Ilkka Mellin

Tilastolliset menetelmät

Osa 4: Lineaarinen regressioanalyysi

Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli

Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli

\>> Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli ja sitä koskevat oletukset
Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin estimointi
Varianssianalyysihajotelma ja selitysaste
Päättely yhden selittäjän lineaarisesta regressiomallista
Ennustaminen yhden selittäjän lineaarisella regressiomallilla
Yhden selittäjän lineaarisen regressiomalli ja satunnainen selittäjä
2-ulotteisen normaalijakauman regressiofunktioiden estimointi

Selitettävä muuttuja ja selittävä muuttuja

- Oletetaan, että **selitettävän muuttujan** *y havaittujen arvojen vaihtelu halutaan selittää* **selittävän muuttujan** eli **selittäjän** *x havaittujen arvojen vaihtelun avulla*.
- Tehdään seuraavat oletukset:

  (i) Selitettävä muuttuja *y* on *suhdeasteikollinen satunnaismuuttuja*.

  (ii) Selittävä muuttuja *x* on *kiinteä* eli *ei-satunnainen muuttuja*.
- *Satunnaisen selittäjän tapausta* käsitellään tämän luvun lopussa kappaleissa **Yhden selittäjän lineaarisen regressiomalli ja satunnainen selittäjä** ja **2-ulotteisen normaalijakauman regressiofunktioiden estimointi.**

Havainnot

- Olkoot

  $$y_1, y_2, \ldots , y_n$$

  selitettävän muuttujan y ja

  $$x_1, x_2, \ldots , x_n$$

  selittävän muuttujan x **havaittuja arvoja**.
- Oletetaan lisäksi, että havaintoarvot x_i ja y_i liittyvät *samaan havaintoyksikköön kaikille* $i = 1, 2, \ldots , n$.
- Tällöin havaintoarvot x_i ja y_i muodostavat *pisteitä* 2-ulotteisessa avaruudessa:

  $$(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

Malli ja sen osat 1/2

- Oletetaan, että havaintoarvojen y_i ja x_i välillä on *lineaarinen tilastollinen riippuvuus*, joka voidaan ilmaista yhtälöllä

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

- Yhtälö määrittelee **yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin**, jossa

y_i = **selitettävän muuttujan** y *satunnainen* ja *havaittu* arvo havaintoyksikössä i

x_i = **selittävän muuttujan** eli **selittäjän** x *ei-satunnainen* ja *havaittu* arvo havaintoyksikössä i

ε_i = **jäännös-** eli **virhetermin** ε *satunnainen* ja *ei-havaittu* arvo havaintoyksikössä i

Malli ja sen osat 2/2

- Yhden selittäjän lineaarisessa regressiomallissa

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

on seuraavat *regressiokertoimet*:

β_0 = **vakioselittäjän regressiokerroin**;
β_0 on *ei-satunnainen* ja *tuntematon vakio*

β_1 = **selittäjän** x **regressiokerroin**;
β_1 on *ei-satunnainen* ja *tuntematon vakio*

- Huomautus:

Regressiokertoimet β_0 ja β_1 on oletettu *samoiksi* kaikille havaintoyksiköille i.

Vakioselittäjä

- Yhden selittäjän lineaarisessa regressiomallissa

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

  kerrointa β_0 kutsutaan *vakioselittäjän* regressio-kertoimeksi.
- Nimitys johtuu siitä, että kerrointa β_0 vastaa *keinotekoinen selittäjä*, joka saa kaikille havaintoyksiköille $i = 1, 2, \ldots , n$ *vakioarvon* 1.
- Huomautus:

  Jatkossa esitettävät kaavat *eivät välttämättä päde* tässä esitettävässä muodossa, jos mallissa *ei ole* vakioselittäjää.
- **Oletamme jatkossa, että mallissa on aina vakioselittäjä.**

Standardioletukset jäännöstermeistä 1/2

- Tehdään yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

jäännös- eli *virhetermeistä* ε_i ns. **standardioletukset**:

(i) $\mathrm{E}(\varepsilon_i) = 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$

(ii) Jäännöstermeillä on *vakiovarianssi* eli ne ovat *homoskedastisia*:

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

(iii) Jäännöstermit ovat *korreloimattomia*:

$$\mathrm{Cor}(\varepsilon_i, \varepsilon_l) = 0 \ , \ i \neq l$$

Standardioletukset jäännöstermeistä 2/2

- Lisäksi jäännös- eli virhetermeistä ε_i tehdään tavallisesti *normaalisuusoletus*:

  (iv) $\varepsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

- Huomautus:

  Oletus (iv) sisältää oletukset (i) ja (ii).

