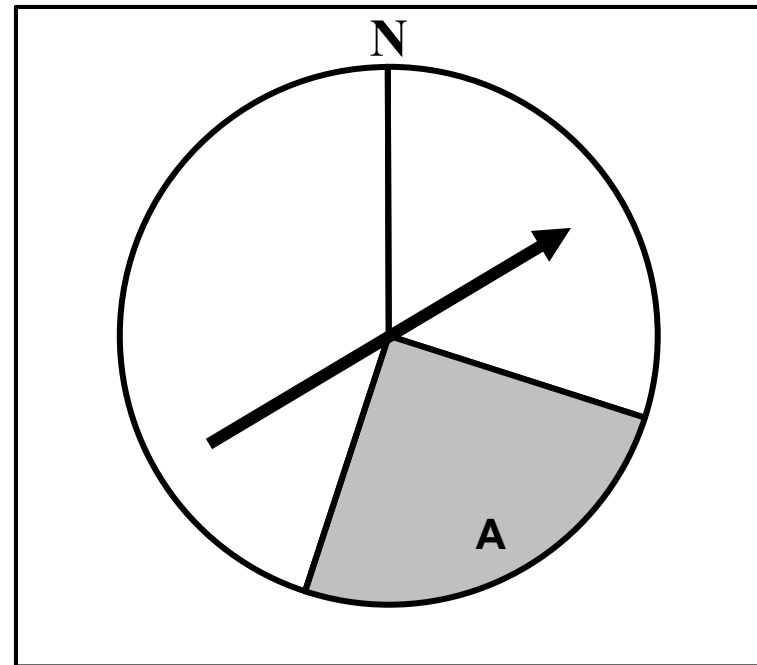
>> Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki:

Onnenpyörä – $1/6$

- Kuva oikealla esittää onnenpyörää, jonka keskipisteeseen on asetettu vapaasti pyörivä osoitin.
- Tarkastellaan peliä, jossa pelaaja valitsee onnenpyörästä *mielivaltaisen sektorin A*.
- Osoitinta pyöräytetään ja pelaaja voittaa, jos osoitin pysähtyy valitsemaansa sektoriin.
- Oletetaan, että *todennäköisyys voittaa on suhteessa valitun sektorin A pinta-alaan, mutta ei riipu sektorin A paikasta*.

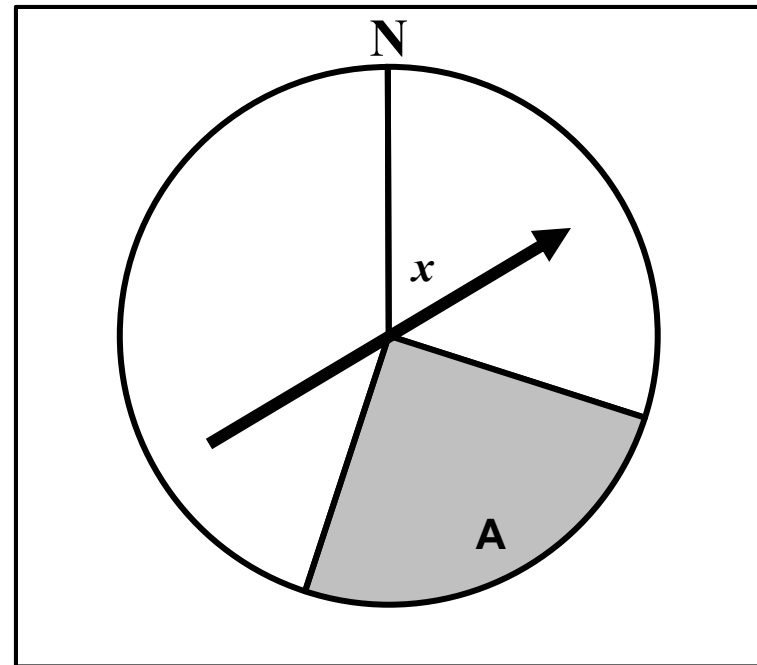


Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki:

