

---

**Ilkka Mellin**

**Todennäköisyyslaskenta**

**Osa 3: Todennäköisyysjakaumia**

**Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**

# Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia

---

>> Johdanto

$\chi^2$ -jakauma

$F$ -jakauma

$t$ -jakauma

# Jakaumien määritteleminen normaalijakauman avulla

---

- Useat tilastotieteen keskeiset todennäköisyysjakaumat voidaan *määritellä* normaalijakauman avulla.
- Tällaisia ovat esimerkiksi  $\chi^2$ -,  $F$ - ja  $t$ -jakaumat, joilla on keskeinen rooli *otosjakaumien teoriassa, estimoinnissa ja testauksessa* (ks. monisteen **Tilastolliset menetelmät** lukuja **Otokset ja otosjakaumat, Estimointi ja Tilastollinen testaus**).
- Tarkastelemme seuraavien jakaumien määrittelemistä ja ominaisuuksia:
  - **$\chi^2$ -jakauma**
  - **$F$ -jakauma**
  - **$t$ -jakauma**

# Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia

---

Johdanto

>>  $\chi^2$ -jakauma

*F*-jakauma

*t*-jakauma

$\chi^2$ -jakauma

## $\chi^2$ -jakauman määritelmä 1/2

---

- Olkoot  $X_i, i = 1, 2, \dots, n$  riippumattomia, standardoitua normaalijakaumaa  $N(0,1)$  (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) noudattavia satunnaismuuttujia.
- Tällöin

$$X_i \sim N(0,1), i = 1, 2, \dots, n$$

$$X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

$\chi^2$ -jakauma

## $\chi^2$ -jakauman määritelmä 2/2

---

- Olkoon

$$X = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

$N(0,1)$ -jakautuneiden, *riippumattomien* satunnaismuuttujien  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  *neliösumma*.

- Tällöin satunnaismuuttuja  $X$  noudattaa  **$\chi^2$ -jakaumaa** (Khiin neliö -jakaumaa)  **$n$ :llä vapausasteella**.
- Merkintä:

$$X \sim \chi^2(n)$$

$\chi^2$ -jakauma

## $\chi^2$ -jakauman vapausasteet

---

- $\chi^2$ -jakauman vapausasteiden lukumäärä  $n$  viittaa yhteenlaskettavien lukumäärään  $\chi^2$ -jakauman määrittelevässä neliösummassa.
- Vapausasteiden lukumäärä  $n$  on  $\chi^2$ -jakauman muodon määräävä *parametri*.

$\chi^2$ -jakauma

## Odotusarvo, varianssi ja standardipoikkeama

---

- Olkoon  $X \sim \chi^2(n)$ .

- **Odotusarvo:**

$$E(X) = n$$

- **Varianssi ja standardipoikkeama:**

$$\text{Var}(X) = D^2(X) = 2n$$

$$D(X) = \sqrt{2n}$$



# $\chi^2$ -jakauma

## Tiheysfunktion kuvaaja

- Kuva oikealla esittää  $\chi^2$ -jakauman

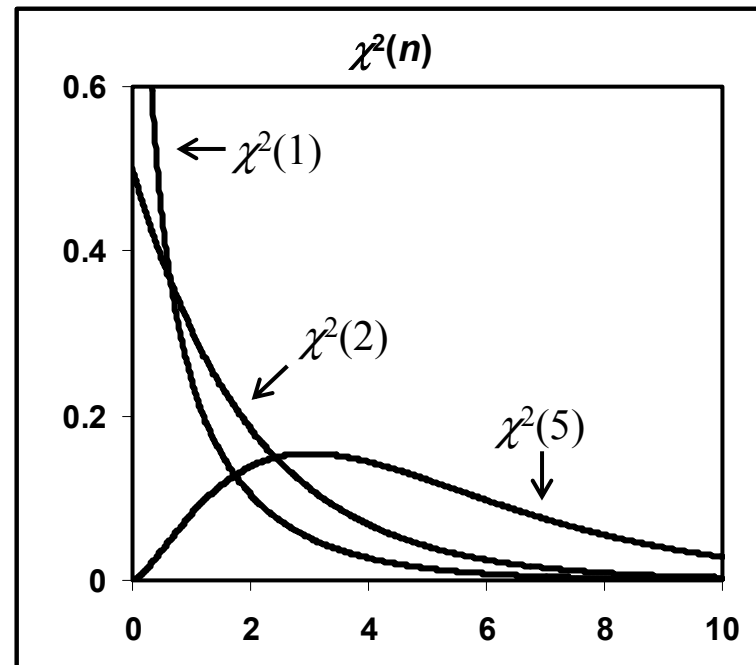
$$\chi^2(n)$$

tiheysfunktiota välillä  $[0, 10]$ , kun vapausasteiden lukumäärällä  $n$  on seuraavat arvot:

- (i)  $n = 1$
- (ii)  $n = 2$
- (iii)  $n = 5$

- Jakauman *odotusarvo*:

$$E(X) = n$$



## $\chi^2$ -jakauma

# Tiheysfunktion ja sen kuvaajan ominaisuuksia

---

- $\chi^2$ -jakauman tiheysfunktio  $f(x)$  on *positiivinen* kaikille positiivisille argumentin arvoille:

$$f(x) > 0, x > 0$$

- Jos vapausasteiden lukumäärä

$$n = 1, 2$$

niin tiheysfunktio on *monotonisesti laskeva* kaikille  $x \geq 0$ .

