# Ilkka Mellin

# Todennäköisyyslaskenta

## Osa 1: Todennäköisyys ja sen laskusäännöt

## Todennäköisyyden aksioomat

# Todennäköisyyden aksioomat

**>> Todennäköisyyden määritteleminen**

**Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa**

**Klassinen todennäköisyys, suhteellinen frekvenssi ja ehdollinen todennäköisyys**

**Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa**

# Todennäköisyyden naiivit määritelmät

- Luvussa **Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet todennäköisyydelle** on esitetty kolme *naiivia määritelmää*:

  (i) Tapahtuman **klassinen todennäköisyys** on tapahtumalle *suotuisien tulosvaihtoehtojen suhteellinen frekvenssi*.

  (ii) Tapahtuman **empiirinen todennäköisyys** on tapahtuman (tilastollisesti stabiili) *suhteellinen frekvenssi*.

  (iii) Todennäköisyys on tapahtuman *sattumisen mahdollisuuden* **mitta**.

# Todennäköisyyden naiivit määritelmät: Kommentteja

- Kuten näemme, yksikään todennäköisyyden naiiveista määritelmistä (i)-(iii) ei täytä *hyvän matemaattisen määritelmän* tunnusmerkkejä.

# Klassinen todennäköisyys

- Tarkastellaan satunnaiskoetta, johon liittyy *n yhtä todennäköistä tulosvaihtoehtoa*.
- Tarkastellaan ko. satunnaiskokeessa *tapahtumaa A*, johon liittyy *k yhtä todennäköistä tulosvaihtoehtoa*, joita sanotaan tapahtumalle *A suotuisiksi*.
- Tapahtuman *A* **klassinen todennäköisyys** on tapahtumalle *suotuisien* tulosvaihtoehtojen *suhteellinen frekvenssi*

$$\frac{k}{n}$$

# Klassinen todennäköisyys: Esimerkki

- Heitetään kahta virheetöntä noppaa.
- Mikä on tapahtuman

  $A$ = ”Silmälukujen summaksi saadaan 11 tai 12”

  todennäköisyys?
- Kahden virheettömän nopan heitossa mahdolliset *tulosvaihtoehdot* muodostuvat 6×6 = 36 lukuparista

  $(i, j)$ , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

  joiden kaikkien todennäköisyys on 1/36.
- Tapahtumalle *A suotuisia tulosvaihtoehtoja* on 3 kpl:

  (5,6), (6,5), (6,6)
- Siten tapahtuman *A klassinen todennäköisyys* on

$$\Pr(A) = \frac{k}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

# Klassinen todennäköisyys: Kommentteja

- Klassisen todennäköisyyden määritelmä soveltuu vain sellaisten satunnaisilmiöiden tapahtumille, joissa tulos-vaihtoehdot ovat *symmetrisiä* eli *yhtä todennäköisiä*.
- Klassisen todennäköisyyden määritelmää ei voida soveltaa sellaisiin satunnaiskokeisiin, joilla on *äärettömän monta* tulosvaihtoehtoa.

# Empiirinen todennäköisyys

- *Toistetaan* jotakin *satunnaiskoetta* $n$ kertaa.
- Oletetaan, että tapahtuma $A$ sattuu koetoistojen aikana $f$ kertaa.
- Jos tapahtuman $A$ *suhteellinen frekvenssi*

$$\frac{f}{n}$$

lähestyy jotakin kiinteätä lukua $p$ koetoistojen lukumäärän $n$ kasvaessa rajatta, on $p$ tapahtuman $A$ **empiirinen todennäköisyys**.

# Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki 1/3

- Eräässä *kyselytutkimuksessa* selvitettiin miten suomalaiset suhtautuvat Suomen mahdolliseen NATO-jäsenyyteen.
- Tutkimus perustui *satunnaisotokseen*, johon poimittiin *arpomalla*

  $$1800$$

  suomalaista.
- *Otoksessa*

  $$1080$$

  henkilöä ilmoitti vastustavansa NATO-jäsenyyttä.

# Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki 2/3

- Tutkimusta voidaan kuvata satunnaisilmiönä seuraavalla tavalla:

  *Satunnaiskoe*:

  Poimitaan yksi suomalainen arpomalla otokseen.

  *Koetoistojen lukumäärä* (otoskoko):

  $n = 1800$

  *Tapahtuma A*:

  Otokseen poimittu suomalainen vastustaa Suomen NATO-jäsenyyttä.

  Tapahtuman *A frekvenssi* koetoistojen joukossa:

  $f = 1080$

  Tapahtuman *A suhteellinen frekvenssi*:

  $$\frac{f}{n} = \frac{1080}{1800} = 0.6$$

# Empiirinen todennäköisyys: Esimerkki 3/3

- Jos otoksen poiminnassa käytettiin arvontaa, voidaan olettaa, että tapahtuman $A$ suhteellinen frekvenssi säilyy *stabiilina*, jos *otoskokoa kasvatetaan* tai *otantaa toistetaan*.
- Jos oletus tapahtuman $A$ suhteellisen frekvenssin stabiiliudesta pätee, havaittua suhteellista frekvenssiä 0.6 on järkevää kutsua *toden-näköisyydeksi*, että satunnaisesti valittu suomalainen vastustaa Suomen NATO-jäsenyyttä.
- Siten tapahtuman $A$ *empiirinen todennäköisyys* on

$$\Pr(A) = 0.6$$

otoksesta saatujen tietojen perusteella.

# Empiirinen todennäköisyys: Kommentteja

- Empiirisen todennäköisyyden määritelmä edellyttää sitä, että tapahtuman suhteellinen frekvenssi käyttäytyy koetoistojen lukumäärän kasvaessa *tilastollisesti stabiilisti*.
- Empiiristä todennäköisyyttä *ei voida liittää* sellaisiin satunnaisilmiöihin, joista *ei ole havaintoja*.
- Tapahtuman empiiristä todennäköisyyttä *ei voida* – nimestään huolimatta – *määrätä kokeellisesti*, koska äärettömän monen koetoiston tekeminen ei ole käytännössä mahdollista.
- Mikään *ei takaa*, että empiirisen todennäköisyyden määritelmässä esiintyvä raja-arvo *on olemassa*.

# Todennäköisyys *mittana*

- **Todennäköisyyttä** voidaan kutsua **mitaksi**, joka mittaa satunnaisilmiön tapahtumavaihtoehtojen *sattumisen mahdollisuuksia*.
- *Venn-diagrammien* käyttö todennäköisyyslaskennan peruslaskutoimitusten havainnollistamisessa perustuu juuri siihen, että *todennäköisyydellä on mittana samantapaiset ominaisuudet kuin pinta-alamitalla*.

# Todennäköisyys *mittana*: Kommentteja

- Todennäköisyyden kutsuminen mitaksi sisältää *jotakin hyvin olennaista* todennäköisyyden luonteesta.
- Todennäköisyydellä on samantapaiset ominaisuudet kuin esimerkiksi *pinta-ala*- tai *tilavuusmitalla* paitsi, että tapahtuman todennäköisyydellä on ylärajana varman tapahtuman todennäköisyys 1.
- Todennäköisyyden kutsuminen sattumisen mahdollisuuden mitaksi on kuitenkin *kehämääritelmä*:

  *Sattumisen mahdollisuus* tarkoittaa suunnilleen samaa kuin *todennäköisyys*.

# Todennäköisyyden aksiomaattinen määrittely 1/2

- Yksikään todennäköisyyden naiiveista määritelmistä *ei täytä* hyvän matemaattisen määritelmän tunnusmerkkejä.
- Matemaattisesti kelvollisen yleisen määritelmän todennäköisyydelle esitti venäläinen matemaatikko *A. N. Kolmogorov* 1930-luvun alussa.
- *Kolmogorovin aksioomien* mukaan todennäköisyyslaskenta on *matemaattisen mittateorian* osa.
- Todennäköisyyden naiivit määritelmät voidaan sijoittaa – sopivasti muotoiltuina – Kolmogorovin aksioomajärjestelmään todennäköisyyden käsitteen *tulkintoina* tai *kuvauksina*.

# Todennäköisyyden aksiomaattinen määrittely 2/2

- Seuraavissa kappaleissa tarkastellaan todennäköisyyden *aksiomaattista määrittelyä*.
- Tarkastelu on jaettu kahteen osaan:

  (i) Todennäköisyyden määrittely **äärellisissä** otos-avaruuksissa.

  (ii) Todennäköisyyden määrittely **äärettömissä** otos-avaruuksissa.
- Samalla tarkastellaan todennäköisyyslaskennan lasku-sääntöjen *todistamista* aksioomista lähtien.

# Todennäköisyyden aksioomat

**Todennäköisyyden määritteleminen**

**>> Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa**

**Klassinen todennäköisyys, suhteellinen frekvenssi ja ehdollinen todennäköisyys**

**Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa**

# Boolen algebra: Määritelmä 1/2

- Olkoon $S$ joukko.
- Olkoon $\mathfrak{F}$ *jokin* joukon $S$ osajoukkojen muodostama **joukkoperhe**.
- Jos siis joukko $A$ on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio, niin $A$ on joukon $S$ osajoukko:

$$A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \subset S$$

# Boolen algebra: Määritelmä 2/2

- Joukkoperhe $\mathfrak{F}$ on **Boolen algebra**, jos

(i) *Tyhjä joukko* $\varnothing$ on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio:

$$\varnothing \in \mathfrak{F}$$

(ii) Jos joukko $A$ on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio, niin sen *komplementti* $A^c$ on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio:

$$A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}$$

(iii) Jos joukot $A$ ja $B$ ovat joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkioita, niin niiden *yhdiste* $A \cup B$ on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio:

$$A \in \mathfrak{F},\, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{F}$$

# Boolen algebrat ja joukko-opin operaatiot 1/2

- Olkoon $\mathfrak{F}$ joukossa $S$ määritelty *Boolen algebra*.
- Olkoot

$$A \in \mathfrak{F} \text{ ja } B \in \mathfrak{F}$$

- Suoraan Boolen algebran *aksioomien mukaan tyhjä joukko* $\emptyset$, *komplementtijoukot* $A^c$ ja $B^c$ sekä *yhdiste* $A \cup B$ kuuluvat joukkoperheeseen $\mathfrak{F}$:

$$\emptyset\,,\; A^c,\; B^c,\; A \cup B \in \mathfrak{F}$$

- Lisäksi voidaan osoittaa, että *perusjoukko* $S$, *leikkaus* $A \cap B$ sekä *erotukset* $A \setminus B$ ja $B \setminus A$ kuuluvat joukkoperheeseen $\mathfrak{F}$:

$$S\,,\; A \cap B\,,\; A \setminus B\,,\; B \setminus A \in \mathfrak{F}$$

# Boolen algebrat ja joukko-opin operaatiot 2/2

- Boolen algebrat ovat siis **suljettuja** tavanomaisten joukko-opin operaatioiden suhteen.
- Tällä tarkoitetaan siitä, että tavanomaiset joukko-opin operaatiot *eivät vie Boolen algebran ulkopuolelle*:

  Jos Boolen algebran $\mathfrak{F}$ joukkoihin sovelletaan *korkeintaan äärellinen määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita *komplementti*, *yhdiste*, *leikkaus* ja *erotus*, niin tuloksena saatavat joukot kuuluvat edelleen Boolen algebraan $\mathfrak{F}$ .

