

---

**Ilkka Mellin**

**Todennäköisyyslaskenta**

**Osa 3: Todennäköisyysjakaumia**

**Moniulotteisia todennäköisyysjakaumia**

# Moniulotteisia todennäköisyysjakaumia

---

- >> **Multinomijakauma**
  - Kaksiulotteinen normaalijakauma**

## Multinomijakauman tausta 1/3

---

- *Multinomijakauma on binomijakauman (ks. lukua Diskreettejä jakaumia) yleistys useamman toisensa poissulkevan tapahtuman tilanteeseen.*

- Olkoon  $A_1, A_2, \dots, A_k$  otosavaruuden  $S$  ositus.

- Tällöin:

$$A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$$

- Olkoot tapahtumien  $A_1, A_2, \dots, A_k$  todennäköisyydet:

$$\Pr(A_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, k$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$$

## Multinomijakauman tausta 2/3

---

- Määritellään *satunnaismuuttujat*  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ :

$X_i =$  Tapahtuman  $A_i$  esiintymisten lukumäärä  
 $n$ -kertaisessa toistokokeessa

- Tällöin

$$X_i \sim \text{Bin}(n, p_i), i = 1, 2, \dots, k$$

jossa

$$p_i = \Pr(A_i), i = 1, 2, \dots, k$$

- Lisäksi

$$X_1 + X_2 + \dots + X_k = n$$

## Multinomijakauman tausta 3/3

---

- *Multinomijakaumalla* tarkoitetaan satunnaismuuttujien

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$

*yhteisjakaumaa.*

- Huomautus:

Satunnaismuuttuja  $X_i$  eivät ole riippumattomia, koska niitä sitoo toisiinsa ehto

$$X_1 + X_2 + \dots + X_k = n$$

jossa toistokokeiden lukumäärä  $n$  on *kiinteä* luku.

## Multinomijakauma

# Multinomijakauma ja sen pistetodennäköisyysfunktio

---

- Satunnaismuuttujat  $X_1, X_2, \dots, X_k$  noudattavat  $(k - 1)$ -ulotteista **multinomijakaumaa**, jos niiden yhteisjakauman **pistetodennäköisyysfunktio** on muotoa

$$\Pr(X_1 = n_1 \text{ ja } X_2 = n_2 \text{ ja } \dots \text{ ja } X_k = n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

jossa

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

- Merkintä:

$$(X_1, X_2, \dots, X_k) \sim \text{Multinom}(p_1, p_2, \dots, p_k; n)$$

## Multinomijakauma

# Multinomijakauman ominaisuuksia

---

- Jos  $k = 2$ , niin multinomijakauma yhtyy *binomijakaumaan*:

$$\Pr_{Multinom}(X_1 = n_1 \text{ ja } X_2 = n - n_1) = \Pr_{Bin}(X_1 = n_1)$$

- Multinomijakauman *yksiulotteiset reunajakaumat* ovat **binomijakaumia**.
- *Multinomitodennäköisyydet* saadaan korottamalla *multinomi*  $(p_1 + p_2 + \dots + p_k)$  potenssiin  $n$ :

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_k)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

jossa summa lasketaan yli kaikkien lukujen  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , joille pätee ehto

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

# Moniulotteisia todennäköisyysjakaumia

---

**Multinomijakauma**

**>> Kaksiulotteinen normaalijakauma**



## Kaksiulotteinen normaalijakauma

---

- *Kaksiulotteinen normaalijakauma on normaalijakauman (ks. lukua Jatkuvia jakaumia) kaksiulotteinen yleistys.*
- Huomautus:  
Normaalijakauman yleistystä *p*-ulotteiseen avaruuteen ( $p > 1$ ) kutsutaan **multinormaalijakaumaksi** tai ***p*-ulotteiseksi normaalijakaumaksi**.

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

# Kaksiulotteinen normaalijakauma ja sen tiheysfunktio 1/2

---

- Satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  noudattavat **kaksiulotteista normaalijakaumaa**, jos niiden *yhteisjakauman tiheysfunktio* on muotoa

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}Q(x, y)\right\}$$

jossa

$$Q(x, y) = \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho_{XY} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

- Merkintä:

$$(X, Y) \sim N_2(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho_{XY})$$

Kaksiulotteinen normaalijakauma

## Kaksiulotteinen normaalijakauma ja sen tiheysfunktio 2/2

---

- Kaksiulotteisen normaalijakauman

$$N_2(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho_{XY})$$

*parametrien* on toteuttava seuraavat ehdot:

$$-\infty < \mu_X < +\infty \quad \sigma_X > 0$$

$$-\infty < \mu_Y < +\infty \quad \sigma_Y > 0$$

$$-1 < \rho_{XY} < +1$$

## Kaksiulotteinen normaalijakauman parametrit

---

- Olkoon

$$(X, Y) \sim N_2(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho_{XY})$$

- Kaksiulotteisen normaalijakauman **parametreina**, jotka täysin määräävät jakauman, ovat satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  **odotusarvot** ja **varianssit** sekä niiden **korrelaatio**:

$$E(X) = \mu_X \quad \text{Var}(X) = \sigma_X^2$$

$$E(Y) = \mu_Y \quad \text{Var}(Y) = \sigma_Y^2$$

$$\text{Cor}(X, Y) = \rho_{XY}$$

- Lisäksi

$$\text{Cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y$$

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

# Tiheysfunktion ominaisuudet

---

- Kaksiulotteisen normaalijakauman tiheysfunktio määrittelee *pinnan*

$$z = f_{XY}(x, y)$$

kolmiulotteisessa avaruudessa.