- Jos vapausasteiden lukumäärä

$$n \geq 3$$

niin tiheysfunktio on *yksihuippuinen* ja sillä on *maksimi* jossakin pisteessä  $x > 0$ .

$\chi^2$ -jakauma

## Todennäköisyyksien määrittäminen

### $\chi^2$ -jakaumasta 1/2

---

- Todennäköisyydet voidaan määrätä  $\chi^2$ -jakaumasta jakauman *kertymäfunktion* avulla.
- Olkoon  $X \sim \chi^2(n)$ .
- Olkoon satunnaismuuttujan  $X$  *kertymäfunktio*

$$F_{Chi}(x ; n) = \Pr(X \leq x)$$

- Huomautus 1:

Merkinnällä  $F_{Chi}(x ; n)$  on haluttu korostaa  $\chi^2$ -jakauman riippuvuutta sen vapausasteiden lukumäärästä  $n$ .

- Huomautus 2:

Koska  $\chi^2$ -jakauman tiheysfunktion integraalifunktiota ei osata esittää suljetussa muodossa, jakauman kertymäfunktion arvojen määrittämisessä on käytettävä jotakin *numeerista menetelmää*.

$\chi^2$ -jakauma

## Todennäköisyyksien määrittäminen

### $\chi^2$ -jakaumasta 2/2

---

- *Kaikkien  $\chi^2$ -jakaumaan liittyvien tapahtumien todennäköisyydet saadaan todennäköisyyksistä*

$$\Pr(X \leq x) = F_{Chi}(x ; n)$$

*todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen avulla.*

- Esimerkiksi

$$\Pr(a \leq X \leq b) = F_{Chi}(b) - F_{Chi}(a)$$

$\chi^2$ -jakauma

## Todennäköisyyksien määrittäminen

### $\chi^2$ -jakaumasta: Taulukot 1/2

---

- $\chi^2$ -jakauman *taulukot* sisältävät tavallisesti *argumentin*  $x$  arvoja taulukoituna *useille vapausasteiden lukumäärille*  $n$ , mutta vain *muutamille kertymäfunktion*  $F_{Chi}$  arvoille.
- Siten taulukot mahdollistavat seuraavan tehtävän ratkaisemisen (taulukko-kohtaisin rajoituksin):

Määrää  $x$ , kun *todennäköisyys*

$$\Pr(X \leq x) = F_{Chi}(x ; n)$$

on annettu.

$\chi^2$ -jakauma

## Todennäköisyyksien määrittäminen

### $\chi^2$ -jakaumasta: Taulukot 2/2

---

- Koska  $\chi^2$ -jakaumaa käytetään tavallisesti *väliestimoinnin* tai *testauksen* yhteydessä,  $\chi^2$ -jakauman taulukoihin on yleensä taulukoitu sellaisia argumentin  $x$  arvoja, jotka vastaavat todennäköisyyden