  Vrt. yllä sanottua lukujoukkojen ominaisuuksiin.

# Joukko-opin operaatiot

- Olkoon $\mathfrak{F}$ joukossa $S$ määritelty Boolen algebra.
- *Todistetaan* seuraavat *joukko-opin tulokset*:

(i) Joukko $S \in \mathfrak{F}$

(ii) Jos $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ , niin $A \cap B \in \mathfrak{F}$

(iii) Jos $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ , niin $A \setminus B \in \mathfrak{F}$

# Joukko-opin operaatiot: Perusjoukko 1/2

- Olkoon $\mathfrak{F}$ joukossa $S$ määritelty Boolen algebra.
- Tällöin *perusjoukko* $S$ kuuluu joukkoperheeseen $\mathfrak{F}$ :

$$S \in \mathfrak{F}$$

# Joukko-opin operaatiot: Perusjoukko 2/2

- Väite seuraa, siitä että

$$S = \varnothing^c$$

- Todistetaan siis, että

$$\varnothing^c \in \mathfrak{F}$$

- Aksiooman (i) mukaan

$$\varnothing \in \mathfrak{F}$$

- Aksiooman (ii) mukaan

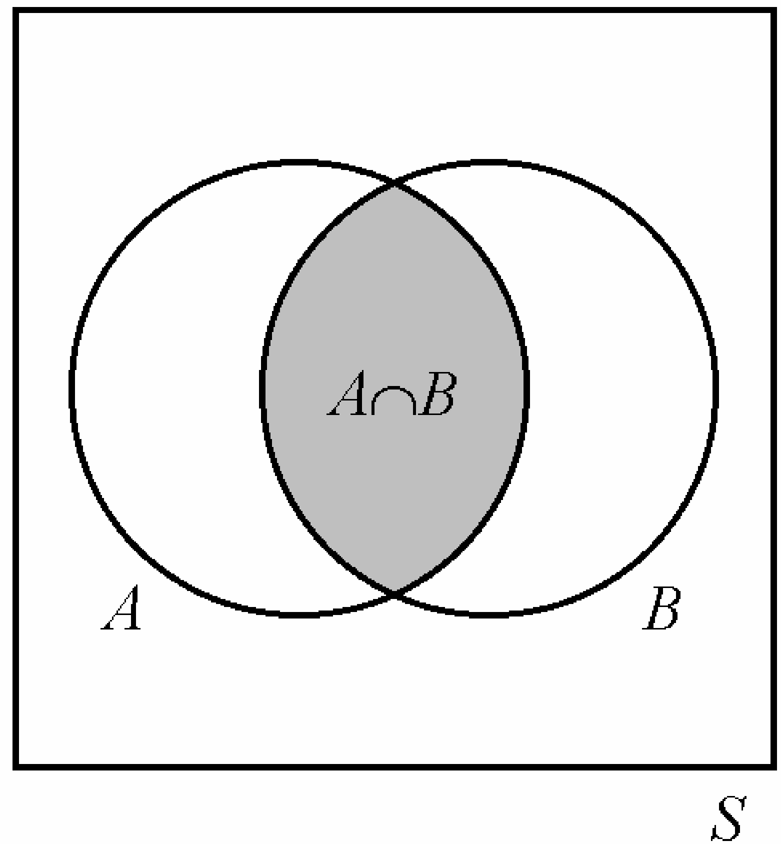
$$\varnothing^c = S \in \mathfrak{F}$$

# Joukko-opin operaatiot: Leikkausjoukko 1/2

- Olkoon $\mathfrak{F}$ joukossa $S$ määritelty Boolen algebra.
- Olkoot

  $A \in \mathfrak{F}, B \in \mathfrak{F}$
- Tällöin joukkojen $A$ ja $B$ *leikkaukselle* pätee:

  $A \cap B \in \mathfrak{F}$



# Joukko-opin operaatiot: Leikkausjoukko 2/2

- Väite seuraa siitä, että *DeMorganin lain* mukaan

  $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$

- Todistetaan siis, että

  $A \in \mathfrak{F}, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c \in \mathfrak{F}$

- Aksiooman (ii) mukaan

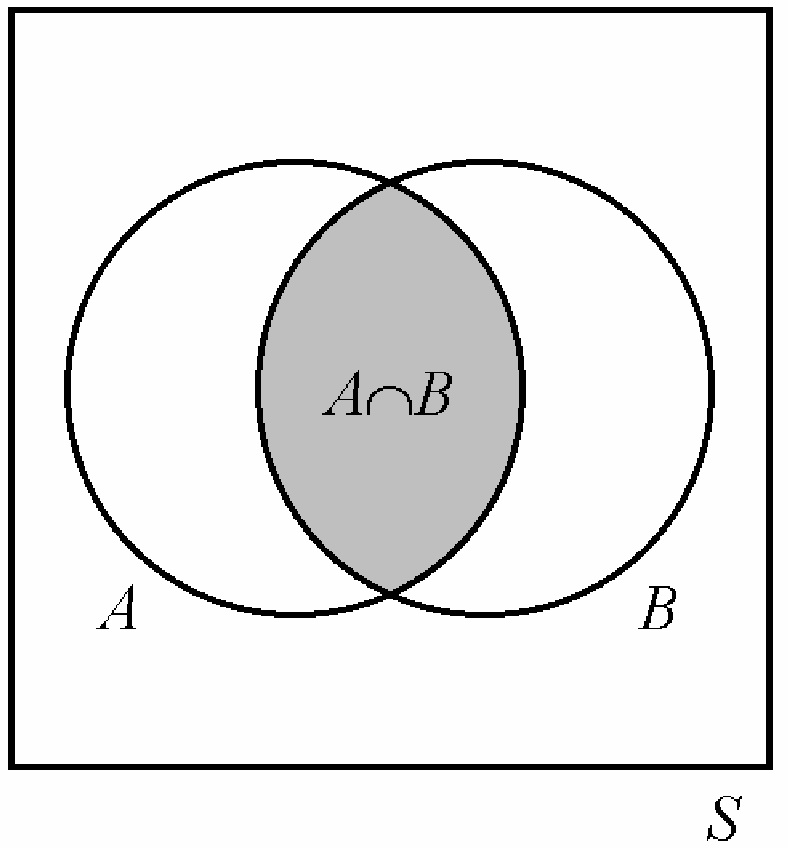
  $A \in \mathfrak{F}, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}, B^c \in \mathfrak{F}$

- Aksiooman (iii) mukaan

  $A^c \in \mathfrak{F}, B^c \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \cup B^c \in \mathfrak{F}$

- Vihdoin aksiooman (ii) mukaan

  $A^c \cup B^c \in \mathfrak{F} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c \in \mathfrak{F}$

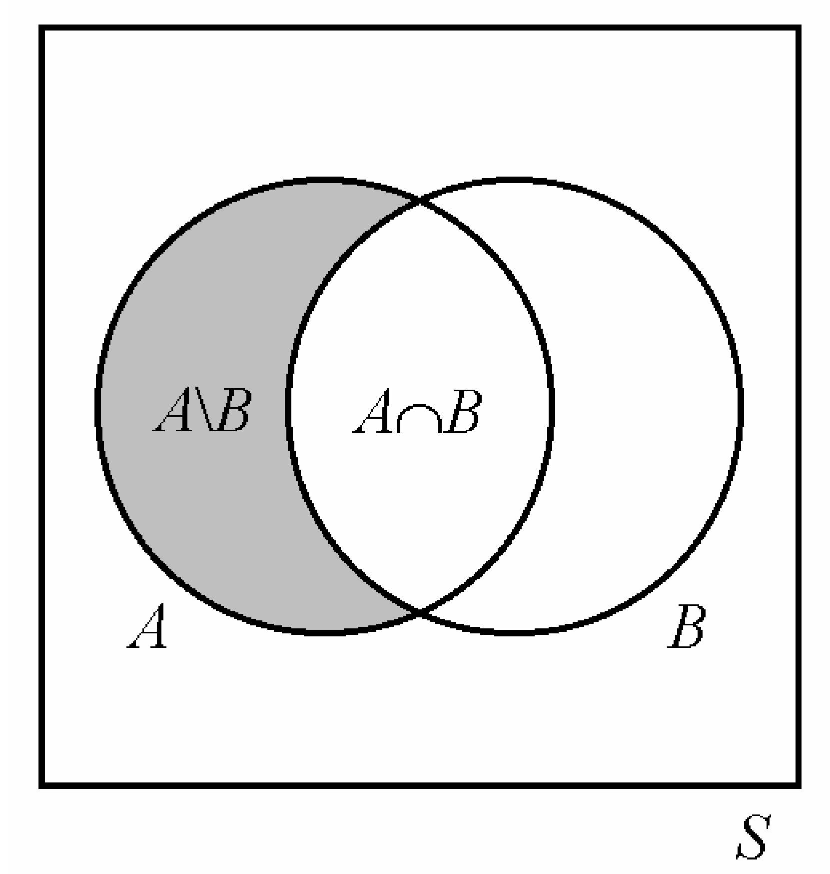


# Joukko-opin operaatiot: Erotusjoukko 1/2

- Olkoon $\mathfrak{F}$ joukossa $S$ määritelty Boolen algebra.
- Olkoot

  $A \in \mathfrak{F}, B \in \mathfrak{F}$
- Tällöin joukkojen $A$ ja $B$ *erotukselle* pätee:

  $A \setminus B \in \mathfrak{F}$



# Joukko-opin operaatiot: Erotusjoukko 2/2

- Väite seuraa siitä, että

  $A \setminus B = A \cap B^c$

- Todistetaan siis, että

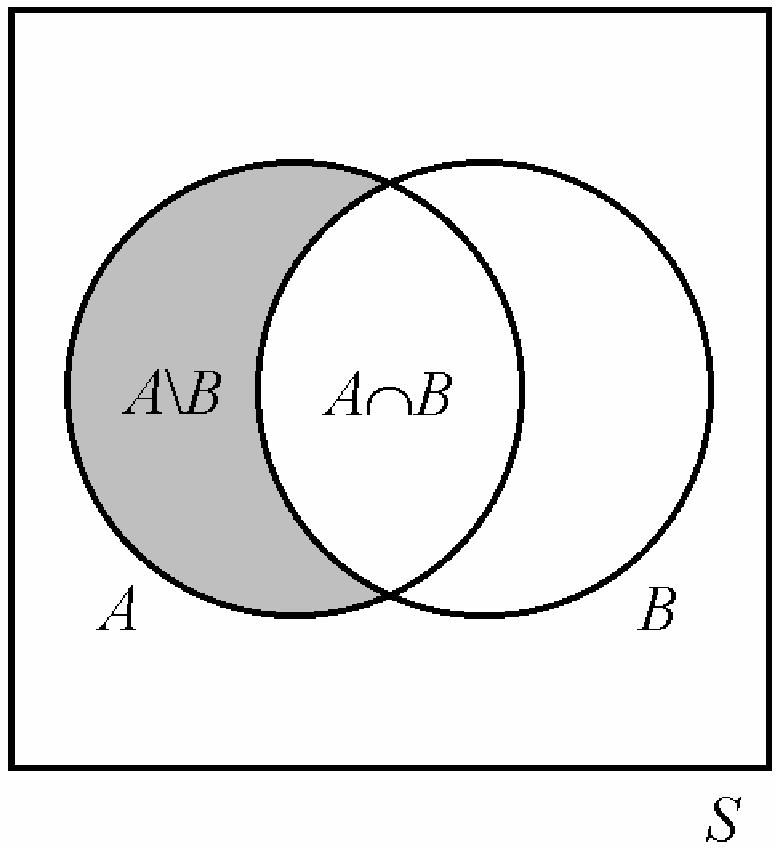
  $A \in \mathfrak{F}, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathfrak{F}$

- Aksiooman (ii) mukaan

  $B \in \mathfrak{F} \Rightarrow B^c \in \mathfrak{F}$

- Leikkausjoukkoa koskevan tuloksen mukaan

  $A \in \mathfrak{F}, B^c \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathfrak{F}$



# Boolen algebra: Esimerkki

- Olkoon $S$ mielivaltainen joukko.
- Olkoon

  $$A \subset S$$

  mielivaltainen joukon $S$ osajoukko.
- Tällöin joukkoperhe

  $$\mathfrak{F} = \{\varnothing, A, A^c, S\}$$

  muodostaa Boolen algebran joukossa $S$, koska

  (i) $\varnothing \in \mathfrak{F}$

  (ii) $B \in \mathfrak{F} \Rightarrow B^c \in \mathfrak{F}$

  (iii) $B \in \mathfrak{F}, C \in \mathfrak{F} \Rightarrow B \cup C \in \mathfrak{F}$

  Tässä $B$ ja $C$ voivat olla mitkä tahansa kaksi joukoista $\varnothing, A, A^c, S$.

# Boolen algebra tapahtuma-algebrana 1/2

- Olkoon $\mathfrak{F}$ *otosavaruudessa S* määritelty *Boolen algebra*.
- Kutsutaan Boolen algebraan $\mathfrak{F}$ kuuluvia otosavaruuden $S$ osajoukkoja **tapahtumiksi**.
- Jos siis $A \in \mathfrak{F}$, niin $A \subset S$ ja $A$ on tapahtuma.
- Kutsutaan Boolen algebraan $\mathfrak{F}$ kuuluvien otosavaruuden $S$ osajoukkojen alkioita **alkeistapahtumiksi**.
- Jos siis

$$s \in A \in \mathfrak{F}$$

jollekin $A \in \mathfrak{F}$, niin $s$ on alkeistapahtuma.

# Boolen algebra tapahtuma-algebrana 2/2

- Olkoon $\mathfrak{F}$ *otosavaruudessa S* määritelty *Boolen algebra*.
- Olkoot otosavaruuden $S$ osajoukot $A$ ja $B$ tapahtumia eli

$$A \in \mathfrak{F} \text{ ja } B \in \mathfrak{F}$$

- Tällöin siis myös

$$A^c \,,\ B^c \,,\ A \cup B \,,\ A \cap B \,,\ A \backslash B \,,\ B \backslash A$$

ovat tapahtumia.

- Siten otosavaruuden tapahtumista voidaan johtaa *uusia tapahtumia* soveltamalla niihin tavanomaisia joukko-opin operaatioita.

# Äärelliset otosavaruudet

- Olkoon $S$ *äärellinen otosavaruus*, jossa on $n$ alkiota.
- Olkoon

  $$\mathfrak{F} = \{A \mid A \subset S\}$$

  otosavaruuden $S$ *kaikkien osajoukkojen perhe*, joten joukkoperheessä $\mathfrak{F}$ on

  $$n(\mathfrak{F}) = 2^n$$

  alkiota.
- Otosavaruuden $S$ kaikkien osajoukkojen perhe $\mathfrak{F}$ muodostaa *triviaalin Boolen algebran* joukossa $S$.

# Todennäköisyyden aksioomat 1/2

- Olkoon $S$ *äärellinen otosavaruus* ja $\mathfrak{F}$ jokin sen osajoukkojen muodostama *Boolen algebra*.
- Olkoon Pr *joukkofunktio*, joka liittää jokaiseen Boolen algebraan $\mathfrak{F}$ kuuluvaan otosavaruuden $S$ osajoukkoon $A$ reaaliluvun Pr($A$).
- Jos siis $A \in \mathfrak{F}$, niin $\Pr(A) \in \mathbb{R}$.

# Todennäköisyyden aksioomat 2/2

- Joukkofunktio Pr on **todennäköisyys**, jos

(i) $\Pr(S) = 1$

(ii) $0 \le \Pr(A) \le 1$ kaikille $A \in \mathfrak{F}$

(iii) $A \in \mathfrak{F},\ B \in \mathfrak{F},\ A \cap B = \varnothing \Rightarrow$

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

# Todennäköisyyden aksioomat: Kommentteja 1/2

- *Äärellisen otosavaruuden* todennäköisyyden aksioomien (i)-(iii) mukaan *todennäköisyys* Pr on *positiivinen*, *äärellisesti additiivinen* ja *normeerattu* **mitta**.
- Aksioomat (i) ja (ii), *normeeraus* ja *positiivisuus*:

$$A \subset S \Rightarrow 0 \leq \Pr(A) \leq \Pr(S) = 1$$

- Aksiooma (iii), *äärellinen additiivisuus*:

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

- Aksiooma (iii) on *toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusääntö*.

# Todennäköisyyden aksioomat: Kommentteja 2/2

- Aksioomien (i)-(iii) olennaisena sisältönä on siis se, että *todennäköisyys on mitta* matematiikan tarkoittamassa mielessä.
- Todennäköisyyslaskentaa voidaan pitää matemaattisen *mittateorian* osana.
- Aksioomien (i)-(iii) mukaan todennäköisyysmitalla on samat ominaisuudet kuin *pinta-alamitalla* paitsi, että todennäköisyysmitta on *normeerattu* niin, että sen yläraja on 1.

# Tapahtumien todennäköisyydet äärellisessä otosavaruudessa

- Äärellisen otosavaruuden tapahtumista voidaan muodostaa *uusia tapahtumia* soveltamalla *Boolen algebran aksioomia* ja niistä johdettuja joukko-opin laskusääntöjä.
- Uusien tapahtumien *todennäköisyydet* saadaan soveltamalla *äärellisen otosavaruuden todennäköisyyden aksioomia* ja niistä johdettuja todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä.

# Äärelliset todennäköisyyskentät

- Kolmikko

$$(S, \mathfrak{F}, \Pr)$$

muodostaa **äärellisen todennäköisyyskentän**, jos seuraavat ehdot pätevät:

(i) *Otosavaruus S* on äärellinen.

(ii) Joukkoperhe $\mathfrak{F}$ on jokin joukon $S$ osajoukkojen muodostama *Boolen algebra*.

(iii) Joukkofunktio Pr on Boolen algebraan $\mathfrak{F}$ kuuluville otosavaruuden $S$ osajoukoille määritelty äärellisen otosavaruuden *todennäköisyysmitta*.

# Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen todistaminen

- *Todistetaan* seuraavat todennäköisyyslaskennan lasku-säännöt todennäköisyyden aksioomista lähtien:
  (i) **Mahdottoman tapahtuman** todennäköisyys.
  (ii) **Komplementtitapahtuman** todennäköisyys.
  (iii) **Osajoukon** todennäköisyys.
  (iv) **Yleinen yhteenlaskusääntö**.

# Mahdottoman tapahtuman todennäköisyys

- Olkoon $S$ äärellinen otosavaruus.
- Olkoon $\varnothing$ *mahdoton tapahtuma*.
- Tällöin

$$\Pr(\varnothing) = 0$$

# Mahdottoman tapahtuman todennäköisyys: Perustelu

- Olkoon $\mathfrak{F}$ otosavaruuden $S$ osajoukoille määritelty Boolen algebra.
- Olkoon $\varnothing$ *mahdoton tapahtuma*.
- Tällöin

$$\varnothing \in \mathfrak{F}$$

- Joukot $\varnothing$ ja $S$ muodostavat otosavaruuden $S$ *osituksen*:

$$\varnothing \cup S = S$$

$$\varnothing \cap S = \varnothing$$

- Todennäköisyyden *aksioomien* (i) ja (iii) mukaan

$$1 = \Pr(S) = \Pr(\varnothing \cup S) = \Pr(\varnothing) + \Pr(S) = \Pr(\varnothing) + 1$$

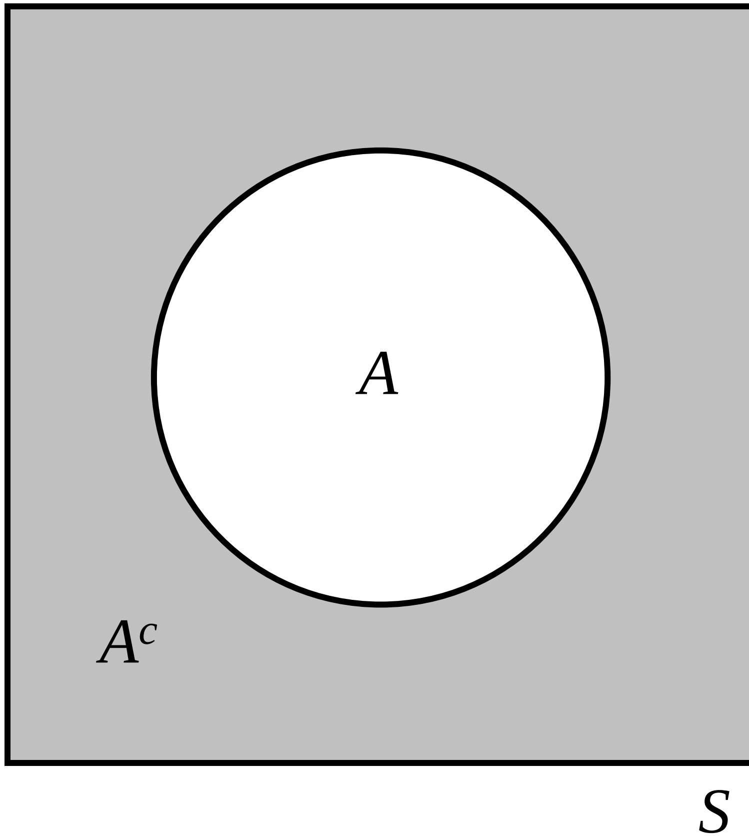
josta välttämättä seuraa

$$\Pr(\varnothing) = 0$$

# Komplementtitapahtuman todennäköisyys

- Olkoon $A$ äärellisen otos-avaruuden $S$ *tapahtuma*.
- Tällöin tapahtuman $A$ *komplementtitapahtuman* $A^c$ todennäköisyydelle pätee:

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$$



# Komplementtitapahtuman todennäköisyys: Perustelu 1/2

- Olkoon $\mathfrak{F}$ otosavaruuden $S$ osajoukoille määritelty Boolen algebra.
- Väite:

$$A \in \mathfrak{F} \Rightarrow \Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$$

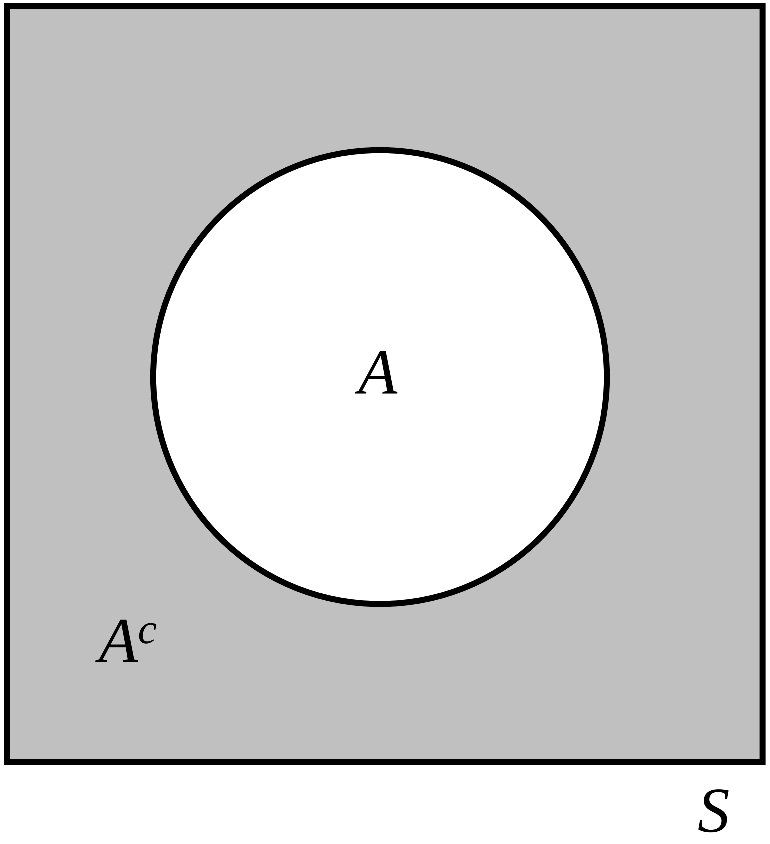
- Boolen algebran aksiooman (ii) mukaan

$$A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}$$

- Joukot $A$ ja $A^c$ muodostavat otosavaruuden $S$ *osituksen*:

$$A \cup A^c = S$$

$$A \cap A^c = \varnothing$$

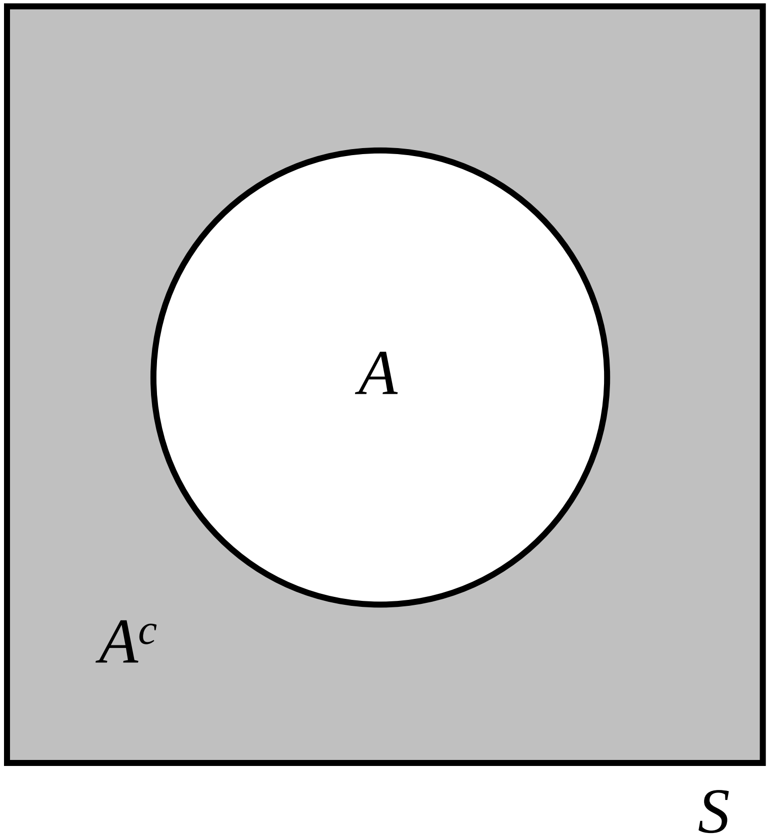


# Komplementtitapahtuman todennäköisyys: Perustelu 2/2

- Todennäköisyyden *aksioomien* (i) ja (iii) mukaan

$$
\begin{aligned}
1 &= \Pr(S) \\
&= \Pr(A \cup A^c) \\
&= \Pr(A) + \Pr(A^c)
\end{aligned}
$$

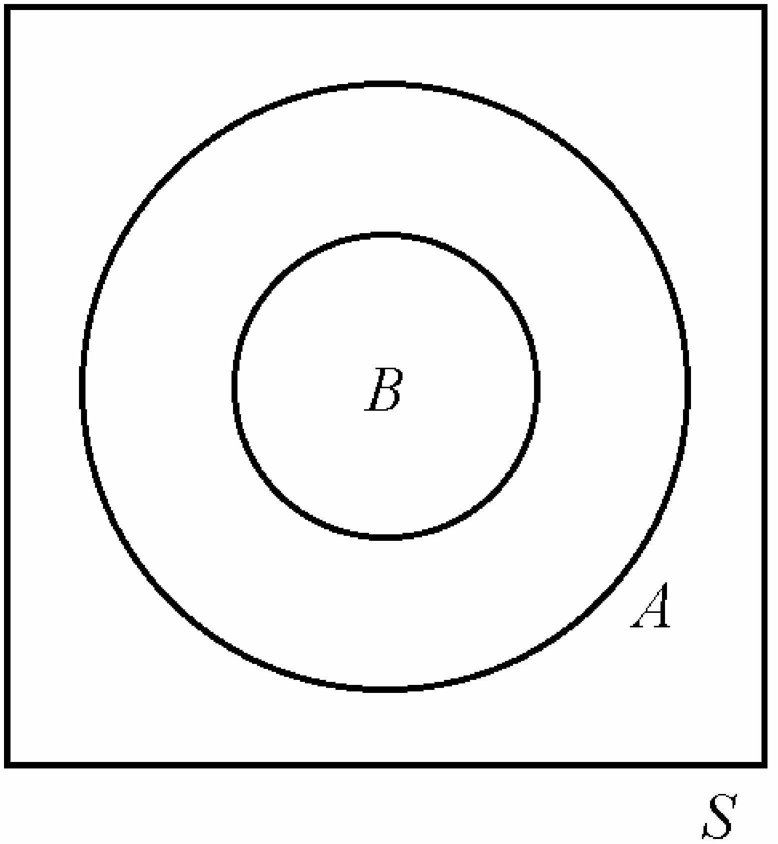
josta väite seuraa.



# Osajoukon todennäköisyys

- Olkoot $A$ ja $B$ äärellisen otosavaruuden $S$ *tapahtumia*.
- Olkoon $B \subset A$.
- Tällöin pätee:

  $\Pr(B) \leq \Pr(A)$



# Osajoukon todennäköisyys: Perustelu 1/2

- Olkoon $\mathfrak{F}$ otosavaruuden $S$ osajoukoille määritelty Boolen algebra.
- Väite:

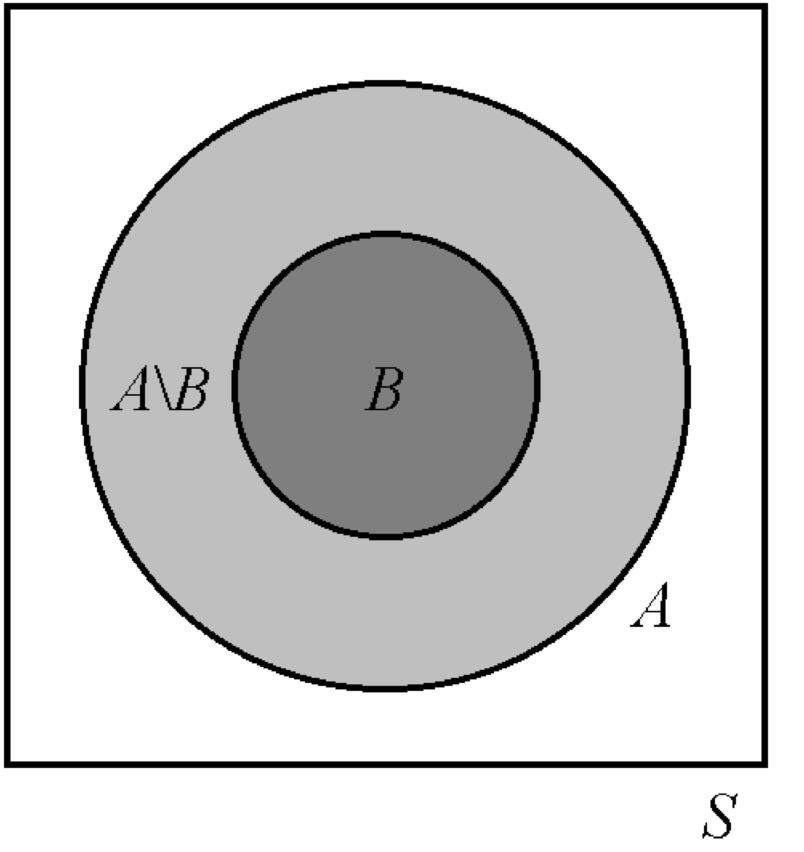
$$A \in \mathfrak{F}\,,\, B \in \mathfrak{F}\,,\, B \subset A \Rightarrow$$

$$\Pr(B) \le \Pr(A)$$

- Leikkaus- tai erotusjoukkoa koskevan tuloksen mukaan

$$A \in \mathfrak{F}\,,\, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow$$

$$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathfrak{F}$$



# Osajoukon todennäköisyys: Perustelu 2/2

- Koska $B \subset A$, joukot $B$ ja $A \backslash B$ muodostavat joukon $A$ *osituksen*:

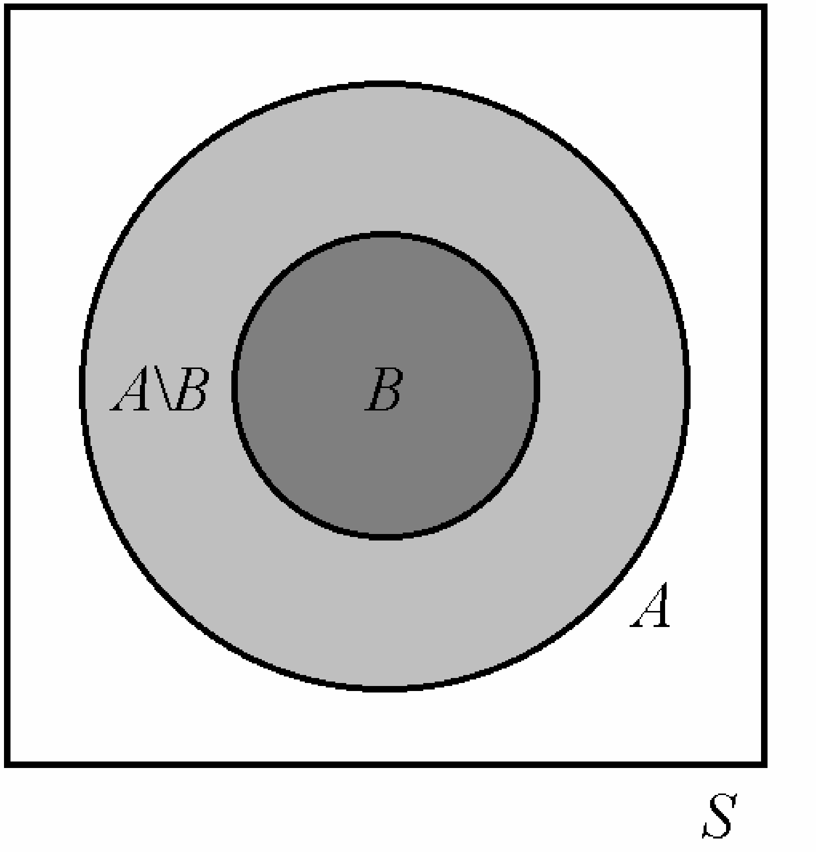
  $B \cup (A \backslash B) = A$

  $B \cap (A \backslash B) = \varnothing$

- Aksioomien (ii) ja (iii) mukaan

  $\Pr(A) = \Pr(B) + \Pr(A \setminus B) \geq \Pr(B)$

  mikä oli todistettava väite.

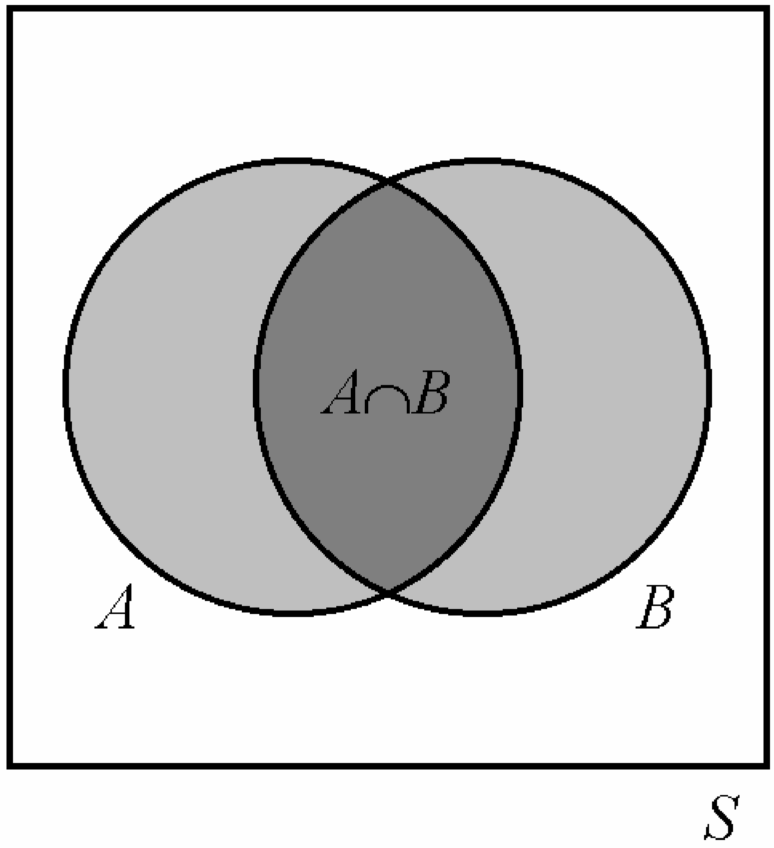


# Yleinen yhteenlaskusääntö

- Olkoot $A$ ja $B$ äärellisen otosavaruuden $S$ tapahtumia.
- Tällöin pätee *yleinen yhteenlaskusääntö*:

  $\Pr(A \cup B)$

  $= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$



# Yleinen yhteenlaskusääntö: Perustelu 1/3

- Olkoon $\mathfrak{F}$ otosavaruuden $S$ osajoukoille määritelty Boolen algebra.
- Väite:

  $A \in \mathfrak{F}\,,\; B \in \mathfrak{F} \Rightarrow$

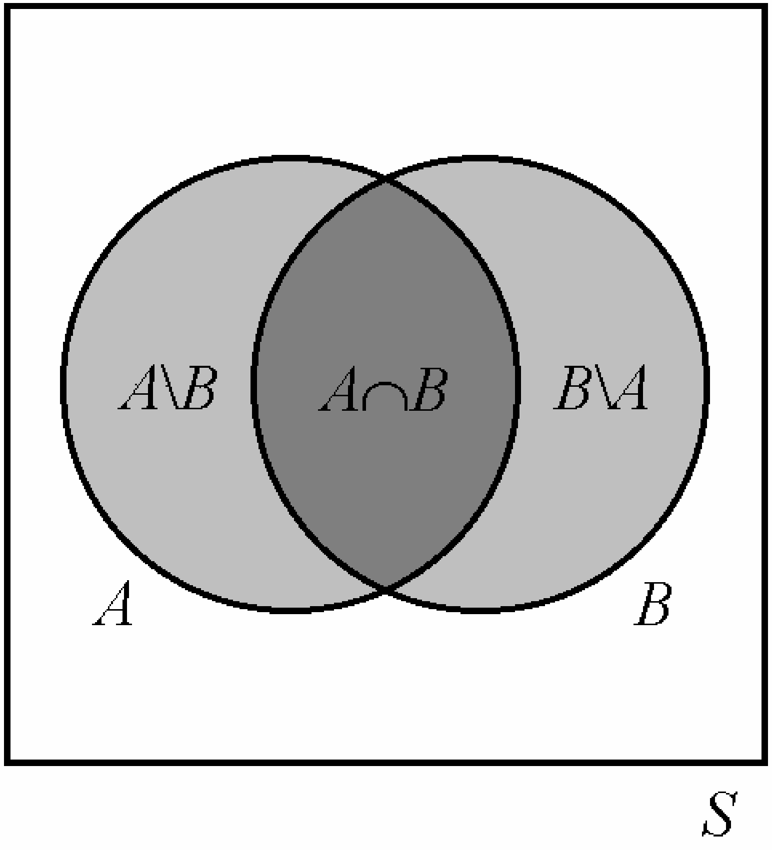
  $\Pr(A \cup B)$

  $= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$
- Boolen algebran aksiooman (iii) sekä leikkaus- ja erotusjoukkoja koskevien tuloksien mukaan

  $A \in \mathfrak{F}\,,\; B \in \mathfrak{F} \Rightarrow$

  $A \cup B \in \mathfrak{F}\,,\; A \cap B \in \mathfrak{F}$

  $A \setminus B \in \mathfrak{F}\,,\; B \setminus A \in \mathfrak{F}$



# Yleinen yhteenlaskusääntö: Perustelu 2/3

- Joukot $A$ ja $B\backslash A$ muodostavat joukon $A\cup B$ *osituksen*:

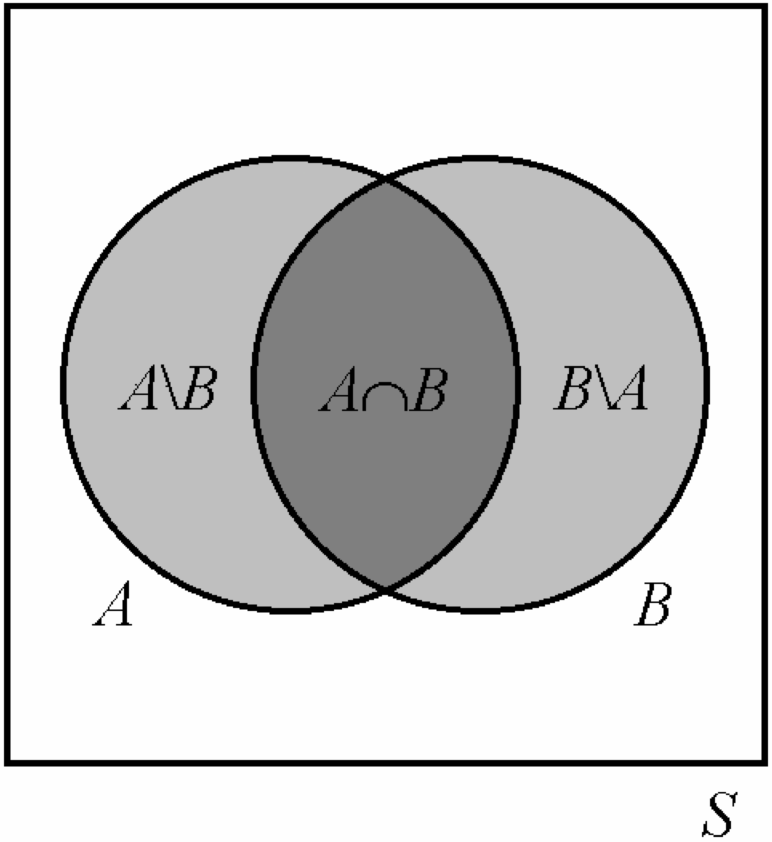
  (1) $A\cup B = A\cup(B\backslash A)$

  $A\cap(B\backslash A) = \varnothing$

- Joukot $A\cap B$ ja $B\backslash A$ muodostavat joukon $B$ *osituksen*:

  (2) $B = (A\cap B)\cup(B\backslash A)$

  $(A\cap B)\cap(B\backslash A) = \varnothing$



# Yleinen yhteenlaskusääntö: Perustelu 3/3

- Osituksesta (1) ja *aksioomasta* (iii) seuraa:

  (3) $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B \backslash A)$

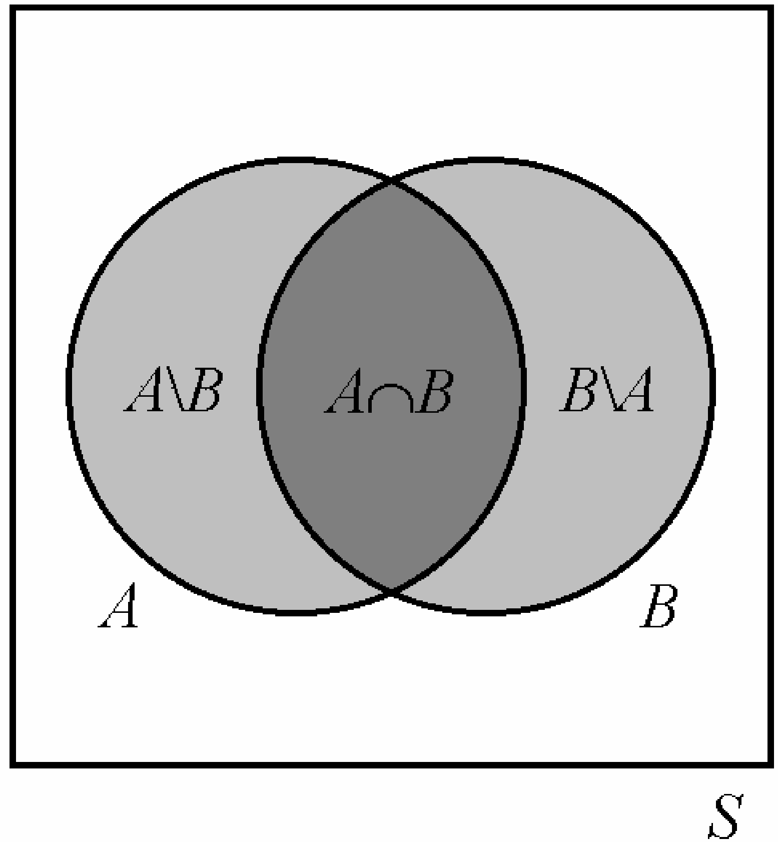
- Osituksesta (2) ja *aksioomasta* (iii) seuraa:

  (4) $\Pr(B) = \Pr(A \cap B) + \Pr(B \backslash A)$

- Ratkaisemalla $\Pr(B \backslash A)$ yhtälöstä (4) ja sijoittamalla ratkaisu yhtälöön (3) saadaan väite:

  $\Pr(A \cup B)$

  $= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$



# Todennäköisyyden aksioomat

Todennäköisyyden määritteleminen

Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

\>> Klassinen todennäköisyys, suhteellinen frekvenssi ja ehdollinen todennäköisyys

Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

# Klassinen todennäköisyys ja suhteellinen frekvenssi todennäköisyyksinä

- Osoitamme, että *klassinen todennäköisyys* ja *suhteellinen frekvenssi* toteuttavat – sopivasti määriteltyinä – äärellisen otosavaruuden todennäköisyyden aksioomat.
- Siten klassista todennäköisyyttä ja suhteellista frekvenssiä voidaan pitää todennäköisyyden *tulkintoina*.

# Klassinen todennäköisyys: Määritelmä 1/2

- Olkoon $S = \{s_1 , s_2 , \ldots , s_n\}$ johonkin satunnaiskokeeseen liittyvä äärellinen *otosavaruus*, jossa on $n = n(S)$ alkeistapahtumaa.
- Oletetaan, että otosavaruuden $S$ alkeistapahtumat ovat *symmetrisiä* eli yhtä todennäköisiä.
- Tällöin

$$\Pr(s_i) = \frac{1}{n}, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

- Olkoon $A = \left\{ s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_k} \right\} \subset S$ *tapahtuma*, jossa on $k = n(A)$ alkeistapahtumaa, joita sanotaan tapahtumalle $A$ *suotuisiksi*.

# Klassinen todennäköisyys: Määritelmä 2/2

- Määritellään tapahtuman $A$ **klassinen todennäköisyys** $\Pr_c(A)$ kaavalla
$$\Pr_c(A) = \frac{k}{n}$$
jossa siis
$$k = n(A)$$
$$n = n(S)$$
- Klassinen todennäköisyys $\Pr_c(A)$ toteuttaa todennäköisyyden aksioomat (i)-(iii), joten **klassinen todennäköisyys on todennäköisyys**.

# Klassisen todennäköisyyden määritelmä: Perustelu

- Olkoon

$$A=\left\{s_{i_1},s_{i_2},\ldots,s_{i_k}\right\}\subset S=\left\{s_1,s_2,\ldots,s_n\right\}$$

- Tällöin

$$A=\left\{s_{i_1}\right\}\cup\left\{s_{i_2}\right\}\cup\cdots\cup\left\{s_{i_k}\right\}$$

ja lisäksi alkeistapahtumat

$$s_{i_j}\ ,\ j=1,2,\ldots,k$$

ovat *pareittain toisensa poissulkevia*.

- Koska alkeistapahtumat $s_1$ , $s_2$ , … , $s_n$ on oletettu *symmetrisiksi*, todennäköisyyden aksioomasta (iii) seuraa:

$$\Pr(A)=\Pr(s_{i_1})+\Pr(s_{i_2})+\cdots+\Pr(s_{i_k})=\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{k\ \text{kpl}}=\frac{k}{n}=\Pr_c(A)$$

# Klassinen todennäköisyys on todennäköisyys: Perustelu 1/2

- Todistetaan, että klassinen todennäköisyys $\Pr_c(\cdot)$ toteuttaa todennäköisyyden aksioomat.
- Aksiooma (i):

Koska $n(S) = n$, niin

$$\Pr_c(S) = n/n = 1$$

- Aksiooma (ii):

Kaikille tapahtumille $A \subset S$ pätee

$$0 \le n(A) = k \le n = n(S)$$

Siten

$$0 \le \Pr_c(A) = k/n \le 1$$

# Klassinen todennäköisyys on todennäköisyys: Perustelu 2/2

- Aksiooma (iii):

  Jos tapahtumat $A$ ja $B$ ovat *toisensa poissulkevia* eli, jos $A \cap B = \varnothing$, niin

  $$k_{A \cup B} = k_A + k_B$$

  Tällöin

  $$\begin{aligned}\Pr_c(A \cup B) &= \frac{k_{A \cup B}}{n} = \frac{k_A + k_B}{n} \\ &= \frac{k_A}{n} + \frac{k_B}{n} \\ &= \Pr_c(A) + \Pr_c(B)\end{aligned}$$

# Suhteellinen frekvenssi: Määritelmä

- Olkoon $S$ johonkin satunnaiskokeeseen liittyvä äärellinen *otosavaruus*.
- Olkoon $A \subset S$ *tapahtuma* otosavaruudessa $S$.
- Toistetaan satunnaiskoetta $n$ kertaa.
- Olkoon $f_A$ tapahtuman $A$ *frekvenssi* koetoistojen joukossa.
- Tällöin

$$\frac{f_A}{n}$$

on tapahtuman $A$ **suhteellinen frekvenssi**.

# Suhteellinen frekvenssi on todennäköisyys

- Käytetään tapahtuman $A$ suhteelliselle frekvenssille $f_A/n$ merkintää:

$$\Pr_f(A) = \frac{f_A}{n}$$

- Suhteellinen frekvenssi $\Pr_f(A)$ toteuttaa todennäköisyyden aksioomat (i)-(iii), joten **suhteellinen frekvenssi on todennäköisyys**.

# Suhteellinen frekvenssi on todennäköisyys: Perustelu 1/2

- Todistetaan, että suhteellinen frekvenssi $\Pr_f(\cdot)$ toteuttaa todennäköisyyden aksioomat.
- Toistetaan satunnaiskoetta $n$ kertaa.
- Aksiooma (i):

  Koska otosavaruus $S$ on *varma tapahtuma* eli $S$ sattuu jokaisessa koetoistossa, niin

  $$f_S = n$$

  Siten

  $$\Pr_f(S) = f_S/n = n/n = 1$$

- Aksiooma (ii):

  Kaikille tapahtumille $A \subset S$ pätee $0 \leq f_A \leq n$.

  Siten

  $$0 \leq \Pr_f(A) = f_A/n \leq 1$$

# Suhteellinen frekvenssi on todennäköisyys: Perustelu 2/2

- Aksiooma (iii):

  Jos tapahtumat $A$ ja $B$ ovat *toisensa poissulkevia* eli, jos $A \cap B = \varnothing$, niin

  $$f_{A \cup B} = f_A + f_B$$

  Tällöin

  $$\begin{aligned}\Pr_f(A \cup B) &= \frac{f_{A \cup B}}{n} = \frac{f_A + f_B}{n} \\ &= \frac{f_A}{n} + \frac{f_B}{n} \\ &= \Pr_f(A) + \Pr_f(B)\end{aligned}$$

Suhteellinen frekvenssi
## Empiirinen todennäköisyys

- Jos tapahtuman $A$ suhteellinen frekvenssi

$$\Pr_f(A) = \frac{f_A}{n}$$

lähestyy toistokokeiden lukumäärän $n$ rajatta kasvaessa jotakin kiinteätä lukua $p$, sanotaan lukua $p$ tapahtuman $A$ **empiiriseksi todennäköisyydeksi**.

- Jos siis $p$ on tapahtuman $A$ empiirinen todennäköisyys, niin

$$\Pr_f(A) = \frac{f_A}{n} \to p, \text{ kun } n \to +\infty$$

# Todennäköisyyden frekvenssitulkinta

- Oletetaan, että tapahtuman $A$ todennäköisyys on $p$.
- Toistetaan sitä satunnaiskoetta, johon tapahtuma $A$ liittyy, $n$ kertaa.
- **Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan** mukaan tapahtuman $A$ suhteellinen frekvenssi

$$\Pr_f(A) = \frac{f_A}{n}$$

*vaihtelee satunnaisesti koetoistosta toiseen, mutta saa keskimäärin tapahtuman A todennäköisyyttä p lähellä olevia arvoja.*

# Ehdollinen todennäköisyys todennäköisyytenä

- Seuraavassa osoitetaan, että *ehdollinen todennäköisyys* toteuttaa äärellisen otosavaruuden todennäköisyyden aksioomat.
- Siten ehdollista todennäköisyyttä voidaan pitää todennäköisyyden käsitteen *laajennuksena*.

# Ehdollinen todennäköisyys: Määritelmä

- Olkoon $S$ johonkin satunnaiskokeeseen liittyvä äärellinen *otosavaruus*.
- Olkoot $A \subset S$ ja $C \subset S$ *tapahtumia* ja $\Pr(C) \neq 0$.
- Määritellään tapahtuman $A$ **ehdollinen todennäköisyys** $\Pr(A|C)$ kaavalla

$$\Pr(A|C) = \frac{\Pr(A \cap C)}{\Pr(C)}$$

- Ehdollinen todennäköisyys $\Pr(A|C)$ toteuttaa todennäköisyyden aksioomat (i)-(iii), joten **ehdollinen todennäköisyys on todennäköisyys**.

