
Ilkka Mellin

Todennäköisyyslaskenta

Osa 1: Todennäköisyys ja sen laskusäännöt

**Klassinen todennäköisyys ja
kombinatoriikka**

Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka

- >> **Klassinen todennäköisyys**
 - Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat**
 - Permutaatiot ja variaatiot**
 - Kombinaatiot ja binomikertoimet**
 - Multinomikertoimet**

Klassinen todennäköisyys: Määritelmä

- Olkoon $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ äärellinen otosavaruus.
- Oletetaan, että

$$\Pr(s_i) = \frac{1}{n}, \text{ kaikille } i = 1, 2, \dots, n$$

- Tällöin sanomme, että *alkeistapahtumat* s_i ovat **symmetrisiä**.
- Tarkastellaan *tapahtumaa* $A \subset S$, johon kuuluu k alkeistapahtumaa, joita kutsutaan tapahtumalle A *suotuisiksi*.
- Tällöin tapahtuman A **klassinen todennäköisyys** on

$$\Pr(A) = \frac{k}{n}$$

Klassinen todennäköisyys: Kommentteja

- *Uhkapelit* muodostavat erään klassisen todennäköisyyden määritelmän tärkeimmistä sovelluskohteista.
- Useimmissa uhkapeleissä peliin liittyvät *alkeistapahtumien on oltava pelin sääntöjen mukaan symmetrisiä*.
- Pitääkö *oletus* alkeistapahtumien *symmetrisyydestä* paikkaansa myös *reaalimaailmassa*, on *empiirinen* kysymys.

Klassinen todennäköisyys

Esimerkki

- Heitetään noppaa.
- Tällöin otosavaruus on

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- Oletetaan, että noppa on *virheetön* eli

$$\Pr(i) = \frac{1}{6}, \text{ kaikille } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- Olkoon tapahtuma

$$A = \{5, 6\} \subset S.$$

- Tapahtumalle A *suotuisien* alkeistapahtumien lukumäärä $k = 2$.
- Siten tapahtuman A todennäköisyys on

$$\Pr(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.333$$

Joukon alkioiden lukumäärän laskeminen ja kombinatoriikka

- Jos perusjoukko (otosavaruus) on kooltaan vähänkin isompi, perusjoukon ja sen osajoukkojen (tapahtumien) alkioiden (alkeistapahtumien) *lukumäärien laskemisessa* tarvitaan apuna jotakin *järjestelmällistä* menetelmää.
- Järjestelmällisen menetelmän joukon alkioiden lukumäärän laskemiseen tarjoaa **kombinatoriikaksi** kutsuttu matematiikan osa-alue.

Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka

Klassinen todennäköisyys

>> Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat

Permutaatiot ja variaatiot

Kombinaatiot ja binomikertoimet

Multinomikertoimet

Kombinatoriikan perusperiaatteet 1/2

- Kombinatoriikan kaavojen johtamiseen ja perustelemiseen tarvitaan usein vain kahta yksinkertaista periaatetta, joita sanotaan **kombinatoriikan perusperiaatteiksi**:
 - (1) **Yhteenlaskuperiaate**
 - (2) **Kertolaskuperiaate**

Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat

Kombinatoriikan perusperiaatteet 2/2

- Tarkastellaan **operaatioita** M ja N .
- Tehdään seuraavat oletukset:
 - (1) Operaatio M voidaan suorittaa m eri tavalla.
 - (2) Operaatio N voidaan suorittaa n eri tavalla.
- Operaatiot M ja N voidaan *yhdistää* uudeksi, **yhdistetyksi operaatioksi** seuraavilla tavoilla:
 - (i) ”Suoritetaan M tai N ”
 - (ii) ”Suoritetaan M ja N ”
- Kombinatoriikan perusperiaatteet liittyvät näiden kahden yhdistetyn operaation *suoritustapojen lukumäärien* laskemiseen.

Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat

Toisensa poissulkevat operaatiot ja yhteenlaskuperiaate

- Oletetaan, että operaatiot M ja N ovat *toisensa poissulkevia*.
- Operaatiot M ja N ovat **toisensa poissulkevia**, jos operaatioita M ja N *ei voi* suorittaa yhtäaikaan eli samanaikaisesti.
- Oletetaan lisäksi, että operaatio M voidaan suorittaa m eri tavalla ja operaatio N voidaan suorittaa n eri tavalla.
- Tällöin *yhdistetty operaatio*
 - (i) ”Suoritetaan M tai N ”
voidaan suorittaa $m + n$ eri tavalla.

Riippumattomat operaatiot ja kertolaskuperiaate

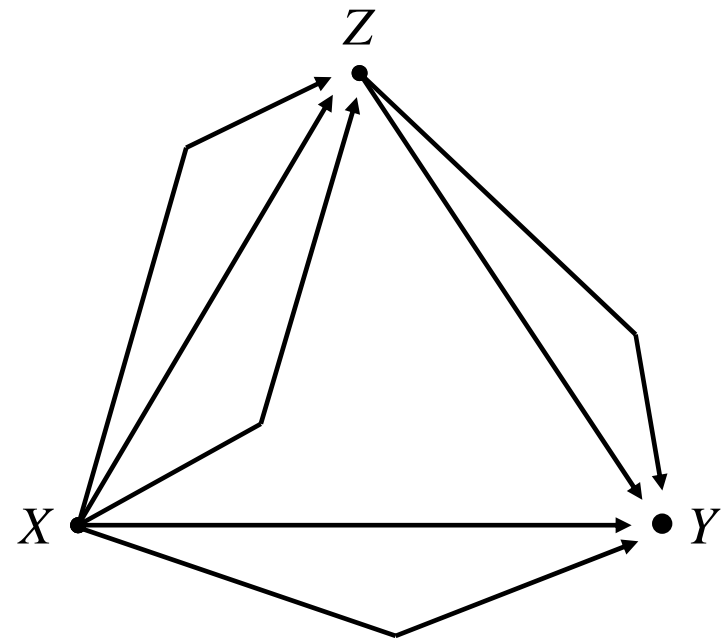
- Oletetaan nyt, että operaatiot M ja N ovat *riippumattomia*.
- Operaatiot M ja N ovat **riippumattomia**, jos se, mikä vaihtoehtoisista tavoista suorittaa operaatio M valitaan, *ei vaikuta* siihen, mikä vaihtoehtoisista tavoista suorittaa operaatio N valitaan ja kääntäen.
- Oletetaan lisäksi, että operaatio M voidaan suorittaa m eri tavalla ja operaatio N voidaan suorittaa n eri tavalla.
- Tällöin *yhdistetty operaatio*
(ii) ”Suoritetaan M ja N ”
voidaan suorittaa $m \times n$ eri tavalla.

Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat

Kombinatoriikan perusperiaatteet:

Esimerkki 1/3

- Kaupunkien X ja Y välillä on 2 suoraa lentoa.
- X :stä Y :hyn pääsee myös kaupungin Z kautta:
 - (i) Kaupunkien X ja Z välillä on 3 lentoa.
 - (ii) Kaupunkien Z ja Y välillä on 2 lentoa.
- Oletetaan lisäksi, että lennot saa valita toisistaan *riippumatta*.
- *Kuinka monella eri tavalla voimme lentää X :stä Y :hyn?*

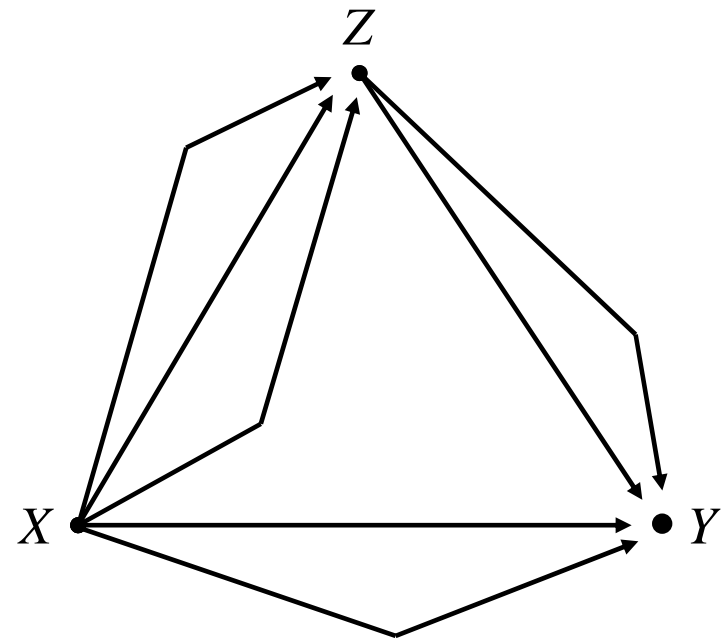


Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat

Kombinatoriikan perusperiaatteet:

Esimerkki 2/3

- Koska lennot saa valita toisistaan *riippumatta*, *Z:n* kautta tapahtuvien erilaisten lentoyhdistelmien lukumäärän laskemiseen voidaan soveltaa kombinatoriikan *kertolaskuperiaatetta*.
- Sen mukaan *X:stä Y:hyn* pääsee lentämään *Z:n* kautta
$$3 \times 2 = 6$$
 eri tavalla.

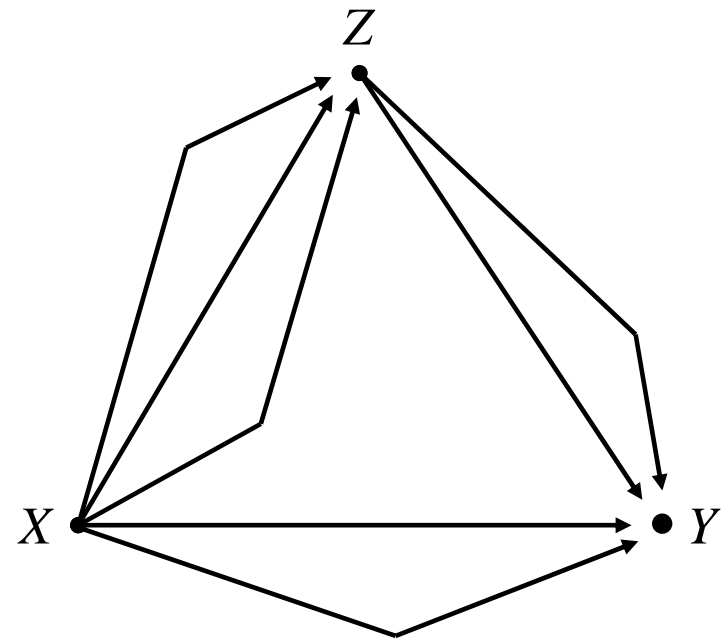


Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat

Kombinatoriikan perusperiaatteet:

Esimerkki 3/3

- Koska 2 suoraa lentoa X :stä Y :hyn ja 6 eri tapaa lentää X :stä Y :hyn Z :n kautta ovat *toisensa poissulkevia*, lentovaihtoehtojen kokonaislukumäärä saadaan soveltamalla kombinatoriikan *yhteenlaskuperiaatetta*.
- Sen mukaan X :stä Y :hyn pääsee lentämään
$$2 + 6 = 8$$
 eri tavalla.



Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat

Kombinatoriikan perusongelmat 1/2

- Olkoon

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

äärellinen joukko, jonka (erilaisten) alkioiden lukumäärä on

$$n = n_S = n(S)$$

jossa $n_S = n(S)$ on *lukumääräfunktio*, joka kertoo joukon S (erilaisten) alkioiden lukumäärän.