$$\Pr(X \leq x) = F_{Chi}(x ; n)$$

*komplementtitodennäköisyyttä*

$$p = \Pr(X \geq x) = 1 - F_{Chi}(x ; n)$$

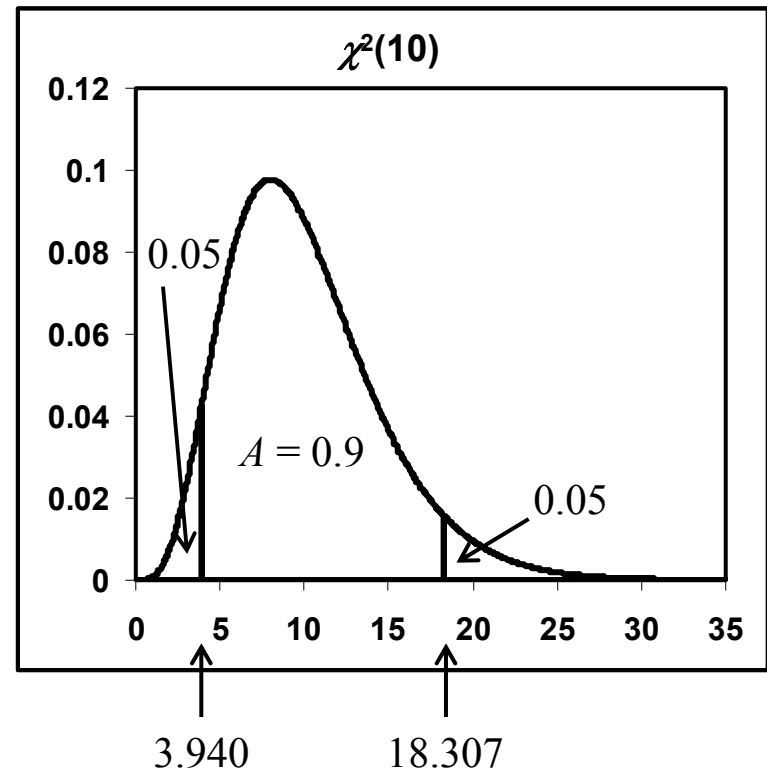
$\chi^2$ -jakauma

## Todennäköisyyksien määrittäminen

### $\chi^2$ -jakaumasta: Esimerkki

- Kuva oikealla esittää  $\chi^2$ -jakauman tiheysfunktiota välillä  $[0, 35]$ .
- $\chi^2$ -jakauman taulukoista saadaan:

$$\begin{aligned} & \text{Alueen } A \text{ pinta-ala} \\ &= \Pr(3.940 \leq X \leq 18.307) \\ &= F_{Chi}(18.307; 10) \\ &\quad - F_{Chi}(3.940; 10) \\ &= 0.95 - 0.05 \\ &= 0.9 \end{aligned}$$



$\chi^2$ -jakauma

## Todennäköisyyksien määrittäminen

### $\chi^2$ -jakaumasta: Ohjelmat

---

- Olkoon  $X \sim \chi^2(n)$ .
- Monet *tietokoneohjelmat* mahdollistavat seuraavien tehtävien ratkaisemisen ilman  $\chi^2$ -jakauman taulukoiden asettamia rajoituksia:

(i) Määrää todennäköisyys

$$\Pr(X \leq x) = F_{Chi}(x ; n)$$

kun  $x$  on annettu.

(ii) Määrää  $x$ , kun todennäköisyys

$$\Pr(X \leq x) = F_{Chi}(x ; n)$$

on annettu.



# Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia

---

Johdanto

$\chi^2$ -jakauma

>> **F-jakauma**

**t-jakauma**

## F-jakauma

### F-jakauman määritelmä 1/2

---

- Olkoot  $Y_i, i = 1, 2, \dots, m$  ja  $X_i, i = 1, 2, \dots, n$  riippumattomia, standardoitua normaalijakaumaa  $N(0,1)$  (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) noudattavia satunnaismuuttujia.

- Tällöin

$$Y_i \sim N(0,1), i = 1, 2, \dots, m, X_i \sim N(0,1), i = 1, 2, \dots, n$$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_m, X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

ja edelleen

$$Y = \sum_{i=1}^m Y_i^2 \sim \chi^2(m), X = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

$$Y \perp X$$

## F-jakauma

### F-jakauman määritelmä 2/2

---

- Olkoon

$$F = \frac{\frac{1}{m} Y}{\frac{1}{n} X} = \frac{n}{m} \cdot \frac{Y}{X}$$

jossa

$$Y \sim \chi^2(m), X \sim \chi^2(n), Y \perp X$$

- Tällöin satunnaismuuttuja  $F$  noudattaa (**Fisherin**)  **$F$ -jakaumaa  $m$ :llä ja  $n$ :llä vapausasteella.**
- Merkintä:

$$F \sim F(m, n)$$

## ***F*-jakauma**

# ***F*-jakauman vapausasteet**

---

- *F*-jakauman vapausasteiden lukumääristä *ensimmäinen* ( $m$ ) viittaa *yhteenlaskettavien lukumäärään* *F*-jakauman määrittelevän lausekkeen *osoittajassa*.
- *F*-jakauman vapausasteiden lukumääristä *toinen* ( $n$ ) viittaa *yhteenlaskettavien lukumäärään* *F*-jakauman määrittelevän lausekkeen *nimittäjässä*.
- Vapausasteiden lukumäärät  $m$  ja  $n$  ovat *F*-jakauman muodon määrääviä *parametreja*.