Onnenpyörä – 2/6

- Tarkastellaan **satunnaisilmionä** sitä kulmaa, jonka osoitin muodostaa pysähtyttyään N:llä ($N = \textit{north}$) merkityn suunnan kanssa.
- Tähän satunnaisilmioon liittyvä **otosavaruus** eli *mahdollisten tulosvaihtoehtojen joukko* on $S = \{\text{Kulma } x \mid x \in [0^\circ, 360^\circ)\}$

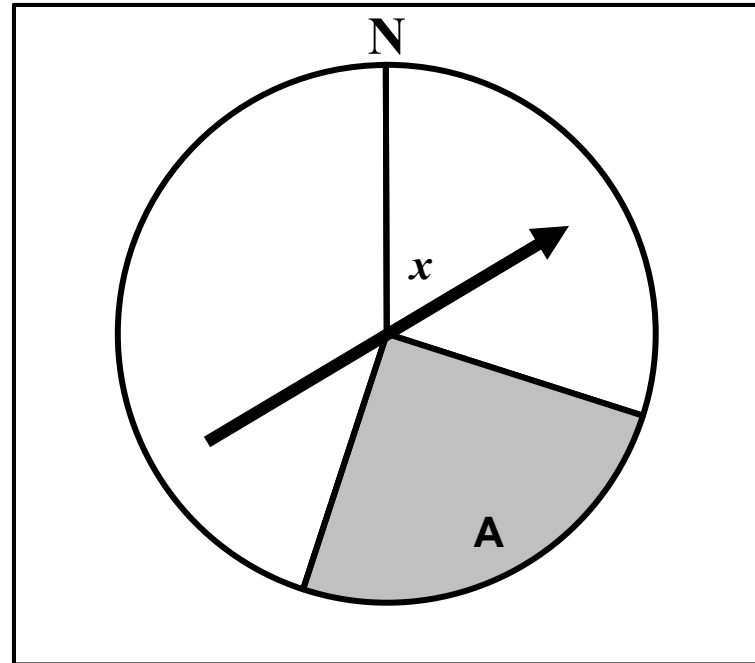


Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki:

Onnenpyörä – 3/6

- Määritellään **satunnaismuuttuja** ξ , joka liittää mahdollisiin tulosvaihtoehtoihin *reaaliluvun* seuraavasti:
Kulma $x \rightarrow x \in [0, 360)$
- Satunnaismuuttujaa ξ sanotaan **jatkuvaksi**, koska ξ saa *kaikki arvot* väliltä $[0, 360)$.



Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki:

Onnenpyörä – 4/6

- Tehdyn oletuksen mukaan todennäköisyys, että osoitin pysähtyy valitulle sektorille *riippuu vain sektorin leveydestä, mutta ei sektorin paikasta*.
- Tämä merkitsee sitä, että onnenpyörän osoittimen pysähtymistodennäköisyydet jakautuvat kaikille onnenpyörän samanlevyisille sektoreille siinä mielessä *tasaisesti*, että

$$\Pr(\xi \in [a, b]) = \Pr(\xi \in [c, d])$$

jos välin $[0, 360)$ osavälit $[a, b]$ ja $[c, d]$ ovat *yhtä pitkiä* eli

$$b - a = d - c$$

- Tällaista todennäköisyyksien jakaumaa kutsutaan **jatkuvaksi tasaiseksi jakaumaksi**; ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki:

Onnenpyörä – 5/6

- Esimerkin jatkuvan tasaisen jakauman *todennäköisyyksien jakautumista* välillä $[0, 360)$ voidaan kuvata jatkuvalla käyrällä