- Pinnalla on *maksimi* satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  odotusarvojen  $\mu_X$  ja  $\mu_Y$  määräämässä jakauman todennäköisyysmassan *painopisteessä*  $(\mu_X, \mu_Y)$ .
- Pinnan *muodon* määräävät **tasa-arvoellipsit**

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \left( \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 + \left( \frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 - 2\rho_{XY} \left( \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right) \left( \frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right) \\ &= c \text{ (vakio)} \end{aligned}$$

## Tasa-arvoellipsien ominaisuudet 1/3

---

- Kaksiulotteisen normaalijakauman tiheysfunktion muodostaman pinnan muodon määräävillä *tasa-arvoellipseilla* on seuraavat *ominaisuudet*:
  - (i) Ellipsien *keskipisteenä* on jakauman todennäköisyysmassan *painopiste*  
 $(\mu_X, \mu_Y)$
  - (ii) Ellipsien *eksentrisyys* on sekä korrelaatiokertoimen  $\rho_{XY}$  että standardipoikkeamien  $\sigma_X$  ja  $\sigma_Y$  funktio.
  - (iii) Ellipsi on *sitä eksentrisempi mitä voimakkaammin satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  ovat korreloituneita* eli mitä suurempi on  
 $|\rho_{XY}|$

## Tasa-arvoellipsien ominaisuudet 2/3

---

(iv) Jos

$$\rho_{XY} = 0$$

ellipsien *pääakselit* ovat koordinaattiakselien suuntaiset.

(v) Jos

$$\rho_{XY} = 0$$

ja lisäksi

$$\sigma_X = \sigma_Y$$

niin ellipsit ovat *ympyröitä*.

(vi) Jos

$$\rho_{XY} = \pm 1$$

niin ellipsit surkastuvat *janoiksi*.

## Tasa-arvoellipsien ominaisuudet 3/3

---

- *Tasa-arvoellipsien pääakselit* ovat satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  kovarianssimatriisin

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$$

**ominaisvektoreiden** suuntaiset ja niiden pituudet suhtautuvat toisiinsa kuten matriisin  $\Sigma$  **ominaisarvojen** *neliöjuuret*.



## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Esimerkki:

### Jakauman määrittely

---

- Olkoon

$$(X, Y) \sim N_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

- Jakauman *parametrit* ovat

$$E(X) = \mu_X = 4 \quad \text{Var}(X) = \sigma_X^2 = 2$$

$$E(Y) = \mu_Y = 3 \quad \text{Var}(Y) = \sigma_Y^2 = 1$$

$$\text{Cor}(X, Y) = \rho_{XY} = 0.7$$

- Siten

$$\text{Cov}(X, Y) = \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y = 0.7 \times \sqrt{2} \times 1 = 0.9899$$

# Kaksiulotteinen normaalijakauma

## Esimerkki:

### Tiheysfunktion kuvaaja

---

- Olkoon

$$(X, Y) \sim N_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

jolloin

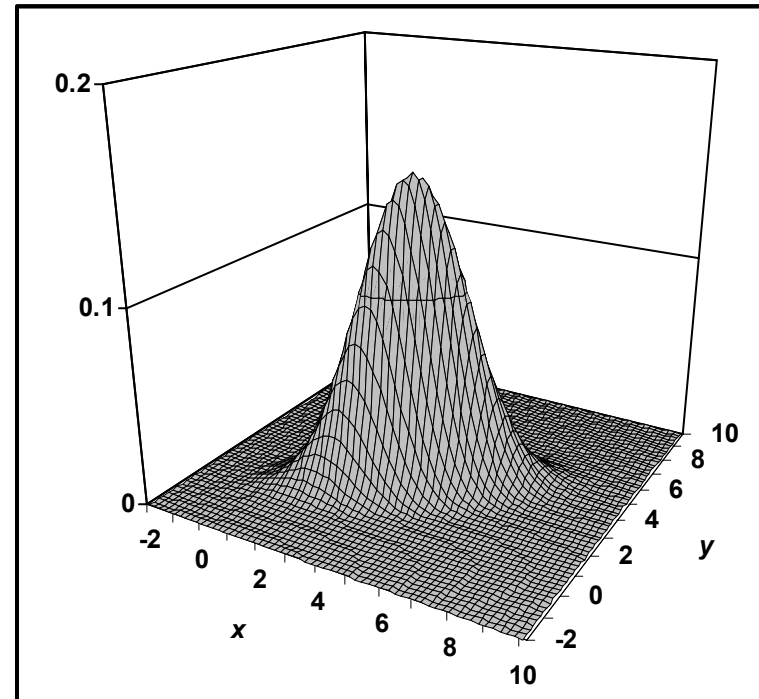
$$\mu_X = 4 \quad \sigma_X^2 = 2$$

$$\mu_Y = 3 \quad \sigma_Y^2 = 1$$

$$\rho_{XY} = 0.7$$

- Kuva oikealla esittää jakauman *tiheysfunktiota*

$$f_{XY}(x, y)$$



## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Esimerkki:

## Tasa-arvoellipsien yhtälöt

---

- Olkoon

$$(X, Y) \sim N_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

- Jakauman todennäköisyysmassan *painopisteenä* on piste

$$(\mu_X, \mu_Y) = (4, 3)$$

- Jakauman tiheysfunktion muodostaman pinnan muodon määräävät *tasa-arvoellipsit*

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \left( \frac{x-4}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{y-3}{1} \right)^2 - 2 \times 0.7 \left( \frac{x-4}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{y-3}{1} \right) \\ &= c \text{ (vakio)} \end{aligned}$$

- Ellipsien *keskipisteenä* on jakauman todennäköisyysmassan *painopiste*

$$(\mu_X, \mu_Y) = (4, 3)$$

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Esimerkki:

### Kovarianssimatriisi

---

- Olkoon

$$(X, Y) \sim N_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

- Tällöin satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  kovarianssimatriisi on

$$\begin{aligned}\Sigma &= \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y \\ \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0.7 \times \sqrt{2} \times 1 \\ 0.7 \times \sqrt{2} \times 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0.9899 \\ 0.9899 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Kaksiulotteinen normaalijakauma

**Esimerkki:**

## **Kovarianssimatriisin pääakselihajotelma 1/6**

---

- Olkoon

$$\Sigma = \mathbf{U}\mathbf{L}\mathbf{U}'$$

kovarianssimatriisin  $\Sigma$  *pääakselihajotelma*, jossa  $\mathbf{L}$  on matriisin  $\Sigma$  *ominaisarvojen* muodostama *diagonaalimatriisi* ja  $\mathbf{U}$  on vastaavien *ominaisvektoreiden* muodostama *ortogonaalinen matriisi*, jossa ominaisvektorit ovat sarakkeina.

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Esimerkki:

## Kovarianssimatriisin pääakselihajotelma 2/6

---

- Olkoot

$$\lambda_1 \geq \lambda_2$$

matriisin  $\Sigma$  ominaisarvot ja

$$\mathbf{u}_1 = (u_{11}, u_{21})$$

$$\mathbf{u}_2 = (u_{21}, u_{22})$$

niitä vastaavat ominaisvektorit.

- Tällöin

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

ja

$$\mathbf{U}'\Sigma\mathbf{U} = \mathbf{L}$$

$$\mathbf{U}'\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}' = \mathbf{I}$$

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Esimerkki:

## Kovarianssimatriisin pääakselihajotelma 3/6

---

- Olkoon  $\lambda$  kovarianssimatriisin  $\Sigma$  ominaisarvo.
- Tällöin  $\lambda$  toteuttaa yhtälön

$$\begin{aligned}\det(\Sigma - \lambda \mathbf{I}_2) &= \det \begin{bmatrix} \sigma_X^2 - \lambda & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 - (\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)\lambda + \sigma_X^2\sigma_Y^2 - \sigma_{XY}^2 = 0\end{aligned}$$

- Tämän 2. asteen yhtälön ratkaisut saadaan kaavasta

$$\lambda = \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \pm \sqrt{(\sigma_X^2 - \sigma_Y^2)^2 + 4\sigma_{XY}^2}}{2}$$

- Ratkaisuiksi saadaan

$$\lambda_1 = 2.6091$$

$$\lambda_2 = 0.3909$$

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Esimerkki:

## Kovarianssimatriisin pääakselihajotelma 4/6

---

- Olkoon  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  kovarianssimatriisin  $\Sigma$  ominaisarvoa  $\lambda$  vastaava ominaisvektori.
- Tällöin  $\mathbf{u}$  toteuttaa *matriisiyhtälön*

$$\Sigma \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

- Koska vaadimme, että

$$\mathbf{u}'\mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 = 1$$

niin vektori  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  saadaan ratkaistuksi yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} (\sigma_X^2 - \lambda)u_1 + \sigma_{XY}u_2 = 0 \\ \sigma_{XY}u_1 + (\sigma_Y^2 - \lambda)u_2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 = 1 \end{cases}$$



Kaksiulotteinen normaalijakauma

**Esimerkki:**

## **Kovarianssimatriisin pääakselihajotelma 5/6**

---

- Ominaisarvoa

$$\lambda_1 = 2.6091$$

vastaavaksi ominaisvektoriksi saadaan

$$\mathbf{u}_1 = (u_{11}, u_{21}) = (0.8517, 0.5240)$$

- Ominaisarvoa

$$\lambda_2 = 0.3909$$

vastaavaksi ominaisvektoriksi saadaan

$$\mathbf{u}_2 = (u_{21}, u_{22}) = (-0.5240, 0.8517)$$

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Esimerkki:

## Kovarianssimatriisin pääakselihajotelma 6/6

---

- Kovarianssimatriisin

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0.7\sqrt{2} \\ 0.7\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0.9899 \\ 0.9899 & 1 \end{bmatrix}$$

pääakselihajotelmaksi

$$\Sigma = \mathbf{U}\mathbf{L}\mathbf{U}'$$

saadaan siis

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6091 & 0 \\ 0 & 0.3909 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8517 & -0.5240 \\ 0.5240 & 0.8517 \end{bmatrix}$$

jossa  $\mathbf{L}$  on matriisin  $\Sigma$  ominaisarvojen muodostama *diagonaalimatriisi* ja  $\mathbf{U}$  on vastaavien *ominaisvektoreiden* muodostama *ortogonaalinen matriisi*, jossa ominaisvektorit ovat sarakkeina.