## F-jakauma

# Odotusarvo, varianssi ja standardipoikkeama

---

- Olkoon  $F \sim F(m, n)$ .
- **Odotusarvo:**

$$E(F) = \frac{n}{n-2}, n > 2$$

- **Varianssi ja standardipoikkeama:**

$$\text{Var}(F) = D^2(F) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, n > 4$$

$$D(F) = \sqrt{\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}}, n > 4$$

**F-jakauma**

## **F-jakauman ominaisuuksia**

---

- Olkoon

$$F \sim F(m, n).$$

- Tällöin myös  $1/F$  on  $F$ -jakautunut, mutta vapausastein  $n$  ja  $m$ :

$$\frac{1}{F} \sim F(n, m)$$

# F-jakauma

## Tiheysfunktion kuvaaja

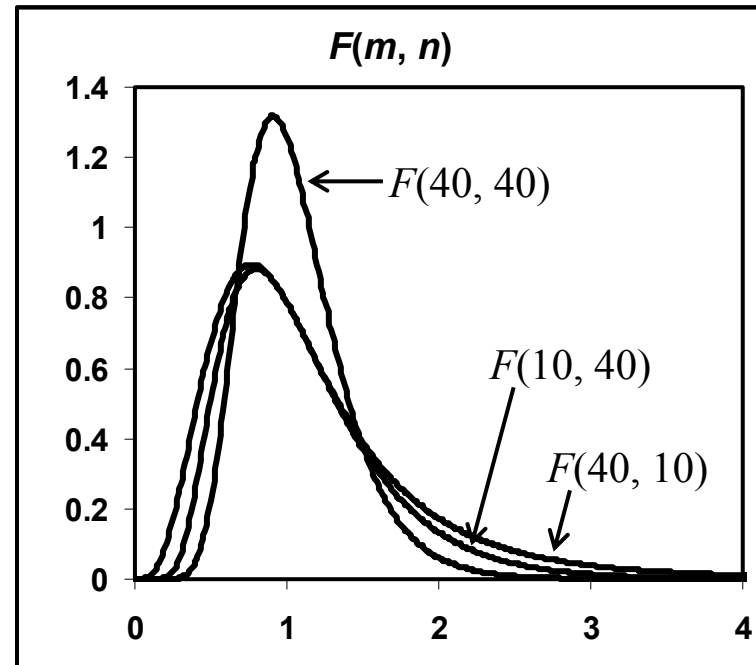
- Kuva oikealla esittää  $F$ -jakauman

$$F(m, n)$$

tiheysfunktiota välillä  $[0, 4]$ , kun vapausasteiden lukumäärillä  $m$  ja  $n$  on seuraavat arvot:

- (i)  $m = 10, n = 40$
  - (ii)  $m = 40, n = 10$
  - (iii)  $m = 40, n = 40$
- Jakauman *odotusarvo*:

$$E(F) = \frac{n}{n-2}, n > 2$$



## **F-jakauma**

# **Tiheysfunktion ja sen kuvaajan ominaisuuksia**

---

- *F*-jakauman tiheysfunktio  $f(x)$  on *positiivinen* kaikille positiivisille argumentin arvoille:

$$f(x) > 0, x > 0$$

- Jos *osoittajan* vapausasteiden lukumäärä

$$m = 1, 2$$

niin tiheysfunktio on *monotonisesti laskeva* kaikille  $x \geq 0$ .

- Jos *osoittajan* vapausasteiden lukumäärä

$$m \geq 3$$

niin tiheysfunktio on *yksihuippuinen* ja sillä on *maksimi* jossakin pisteessä  $x > 0$ .



## *F*-jakauma

# Todennäköisyyksien määrittäminen *F*-jakaumasta 1/2

---

- Todennäköisyydet voidaan määrätä *F*-jakaumasta jakauman *kertymäfunktion* avulla.
- Olkoon  $F \sim F(m, n)$ .
- Olkoon satunnaismuuttujan  $F$  *kertymäfunktio*

$$F_F(x ; m, n) = \Pr(F \leq x)$$

- Huomautus 1:

Merkinällä  $F_F(x ; m, n)$  on haluttu korostaa *F*-jakauman riippuvuutta sen vapausasteiden lukumääristä  $m$  ja  $n$ .

- Huomautus 2:

Koska *F*-jakauman tiheysfunktion integraalifunktiota ei osata esittää suljetussa muodossa, jakauman kertymäfunktion arvojen määrittämisessä on käytettävä jotakin *numeerista menetelmää*.

## *F*-jakauma

# Todennäköisyyksien määrittäminen

## *F*-jakaumasta 2/2

---

- *Kaikkien F*-jakaumaan liittyvien tapahtumien todennäköisyydet saadaan todennäköisyyksistä

$$\Pr(F \leq x) = F_F(x ; m, n)$$

*todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen avulla.*

- Esimerkiksi

$$\Pr(a \leq F \leq b) = F_F(b) - F_F(a)$$

## *F*-jakauma

# Todennäköisyyksien määrittäminen *F*-jakaumasta: Taulukot 1/4

---

- *F*-jakauman taulukot sisältävät tavallisesti argumentin  $x$  arvoja taulukoituina useille vapausasteiden lukumäärille  $m$  ja  $n$ , mutta vain muutamille kertymäfunktion  $F_F$  arvoille.
- Siten taulukot mahdollistavat seuraavan tehtävän ratkaisemisen (taulukko-kohtaisin rajoituksin):

Määrää  $x$ , kun todennäköisyys

$$\Pr(F \leq x) = F_F(x ; m, n)$$

on annettu.