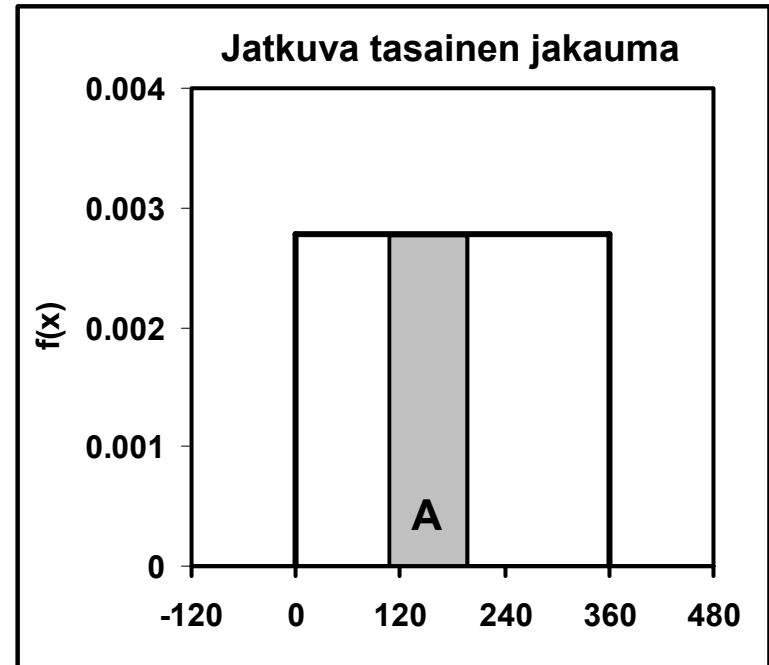
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{360} & , x \in [0, 360) \\ 0 & , x \notin [0, 360) \end{cases}$$

- Käyrää vastaavaa funktiota kutsutaan jatkuvan tasaisen jakauman (*todennäköisyys-*) **tiheysfunktiksi**.

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki: Onnenpyörä – 6/6

- Kuvio oikealla esittää esimerkin *jatkuvan tasaisen jakauman tiheysfunktiota*.
- Kuvaan on merkitty myös alue, joka vastaa onnenpyörää esittäviin kuviin merkittyä sektoria *A*.



Jatkuva satunnaismuuttuja:

Määritelmä

- Satunnaismuuttuja ξ on **jatkuva**, jos seuraavat kaksi ehtoa pätevät:
 - (1) Satunnaismuuttuja ξ saa *kaikki* reaalilukuarvot joltakin *reaaliakselin väliltä*.
 - (2) Todennäköisyys, että satunnaismuuttuja ξ saa *minkä tahansa yksittäisen arvon* $= 0$.

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Esimerkki:

Jono

- Palvelujonoon tulee asiakkaita keskimääriin k kappaletta aikayksikköä kohden.
- *Seuraavan jonoon tulevan asiakkaan odotusaika* on jatkuva satunnaismuuttuja, joka noudattaa (tietyin oletuksin) **eksponentti-jakaumaa**; ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.
- Huomautus:

*Tällöin jonkin aikavälin aikana jonoon tulevien asiakkaiden lukumäärä on diskreetti satunnaismuuttuja, joka noudattaa **Poisson-jakaumaa**; ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.*

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Jatkuvat suureet

- Jatkuvat satunnaismuuttujat liittyvät sellaisiin todennäköisyyslaskennan sovelluksiin, joissa tarkastellaan **jatkuvia suureita**.
- Esimerkkejä:
 - *aika*
 - *nopeus*
 - *pituus, pinta-ala, tilavuus*
 - *paino*
 - *lämpötila*
 - *rahamäärä, korko*

Tiheysfunktio:

Määritelmä

- Reaaliarvoinen funktio f määrittelee (**todennäköisyys-**) **tiheysfunktion** *jatkuvalla satunnaismuuttujalle* ξ , jos

(1) $f(x)$ on x :n jatkuva funktio

(2) $f(x) \geq 0$ kaikille x

(3)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

(4)
$$\Pr(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Tiheysfunktion määritelmä:

Kommentteja

- Määritelmän ehdon (1) mukaan tiheysfunktio on *jatkuva*.
- Määritelmän ehdon (2) mukaan tiheysfunktio on kaikkialla *ei-negatiivinen*.
- Määritelmän ehto (2) on välttämätön ehto, koska ehdon (4) mukaan tiheysfunktion integraalit yli reaaliakselin välien ovat *todennäköisyyksiä*.
- Määritelmän ehdon (3) mukaan tiheysfunktion integraali yli koko reaaliakselin = 1.