- *Kombinatoriikan perusongelmat* liittyvät joukon S alkioiden muodostamien *osajonojen* ja *osajoukkojen* lukumäärien laskemiseen.

Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat

Kombinatoriikan perusongelmat 2/2

- **Kombinatoriikan perusongelmat:**
 - (1a) **Kuinka monella erilaisella tavalla joukon S alkioita voidaan järjestää *jonoon*?**
 - (1b) **Kuinka monella erilaisella tavalla joukon S alkioista voidaan muodostaa $k:n$ alkion *osajono*?**
 - (2) **Kuinka monella erilaisella tavalla joukon S alkioista voidaan muodostaa $k:n$ alkion *osajoukko*?**

Joukko

- Palautetaan mieleen, että **joukko** on täysin määrätty, jos sen *alkiot* tunnetaan, jolloin jokaisesta oliosta voidaan sanoa onko se joukon alkio vai ei.
- Olkoot *äärellisen* joukon A (erilaiset) alkiot

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

- Tällöin merkitään

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat

Joukkojen samuus

- Joukot A ja B ovat **samat**, jos niissä on täsmälleen samat alkioit eli

$$A = B$$

jos ja vain jos

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

Jono

- Palautetaan mieleen, että **jono** on täysin määrätty, jos sen *alkiot* ja niiden *järjestys* tunnetaan.

- Olkoon a jono, jonka i . alkio on

$$a_i, i = 1, 2, \dots, n$$

- Tällöin merkitään

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

- 1-numeroisten ei-negatiivisten kokonaislukujen muodostamia jonoja merkitään usein kirjoittamalla numerot peräkkäin ilman sulkumerkkejä ja pilkkuja kuten moninumeroisissa luvuissa.

Esimerkki: $6491 = (6, 4, 9, 1)$

Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat

Jonojen samuus

- Jonot $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ja $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ovat **samat**, jos niissä on samat alkiot samassa järjestyksessä eli

$$a = b$$

jos ja vain jos

$$a_i = b_i, i = 1, 2, \dots, n$$

Joukko vs jono: Esimerkki

- *Joukot*

$\{1, 2, 3\}$

$\{1, 3, 2\}$

$\{3, 1, 3, 2\}$

ovat joukkoina samat:

$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{3, 1, 3, 2\}$

- *Jonot*

123

132

ovat eri jonoja:

$(1, 2, 3) \neq (1, 3, 2)$

Joukon osajoukot:

Esimerkki

- Olkoon

$$S = \{1, 2, 3\}$$

- Kaikki joukon S alkioden muodostamat *osajoukot*:

Kolmen alkion osajoukot:

$$\{1, 2, 3\} \qquad 1 \text{ kpl}$$

Kahden alkion osajoukot:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \qquad 3 \text{ kpl}$$

Yhden alkion osajoukot:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\} \qquad 3 \text{ kpl}$$

- *Kaikki* joukon S :n osajoukot:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset \qquad 8 \text{ kpl}$$

Joukon osajonot:

Esimerkki

- Olkoon

$$S = \{1, 2, 3\}$$

- Kaikki joukon S alkioden muodostamat *osajonot*:

Kolmen alkion osajonot:

123, 132, 213, 231, 312, 321 6 kpl

Kahden alkion osajonot:

12, 21, 13, 31, 23, 32 6 kpl

Yhden alkion osajonot:

1, 2, 3 3 kpl

Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka

Klassinen todennäköisyys

Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat

>> Permutaatiot ja variaatiot

Kombinaatiot ja binomikertoimet

Multinomikertoimet

Permutaatio

- Olkoon äärellisen joukon S (erilaisten) alkioiden lukumäärä

$$n = n(S)$$

- Mikä tahansa joukon S kaikkien alkioiden muodostama *jono* on joukon S alkioiden **permutaatio**.

Permutaatioiden lukumäärä

- Olkoon äärellisen joukon S (erilaisten) alkioiden lukumäärä $n = n(S)$.
- Tällöin joukon S alkioiden kaikkien mahdollisten *permutaatioiden lukumäärä* on

$$n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1$$

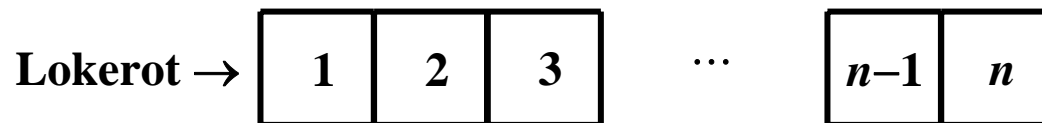
jossa $n!$ on ns. *n-kertoma*.

- Tulos ratkaisee *kombinatoriikan perusongelman* (1a):
Kuinka monella erilaisella tavalla joukon S alkiot voidaan järjestää jonoon?

Permutaatioiden lukumäärä:

Perustelu 1/4

- Käytetään permutaatioiden lukumäärän kaavan johdossa apuna ns. **lokeromallia**.
- Olkoon joukon S alkioden lukumäärä n .
- Oletetaan, että käytettävissä on *lokerikko*, jossa on n lokeroa.
- Asetetaan joukon S alkiot lokeriin yksi kerrallaan niin, että jokaiseen lokeroon tulee täsmälleen yksi alkio.