## *F*-jakauma

# Todennäköisyyksien määrittäminen *F*-jakaumasta: Taulukot 2/4

---

- Koska *F*-jakaumaa käytetään tavallisesti *väliestimöinnin* tai *testauksen* yhteydessä, *F*-jakauman taulukoihin on yleensä taulukoitu sellaisia argumentin  $x$  arvoja, jotka vastaavat todennäköisyyden

$$\Pr(F \leq x) = F_F(x ; m, n)$$

*komplementtitodennäköisyyttä*

$$p = \Pr(F \geq x) = 1 - F_F(x ; m, n).$$

## *F*-jakauma

# Todennäköisyyksien määrittäminen *F*-jakaumasta: Taulukot 3/4

---

- Monet *F*-jakauman taulukot sisältävät todennäköisyyksiä

$$p = \Pr(F \geq x) = 1 - F_F(x; m, n)$$

vastaavia argumentin arvoja vain, kun  $p$  on “*pieni*”.

- “*Suuriin*”  $p$ :n arvoihin liittyvät argumentin  $x$  arvot saadaan tällöin käyttämällä hyväksi sitä, että  $1/F \sim F(n, m)$ .

- Olkoon

$$F_{m,n} \sim F(m, n) \text{ ja } p = \Pr(F_{m,n} \leq a)$$

$$F_{n,m} \sim F(n, m) \text{ ja } p = \Pr(F_{n,m} \geq b)$$

- Tällöin

$$a = \frac{1}{b}$$

## F-jakauma

# Todennäköisyyksien määrittäminen F-jakaumasta: Taulukot 4/4

---

- Oletukset:

$$F_{m,n} \sim F(m, n)$$

$$F_{n,m} \sim F(n, m)$$

$$p = \Pr(F_{m,n} \leq a)$$

$$= \Pr(F_{n,m} \geq b)$$

- Väite:

$$a = \frac{1}{b}$$

- Perustelu:

Todetaan ensin, että

$$p = \Pr(F_{m,n} \leq a)$$

$$= \Pr(1/F_{m,n} \geq 1/a)$$

$$= \Pr(F_{n,m} \geq 1/a)$$

Koska oletuksen mukaan

$$p = \Pr(F_{n,m} \geq b)$$

niin

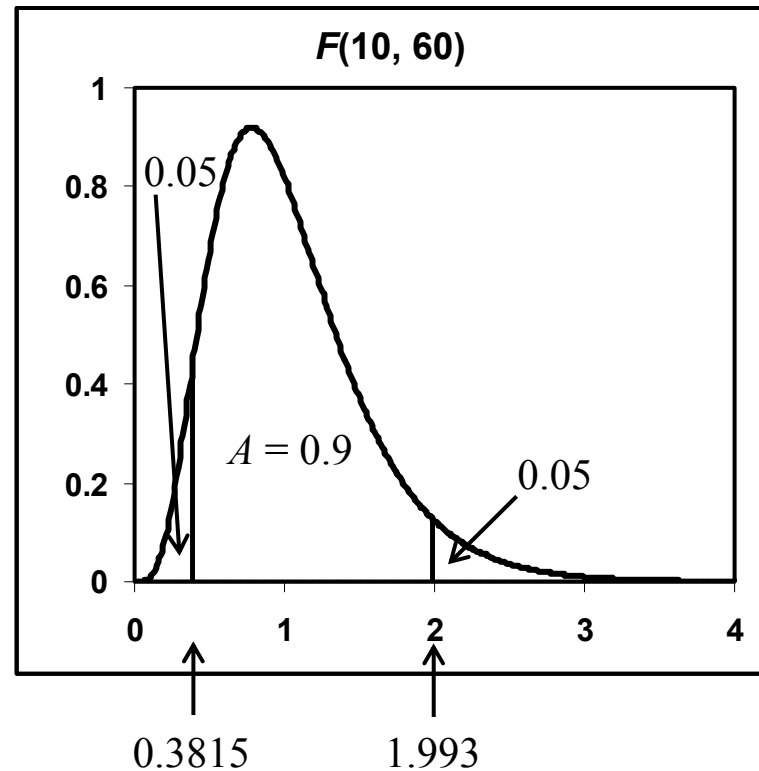
$$b = 1/a$$

## *F*-jakauma

# Todennäköisyyksien määrittäminen *F*-jakaumasta: Esimerkki

- Kuva oikealla esittää *F*-jakauman  $F(10, 60)$  tiheysfunktiota välillä  $[0, 4]$ .
- *F*-jakauman taulukoista saadaan:

$$\begin{aligned} & \text{Alueen } A \text{ pinta-ala} \\ &= \Pr(0.3815 \leq F \leq 1.993) \\ &= F_F(1.993; 10, 60) \\ &\quad - F_F(0.3815; 10, 60) \\ &= 0.95 - 0.05 \\ &= 0.9 \end{aligned}$$



## *F*-jakauma

# Todennäköisyyksien määrittäminen *F*-jakaumasta: Ohjelmat

---

- Olkoon  $F \sim F(m, n)$ .
- Useat *tietokoneohjelmat* mahdollistavat seuraavien tehtävien ratkaisemisen ilman *F*-jakauman taulukoiden asettamia rajoituksia:

(i) Määrittää todennäköisyys

$$\Pr(F \leq x) = F_F(x ; m, n)$$

kun  $x$  on annettu.