Selitettävän muuttujan ominaisuudet

- Jos yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

  jäännös- eli *virhetermejä* ε_i *koskevat standardioletukset* (i)-(iii) *pätevät*, mallin selitettävän muuttujan y havaituilla arvoilla y_i on seuraavat *stokastiset ominaisuudet*:

  (i)´ $\mathrm{E}(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$

  (ii)´ $\mathrm{Var}(y_i) = \sigma^2 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$

  (iii)´ $\mathrm{Cor}(y_i, y_l) = 0 \ , \ i \neq l$

- Jos lisäksi jäännös- eli virhetermejä ε_i koskeva *normaalisuusoletus* (iv) *pätee*, niin

  (iv)´ $y_i \sim \mathrm{N}(\beta_0 + \beta_1 x_i \ , \sigma^2) \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$

Mallin parametrit

- Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

  parametreja ovat mallin **regressiokertoimet** β_0 ja β_1 sekä jäännös- eli virhetermien ε_i yhteinen *varianssi*

  $$\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

  jota kutsutaan **jäännösvarianssiksi**.
- Koska regressiokertoimet β_0 ja β_1 sekä jäännösvarianssi σ^2 ovat tavallisesti *tuntemattomia*, ne on *estimoitava* muuttujien x ja y havaituista arvoista x_i ja y_i , $i = 1, 2, \ldots , n$.

Mallin systemaattinen ja satunnainen osa 1/2

- Oletetaan, että yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \text{ , } i = 1, 2, \ldots, n$$

  jäännös- eli *virhetermejä ε_i koskeva standardioletus*

  (i) $\mathrm{E}(\varepsilon_i) = 0 \text{ , } i = 1, 2, \ldots, n$

  pätee.
- Tällöin selitettävän muuttujan y havaitut arvot y_i voidaan *esittää* seuraavalla tavalla *kahden osatekijän summana*:

  $$y_i = \mathrm{E}(y_i) + \varepsilon_i \text{ , } i = 1, 2, \ldots, n$$

  jossa

  $$\mathrm{E}(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i \text{ , } i = 1, 2, \ldots, n$$

Mallin systemaattinen ja satunnainen osa 2/2

- Odotusarvo

  $$\mathrm{E}(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

  muodostaa yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin **systemaattisen osan** eli **rakenneosan**, joka *riippuu selittäjälle x annetuista arvoista*.
- Jäännös- eli virhetermi

  $$\varepsilon_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

  muodostaa mallin **satunnaisen osan**, joka *ei riipu selittäjälle x annetuista arvoista*.

Regressiosuora

- Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

  systemaattinen osa $\mathrm{E}(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$ *määrittelee suoran*

  $$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

  avaruudessa $\mathbb{R}^2$.
- Suoraa kutsutaan **regressiosuoraksi** ja sen yhtälössä

  β_0 = regressiosuoran ja y-akselin **leikkauspiste**

  β_1 = regressiosuoran **kulmakerroin**
- Jäännös- eli virhetermien ε_i varianssi σ^2 kuvaa *havainto-pisteiden* (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \ldots , n$ *vaihtelua regressiosuoran ympärillä.*

Regressiosuoran kulmakertoimen tulkinta

- Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin systemaattisen osan määrittelemän regressiosuoran

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

kulmakertoimella β_1 seuraava **tulkinta**:

- Oletetaan, että *selittäjän x arvo kasvaa yhdellä yksiköllä*:

$$x \to x + 1$$

Tällöin kerroin β_1 kertoo *paljonko selitettävän muuttujan y vastaava odotettavissa oleva arvo muuttuu*:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(y) = \beta_0 + \beta_1 x \;\to\; & \beta_0 + \beta_1(x+1) \\ = \; & \beta_0 + \beta_1 x + \beta_1 \\ = \; & \mathrm{E}(y) + \beta_1 \end{aligned}$$

Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli

Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli ja sitä koskevat oletukset
\>> Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin estimointi
Varianssianalyysihajotelma ja selitysaste
Päättely yhden selittäjän lineaarisesta regressiomallista
Ennustaminen yhden selittäjän lineaarisella regressiomallilla
Yhden selittäjän lineaarisen regressiomalli ja satunnainen selittäjä
2-ulotteisen normaalijakauman regressiofunktioiden estimointi

Estimointiongelma

- Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin
  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$
  regressiokertoimet β_0 ja β_1 ovat normaalisti *tuntemattomia*, joten *ne on estimoiva* muuttujien x ja y havaituista arvoista x_i ja y_i , $i = 1, 2, \ldots , n$.
- Estimoinnissa regressiokertoimille β_0 ja β_1 pyritään löytämään sellaiset arvot, että niiden määräämä *regressiosuora selittäisi mahdollisimman hyvin selitettävän muuttujan y arvojen vaihtelun*.
- Regressiokertoimien β_0 ja β_1 estimointiin on tarjolla useita erilaisia menetelmiä, joista tavallisesti käytetään *pienimmän neliösumman menetelmää*.