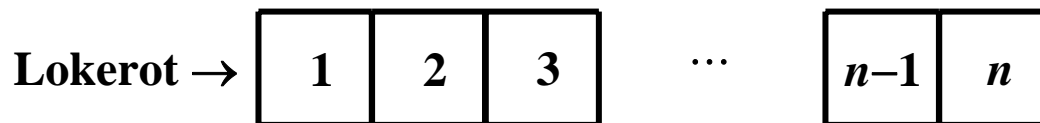


Permutaatioiden lukumäärä:

Perustelu 2/4

- Lokeroiden täyttäminen voidaan tehdä *vaiheittain*.
- Vaiheessa $k = 1, 2, \dots, n$:
 - (i) Lokeroista on täytetty $(k - 1)$ kpl.
 - (ii) Joukossa S on jäljellä $(n - k + 1)$ alkiota.
 - (iii) Suoritetaan operaatio

“Valitaan joukon S jäljellä olevista alkioista yksi lokeroon k ”



Permutaatioiden lukumäärä:

Perustelu 3/4

(iv) Kohdan (iii) operaatio voidaan suorittaa $(n - k + 1)$ eri tavalla:

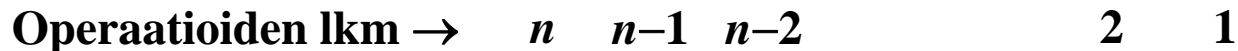
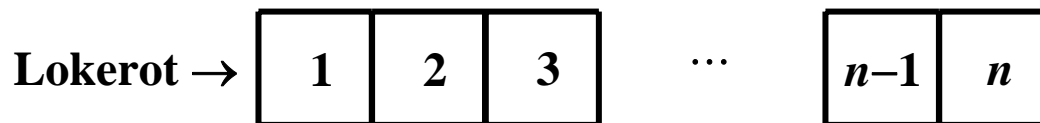
$k = 1$: Joukosta S voidaan valita alkio n :llä tavalla.

$k = 2$: Joukosta S voidaan valita alkio $(n - 1)$:llä tavalla.

...

$k = n - 1$: Joukosta S voidaan valita alkio 2:lla tavalla.

$k = n$: Joukosta S voidaan valita alkio 1:llä tavalla.



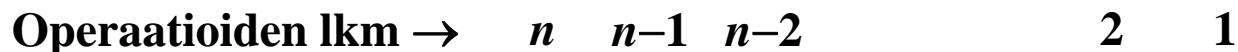
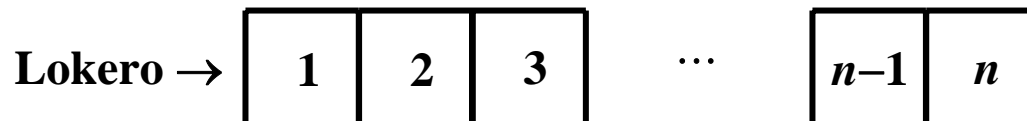
Permutaatioiden lukumäärä:

Perustelu 4/4

- Tarkastellaan *yhdistettyä* operaatiota, jossa kaikki n vaihetta käydään läpi peräkkäin.
- Kysymys:
Kuinka monella eri tavalla tämä *yhdistetty operaatio* voidaan suorittaa?
- Koska jokainen valintaoperaatio voidaan suorittaa *edellisistä vaiheista riippumatta*, kombinatoriikan *kertolaskuperiaatteesta* seuraa, että lokeroiden täyttäminen voidaan tehdä

$$n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$$

eri tavalla.



Permutaatiot ja variaatiot

***n*-kertoma**

- ***n*-kertoma** voidaan laskea seuraavalla *palautuskaavalla*:

$$n! = n \times (n - 1)! , n = 1, 2, \dots$$

- Määritellään:

$$0! = 1$$

- Palautuskaavasta:

$$1! = 1 \times 0! = 1 \times 1 = 1$$

$$2! = 2 \times 1! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

...

Variaatio eli k -permutaatio

- Olkoon äärellisen joukon S (erilaisten) alkioiden lukumäärä $n = n(S)$.
- Mikä tahansa joukon S alkioiden *osajono*, jossa on k alkiota, on joukon S alkioiden **variaatio** eli **k -permutaatio**.
- Merkintä:
$$P(n, k) = n:n \text{ alkion joukon } k\text{-permutaatioiden lukumäärä}$$
- Jos $k = n$, saadaan joukon S alkioiden *permutaatio*.

Variaatioiden eli k -permutaatioiden lukumäärä

- Olkoon äärellisen joukon S (erilaisten) alkioiden lukumäärä $n = n(S)$.
- Tällöin joukon S alkioiden kaikkien mahdollisten k -permutaatioiden lukumäärä on

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

- Tulos ratkaisee *kombinatoriikan perusongelman* (1b):
Kuinka monella erilaisella tavalla joukon S alkioista voidaan muodostaa k :n alkion osajono?

Variaatioiden eli k -permutaatioiden lukumäärä:

Huomautus

- Jos

$$k = n$$

kutistuu kombinatoriikan perusongelma (1b) perusongelmaksi (1a), jolloin

$$P(n, n) = n!$$

Variaatioiden eli k -permutaatioiden lukumäärä: Perustelu

- Olkoon joukon S alkioiden lukumäärä n .
- Joukon S kaikkien alkioiden permutaatioiden lukumäärää koskevasta todistuksesta nähdään, että n :stä alkiosta voidaan valita k alkiota k :hon *ensimmäiseen* lokeroon

$$n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - k + 1)$$

eri tavalla.

- Laventamalla saadaan

$$\begin{aligned} & n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - k + 1) \\ &= \frac{n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - k + 1) \times (n - k)!}{(n - k)!} \\ &= \frac{n!}{(n - k)!} \end{aligned}$$

Permutaatioiden lukumäärä:

Esimerkki 1/4

- Kuinka monta erilaista *3-numeroista kokonaislukua* voidaan muodostaa numeroista
 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$?
kun lukuja muodostettaessa merkitään ”etunollat” näkyviin.
Esimerkkejä: $5 = 005$ ja $19 = 019$
- Kaikki näin saatavat 3-numeroiset kokonaisluvut ovat muotoa
 xyz
olevia *jonoja*, joissa numerot x, y ja z valitaan joukosta
 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- Numeroiden x, y ja z valinta jonoon xyz voidaan tehdä *kahdella* eri tavalla:
 - (i) Aikaisemmin valitun numeron *saa* valita uudelleen.
 - (ii) Aikaisemmin valittua numeroa *ei saa* valita uudelleen.