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Esimerkki:

## Tasa-arvoellipsit ja niiden pääakselit 1/4

---

- Olkoon

$$(X, Y) \sim N_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

- Jakauman tiheysfunktion muodostaman pinnan muodon määrävien tasa-arvoellipsien *pääakselit leikkaavat* jakauman todennäköisyysmassan *painopisteessä*

$$(\mu_X, \mu_Y) = (4, 3)$$

- Tasa-arvoellipsien *pääakseleiden pituudet* suhtautuvat toisiinsa kuten kovarianssimatriisin  $\Sigma$  ominaisarvojen

$$\lambda_1 = 2.6091$$

$$\lambda_2 = 0.3909$$

neliöjuuret ja vastaavat ominaisvektorit määrävät *pääakseleiden suunnat*.

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Esimerkki:

## Tasa-arvoellipsit ja niiden pääakselit 2/4

---

- Tasa-arvoellipsien *pääakseleiden suuntaisten suorien yhtälöt* ovat

$$y = a_1 + b_1x$$

$$y = a_2 + b_2x$$

jossa

$$b_1 = \frac{u_{21}}{u_{11}} = \frac{0.5240}{0.8517} = 0.6152$$

$$a_1 = \mu_Y - b_1\mu_X = 3 - b_1 \times 4 = 0.5390$$

ovat suurempaa ominaisarvoa 2.6091 vastaavan, pitempään pääakseliin liittyvän suoran kertoimet ja

$$b_2 = \frac{u_{22}}{u_{12}} = -\frac{0.8517}{0.5240} = -1.6254$$

$$a_2 = \mu_Y - b_2\mu_X = 3 - b_2 \times 4 = 9.5015$$

ovat pienempää ominaisarvoa 0.3909 vastaavan, lyhyempään pääakseliin liittyvän suoran kertoimet.

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Esimerkki:

## Tasa-arvoellipsit ja niiden pääakselit 3/4

- Olkoon

$$(X, Y) \sim N_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

jolloin

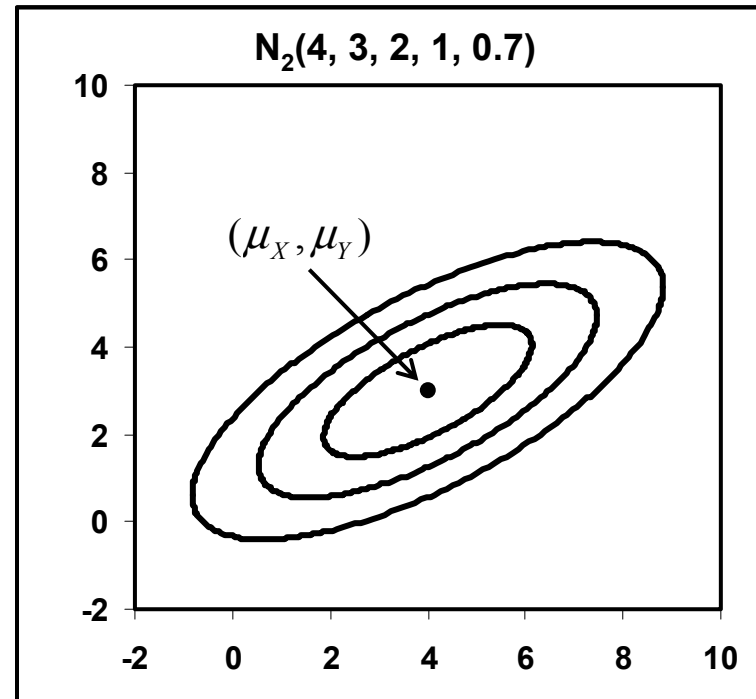
$$\mu_X = 4 \quad \sigma_X^2 = 2$$

$$\mu_Y = 3 \quad \sigma_Y^2 = 1$$

$$\rho_{XY} = 0.7$$

- Kuva oikealla esittää jakauman tiheysfunktion kuvaajan *tasa-arvoellipsejä*, jotka vastaavat (likimäärin) *todennäköisyyksiä* 68 %, 95 % ja 99.7 %.

Esimerkiksi *uloimman* ellipsin sisään jää n. 99.7 % jakauman todennäköisyysmassasta.



## Kaksiulotteinen normaalijakauma

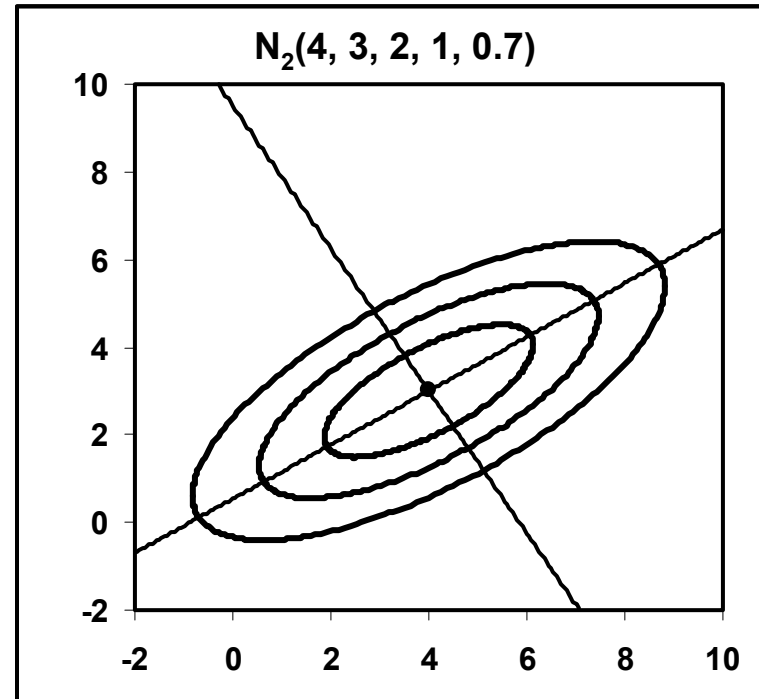
### Esimerkki:

## Tasa-arvoellipsit ja niiden pääakselit 4/4

- Olkoon
$$(X, Y) \sim N_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$
- Kuva oikealla esittää jakauman tiheysfunktion kuvaajan *tasa-arvoellipsejä*, jotka vastaavat (likimäärin) *todennäköisyyksiä* 68 %, 95 % ja 99.7 %.
- Kuvaan on lisäksi piirretty tasa-arvoellipsien *pääakselien suuntaiset suorat*

$$y = 0.5390 + 0.6152 \times x$$

$$y = 9.5015 - 1.6254 \times x$$



## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Reunajakaumat

---

- Voidaan osoittaa, että kaksiulotteisen normaalijakauman **reunajakaumat** ovat *normaalisia*:

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

ja niiden *tiheysfunktiot* ovat

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right\}$$

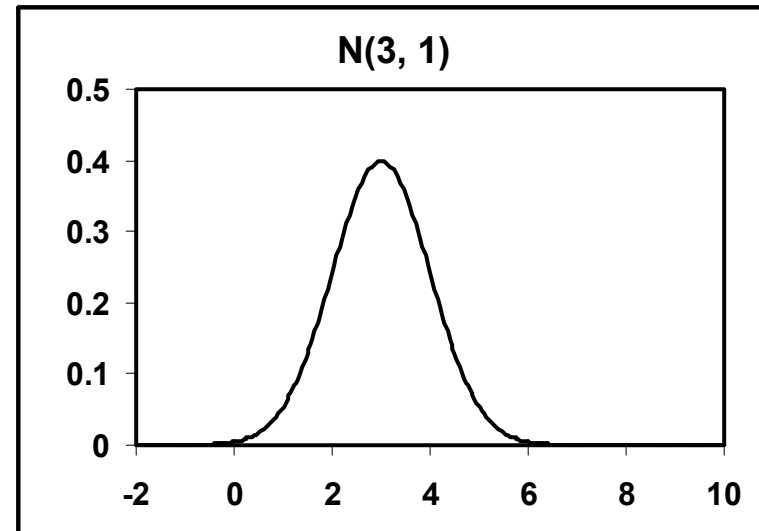
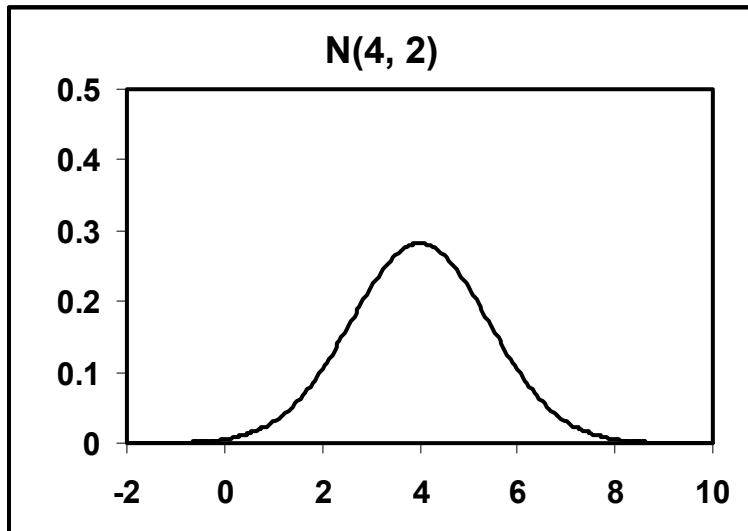
$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right\}$$

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Esimerkki:

### Reunajakaumat

---



- Olkoon

$$(X, Y) \sim N_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

- Kuvat yllä esittävät satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  reunajakaumia:

$$X \sim N(4, 2)$$

$$Y \sim N(3, 1)$$



## Korreloimattomuus vs riippumattomuus

---

- **Kaksiulotteisen normaalijakauman tapauksessa satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  korreloimattomuus on yhtäpitävää niiden riippumattomuuden kanssa.**
- Huomautuksia:
  - Satunnaismuuttujien riippumattomuudesta *seuraa aina* niiden korreloimattomuus.
  - Satunnaismuuttujien korreloimattomuudesta *ei yleisesti seuraa* niiden riippumattomuus.