Pienimmän neliösumman menetelmä

- **Pienimmän neliösumman menetelmässä** yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

  regressiokertoimien β_0 ja β_1 estimaattorit määrätään *minimoimalla jäännös*- eli *virhetermien* ε_i *neliösumma*

  $$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

  regressiokertoimien β_0 ja β_1 *suhteen.*

Otostunnusluvut

- Määritellään havaintojen x_i ja y_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *aritmeettiset keskiarvot*, *otosvarianssit*, *otoskovarianssi* ja *otoskorrelaatiokerroin* tavanomaisilla kaavoillaan:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

Regressiokertoimien PNS-estimaattorit

- Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

regressiokertoimien β_0 ja β_1 **pienimmän neliösumman (PNS-) estimaattorit** ovat

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

$$b_1 = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = r_{xy} \frac{s_y}{s_x}$$

PNS-estimaattoreiden johto 1/4

- Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

  regressiokertoimet β_0 ja β_1 estimoidaan PNS-menetelmällä *minimoimalla jäännöstermien* ε_i *neliösumma*

  $$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

  kertoimien β_0 ja β_1 suhteen
- Tämä tapahtuu tavanomaiseen tapaan derivoimalla funktio $S(\beta_0 , \beta_1)$ kertoimien β_0 ja β_1 suhteen ja merkitsemällä derivaatat nolliksi.

PNS-estimaattoreiden johto 2/4

- Derivoidaan funktio

$$S(\beta_0,\beta_1)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2$$

regressiokertoimien β_0 ja β_1 suhteen ja merkitään derivaatat nolliksi:

(1) $$\frac{\partial S(\beta_0,\beta_1)}{\partial\beta_0}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)=0$$

(2) $$\frac{\partial S(\beta_0,\beta_1)}{\partial\beta_1}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)x_i=0$$

- Regressiokertoimien β_0 ja β_1 *PNS-estimaattorit* saadaan *normaali-yhtälöiden* (1) ja (2) ratkaisuina.

Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin estimointi

PNS-estimaattoreiden johto 3/4

- Kirjoitetaan normaaliyhtälöt (1) ja (2) muotoihin

$$(1)' \quad \sum_{i=1}^{n} y_i - n\beta_0 - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$(2)' \quad \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

- Ratkaistaan β_0 yhtälöstä (1)´:

$$(3) \quad \beta_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \beta_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{y} - \beta_1 \overline{x}$$

ja sijoitetaan ratkaisu yhtälöön (2)´:

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\overline{y}\,\overline{x} + n\beta_1 \overline{x}^2 - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

PNS-estimaattoreiden johto 4/4

- Parametrin β_1 PNS-estimaattoriksi saadaan yhtälöstä (4):

$$(5) \quad b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\overline{y}\,\overline{x}}{\sum_{i=1}^{n} x_j^2 - n\,\overline{x}^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = r_{xy}\frac{s_y}{s_x}$$

- Sijoittamalla b_1 yhtälöön (3) saadaan parametrin β_0 PNS-estimaattoriksi

$$(6) \quad b_0 = \overline{y} - b_1\overline{x}$$

- Sivuutetaan sen osoittaminen, että saatu ääriarvo on todellakin *minimi*.

Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin estimointi

Regressiokertoimien laskeminen 1/3

- Oletetaan, että haluamme laskea yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

  regressiokertoimien β_0 ja β_1 PNS-estimaatit *käsin* tai käyttämällä *laskinta*.
- Tällöin tarvittavat laskutoimitukset on mukavinta järjestää seuraavalla kalvolla esitettävän kaavion muotoon.
- Huomautus:

  Samasta kaaviosta voidaan laskea myös muuttujien x ja y havaittujen arvojen *aritmeettiset keskiarvot*, *otosvarianssit*, *otoskeskihajonnat*, *otoskovarianssi* ja *otoskorrelaatio*; ks. lukua **Tilastollinen riippuvuus ja korrelaatio**.

Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin estimointi

Regressiokertoimien laskeminen 2/3

- Määrätään ensin havaintoarvojen *summat*, *neliösummat* ja *tulosumma*:

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	x_1	y_1	x_1^2	y_1^2	$x_1 y_1$
2	x_2	y_2	x_2^2	y_2^2	$x_2 y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_n	y_n	x_n^2	y_n^2	$x_n y_n$
Summa	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} y_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Regressiokertoimien laskeminen 3/3

- Regressiokertoimien β_0 ja β_1 PNS-estimaatit saadaan havaintoarvojen *summista*, *neliösummista* ja *tulosummasta* alla esitetyillä kaavoilla:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