(ii) Määrittää  $x$ , kun todennäköisyys

$$\Pr(F \leq x) = F_F(x ; m, n)$$

on annettu.



# Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia

---

Johdanto

$\chi^2$ -jakauma

$F$ -jakauma

>>  $t$ -jakauma

## t-jakauma

### t-jakauman määritelmä 1/2

---

- Olkoot  $Y$  ja  $X_i, i = 1, 2, \dots, n$  riippumattomia, standardoitua normaalijakaumaa  $N(0,1)$  (ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) noudattavia satunnaismuuttujia.

- Tällöin

$$Y \sim N(0,1), X_i \sim N(0,1), i = 1, 2, \dots, n$$

$$Y, X_1, X_2, \dots, X_n \perp$$

ja edelleen

$$X = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

$$Y \perp X$$

**t-jakauma**

## **t-jakauman määritelmä 2/2**

---

- Olkoon

$$t = \frac{Y}{\sqrt{\frac{1}{n} X}}$$

jossa

$$Y \sim N(0,1), X \sim \chi^2(n), Y \perp X$$

- Tällöin satunnaismuuttuja  $t$  noudattaa **Studentin  $t$ -jakaumaa  $n$ :llä vapausasteella.**
- Merkintä:

$$t \sim t(n)$$

***t*-jakauma**

## ***t*-jakauman vapausasteet**

---

- *t*-jakauman vapausasteiden lukumäärä  $n$  viittaa yhteenlaskettavien lukumäärään *t*-jakauman määrittelevän lausekkeen nimittäjässä.
- Vapausasteiden lukumäärä  $n$  on *t*-jakauman muodon määräävä *parametri*.

*t*-jakauma

## Odotusarvo, varianssi ja standardipoikkeama

---

- Olkoon  $t \sim t(n)$ .

- **Odotusarvo:**

$$E(t) = 0, n > 1$$

- **Varianssi ja standardipoikkeama:**

$$\text{Var}(t) = D^2(t) = \frac{n}{n-2}, n > 2$$

$$D(t) = \sqrt{\frac{n}{n-2}}, n > 2$$

# **t-jakauma**

## **Tiheysfunktion kuvaaja**

- Kuva oikealla esittää  $t$ -jakauman

$$t(n)$$

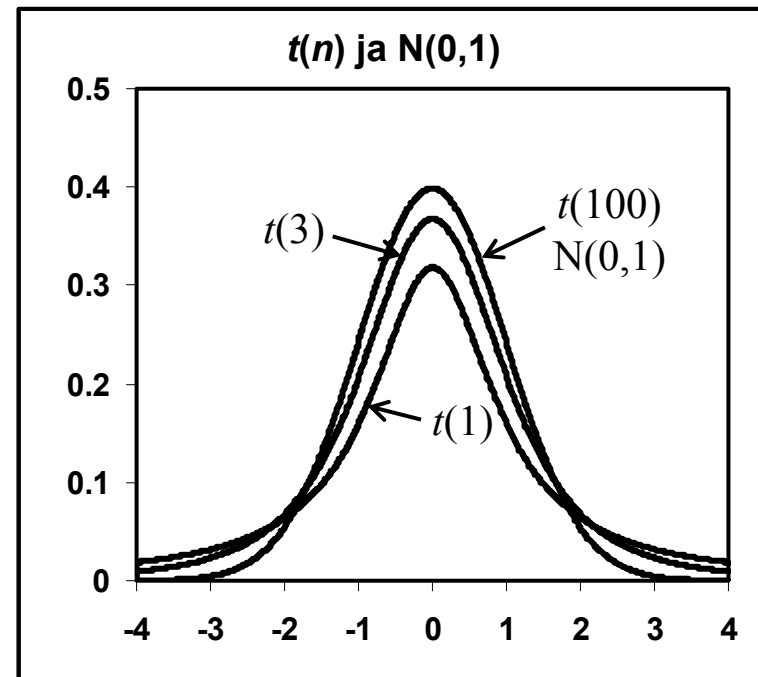
tiheysfunktiota välillä  $[-4, +4]$ ,  
kun vapausasteiden lukumäärällä  
 $n$  on seuraavat arvot:

- (i)  $n = 1$
- (ii)  $n = 3$
- (iii)  $n = 100$

- Jakauman *odotusarvo*:

$$E(t) = 0, n > 1$$

- Kuvaan on piirretty myös standardoidun normaalijakauman  $N(0,1)$  tiheysfunktion kuvaaja.