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

# Korreloimattomuus vs riippumattomuus: Perustelu 1/3

---

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  noudattavat *kaksiulotteista normaalijakaumaa*:

$$(X, Y) \sim N_2(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho_{XY})$$

- Jos satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  ovat *riippumattomia*, niin ne ovat myös korreloimattomia, koska satunnaismuuttujien riippumattomuudesta *seuraa aina* niiden korreloimattomuus; ks. lukua **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja jakaumat**.
- Oletetaan nyt, että satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  *korreloimattomia* eli

$$\rho_{XY} = 0$$

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

# Korreloimattomuus vs riippumattomuus: Perustelu 2/3

---

- Kaksiulotteisen normaalijakauman *tiheysfunktio* on

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)} Q(x, y)\right\}$$
$$Q(x, y) = \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho_{XY} \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right) \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

- Jos  $\rho_{XY} = 0$ , niin

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right\}$$
$$= f_X(x) f_Y(y)$$

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

# Korreloimattomuus vs riippumattomuus: Perustelu 3/3

---

- Jos siis  $\rho_{XY} = 0$ , niin

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

jossa  $f_X(x)$  ja  $f_Y(y)$  ovat satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  reunajakaumien tiheysfunktiot.

- Koska oletuksesta  $\rho_{XY} = 0$  seuraa, että kaksiulotteisen normaalijakauman tiheysfunktio voidaan esittää reunajakaumiensa tiheysfunktioiden tulona, niin satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  ovat tällöin *riippumattomia*; ks. lukua **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja jakaumat**.

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

# Ehdolliset jakaumat 1/2

---

- Kaksiulotteisen normaalijakauman **ehdolliset jakaumat** ovat *normaalisia*:

$$(X|Y = y) \sim N(\mu_{X|Y}, \sigma_{X|Y}^2)$$

jossa

$$\mu_{X|Y} = E(X|Y = y) = \mu_X + \rho_{XY} \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (y - \mu_Y)$$

$$\sigma_{X|Y}^2 = \text{Var}(X|Y = y) = (1 - \rho_{XY}^2) \sigma_X^2$$

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

# Ehdolliset jakaumat 2/2

---

- Kaksiulotteisen normaalijakauman **ehdolliset jakaumat** ovat *normaalisia*:

$$(Y|X = x) \sim N(\mu_{Y|X}, \sigma_{Y|X}^2)$$

jossa

$$\mu_{Y|X} = E(Y|X = x) = \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$$

$$\sigma_{Y|X}^2 = \text{Var}(Y|X = x) = (1 - \rho_{XY}^2) \sigma_Y^2$$

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Ehdolliset jakaumat:

### Perustelu 1/4

---

- Esitetään perustelu *kaksiulotteisen normaalijakauman ehdollisten jakaumien normaalisuudelle* tarkastelemalla satunnaismuuttujan  $Y$  *ehdollista jakaumaa* satunnaismuuttujan  $X$  suhteen (ehdolla  $X = x$ ).

- Olkoon

$f_{XY}(x, y)$  = satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  yhteisjakauman tiheysfunktio

$f_{Y|X}(y | x)$  = satunnaismuuttujan  $Y$  ehdollisen jakauman tiheysfunktio satunnaismuuttujan  $X$  suhteen

$f_X(x)$  = satunnaismuuttujan  $X$  reunajakauman tiheysfunktio

- Ehdollisen jakauman tiheysfunktion määritelmän mukaan

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}$$

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Ehdolliset jakaumat:

### Perustelu 2/4

---

- Kaksiulotteisen normaalijakauman *tiheysfunktio*  $f_{XY}(x, y)$ :

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}Q(x, y)\right\}$$
$$Q(x, y) = \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

- Satunnaismuuttujan  $X$  reunajakauman *tiheysfunktio*  $f_X(x)$ :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right\}$$



## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Ehdolliset jakaumat:

### Perustelu 3/4

---

- Nähdään (melko) helposti, että

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2)} Q(y|x)\right\}$$
$$Q(y|x) = \left[ y - \mu_y - \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X) \right]^2$$

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Ehdolliset jakaumat:

### Perustelu 4/4

---

- Siten satunnaismuuttujan  $Y$  ehdollinen jakauma satunnaismuuttujan  $X$  suhteen (ehdolla  $X = x$ ) on *normaalinen*:

$$(Y|X = x) \sim \mathbf{N}(\mu_{Y|X}, \sigma_{Y|X}^2)$$

jossa

$$\mu_{Y|X} = \mathbf{E}(Y|X = x) = \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$$

$$\sigma_{Y|X}^2 = \mathbf{Var}(Y|X = x) = (1 - \rho_{XY}^2) \sigma_Y^2$$

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Ehdolliset odotusarvot

---

- Satunnaismuuttujan  $X$  **ehdollinen odotusarvo** eli **regressiofunktio** satunnaismuuttujan  $Y$  suhteen

$$E(X|Y = y) = \mu_X + \rho_{XY} \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (y - \mu_Y)$$

on *lineaarinen* satunnaismuuttujan  $Y$  arvojen  $y$  suhteen.

- Satunnaismuuttujan  $Y$  **ehdollinen odotusarvo** eli **regressiofunktio** satunnaismuuttujan  $X$  suhteen

$$E(Y|X = x) = \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$$

on *lineaarinen* satunnaismuuttujan  $X$  arvojen  $x$  suhteen.