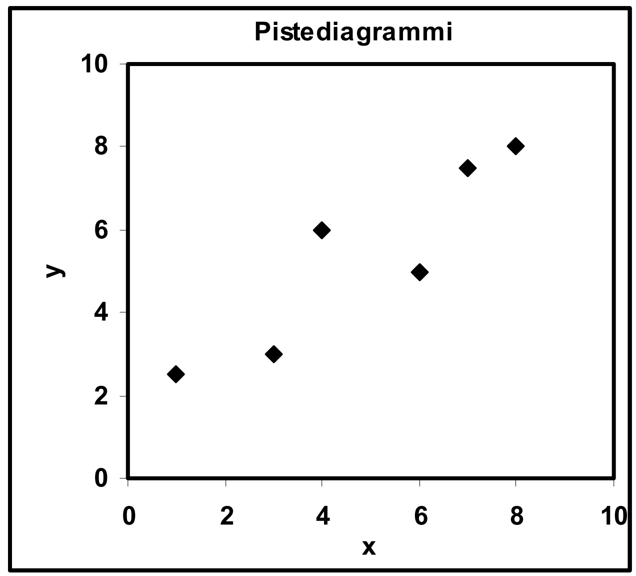
$$b_1 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}$$

Tunnuslukujen laskeminen: Havainnollistava esimerkki 1/3

- Taulukossa oikealla on keinotekoisen kahden muuttujan aineiston havaintoarvot (n = 6).
- Aineistoa kuvaava *pistediagrammi* on oikealla alhaalla.

i	*x*	*y*
1	1	2.5
2	3	3
3	4	6
4	6	5
5	7	7.5
6	8	8



Tunnuslukujen laskeminen: Havainnollistava esimerkki 2/3

- Alla olevassa taulukossa on laskettu muuttujien x ja y havaittujen arvojen *summat*, *neliösummat* ja *tulosumma*.

i	x	y	x^2	y^2	xy
1	1	2.5	1	6.25	2.5
2	3	3	9	9	9
3	4	6	16	36	24
4	6	5	36	25	30
5	7	7.5	49	56.25	52.5
6	8	8	64	64	64
Summa	29	32	175	196.5	182

- Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

regressiokertoimien β_0 ja β_1 *PNS-estimaatit* voidaan laskea näistä viidestä summasta; ks. seuraavaa kalvoa.

Tunnuslukujen laskeminen: Havainnollistava esimerkki 3/3

- *Regressiokertoimien* β_0 ja β_1 *PNS-estimaatit*:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{6}\times 29 = 4.833$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{6}\times 32 = 5.333$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{182 - \frac{1}{6}\times 29\times 32}{175 - \frac{1}{6}\times 29^2} = 0.785$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = 5.333 - 0.7847\times 4.833 = 1.541$$

Estimoitu regressiosuora 1/3

- Yhden selittäjän lineaarinen regressiomallin

  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \;,\; i = 1, 2, \ldots, n$$

  regressiokertoimien β_0 ja β_1 PNS-estimaattorit b_0 ja b_1 *määrittelevät suoran* avaruudessa $\mathbb{R}^2$:

  $$y = b_0 + b_1 x$$

  jossa

  b_0 = estimoidun regressiosuoran ja y-akselin **leikkauspiste**

  b_1 = estimoidun regressiosuoran **kulmakerroin**

Estimoitu regressiosuora 2/3

- Sijoitetaan regressiokertoimien β_0 ja β_1 PNS-estimaattoreiden lausekkeet

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} \qquad b_1 = r_{xy}\frac{s_y}{s_x}$$

estimoidun regressiosuoran lausekkeeseen.

- Tällöin estimoidun regressiosuoran yhtälö voidaan kirjoittaa seuraavaan muotoon:

$$y = \bar{y} + r_{xy}\frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x})$$

- Yhtälöstä nähdään, että estimoitu regressiosuora kulkee havaintopisteiden (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \ldots , n$ *painopisteen* $(\bar{x}, \bar{y})$ kautta.

Estimoitu regressiosuora 3/3

- Estimoidulla regressiosuoralla

$$y = \overline{y} + r_{xy}\frac{s_y}{s_x}(x - \overline{x})$$

on seuraavat ominaisuudet:

(i) Jos $r_{xy} > 0$, suora on *nouseva*.

(ii) Jos $r_{xy} < 0$, suora on *laskeva*.

(iii) Jos $r_{xy} = 0$, suora on *vaakasuorassa*.

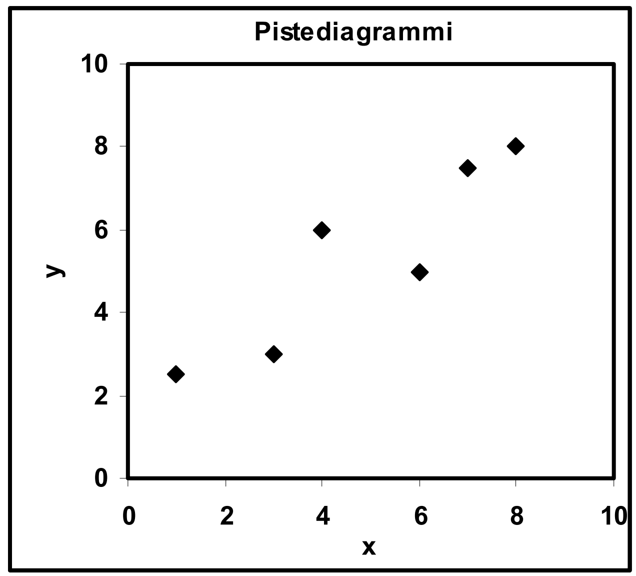
(iv) Suora *jyrkkenee* (*loivenee*), jos