Jatkuva todennäköisyysjakauma:

Määritelmä

- Jatkuvan satunnaismuuttujan ξ tiheysfunktio f määrittelee satunnaismuuttujan ξ **todennäköisyysjakauman**.
- Jatkuvan satunnaismuuttujan ξ tiheysfunktio kertoo, miten otosavaruuden S *todennäköisyysmassa* ($= 1$) jakautuu satunnaismuuttujan ξ saamien *arvojen väleille*.
- Jatkuvan satunnaismuuttujan ξ tiheysfunktion avulla voidaan määrätä *kaikki* ko. satunnaisilmiöön liittyvät *todennäköisyydet*.

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Tiheysfunktion kuvaaja

- Jatkuvan satunnaismuuttujan ξ tiheysfunktioita f voidaan *kuvata graafisesti jatkuvalla käyrällä*
 $(x, f(x))$

Tiheysfunktion kuvaaja:

Kommentteja

- Ehdon (4) mukaan *reaaliakselin väleihin liittyvät todennäköisyydet* saadaan integroimalla tiheysfunktio ko. välillä.
- *Geometrisesti reaaliakselin väliin $[a, b]$ liittyvän todennäköisyyden* määrittäminen merkitsee tiheysfunktion kuvaajan, x -akselin ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajoittaman tasoalueen *pinta-alan* laskemista.
- Määritelmän ehdon (3) mukaan tiheysfunktion kuvaajan ja x -akselin väliin jäävän tasoalueen *pinta-ala* $= 1$.

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

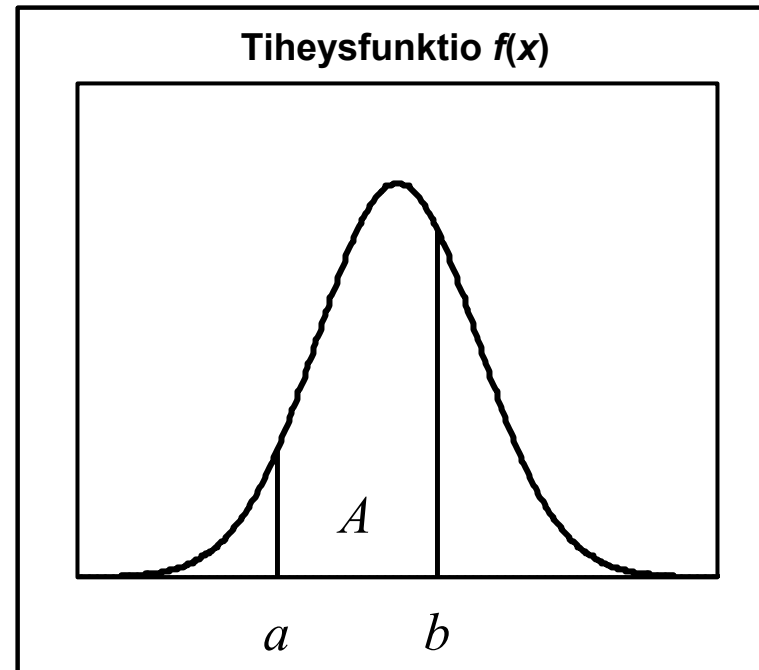
Tiheysfunktion kuvaaja: Havainnollistus

- Kuva oikealla esittää **normaalijakaumaa** (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) noudattavan *jatkuvan satunnaismuuttujan ξ tiheysfunktioita $f(x)$* .
- Jatkuville satunnaismuuttujille ξ pätee yleisesti:

$$\Pr(a \leq \xi \leq b)$$

$$= \int_a^b f(x) dx$$

= Alueen A pinta-ala



Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Tapahtumien todennäköisyydet

- Todennäköisyyden *aksiomia* käsittelevässä luvussa todetaan seuraavaa:
 - (1) Jokainen *tapahtuma* reaalilukujen joukossa voidaan muodostaa reaaliakselin väleistä yhdistelemällä välejä sopivasti joukko-opin operaatioilla.
 - (2) Jokaisen *tapahtuman todennäköisyys* saadaan reaaliakselin välien todennäköisyyksistä todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen avulla.
- Jos siis jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio tunnetaan, se *satunnaisilmiö, jonka tulosvaihtoehtoja ko. satunnaismuuttuja kuvaa, hallitaan täydellisesti.*

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Tiheysfunktion määrittelyalue

- Olkoon f jatkuvan satunnaismuuttujan ξ tiheysfunktio.