# Ehdollinen todennäköisyys on todennäköisyys: Perustelu 1/3

- Todistetaan, että ehdollinen todennäköisyys $\Pr(\cdot \mid \cdot)$ toteuttaa todennäköisyyden aksioomat.
- Aksiooma (i):

  Kaikille tapahtumille $C \subset S$ pätee $S \cap C = C$.

  Siten

$$\Pr\left(S \middle| C\right) = \frac{\Pr(S \cap C)}{\Pr(C)} = \frac{\Pr(C)}{\Pr(C)} = 1$$

- Aksiooma (ii):

  Kaikille tapahtumille $A \subset S$ ja $C \subset S$ pätee $A \cap C \subset C$, joten

$$0 \le \Pr(A \cap C) \le \Pr(C).$$

  Siten

$$0 \le \Pr\left(A \middle| C\right) = \frac{\Pr(A \cap C)}{\Pr(C)} \le \frac{\Pr(C)}{\Pr(C)} = 1$$

# Ehdollinen todennäköisyys on todennäköisyys: Perustelu 2/3

- Aksiooma (iii):

  Kaikille joukoille $A$, $B$ ja $C$ pätee *distribuutiolaki*

  $$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

  Jos tapahtumat $A$ ja $B$ ovat *toisensa poissulkevia* eli, jos $A \cap B = \varnothing$, niin kaikille $C \subset S$ pätee

  $$(A \cap C) \cap (B \cap C) = \varnothing$$

# Ehdollinen todennäköisyys on todennäköisyys: Perustelu 3/3

Tällöin

$$\begin{aligned}
\Pr\left(A \cup B \middle| C\right) &= \frac{\Pr\left((A \cup B) \cap C\right)}{\Pr(C)} \\
&= \frac{\Pr\left((A \cap C) \cup (B \cap C)\right)}{\Pr(C)} \\
&= \frac{\Pr(A \cap C)}{\Pr(C)} + \frac{\Pr(B \cap C)}{\Pr(C)} \\
&= \Pr\left(A \middle| C\right) + \Pr\left(B \middle| C\right)
\end{aligned}$$

# Todennäköisyyden aksioomat

Todennäköisyyden määritteleminen

Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

Klassinen todennäköisyys, suhteellinen frekvenssi ja ehdollinen todennäköisyys

\>> Todennäköisyyden aksioomat äärettömissä otosavaruuksissa

# Äärettömät otosavaruudet

- Äärellisille otosavaruuksille esitetyt aksioomat eivät sellaisenaan kelpaa *äärettömille otosavaruuksille*:
- Tämä johtuu seuraavista seikoista:

(i) *Äärettömän* otosavaruuden tapauksessa kaikki otos-avaruuden osajoukot *eivät välttämättä kelpaa* tapahtumiksi.

(ii) *Äärellisen* otosavaruuden aksiooma (iii) on *äärettömän* otosavaruuden tapauksessa korvattava aksioomalla, joka sallii *äärettömän monen* pareittain toisensa poissulkevan tapahtuman tarkastelun.

# $\sigma$-algebra: Määritelmä 1/2

- Olkoon $S$ joukko.
- Olkoon $\mathfrak{F}$ *jokin* joukon $S$ osajoukkojen muodostama *joukkoperhe*.
- Jos siis joukko $A$ on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio, niin $A$ on joukon $S$ osajoukko:

$$A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \subset S$$

# $\sigma$-algebra: Määritelmä 2/2

- Joukkoperhe $\mathfrak{F}$ on **$\sigma$-algebra**, jos

(i) *Tyhjä joukko* $\varnothing$ on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio:

$$\varnothing \in \mathfrak{F}$$

(ii) Jos joukko $A$ on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio, niin sen *komplementti* $A^c$ on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio:

$$A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}$$

(iii) Jos joukot $A_1$, $A_2$, $A_3$, … ovat joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkioita, niin niiden *yhdiste* $\cup A_i$ on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$$

# $\sigma$-algebrat ja joukko-opin operaatiot 1/2

- Olkoon $\mathfrak{F}$ joukossa $S$ määritelty $\sigma$-*algebra*.
- Olkoot

$$A_i \in \mathfrak{F}\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

- Suoraan $\sigma$-algebran *aksioomien mukaan* joukkojen $A_i$ *komplementit* ja niiden *yhdiste* $\cup A_i$ ovat joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkioita:

$$A_i^c \in \mathfrak{F}\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{ja} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$$

- Lisäksi voidaan osoittaa, että joukkojen $A_i$ *leikkaus* $\cap A_i$ on joukkoperheen $\mathfrak{F}$ alkio:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$$

# $\sigma$-algebrat ja joukko-opin operaatiot 2/2

- $\sigma$-algebrat ovat siis *suljettuja* numeroituvan monen tavanomaisen joukko-opin operaation suhteen.
- Tällä tarkoitetaan siitä, että *numeroituva* määrä tavanomaisia joukko-opin operaatioita *ei vie $\sigma$-algebran ulkopuolelle*:

  Jos $\sigma$-algebran $\mathfrak{F}$ joukkoihin sovelletaan *korkeintaan numeroituva määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita *komplementti*, *yhdiste*, *leikkaus* ja *erotus*, niin tuloksena saatavat joukot kuuluvat edelleen $\sigma$-algebraan $\mathfrak{F}$ .

# $\sigma$-algebrat ja Boolen algebrat

- Jos joukon $S$ osajoukkojen perhe $\mathfrak{F}$ toteuttaa $\sigma$-*algebran* aksioomat, niin se toteuttaa myös *Boolen algebran* aksioomat.
- Jokainen Boolen algebran aksioomista johdettu *joukko-opin sääntö* pätee myös $\sigma$-algebroille.

# Kolmogorovin aksioomat todennäköisyydelle 1/2

- Olkoon $S$ *otosavaruus* ja $\mathfrak{F}$ jokin joukon $S$ osajoukkojen *perhe*, joka muodostaa $\sigma$-*algebran*.
- Olkoon Pr *joukkofunktio*, joka liittää jokaiseen $\sigma$-algebraan $\mathfrak{F}$ kuuluvaan otosavaruuden $S$ osajoukkoon $A$ reaaliluvun Pr($A$).
- Jos siis $A \in \mathfrak{F}$, niin $\Pr(A) \in \mathbb{R}$.

# Kolmogorovin aksioomat todennäköisyydelle 2/2

- Joukkofunktio Pr on **todennäköisyys**, jos

(i) $\Pr(S) = 1$

(ii) $0 \leq \Pr(A) \leq 1$ kaikille $A \in \mathfrak{F}$

(iii) $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{F}$ ja $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j \Rightarrow$

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i)$$

# Kolmogorovin aksioomat: Kommentteja 1/2

- Kolmogorovin aksioomien (i)-(iii) mukaan *toden-näköisyys* Pr on *positiivinen*, *täydellisesti additiivinen* ja *normeerattu* **mitta**.
- Aksioomat (i) ja (ii), *normeeraus* ja *positiivisuus*:

$$A \in \mathfrak{F} \Rightarrow 0 \leq \Pr(A) \leq \Pr(S) = 1$$

- Aksiooma (iii), *täydellinen additiivisuus*:

Jos $A_i \in \mathfrak{F}$ , $i = 1, 2, 3, \ldots$ ja $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$ , niin

$$\Pr(\cup A_i) = \sum \Pr(A_i)$$

- Aksiooma (iii) on *pareittain toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusääntö*.

# Kolmogorovin aksioomat: Kommentteja 2/2

- Aksioomien (i)-(iii) olennaisena sisältönä on siis se, että *todennäköisyys on mitta* matematiikan tarkoittamassa mielessä.
- Todennäköisyyslaskentaa voidaan pitää matemaattisen *mittateorian* osana.
- Aksioomien (i)-(iii) mukaan todennäköisyysmitalla on samat ominaisuudet kuin *pinta-alamitalla* paitsi, että todennäköisyysmitta on *normeerattu* niin, että sen yläraja on 1.

# Kolmogorovin aksioomat ja äärellisen otosavaruuden aksioomat

- Jos joukkofunktio Pr toteuttaa todennäköisyyden aksioomat *äärettömille otosavaruuksille*, niin se toteuttaa todennäköisyyden aksioomat myös *äärellisille otos-avaruuksille*.
- Jokainen äärellisen otosavaruuden todennäköisyyden aksioomista johdettu *todennäköisyyden laskusääntö* pätee myös äärettömille otosavaruuksille.

# Mitallisuus 1/2

- Jos $S$ on *äärellinen* otosavaruus, *kaikille* otosavaruuden $S$ osajoukoille $A \subset S$ *voidaan määritellä* todennäköisyys.
- Siten *äärellisen* otosavaruuden $S$ tapauksessa *kaikki* otosavaruuden osajoukot $A \subset S$ *kelpaavat* tapahtumiksi.
- Jos $S$ on *ääretön otosavaruus*, *kaikille* otosavaruuden $S$ osajoukoille $A \subset S$ *ei voida välttämättä määritellä* todennäköisyyttä.
- Siten *äärettömän* otosavaruuden $S$ tapauksessa *kaikki* otosavaruuden osajoukot $A \subset S$ *eivät välttämättä kelpaa* tapahtumiksi.

# Mitallisuus 2/2

- Sellaisia otosavaruuden $S$ osajoukkoja $A \subset S$, joille *voidaan* määritellä todennäköisyys sanotaan **mitallisiksi**.
- Sellaisia otosavaruuden $S$ osajoukkoja $A \subset S$, joille *ei voida* määritellä todennäköisyyttä sanotaan **epä-mitallisiksi**.
- Voidaan osoittaa, että otosavaruuden $S$ *mitallisten osa-joukkojen perhe* muodostaa $\sigma$-*algebran*.

## Mitallisuus ja reaalilukujen joukko 1/2

- Jos otosavaruutena *S* on *reaalilukujen joukko* $\mathbb{R}$, mm. kaikki reaaliakselin *välit* sekä *avoimet* ja *suljetut joukot* ovat mitallisia ja kelpaavat tapahtumiksi.
- Voidaan osoittaa, että reaalilukujen joukolla $\mathbb{R}$ on todennäköisyysmitan suhteen *epämitallisia osajoukkoja*, jotka eivät kelpaa tapahtumiksi.

# Mitallisuus ja reaalilukujen joukko 2/2

- *Kaikki* reaalilukujen joukon todennäköisyysmitan suhteen *mitalliset osajoukot* saadaan tyyppiä

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -\infty < x \leq b\}$$

olevista puoliavoimista väleistä soveltamalla niihin *korkeintaan numeroituva määrä* komplementti-, yhdiste- ja leikkausoperaatiota.