- korrelaation *itseisarvo* $|\,r_{xy}\,|$ *kasvaa* (*pienenee*)
- keskihajonta s_y *kasvaa* (*pienenee*)
- keskihajonta s_x *pienenee* (*kasvaa*)

Estimoitu regressiosuora: Havainnollistava esimerkki 1/2

- Taulukossa oikealla on keinotekoisen kahden muuttujan aineiston havaintoarvot (n = 6).
- Aineistoa kuvaava *pistediagrammi* on oikealla alhaalla.

i	*x*	*y*
1	1	2.5
2	3	3
3	4	6
4	6	5
5	7	7.5
6	8	8



Estimoitu regressiosuora: Havainnollistava esimerkki 2/2

- Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

regressiokertoimien β_0 ja β_1 *PNS-estimaateiksi* saatiin edellä

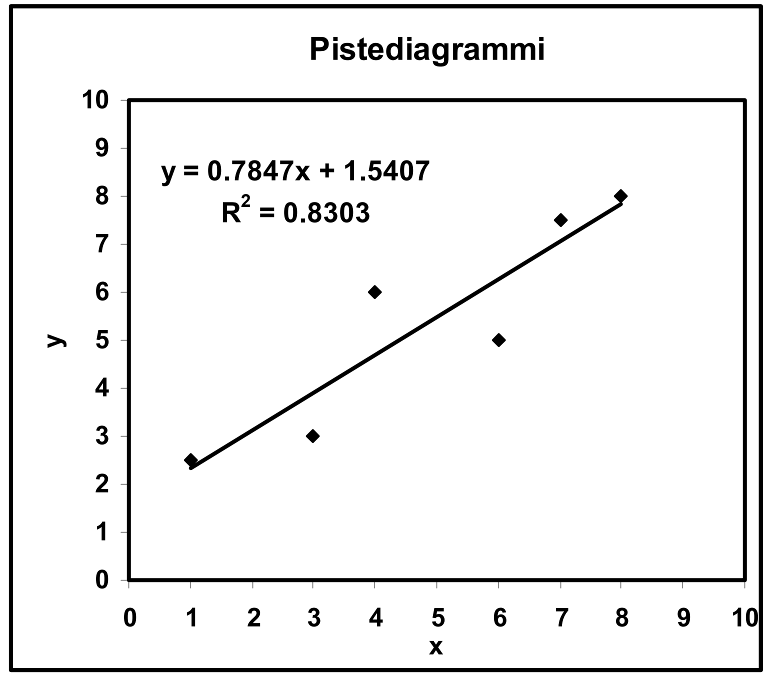
$$b_0 = 1.5407$$

$$b_1 = 0.7847$$

- *Estimoidun regressiosuoran* yhtälö on siten

$$y = 1.5407 + 0.7847x$$

ks. kuviota oikealla.



Regressiosuoran estimointi: 1. esimerkki 1/2

- *Hooken lain* mukaan (ideaalisen) kierrejousen pituus y riippuu *lineaarisesti* jouseen ripustetusta painosta x:

  $$y = \alpha + \beta x$$

  jossa

  α = jousen pituus ilman painoa

  β = ns. *jousivakio*
- Jousivakion määräämiseksi jouseen ripustettiin seuraavat painot: 0, 2, 4, 6, 8, 10 kg ja jousen pituus mitattiin.
- Mittaustulokset on annettu taulukossa oikealla.