**t-jakauma**

## **Tiheysfunktion ja sen kuvaajan ominaisuuksia 1/2**

---

- *t*-jakauman tiheysfunktio  $f(x)$  on kaikkialla *positiivinen*:

$$f(x) > 0 \text{ kaikille } x$$

- Tiheysfunktio on *yksihuippuinen*.
- Tiheysfunktio saa *maksimiarvonsa* pisteessä 0.
- Tiheysfunktio on *symmetrinen* pisteen  $x = 0$  suhteen:

$$f(-x) = f(+x) \text{ kaikille } x$$

***t***-jakauma

## **Tiheysfunktion ja sen kuvaajan ominaisuuksia 2/2**

---

- *t*-jakauman tiheysfunktio muistuttaa standardoidun normaalijakauman  $N(0,1)$  tiheysfunktiota, mutta on sitä *paksuhäntäisempi*.
- *t*-jakauman tiheysfunktio muistuttaa standardoidun normaalijakauman  $N(0,1)$  tiheysfunktiota *sitä voimakkaammin mitä suurempi on vapausasteiden lukumäärä  $n$*  (ks. tarkemmin  $>$ ).



***t*-jakauma**

## ***t*-jakauma ja *F*-jakauma**

---

- Olkoon  $t \sim t(n)$ .

- Tällöin

$$t^2 \sim F(1, n)$$

- Olkoon  $F \sim F(1, n)$ .

- Tällöin

$$\sqrt{F} \sim t(n)$$

**t-jakauma**

## **t-jakauma ja normaalijakauma 1/2**

---

- *t*-jakauma lähestyy standardoitua normaalijakaumaa, kun *vapausasteiden* lukumäärä *n* kasvaa.
- Olkoon  $t \sim t(n)$ .
- Tällöin

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(t \leq z) = \Phi(z)$$

missä  $\Phi$  on *standardoidun normaalijakauman*  $N(0,1)$  *kertymäfunktio*.

***t*-jakauma**

## ***t*-jakauma ja normaalijakauma 2/2**

---

- Koska *t*-jakauma lähestyy vapausasteiden lukumäärän  $n$  kasvaessa standardoitua normaalijakaumaa  $N(0,1)$ , voidaan *t*-jakaumaan liittyvät todennäköisyydet määrätä suurilla vapausasteiden luvuilla standardoituneen normaalijakauman avulla.
- *Normaalijakauma-approksimaatio t-jakaumalle* on kohtuullinen jo, kun  $n = 30$ , ja riittävä useimpiin tarkoituksiin, kun  $n > 100$ .
- Esimerkki:  
Edellä esitetyssä kuvassa ei  $t(100)$ - ja  $N(0,1)$ -jakaumien tiheysfunktioiden kuvaajia pysty erottamaan toisistaan (ks. <).

*t*-jakauma

## Todennäköisyyksien määrittäminen *t*-jakaumasta 1/2

---

- Todennäköisyyksien määrittäminen *t*-jakaumasta voidaan tehdä jakauman *kertymäfunktion* avulla.
- Olkoon  $t \sim t(n)$ .
- Olkoon satunnaismuuttujan  $t$  *kertymäfunktio*

$$F_t(x ; n) = \Pr(t \leq x)$$

- Huomautus 1:

Merkinällä  $F_t(x ; n)$  on haluttu korostaa *t*-jakauman riippuvuutta sen vapausasteiden lukumäärästä  $n$ .

- Huomautus 2:

Koska *t*-jakauman tiheysfunktion integraalifunktiota ei osata esittää suljetussa muodossa, jakauman kertymäfunktion arvojen määrittämisessä on käytettävä jotakin *numeerista menetelmää*.

*t*-jakauma

## Todennäköisyyksien määrittäminen *t*-jakaumasta 2/2

---

- *Kaikkien* tapahtumien todennäköisyydet saadaan todennäköisyyksistä

$$\Pr(t \leq x) = F_t(x ; n)$$

*todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen avulla.*

- Esimerkiksi

$$\Pr(a \leq t \leq b) = F_t(b) - F_t(a)$$

*t*-jakauma

## Todennäköisyyksien määrittäminen *t*-jakaumasta: Taulukot 1/3

---

- *t*-jakauman *taulukot* sisältävät tavallisesti *argumentin*  $x$  arvoja taulukoituna *useille vapausasteiden lukumäärille*  $n$ , mutta vain *muutamalle kertymäfunktion*  $F_t$  arvolle.
- Siten taulukot mahdollistavat seuraavan tehtävän ratkaisemisen (taulukko-kohtaisin rajoituksin):

Määrää  $x$ , kun todennäköisyys

$$\Pr(t \leq x) = F_t(x ; n)$$

on annettu.