- Muotoa $(-\infty, b]$ olevat reaaliakselin välit *virittävät* reaalilukujen joukon mitallisten osajoukkojen muodostaman $\sigma$-algebran.
- Tähän tulokseen perustuu *kertymäfunktion* keskeinen asema *matemaattisessa tilastotieteessä*; ks. lukua **Kertymäfunktio.**

# Tapahtumien todennäköisyydet äärettömässä otosavaruudessa

- Otosavaruuden mitallisista osajoukoista eli tapahtumista voidaan muodostaa *uusia* mitallisia osajoukkoja eli tapahtumia soveltamalla $\sigma$-*algebran aksioomia* ja niistä johdettuja joukko-opin sääntöjä.
- Uusien tapahtumien *todennäköisyydet* saadaan soveltamalla *Kolmogorovin aksioomia* ja niistä johdettuja todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä.

# Todennäköisyyskentät

- Kolmikko

  $$(S, \mathfrak{F}, \Pr)$$

  muodostaa **todennäköisyyskentän**, jos seuraavat ehdot pätevät:

  (i) *S* on *joukko*.

  (ii) Joukkoperhe $\mathfrak{F}$ muodostaa $\sigma$-*algebran* joukossa *S*.

  (iii) Joukkofunktio Pr on $\sigma$-algebraan $\mathfrak{F}$ kuuluville joukon *S* osajoukoille määritelty *todennäköisyysmitta*, joka toteuttaa Kolmogorovin aksioomat.

# Lause 1

- Olkoon $(S, \mathfrak{F}, \Pr)$ *todennäköisyyskenttä* ja $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{F}$.

  Tällöin pätee:

  (i) Jos $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ , niin

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \Pr(A_n)$$

  (ii) Jos $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ , niin

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \Pr(A_n)$$

# Lause 1: Todistus kohdalle (i) – 1/4

- Määritellään

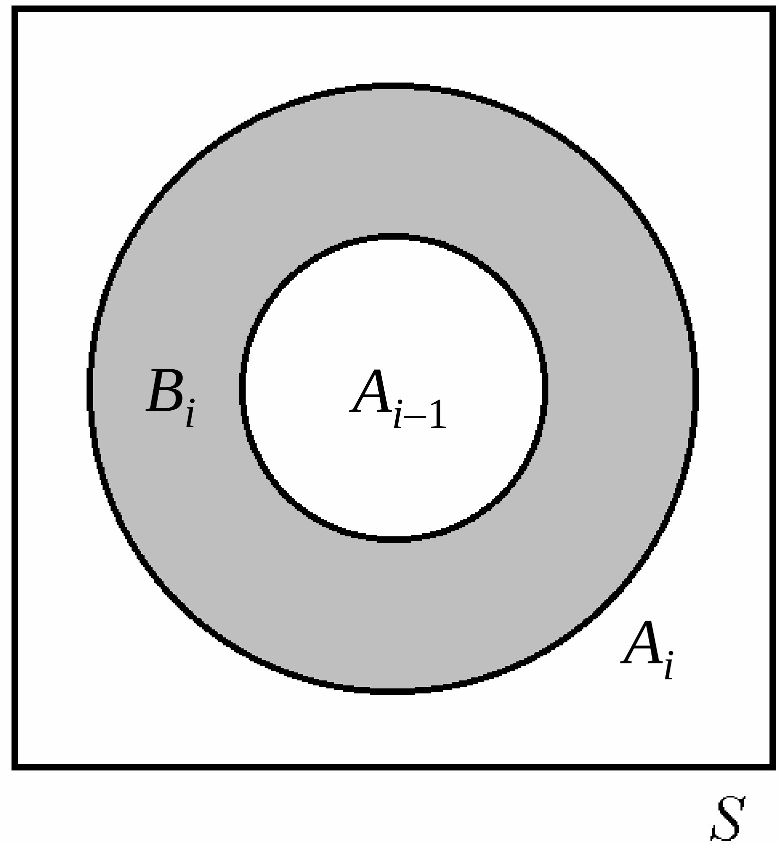
$$B_0 = A_0 = \varnothing$$
$$B_1 = A_1$$
$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$
$$B_3 = A_3 \setminus A_2$$
$$\dots$$

ja yleisesti

$$B_i = A_i \setminus A_{i-1} = A_i \cap A_{i-1}^c,\ i = 1, 2, 3, \dots$$

- Joukot $B_i$ , $i$ = 0, 1, 2, 3, … ovat *pareittain toisensa poissulkevia*, koska oletuksen mukaan

$$A_{i-1} \subset A_i\ ,\ i = 1, 2, 3, \dots$$



# Lause 1:
# Todistus kohdalle (i) – 2/4

- Oletuksesta

  $A_{i-1} \subset A_i$ , $i$ = 1, 2, 3, …

  seuraa:

  $$\Pr(B_i) = \Pr(A_i \setminus A_{i-1}) = \Pr(A_i) - \Pr(A_{i-1})$$

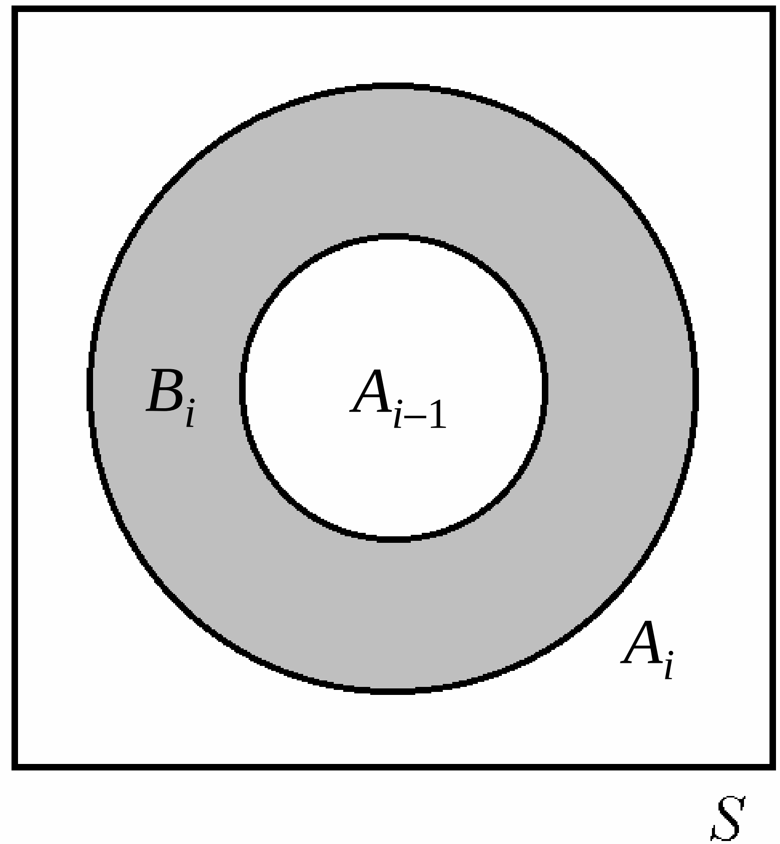
  $$i = 1, 2, 3, \ldots$$

- Lisäksi on selvää, että

  $$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

- Siten

  $$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$



# Lause 1: Todistus kohdalle (i) – 3/4

- Koska joukot $B_i$ , $i$ = 0, 1, 2, 3, … ovat pareittain toisensa poissulkevia, *Kolmogorovin aksioomasta* (iii) seuraa:

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(B_i) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \Pr(B_i)$$

- Sijoittamalla tähän $\Pr(B_i) = \Pr(A_i) - \Pr(A_{i-1})$ , $i = 1, 2, 3, \ldots$ saadaan

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \Pr(B_i) = \lim_{n\to+\infty} \Big[ & \Pr(A_1) + \Pr(A_2) - \Pr(A_1) \\ & + \Pr(A_3) - \Pr(A_2) \\ & \ldots \\ & + \Pr(A_{n-1}) - \Pr(A_{n-2}) \\ & + \Pr(A_n) - \Pr(A_{n-1}) \Big] \\ = \lim_{n\to+\infty} & \Pr(A_n)\end{aligned}$$

# Lause 1: Todistus kohdalle (i) – 4/4

- Yhdistämällä edellä johdetut tulokset saadaan lopulta:

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \Pr(A_n)$$

# Lause 1:
# Todistus kohdalle (ii) – 1/3

- Määritellään

$$C_0 = S$$

$$C_1 = A_1^c$$

$$C_2 = A_2^c$$

$$C_3 = A_3^c$$

$$\ldots$$

ja yleisesti

$$C_i = A_i^c\,,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

- Oletuksesta $A_{i-1} \supset A_i$ , $i$ = 1, 2, 3, … seuraa:

$$C_{i-1} = A_{i-1}^c \subset A_i^c = C_i\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

# Lause 1: Todistus kohdalle (ii) – 2/3

- Sovelletaan joukkoihin $C_i$ , $i$ = 1, 2, 3, … Lauseen 1 kohtaa (i):

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \Pr\left(C_n\right)$$

- Koska $C_i = A_i^c$ , $i = 1, 2, 3, \ldots$ , niin

$$\Pr(C_i) = \Pr(A_i^c) = 1 - \Pr(A_i) \text{ , } i = 1, 2, 3, \ldots$$

- *DeMorganin lain* mukaan

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)^c = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

- *Komplementtitapahtuman todennäköisyyden* kaavan mukaan

$$\Pr\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)^c\right] = 1 - \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)$$

# Lause 1: Todistus kohdalle (ii) – 3/3

- Yhdistämällä edellä johdetut tulokset saadaan lopulta:

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \Pr\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)^c\right] \\
&= 1 - \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) \\
&= 1 - \lim_{n\to+\infty} \Pr(C_n) \\
&= 1 - \lim_{n\to+\infty} \left[1 - \Pr(A_n)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \Pr(A_n)
\end{aligned}
$$

# Lause 2

- Olkoon $(S, \mathfrak{F}, \Pr)$ *todennäköisyyskenttä* ja $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{F}$.
- Jos $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \rightarrow \varnothing$, niin

$$\lim_{n \to +\infty} \Pr\left(A_n\right) = 0$$

# Lause 2:
# Todistus

- Jos $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \to \varnothing$, niin

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$$

- Siten

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \Pr(\varnothing) = 0$$

- Lauseen 1 kohdan (ii) mukaan

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \Pr(A_n)$$

- Yhdistämällä nämä tulokset saadaan:

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr(A_n) = 0$$

# Lause 2 ja Kolmogorovin aksioomat

- Voidaan osoittaa, että Kolmogorovin aksiooma

  (iii) $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{F}$ ja $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j \Rightarrow$

  $$\Pr(\bigcup A_i) = \sum \Pr(A_i)$$

  on yhtäpitävä aksioomien

  (iii)′ $A_1 \cap A_2 = \varnothing \Rightarrow \Pr\left(A_1 \cup A_2\right) = \Pr\left(A_1\right) + \Pr\left(A_2\right)$

  (iv) $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \to \varnothing \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \Pr\left(A_n\right) = 0$

  kanssa.
- Aksioomaa (iv) kutsutaan usein todennäköisyyden **jatkuvuusaksioomaksi**.