- Olkoon

$$\begin{cases} f(x) > 0, & \text{jos } x \in [c, d] \\ f(x) = 0, & \text{jos } x \notin [c, d] \end{cases}$$

- Tällöin

$$\int_c^d f(x) dx = 1$$

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Jatkuvat jakaumat ja yhden pisteen todennäköisyydet

- Olkoon f jatkuvan satunnaismuuttujan ξ tiheysfunktio.
- Tällöin jokaisen yksittäisen pisteen todennäköisyys on nolla, koska

$$\begin{aligned}\Pr(\xi = b) &= \lim_{a \rightarrow b} \Pr(a \leq \xi \leq b) \\ &= \lim_{a \rightarrow b} \int_a^b f(x) dx \\ &= 0\end{aligned}$$

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Tapahtumien todennäköisyyksien vertailu

- Olkoon ξ jatkuva satunnaismuuttuja ja f vastaava tiheysfunktio.
- Olkoot $A = \{a \leq \xi \leq b\}$ ja $C = \{c \leq \xi \leq d\}$ kaksi tapahtumaa.

- Olkoon

$$\int_a^b f(x)dx > \int_c^d f(x)dx$$

- Tällöin tapahtuma A on *todennäköisempi kuin* tapahtuma C :

$$\Pr(A) > \Pr(C)$$

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Tapahtumien todennäköisyyksien vertailu: Havainnollistus 1/2

- Kuva oikealla esittää **eksponenttijakaumaa** (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) noudattavan *jatkuvan satunnaismuuttujan* ξ *tiheysfunktiota* $f(x)$.

- Olkoot

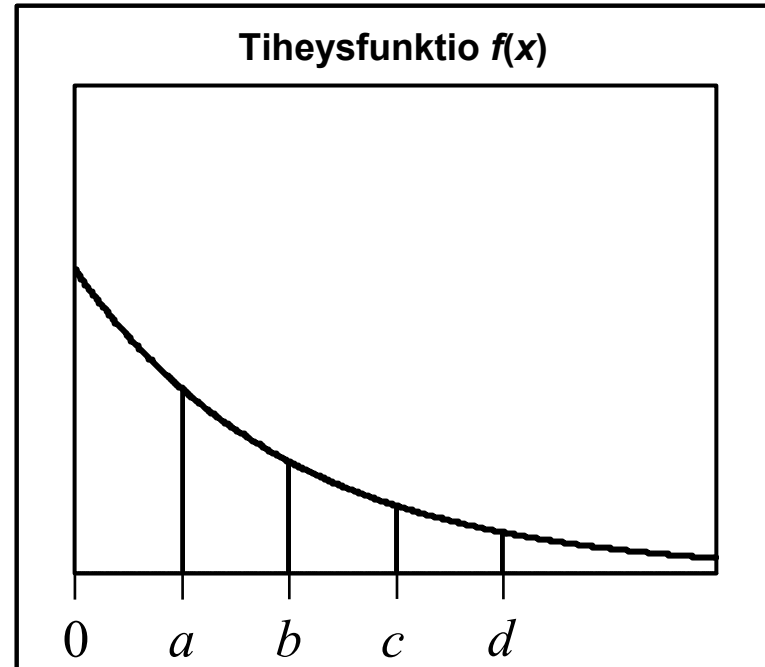
$$A = \{a \leq \xi \leq b\}$$

$$C = \{c \leq \xi \leq d\}$$

jossa

$$b - a = d - c$$

kuten kuvassa.



Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Tapahtumien todennäköisyyksien vertailu: Havainnollistus 2/2

- Koska kuvan mukaan selvästi

$$\int_a^b f(x)dx > \int_c^d f(x)dx$$

niin tapahtuma

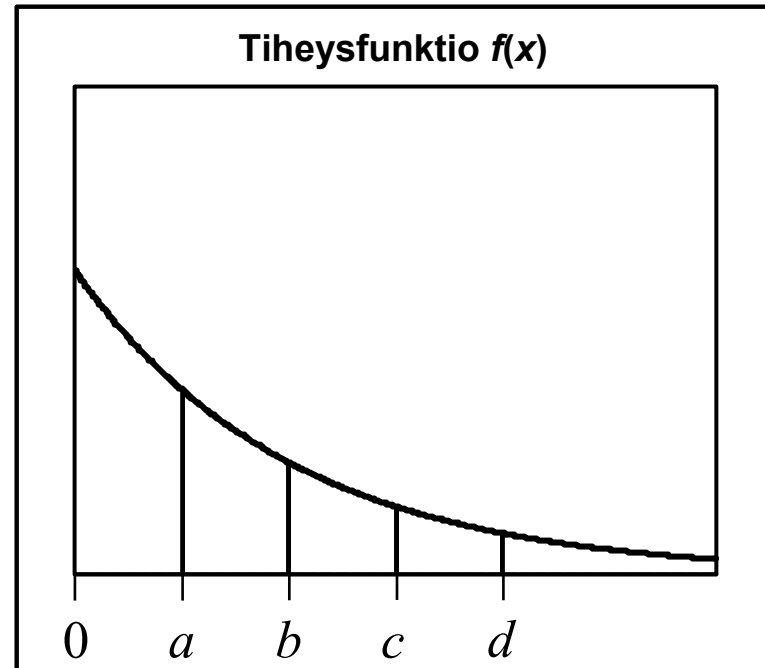
$$A = \{a \leq \xi \leq b\}$$

on *todennäköisempi* kuin
tapahtuma

$$C = \{c \leq \xi \leq d\}$$

eli

$$\Pr(A) > \Pr(C)$$



Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Jatkuvan jakauman parametointi 1/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttuja ξ noudattaa jatkuvaa todennäköisyysjakaumaa, jonka *tiheysfunktio* on f .
- Tiheysfunktio f riippuu tavallisesti **parametreista** eli *vakioista*, jotka määräävät funktion f *muodon*.
- Tiheysfunktion muodon määräviä parametreja kutsutaan usein sen **todennäköisyysjakauman parametreiksi**, jonka todennäköisyysdet ko. tiheysfunktio määrittelee.

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Jatkuvan jakauman parametointi 2/2

- Olkoot tiheysfunktion f muodon määräävät parametrit

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$$

- Jos halutaan korostaa tiheysfunktion f riippuvuutta sen muodon määräävistä parametreista, tiheysfunktiota *merkitään*:

$$f(x ; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$$

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Jatkuvan jakauman parametrien merkitys

- Jatkuvan satunnaismuuttujan ξ tiheysfunktion f muodon määräävillä parametreilla $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ on usein jokin sisällöllinen *tulkinta* siinä satunnaisilmiössä, jonka malliksi f on konstruoitu.
- Parametrien $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ arvot ovat sovelluksissa tavallisesti *tuntemattomia* ja niiden arvot on **estimoitava** eli arvioitava havaintojen perusteella.
Ks. monisteen **Tilastolliset menetelmät** lukua **Estimointi**.
- Parametreja $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ koskeva *hypoteeseja* eli oletuksia voidaan **testata** tilastollisin testein.
Ks. monisteen **Tilastolliset menetelmät** lukua **Tilastolliset testit**.