*t*-jakauma

## Todennäköisyyksien määrittäminen *t*-jakaumasta: Taulukot 2/3

---

- Koska *t*-jakaumaa käytetään tavallisesti *väliestimoinnin* tai *testauksen* yhteydessä, *t*-jakauman taulukoihin on yleensä taulukoitu sellaisia argumentin *x* arvoja, jotka vastaavat todennäköisyyden

$$\Pr(t \leq x) = F_t(x ; n)$$

*komplementtitodennäköisyyttä*

$$p = \Pr(t \geq x) = 1 - F_t(x ; n)$$

*t*-jakauma

## Todennäköisyyksien määrittäminen *t*-jakaumasta: Taulukot 3/3

---

- Monissa *t*-jakauman taulukoissa on taulukoitu todennäköisyyksiä

$$p = \Pr(t \geq x) = 1 - F_t(x; n)$$

vain, kun  $x \geq 0$ .

- Tällöin todennäköisyydet  $\Pr(t \leq -x)$  saadaan soveltamalla *t*-jakauman tiheysfunktion *symmetrisyyttä* pisteen  $x = 0$  suhteen:

$$\begin{aligned}\Pr(t \leq -x) &= 1 - \Pr(t \geq -x) \\ &= 1 - \Pr(t \leq x) \\ &= \Pr(t \geq x) \\ &= p\end{aligned}$$

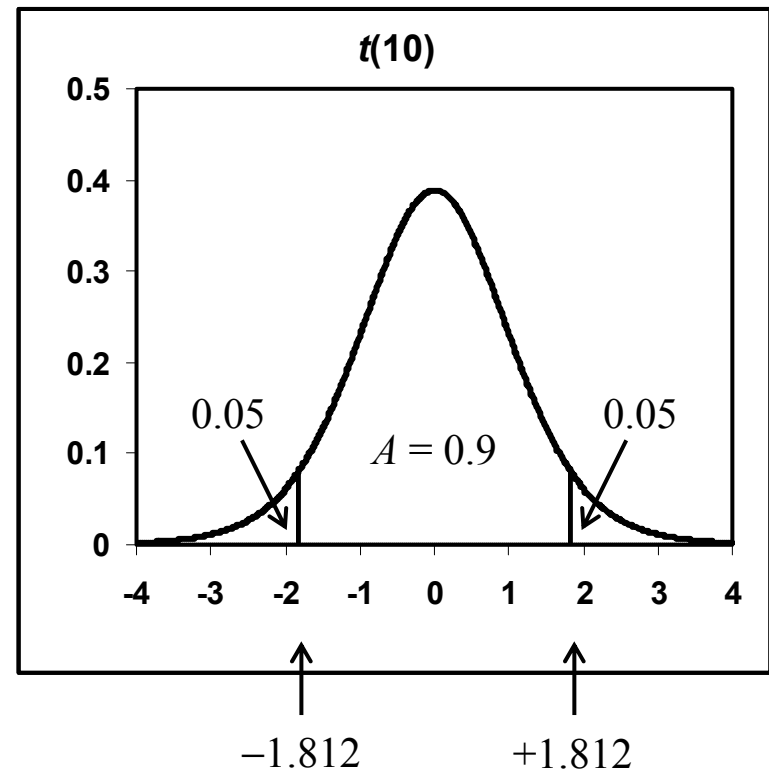


## *t*-jakauma

# Todennäköisyyksien määrittäminen *t*-jakaumasta: Esimerkki

- Kuva oikealla esittää *t*-jakauman  $t(10)$  tiheysfunktiota välillä  $[-4, +4]$ .
- t*-jakauman taulukoista saadaan:

$$\begin{aligned} & \text{Alueen } A \text{ pinta-ala} \\ &= \Pr(-1.812 \leq t \leq +1.812) \\ &= F_t(+1.812; 10) \\ & \quad - F_t(-1.812; 10) \\ &= 0.95 - 0.05 \\ &= 0.9 \end{aligned}$$



*t*-jakauma

## Todennäköisyyksien määrittäminen *t*-jakaumasta: Ohjelmat

---

- Olkoon  $t \sim t(n)$ .
- Monet *tietokoneohjelmat* mahdollistavat seuraavien tehtävien ratkaisemisen ilman *t*-jakauman taulukoiden asettamia rajoituksia:

(i) Määrittää todennäköisyys

$$\Pr(t \leq x) = F_t(x ; n)$$

kun  $x$  on annettu.

(ii) Määrittää  $x$ , kun todennäköisyys

$$\Pr(t \leq x) = F_t(x ; n)$$

on annettu.