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

# Regressiosuorat

---

- Kaksiulotteisen multinormaalijakauman *regressiokäyrät* ovat **suoria**, joiden yhtälöt voidaan kirjoittaa satunnaismuuttujan  $X$  saamien arvojen  $x$  funktioina seuraaviin muotoihin:

- (i)  $x$ :n regressiosuora  $y$ :n suhteen:

$$y = \mu_Y + \frac{1}{\rho_{XY}} \times \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$$

- (ii)  $y$ :n regressiosuora  $x$ :n suhteen:

$$y = \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$$

## Regressiosuorien ominaisuudet 1/5

---

- Olkoon

$$y = \mu_Y + \frac{1}{\rho_{XY}} \times \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$$

$x$ :n regressiosuora  $y$ :n suhteen ja

$$y = \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$$

$y$ :n regressiosuora  $x$ :n suhteen.

## Regressiosuorien ominaisuudet 2/5

---

- Regressiosuorilla on seuraavat ominaisuudet:
  - (i) Molemmat regressiosuorat kulkevat jakauman todennäköisyysmassan painopisteen  $(\mu_X, \mu_Y)$  kautta.
  - (ii) Molempien regressiosuorien kulmakertoimilla ja satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  korrelaatiokertoimella  $\rho_{XY}$  on *aina sama merkki*:
    - Suorat ovat *nousevia*, jos  $\rho_{XY} > 0$ .
    - Suorat ovat *laskevia*, jos  $\rho_{XY} < 0$ .
  - (iii)  $x$ :n regressiosuora  $y$ :n suhteen on *aina jyrkempi* kuin  $y$ :n regressiosuora  $x$ :n suhteen, koska

$$\rho_{XY}^2 \leq 1$$

## Regressiosuorien ominaisuudet 3/5

---

- (iv)  $x$ :n regressiosuora  $y$ :n suhteen on *sitä loivempi mitä voimakkaammin satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  ovat korreloituneita* eli mitä suurempi on

$$|\rho_{XY}|$$

- (v)  $y$ :n regressiosuora  $x$ :n suhteen on *sitä jyrkempi mitä voimakkaammin satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  ovat korreloituneita* eli mitä suurempi on

$$|\rho_{XY}|$$

## Regressiosuorien ominaisuudet 4/5

---

(vii) Molemmat regressiosuorat ovat *sitä jyrkempiä mitä pienempi on satunnaismuuttujan  $X$  varianssi*

$$\sigma_X^2$$

(vi) Molemmat regressiosuorat ovat *sitä jyrkempiä mitä suurempi on satunnaismuuttujan  $Y$  varianssi*

$$\sigma_Y^2$$

(viii) Regressiosuorat *yhtyvät* täsmälleen silloin, kun

$$\rho = \pm 1$$



## Regressiosuorien ominaisuudet 5/5

---

(ix) Jos  $\rho = 0$ , niin regressiosuorat ovat *kohtisuorassa toisiaan vastaan* ja  $x$ :n regressiosuora  $y$ :n suhteen on

$$x = \mu_X$$

ja  $y$ :n regressiosuora  $x$ :n suhteen on

$$y = \mu_Y$$

jolloin  $x$ :n saamat arvot *eivät riipu*  $y$ :n saamista arvoista ja  $y$ :n saamat arvot *eivät riipu*  $x$ :n saamista arvoista.

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Esimerkki:

## Regressiosuorat 1/2

---

- Olkoon

$$(X, Y) \sim N_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

- $x$ :n regressiosuora muuttujan  $y$  suhteen on

$$\begin{aligned} y &= \mu_Y + \frac{1}{\rho_{XY}} \times \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X) \\ &= 3 + \frac{1}{0.7} \times \frac{1}{\sqrt{2}} (x - 4) = -1.0406 + 1.0101x \end{aligned}$$

- $y$ :n regressiosuora muuttujan  $x$  suhteen on

$$\begin{aligned} y &= \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X) \\ &= 3 + 0.7 \frac{1}{\sqrt{2}} (x - 4) = 1.0201 + 0.4950x \end{aligned}$$

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Esimerkki:

## Regressiosuorat 2/2

- Olkoon

$$(X, Y) \sim N_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

- Kuva oikealla esittää jakauman tiheysfunktion kuvaajan *tasa-arvoellipsejä*, jotka vastaavat (likimäärin) *todennäköisyyksiä* 68 %, 95 % ja 99.7 %.