Permutaatioiden lukumäärä:

Esimerkki 2/4

- Tarkastellaan ensin tapausta
 - (i) Aikaisemmin valitun numeron *saa* valita uudelleen.
- Käytetään apuna *lokeromallia*.
- Kokonaisluku xyz muodostuu kolmesta lokerosta, joista jokainen voidaan täyttää *toisistaan riippumatta* 10:llä erilaisella objektilla.
- *Kertolaskuperiaatteen* mukaan lokerot xyz voidaan täyttää
$$10 \times 10 \times 10 = 1000$$
eri tavalla.
- Siten erilaisia 3-numeroisia lukuja, *joissa saa olla samoja numeroita*, on 1000 kpl.
- Tulos on tietysti sopusoinnussa sen kanssa, että kokonaislukujen
$$000, 001, 002, \dots, 010, 011, 012, \dots, 100, 101, 102, \dots, 999$$
lukumäärä on 1000.

Permutaatioiden lukumäärä:

Esimerkki 3/4

- Tarkastellaan seuraavaksi tapausta
 - (ii) Aikaisemmin valittua numeroa *ei saa* valita uudelleen.
- Käytetään apuna *lokeromallia*.
- Kokonaisluku xyz muodostuu kolmesta lokerosta, jotka voidaan täyttää vaiheittain seuraavalla tavalla:
 - (1) 1. lokero x voidaan täyttää 10:llä erilaisella objektilla.
 - (2) 2. lokero y voidaan täyttää *vaiheesta (1) riippumatta* 9:llä erilaisella objektilla, koska 1 objektista on käytetty.
 - (3) 3. lokero z voidaan täyttää *vaiheesta (2) riippumatta* 8:lla erilaisella objektilla, koska 2 objektista on käytetty.
- *Kertolaskuperiaatteen* mukaan lokerot xyz voidaan täyttää
$$10 \times 9 \times 8 = 720$$
eri tavalla.

Permutaatioiden lukumäärä:

Esimerkki 4/4

- Siten erilaisia 3-numeroisia lukuja, *joissa sama numero ei saa esiintyä kuin kerran*, on 720 kpl.
- Huomaa, että sama tulos saadaan huomaamalla, että tapauksessa (ii) on määrättävä joukon $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 3-permutaatioiden lukumäärä.
- 3-permutaatioiden lukumääräksi saadaan

$$P(10, 3) = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

mikä tietysti yhtyy edellä saatuun tulokseen.

Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka

Klassinen todennäköisyys

Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat

Permutaatiot ja variaatiot

>> Kombinaatiot ja binomikertoimet

Multinomikertoimet

Kombinaatio

- Olkoon äärellisen joukon S alkioiden lukumäärä

$$n = n(S)$$

- Mikä tahansa joukon S *osajoukko*, jossa on k alkiota, muodostaa joukon S alkioiden k *alkiota sisältävän kombinaation*.
- Merkintä:

$$C(n, k) = n:n \text{ alkion joukon } k \text{ alkiota sisältävien kombinaatioiden lukumäärä}$$

Kombinaatioiden lukumäärä

- Olkoon joukon S alkioiden lukumäärä $n = n(S)$.
- Tällöin joukon S alkioiden kaikkien mahdollisten k alkiota sisältävien kombinaatioiden lukumäärä on

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

jossa

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$$

on ns. n -kertoma.

- Tulos ratkaisee *kombinatoriikan perusongelman* (2):
Kuinka monella erilaisella tavalla joukon S alkioista voidaan muodostaa k :n alkion osajoukko?

Kombinaatioiden lukumäärä ja binomikertoimet

- Kombinaatioiden lukumäärää $C(n, k)$ merkitään usein ns. **binomikertoimella**

$$\binom{n}{k}$$

joka luetaan “ n yli $k:n$ ”.

Kombinaatioiden lukumäärä:

Perustelu 1/3

- Oletetaan, että joukossa S on $n(S) = n$ alkiota.
- Kombinaatioiden lukumäärää koskeva kaava voidaan perustella seuraavalla tavalla:

Määritään joukon S alkioiden k alkiota sisältävien permutaatioiden lukumäärä kahdella eri tavalla, joissa molemmissa on mukana tuntemattomana suureena kysytty joukon S alkioiden k alkiota sisältävien kombinaatioiden lukumäärä, merkitsemällä saadut tulokset yhtä suuriksi ja ratkaisemalla kysytty kombinaatioiden lukumäärä saadusta yhtälöstä.

- Joukon S , jossa on n alkiota, k -permutaatioiden lukumäärä on aikaisemman tuloksen perusteella

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Kombinaatioiden lukumäärä:

Perustelu 2/3

- Toisaalta joukon S alkioiden permutointi voidaan tehdä *kahdessa vaiheessa*:
 - (1) Valitaan joukon S alkioista k alkiota sisältävä osajoukko.
Tämä voidaan tehdä $C(n, k)$ eri tavalla, jossa $C(n, k)$ on toistaiseksi tuntematon luku.
 - (2) Järjestetään valitun osajoukon k alkiota jonoon.
Tämä voidaan tehdä $k!$ eri tavalla.
- Vaiheet (1) ja (2) voidaan suorittaa *toisistaan riippumatta*.

Kombinaatioiden lukumäärä:

Perustelu 3/3

- Kombinatoriikan *kertolaskuperiaatteen* mukaan joukon S alkioiden k alkiota sisältävien *permutaatioiden lukumäärä* on siis

$$P(n, k) = C(n, k)k!$$

- Sijoittamalla tähän permutaatioiden lukumäärän lauseke

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

saadaan yhtälö

$$C(n, k)k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

josta $C(n, k)$ ratkaisemalla saadaan haluttu tulos.