Paino (kg)	Pituus (cm)
0	43.00
2	43.60
4	44.05
6	44.55
8	45.00
10	45.50

Regressiosuoran estimointi: 1. esimerkki 2/2

- *Estimoidun regressiosuoran* yhtälö on

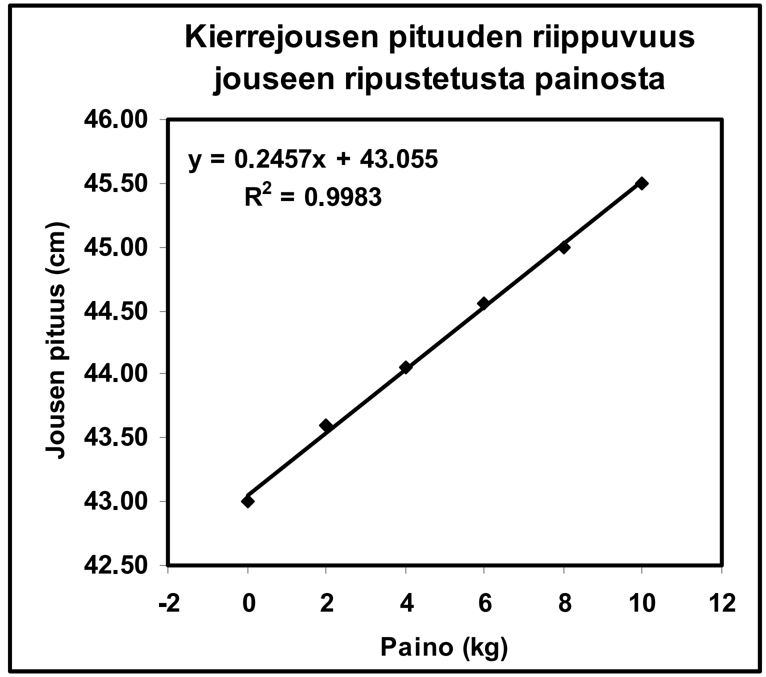
  $$y = 43.055 + 0.2457x$$

  ks. kuviota oikealla.
- Suoran kulmakertoimen

  $$b = 0.2457$$

  tulkinta:

  Jouseen ripustetun painon lisääminen 1 kg:lla pidentää jousta *keskimäärin* 0.2457 cm:llä.



Regressiosuoran estimointi: 2. esimerkki − 1/2

- Perinnöllisyystieteen mukaan lapset perivät geneettiset ominaisuutensa vanhemmiltaan.
- Periytyykö isän pituus heidän pojilleen?
- Havaintoaineisto koostuu 300:n isän ja heidän poikiensa pituuksien muodostamasta lukuparista

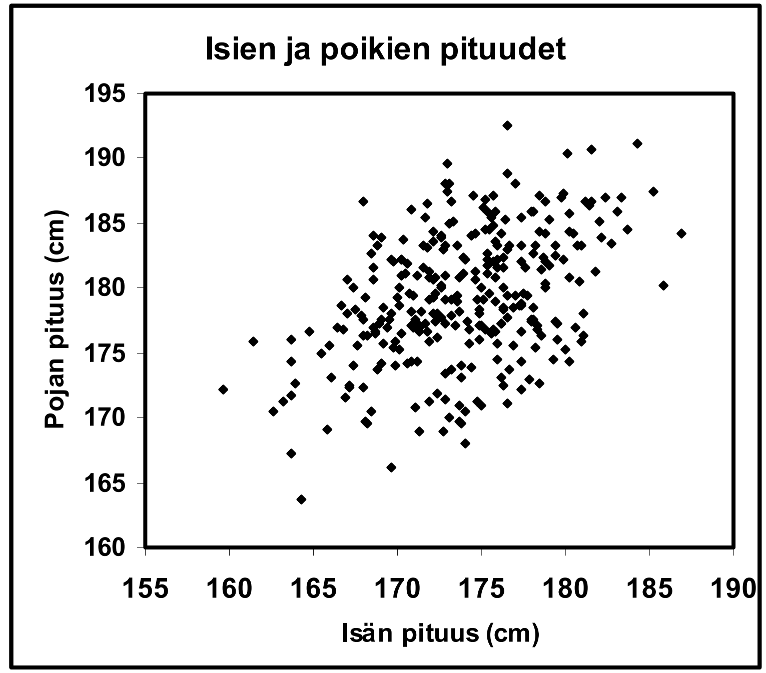
$$(x_i, y_i)\ ,\ i = 1, 2, \ldots , 300$$

jossa

x_i = isän i pituus

y_i = isän i pojan pituus

- Ks. pistediagrammia oikealla.



Regressiosuoran estimointi: 2. esimerkki − 2/2

- *Estimoidun regressiosuoran* yhtälö on

  $$y = 97.391 + 0.4707x$$

  ks. kuviota oikealla.
- Suoran kulmakertoimen

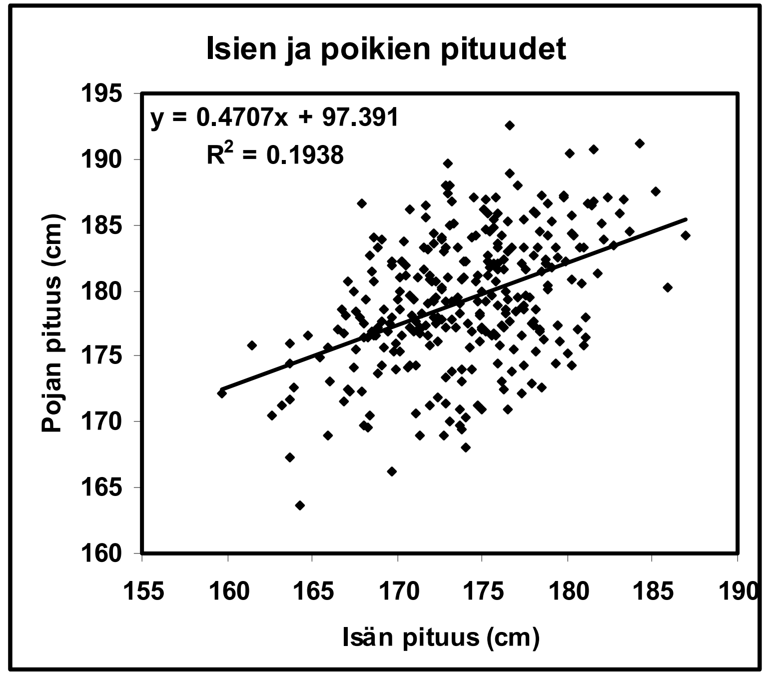
  $$b = 0.4707$$

  tulkinta:

  Jos isä A on 1 cm pitempi kuin isä B, isä A:n poika on *keskimäärin*

  $$0.4707 \text{ cm}$$

  pitempi kuin isä B:n poika.



Regressiosuoran estimointi: 3. esimerkki − 1/2

- Onko keuhkosyöpä yleisempää sellaisissa maissa, joissa tupakoidaan paljon?
- Oikealla on tiedot savukkeiden kulutuksesta ja keuhkosyövän yleisyydestä 10:ssä maassa.
- Havaintoaineisto koostuu 10:stä lukuparista

$$(x_i, y_i)\ ,\ i = 1, 2, \ldots , 10$$

jossa

x_i = savukkeiden kulutus maassa i 1930

y_i = sairastuvuus keuhkosyöpään maassa i 1950

Maa	Savukkeiden kulutus (kpl) per capita 1930	Keuhkosyöpätapausten lkm per 1 milj. henkilöä 1950
Islanti	220	58
Norja	250	90
Ruotsi	310	115
Kanada	510	150
Tanska	380	165
Itävalta	455	170
Hollanti	460	245
Sveitsi	530	250
Suomi	1115	350
Englanti	1145	465

Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin estimointi

Regressiosuoran estimointi: 3. esimerkki − 2/2

- *Estimoidun regressiosuoran* yhtälö on

$$y = 13.553 + 0.3577x$$

- Suoran kulmakertoimen

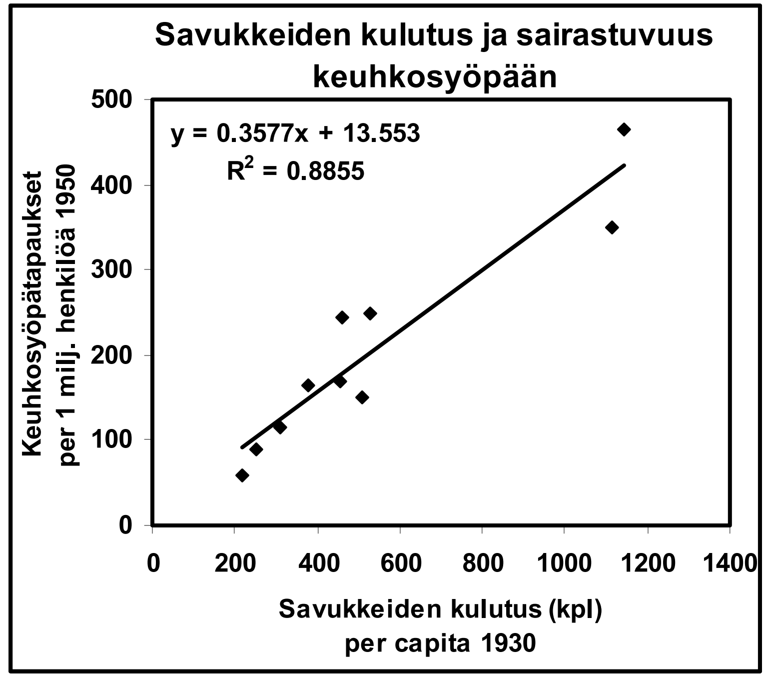
$$b = 0.3577$$

tulkinta:

Jos maassa *A* poltettiin vuonna 1930 sata savuketta enemmän per capita kuin maassa *B*, maassa *A* oli vuonna 1950 *keskimäärin*

$$100 \times 0.3577 \approx 36$$

keuhkosyöpätapausta enemmän per 1 milj. asukasta kuin maassa *B*.



Sovitteet ja residuaalit

- Olkoot b_0 ja b_1 yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

regressiokertoimien β_0 ja β_1 PNS-estimaattorit.

- Määritellään estimoidun mallin **sovitteet** kaavalla

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

- Määritellään estimoidun mallin **residuaalit** kaavalla

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - b_0 - b_1 x_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

- Huomaa, että

$$y_i = \hat{y}_i + e_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

Sovitteet ja residuaalit: Tulkinnat 1/2

- *Sovite*

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

on estimoidun regressiosuoran yhtälön selitettävälle muuttujalle y antama arvo havaintopisteessä x_i .

- *Residuaali*

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - b_0 - b_1 x_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

on selitettävän muuttujan y havaitun arvon y_i ja sovitteen $\hat{y}_i$ eli estimoidun regressiosuoran yhtälön selitettävälle muuttujalle y havaintopisteessä x_i antaman arvon erotus.