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Diskreetit jakaumat vs jatkuvat jakaumat 1/2

- Olkoon ξ **diskreetti satunnaismuuttuja** ja f vastaava **pistetodennäköisyysfunktio**.
- Olkoon $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ satunnaismuuttujan ξ *arvojen* joukko.
- Pistetodennäköisyysfunktion f arvo pisteessä x_i *on todennäköisyys*:
$$f(x_i) = \Pr(\xi = x_i)$$
- Koska funktion f arvo pisteessä x_i *on todennäköisyys*, niin
$$0 \leq f(x_i) \leq 1$$

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Diskreetit jakaumat vs jatkuvat jakaumat 2/2

- Olkoon ξ **jatkuva satunnaismuuttuja** ja f vastaava **tiheysfunktio**.
- Tiheysfunktion f arvo pisteessä x *ei ole todennäköisyys*.
- Reaaliakselin *välien* todennäköisyydet saadaan kaavasta

$$\Pr(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

- Koska $f(x)$ *ei ole todennäköisyys*, *on mahdollista*, että $f(x) > 1$

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Esimerkki: Odotusajan jakauma

- Tarkastellaan jonkin tapahtuman *odotusaikaa* satunnaismuuttujana.
- Oletetaan, että tapahtumien *keskimääräinen* lukumäärä jotakin aikayksikköä kohden on λ .
- Tällöin seuraavan tapahtuman *odotusaika* ξ on *jatkuva satunnaismuuttuja*, joka voi saada *kaikki* ei-negatiiviset reaalilukuarvot.
- Tietyin ehdoin satunnaismuuttuja ξ noudattaa *todennäköisyysjakaumaa*, jonka *tiheysfunktio* on
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0, \lambda \geq 0$$
- Satunnaismuuttujan ξ todennäköisyysjakaumaa sanotaan **eksponenttijakaumaksi**; ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Esimerkki: Odotusajan jakauma

Tehtävät (a) – (d)

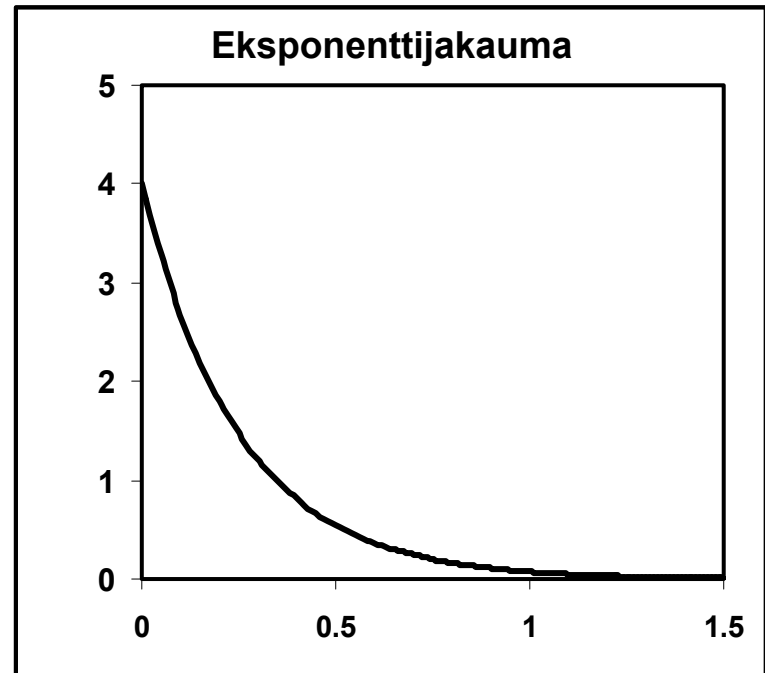
- Tarkastellaan sovelluksena erään yrityksen puhelinkeskukseen tulevien puheluiden odotusaikoja.
- Oletetaan, että keskuksen tulee keskimäärin 4 puhelua minuutissa.
- Ratkaistaan seuraavat tehtävät:
 - (a) Määrää todennäköisyys, että seuraavaa puhelua joudutaan odottamaan korkeintaan 15 sekuntia?
 - (b) Määrää todennäköisyys, että seuraavaa puhelua joudutaan odottamaan korkeintaan 30 sekuntia?
 - (c) Kumpi on todennäköisempää:
Se, että seuraavaa puhelua joudutaan odottamaan 15 – 30 sekuntia, vai se, että seuraavaa puhelua joudutaan odottamaan 30 – 60 sekuntia?
 - (d) Mikä on todennäköisyys, että seuraavaa puhelua joudutaan odottamaan yli 60 sekuntia?