Kombinaatioiden lukumäärä:

Esimerkki 1/3

- Edellä on käsitelty esimerkkiä, jossa tarkasteltiin 3-numeroisten lukujen muodostamista, kun käytössä on numerot
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
 - Tällöin todettiin seuraavaa:
 - (i) Jos sama numero *saa* esiintyä luvussa useamman kerran, erilaisia lukuja on 1000 kpl.
 - (ii) Jos sama numero *ei saa* esiintyä luvussa useammin kuin kerran, erilaisia lukuja on 720 kpl.
 - Kummassakin tapauksessa 3-numeroisia lukuja käsiteltiin numeroiden 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 muodostamina *jonoina*.
 - Määrätään nyt kuinka monella eri tavalla numeroiden 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 muodostamasta joukosta
 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
voidaan valita *osajoukko*, jossa on 3 alkioita.
-

Kombinaatioiden lukumäärä:

Esimerkki 2/3

- Ratkaisun antaa binomikerroin $C(10, 3)$:

$$C(10, 3) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$$

- Siten joukosta

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

voidaan valita 3:n alkion *osajoukko* 120:llä eri tavalla.

Kombinaatioiden lukumäärä:

Esimerkki 3/3

- Huomaa asetettujen ehtojen vaikutus:
 - (i) Numeroista 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 voidaan muodostaa 1000 kpl 3-numeroisia lukuja, *joissa sama numero saa esiintyä useamman kerran.*
 - (ii) Joukosta $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ voidaan muodostaa 720 kpl 3:n numeron *osajonoja.*
 - (iii) Joukosta $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ voidaan muodostaa 120 kpl 3:n numeron *osajoukkoja.*

Permutaatiot vs kombinaatiot

- Joukon alkioiden *permutaatioissa* alkioiden *järjestyksellä on merkitystä*.
- Joukon alkioiden *kombinaatioissa* alkioiden *järjestyksellä ei ole merkitystä*.

Permutaatiot vs kombinaatiot: Esimerkkejä

- Opiskelijaravintolan ruokajono muodostaa siinä seisovien opiskelijoiden *permutaation*, jossa opiskelijoiden järjestyksellä on merkitystä jonottaville opiskelijoille.
- Lotossa oikean rivin antavat 7 voitonnumeroa muodostavat 39:n numeron joukon erään 7:n alkion *kombinaation*, jossa numeroiden arvontajärjestyksellä ei ole merkitystä.

Kombinaatiot ja binomikertoimet

Binomikerroin

- Kerrointa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C(n, k)$$

kutsutaan **binomikertoimeksi**.

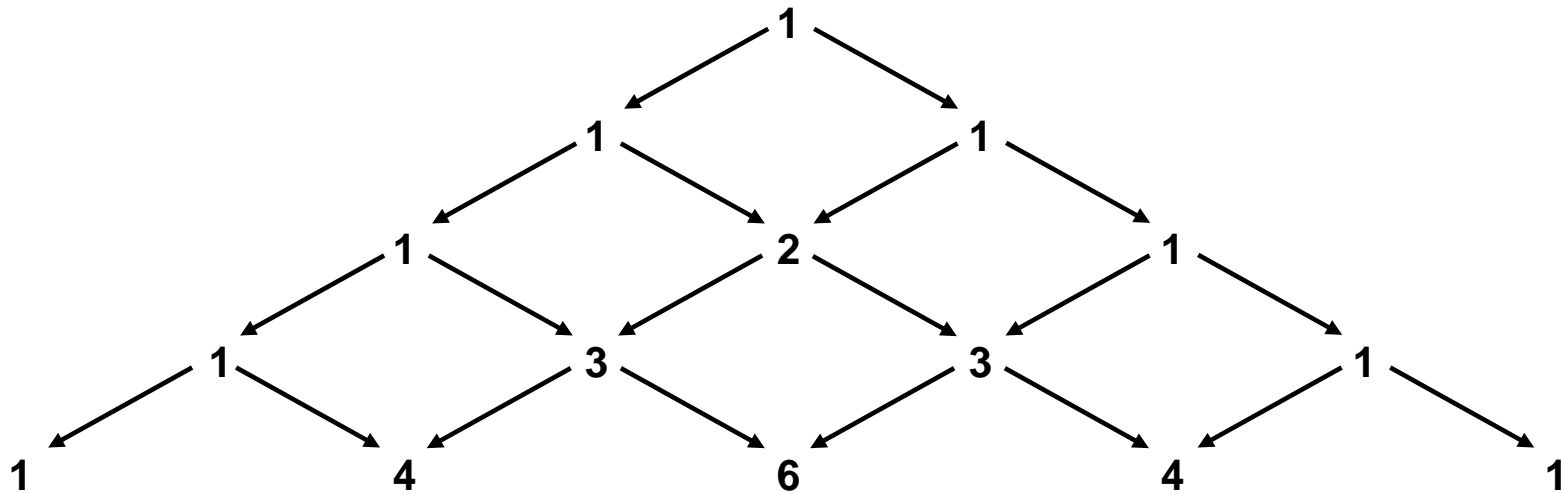
- Binomikerroin luetaan “ n yli $k:n$ ”.
- Koska $0! = 1$, niin

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1 = \frac{n!}{n!0!} = \binom{n}{n}$$

Kombinaatit ja binomikertoimet

Pascalin kolmio

- *Binomikertoimet* voidaan muodostaa käyttäen apuna ns. **Pascalin kolmiota** (5 ensimmäistä riviä):



- Lukuun ottamatta kolmion reunoilla olevia ykkösiä, Pascalin kolmion luvut saadaan laskemalla yhteen kaksi edeltävän rivin lukua nuolten suuntaan.