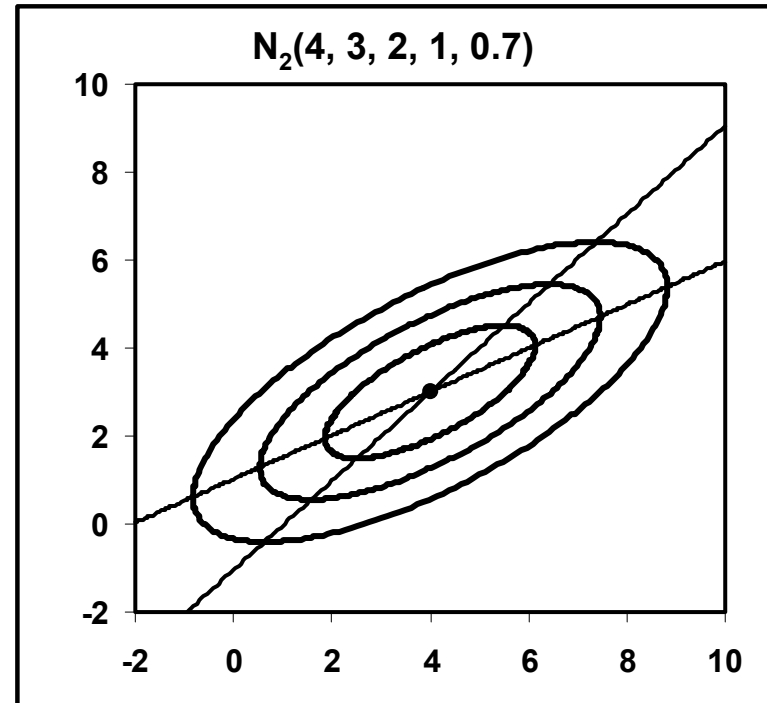
- Kuvan suorista *jyrkempi*

$$y = -1.0406 + 1.0101 \times x$$

on *x:n regressiosuora y:n suhteen*  
ja suorista *loivempi*

$$y = 1.0201 + 0.4950 \times x$$

on *y:n regressiosuora x:n suhteen*.



## Regressiosuorat ja standardointi

---

- *Regressiosuorat* voidaan kirjoittaa **standardoitujen muuttujien**

$$x' = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \qquad y' = \frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y}$$

*funktioina* seuraaviin muotoihin:

$$y' = \frac{1}{\rho_{XY}} x' \qquad x\text{:n regressiosuora } y\text{:n suhteen}$$

$$y' = \rho_{XY} x' \qquad y\text{:n regressiosuora } x\text{:n suhteen}$$

- *Standardoitujen muuttujien* välisten regressiosuorien kulmakertoimet ovat siis toistensa *käänteislukuja*.

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Ehdolliset varianssit 1/2

---

- Satunnaismuuttujan  $X$  **ehdollinen varianssi** satunnaismuuttujan  $Y$  suhteen on *korkeintaan yhtä suuri* kuin satunnaismuuttujan  $X$  varianssi:

$$0 \leq \sigma_{X|Y}^2 = (1 - \rho_{XY}^2) \sigma_X^2 \leq \sigma_X^2$$

- Jos siis  $\rho_{XY} \neq 0$ , niin satunnaismuuttujan  $X$  ehdollinen jakauma satunnaismuuttujan  $Y$  suhteen vaihtelee  $x$ :n regressiosuoran ympärillä *vähemmän* kuin satunnaismuuttuja  $X$  oman painopisteensä ympärillä.
- Lisäksi pätee, että

$$\begin{aligned} \sigma_{X|Y}^2 = 0 &\iff \rho_{XY} = \pm 1 \\ \sigma_{X|Y}^2 = \sigma_X^2 &\iff \rho_{XY} = 0 \end{aligned}$$

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Ehdolliset varianssit 2/2

---

- Satunnaismuuttujan  $Y$  **ehdollinen varianssi** satunnaismuuttujan  $X$  suhteen on *korkeintaan yhtä suuri* kuin satunnaismuuttujan  $Y$  varianssi:

$$0 \leq \sigma_{Y|X}^2 = (1 - \rho_{XY}^2) \sigma_Y^2 \leq \sigma_Y^2$$

- Jos siis  $\rho_{XY} \neq 0$ , niin satunnaismuuttujan  $Y$  ehdollinen jakauma satunnaismuuttujan  $X$  suhteen vaihtelee  $y$ :n regressiosuoran ympärillä *vähemmän* kuin satunnaismuuttuja  $Y$  oman painopisteensä ympärillä.
- Lisäksi pätee, että

$$\begin{aligned} \sigma_{Y|X}^2 = 0 & \iff \rho_{XY} = \pm 1 \\ \sigma_{Y|X}^2 = \sigma_Y^2 & \iff \rho_{XY} = 0 \end{aligned}$$

## Ehdolliset varianssit:

### Kommentti

---

- Satunnaismuuttujan  $X$  ehdollisen varianssin kaavasta

$$\sigma_{X|Y}^2 = (1 - \rho_{XY}^2) \sigma_X^2$$

ja satunnaismuuttujan  $Y$  ehdollisen varianssin kaavasta

$$\sigma_{Y|X}^2 = (1 - \rho_{XY}^2) \sigma_Y^2$$

nähdään välittömästi, että kumpikaan ehdollisista variansseista *ei riipu ehtomuuttujan arvoista*.

- Siten kaksiulotteisen normaalijakauman kummankaan ehdollisen jakauman todennäköisyysmassan vaihtelu vastaavan regressiosuoran ympärillä *ei riipu ehtomuuttujan arvoista*.

## Kaksiulotteinen normaalijakauma

### Esimerkki:

### Ehdolliset varianssit

---

- Olkoon

$$(X, Y) \sim N_2(4, 3, 2, 1, 0.7)$$

- Satunnaismuuttujan  $X$  ehdollinen varianssi satunnaismuuttujan  $Y$  suhteen on

$$0 \leq \sigma_{X|Y}^2 = (1 - \rho_{XY}^2) \sigma_X^2 = (1 - 0.7^2) \times 2 = 1.02 \leq 2 = \sigma_X^2$$

- Satunnaismuuttujan  $Y$  ehdollinen varianssi satunnaismuuttujan  $X$  suhteen on

$$0 \leq \sigma_{Y|X}^2 = (1 - \rho_{XY}^2) \sigma_Y^2 = (1 - 0.7^2) \times 1 = 0.51 \leq 1 = \sigma_Y^2$$