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Esimerkki: Odotusajan jakauma

Tiheysfunktio

- Esimerkin tapauksessa $\lambda = 4$, kun aikayksikkönä on 1 minuutti.
- Siten satunnaismuuttujan $\xi =$ ”Seuraavan puhelun odotusaika”
tiheysfunktio on muotoa
 $f(x) = 4e^{-4x}$, $x \geq 0$
- Viereinen kuvio esittää esimerkin eksponenttijakauman tiheysfunktion kuvaajaa välillä $[0, 1.5]$.



Esimerkki: Odotusajan jakauma

Aputuloksia – 1/2

- Tarvitsemme tehtävien (a) – (d) ratkaisemisessa aputuloksia (1) – (3):

(1) Tapahtuman $\xi \leq t$ todennäköisyys on

$$\begin{aligned}\Pr(\xi \leq t) &= \int_0^t f(x) dx \\ &= 4 \int_0^t e^{-4x} dx \\ &= 4 \left[-\frac{1}{4} e^{-4x} \right]_0^t \\ &= 1 - e^{-4t}\end{aligned}$$

(2) Tapahtuman $\xi > t$ todennäköisyys on komplementtitapahtuman todennäköisyyden kaavan ja aputuloksen (1) nojalla

$$\Pr(\xi > t) = 1 - \Pr(\xi \leq t) = e^{-4t}$$

Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat

Esimerkki: Odotusajan jakauma

Aputuloksia – 2/2

(3) Tapahtuman $s \leq \xi \leq t$ todennäköisyys on

$$\begin{aligned}\Pr(s \leq \xi \leq t) &= \int_s^t f(x) dx \\ &= 4 \int_s^t e^{-4x} dx \\ &= 4 \left[-\frac{1}{4} e^{-4x} \right]_s^t \\ &= e^{-4s} - e^{-4t}\end{aligned}$$

Esimerkki: Odotusajan jakauma

Tehtävien (a) ja (b) ratkaisut

- Tapahtuman $\xi \leq 1/4$ min todennäköisyys (tehtävä (a)) on aputuloksen (1) nojalla

$$\Pr\left(\xi \leq \frac{1}{4}\right) = 1 - e^{-4 \times \frac{1}{4}} = 1 - e^{-1} \approx 0.632$$

- Tapahtuman $\xi \leq 1/2$ min todennäköisyys (tehtävä (b)) on aputuloksen (1) nojalla

$$\Pr\left(\xi \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - e^{-4 \times \frac{1}{2}} = 1 - e^{-2} \approx 0.865$$

Esimerkki: Odotusajan jakauma

Tehtävän (c) ratkaisu

- Tapahtumien $1/4 \text{ min} \leq \xi \leq 1/2 \text{ min}$ ja $1/2 \text{ min} \leq \xi \leq 1 \text{ min}$ todennäköisyydet (tehtävä (c)) ovat aputuloksen (3) nojalla

$$\Pr\left(\frac{1}{4} \leq \xi \leq \frac{1}{2}\right) = e^{-4 \times \frac{1}{4}} - e^{-4 \times \frac{1}{2}} = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.233$$

$$\Pr\left(\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1\right) = e^{-4 \times \frac{1}{2}} - e^{-4 \times 1} = e^{-2} - e^{-4} \approx 0.117$$

- Siten tapahtuma $1/4 \text{ min} \leq \xi \leq 1/2 \text{ min}$ on todennäköisempi kuin tapahtuma $1/2 \text{ min} \leq \xi \leq 1 \text{ min}$.

Esimerkki: Odotusajan jakauma

Tehtävän (d) ratkaisu

- Tapahtuman $\xi > 1$ min todennäköisyys (tehtävä (d)) on aputuloksen (2) nojalla

$$\Pr(\xi > 1) = 1 - \Pr(\xi \leq 1) = e^{-4} \approx 0.018$$

- *Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan* mukaan tämä merkitsee seuraavaa:
Keskus joutuu odottamaan seuraavaa puhelua *kauemmin* kuin 1:n minuutin *keskimäärin* melkein 2 kertaa ($100 \times 0.018 \approx 2$) 100:sta odotuskerrasta.