Pascalin kolmion muodostamissääntö

- Binomikertoimet

$$C(n, 0), C(n, 1), C(n, 2), \dots, C(n, n - 1), C(n, n)$$

muodostavat Pascalin kolmion $(n + 1)$. rivin luvut.

- Pascalin kolmion *muodostamissääntö* voidaan ilmaista binomikertoimien avulla seuraavasti:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- Sanoin:

Pascalin kolmion n . rivin k . luku saadaan laskemalla yhteen $(n - 1)$. rivin $(k - 1)$. luku ja k . luku.

Pascalin kolmion muodostamissääntö: Perustelu

- Pascalin kolmion *muodostamissääntö* voidaan perustella seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(k+(n-k))(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}\end{aligned}$$

Pascalin kolmion symmetrisyys

- Pascalin kolmio on *symmetrinen* kolmion rivien keskikohdan suhteen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Pascalin kolmion symmetrisyys: Perustelu

- Pascalin kolmion *symmetrisyys* kolmion rivien keskikohdan suhteen voidaan perustella seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} \\ &= \binom{n}{n-k}\end{aligned}$$

- **Binomikaavan** mukaan n :s potenssi binomille $x + y$ voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n\end{aligned}$$

Binomikaava: Perustelu 1/3

- Kun binomi $x + y$ korotetaan potenssiin n , saadaan summalauseke, jonka kaikki termit ovat muotoa

$$x^{n-k} y^k, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

- *Yhdistetään* sellaiset termit, joissa esiintyy *sama* x :n potenssi ja *järjestetään* näin saadut termit x :n alenevien potenssien mukaiseen järjestykseen.

- Yhdistämisen tuloksena saadaan $(n + 1)$ termiä sisältävä summalauseke, jonka $(k + 1)$. termi on muotoa

$$D(n, k)x^k y^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

jossa $D(n, k)$ on muotoa $x^k y^{n-k}$ olevien termien lukumäärä.

- Tehtävänä on määrätä $D(n, k)$ eli se *kuinka monella eri tavalla muotoa $x^k y^{n-k}$ oleva termi syntyy* korotettaessa binomi $x + y$ potenssiin n .

Binomikaava:

Perustelu 2/3

- Käytetään tehtävän ratkaisemisessa *lokeromallia*.
- Täytetään lokerikko, jossa on n lokeroa, tyyppiä x ja tyyppiä y olevilla objekteilla, kun tyyppiä x olevia objekteja on $(n - k)$ kpl ja tyyppiä y olevia objekteja on k kpl.
- Kuinka monella eri tavalla tämä täyttöoperaatio voidaan suorittaa?
- Huomaa, että tyyppiä y olevien objektien paikat *on määrätty* sen jälkeen, kun tyyppiä x olevat objektit on saatu sijoitetuksi lokeroihinsa.
- Siksi riittää tarkastella sitä, kuinka monella eri tavalla $(n - k)$ kpl tyyppiä x olevaa objektia voidaan sijoittaa lokerikkoon, jossa on n lokeroa.

Binomikaava:

Perustelu 3/3

- Tämä tehtävä voidaan formuloida myös seuraavassa, vaihtoehtoisessa muodossa:

Kuinka monella eri tavalla joukosta, jossa on n alkiota, voidaan valita *osajoukko*, jossa on $(n - k)$ alkiota?

- Tämä on selvästi *kombinatoriikan perusongelma (2)*.
- Siten kysytyn lukumäärän $D(n, k)$ antaa *binomikerroin*

$$C(n, k) = \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Binomikaava:

Esimerkki 1/2

- *Binomikaavan* mukaan 4. potenssi binomille $x + y$ voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned}(x + y)^4 &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} x^{4-k} y^k \\ &= \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} xy^3 + \binom{4}{4} y^4 \\ &= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

- Tulos on sopusoinnussa sen kanssa, että *Pascalin kolmion* 5. rivin luvut ovat

$$1, 4, 6, 4, 1$$

Binomikaava:

Esimerkki 2/2

- Tarkastellaan esimerkkinä, miten tyyppiä x^2y^2 olevat termit syntyvät.
- Kaikki mahdolliset muotoa x^2y^2 olevat tulot ovat

$$xxyy \quad xyxy \quad xyyx$$

$$yxxxy \quad yxyx \quad yyxx$$

- Tuloja on siis 6 kappaletta.
- Koska tässä $n = 4$ ja $k = 2$, binomikertoimen kaavasta saadaan tämän tuloksen kanssa yhtäpitävästi

$$C(4, 2) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6$$

Kombinaatiot ja binomikertoimet

Osajoukkojen lukumäärä

- Olkoon joukon S alkioiden lukumäärä $n = n(S)$.
- Joukon S osajoukkojen lukumäärä on

$$2^n$$

- Lukumäärässä ovat mukana:

(1) Tyhjä joukko \emptyset

(2) Kaikki yhden alkion osajoukot

(3) Kaikki kahden alkion osajoukot

(4) Kaikki kolmen alkion osajoukot

...

(n) Kaikki ($n - 1$):n alkion osajoukot

($n + 1$) Joukko S

Osajoukkojen lukumäärä: Perustelu 1/2

- Olkoon joukon S alkioden lukumäärä $n = n(S)$.
- Joukolla S on k alkia sisältävien kombinaatioiden lukumäärää koskevan tuloksen mukaan

$$C(n, k) = \binom{n}{k}$$

osajoukkoa, jossa on k alkia, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

- Joukon S osajoukkojen kokonaislukumäärä N saadaan laskemalla kaikki binomikertoimet $C(n, k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ yhteen:

$$N = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

- Toisaalta *binomikaavasta* saadaan sijoittamalla $x = y = 1$:

$$(1+1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Osajoukkojen lukumäärä:

Perustelu 2/2

- Yhdistämällä nämä tulokset saadaan joukon S , jossa on $n = n(S)$ alkia, kaikkien osajoukkojen lukumääräksi

$$N = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

jossa binomikerroin

$$\binom{n}{k}$$

kertoo joukon S sellaisten osajoukkojen lukumäärän, joissa on k alkia, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Kombinatorisia laskutoimituksia:

Esimerkki 1

- Lotossa 1 ruudukko lototaan valitsemalla 7 numeroa 39:stä.
- Montako erilaista lottoruudukkoa on olemassa?
- Tehtävän toinen muotoilu:
Kuinka monta erilaista 7:n alkion osajoukkoa voidaan valita 39 erilaisen alkion joukosta?
- Vastauksen antaa *kombinaatioiden lukumäärää* koskeva tulos:

$$\binom{39}{7} = \frac{39!}{7!32!} = 15\,380\,937$$

Kombinatorisia laskutoimituksia:

Esimerkki 2

- Montako sellaista lottoruudukkoa on olemassa, joissa on *täsmälleen* 5 oikein?
- 5 oikein saadaan, jos on valittu 5 oikeata numeroa 7 oikean numeron joukosta ja 2 väärää numeroa 32 väärän numeron joukosta.
- Valinnat voidaan tehdä *toisistaan riippumatta*.
- *Kertolaskuperiaatteen* mukaan 5 oikein sisältävien rivien lukumäärä on

$$\binom{7}{5} \binom{32}{2} = \frac{7!}{5!2!} \times \frac{32!}{2!30!} = 21 \times 496 = 10\,416$$

Kombinatorisia laskutoimituksia:

Esimerkki 3

Korttipelit: *pokeri*

- Montako erilaista 5 kortin kättä on olemassa?
- Kombinaatioiden lukumäärää koskevan tuloksen mukaan:

$$\binom{52}{5} = 2\,598\,960$$

Korttipelit: *bridge*

- Montako erilaista 13 kortin kättä on olemassa?
- Kombinaatioiden lukumäärää koskevan tuloksen mukaan:

$$\binom{52}{13} = 635\,013\,559\,600$$

Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka

Klassinen todennäköisyys

Kombinatoriikan perusperiaatteet ja perusongelmat

Permutaatiot ja variaatiot

Kombinaatiot ja binomikertoimet

>> Multinomikertoimet

Multinomikerroin 1/2

- Olkoon äärellisen joukon S alkioden lukumäärä $n = n(S)$.
- Oletetaan, että positiiviset kokonaisluvut

$$n_i, i = 1, 2, \dots, k$$

toteuttavat ehdon

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

- *Ositetaan* joukko S *pistevieraisiin* osajoukkoihin

$$A_i, i = 1, 2, \dots, k$$

siten, että joukossa A_i on $n(A_i) = n_i$ alkiota.

- *Kuinka monella tavalla* joukko S voidaan osittaa pistevieraisiin osajoukkoihin niin, että osajoukkojen alkioden lukumäärät toteuttavat ym. ehdot?

Multinomikerroin 2/2

- Joukko S , jossa on $n = n(S)$ alkioita, voidaan *osittaa*

$$\binom{n}{n_1 \quad n_2 \quad \cdots \quad n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

tavalla *pistevieraisiin osajoukkoihin* A_i , $i = 1, 2, \dots, k$, joiden alkioiden lukumäärät toteuttavat ehdot:

- (i) $n(A_i) = n_i$, $i = 1, 2, \dots, k$
 - (ii) $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$
- Lukumäärän antavaa lauseketta kutsutaan **multinomi-kertoimeksi**.

Multinomikerroin: Kommentteja

- Epätyhjät joukot $A_i \subset S$, $i = 1, 2, \dots, k$ muodostavat joukon S **osituksen**, jos

$$S = \bigcup_{i=1}^k A_i \quad \text{ja} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ kun } i \neq j$$

- *Multinomikerroin* kertoo *kuinka monella eri tavalla* joukko S , jossa on n alkiota, voidaan *ositaa* pistevieraisiin osajoukkoihin A_i , $i = 1, 2, \dots, k$ niin, että osajoukossa A_i on n_i alkiota ja

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

Multinomikerroin: Kommentteja

- Multinomikertoimet ovat kertoimina *multinomin*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$$

kehityskaavassa tuloissa

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

joissa siis

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

- *Binomikerroin* saadaan multinomikertoimen erikoistapauksena, kun $k = 2$.

Multinomikerroin:

1. esimerkki 1/2

- Sanassa *kasa* on 4 kirjainta, joiden joukossa on 3 *erilaista* kirjainta:

k 1 kpl

a 2 kpl

s 1 kpl

- Kuinka monta *erilaista* neljän kirjaimen mittaista ”sanaa” voidaan muodostaa permutoimalla kirjaimia k , a , a ja s ?
- Erilaisten sanojen lukumäärän antaa *multinomikerroin*

$$\binom{4}{1 \ 2 \ 1} = \frac{4!}{1!2!1!} = 12$$

Multinomikerroin:

1. esimerkki 2/2

- *Tässä tapauksessa erilaiset sanat on helppo luetella:*

a-alkuiset sanat:

aaks aask akas aksa asak aska

k-alkuiset sanat:

kaas kasa ksaa

s-alkuiset sanat

saak saka skaa

- Sanoja on todellakin 12 kpl kuten edellä todettiin.

Multinomikerroin:

2. esimerkki

Korttipeli: *pokeri*

- Oletetaan, että peliin osallistuu 4 pelaajaa.
- Jaetaan 5 korttia jokaiselle pelaajalle.
- Kuinka monta erilaista jakoa on olemassa?
- Korttipakka (52 kortin pakka) jaetaan siis 5 osaan, joissa on 5, 5, 5, 5 ja 32 korttia.
- Erilaisten jakojen lukumäärän antaa *multinomikerroin*

$$\binom{52}{5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 32} = \frac{52!}{5!5!5!5!32!} = 1.47 \times 10^{24}$$