Sovitteet ja residuaalit: Tulkinnat 2/2

- Estimoitu regressiomalli selittää selitettävän muuttujan y havaittujen arvojen vaihtelun *sitä paremmin mitä lähempänä estimoidun mallin sovitteet* $\hat{y}_i$ *ovat selitettävän muuttujan* y *havaittuja arvoja* y_i .
- Yhtäpitävästi edellisen kanssa:

  Estimoitu regressiomalli selittää selitettävän muuttujan y havaittujen arvojen y_i vaihtelun *sitä paremmin mitä pienempiä ovat estimoidun mallin residuaalit* e_i .

Sovitteet ja residuaalit: Havainnollistus

- Kuvio oikealla havainnollistaa sovitteiden ja residuaalien *geometrista tulkintaa*.
- *Malli*:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

- *PNS-suora*:

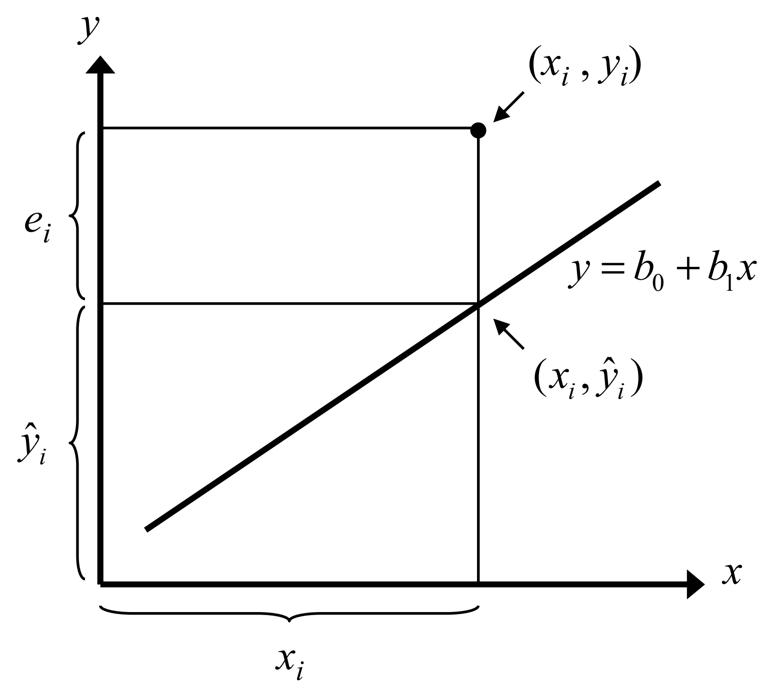
$$y = b_0 + b_1 x$$

- *Sovite*:

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

- *Residuaali*:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$



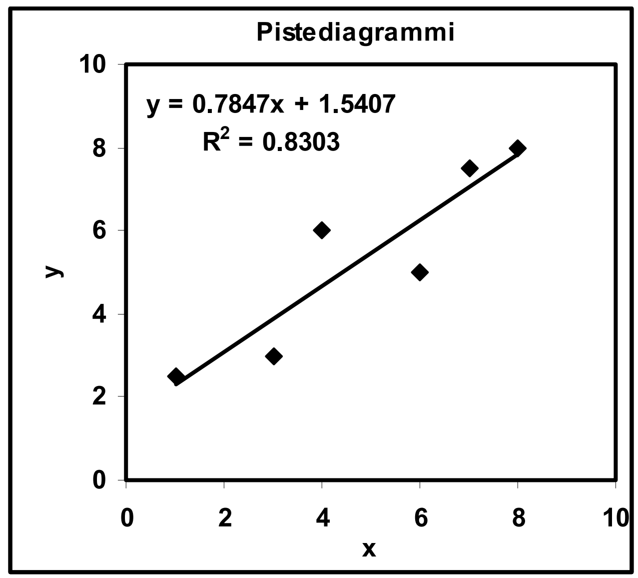
Sovitteet ja residuaalit: Havainnollistava esimerkki 1/3

- Taulukossa oikealla on keinotekoisen kahden muuttujan aineiston havaintoarvot ($n = 6$).
- *Estimoidun regressiosuoran* yhtälöksi saatiin edellä

$$y = 1.5407 + 0.7847x$$

ks. kuviota oikealla.

i	x	y
1	1	2.5
2	3	3
3	4	6
4	6	5
5	7	7.5
6	8	8



Sovitteet ja residuaalit: Havainnollistava esimerkki 2/3

- Alla olevassa taulukossa on laskettu estimoidun mallin

$$y = 1.5407 + 0.7847x$$

sovitteet $\hat{y}$ ja *residuaalit* e:

i	*x*	*y*	*Sovite*	*Residuaali*
1	1	2.5	2.325	0.175
2	3	3	3.895	-0.895
3	4	6	4.679	1.321
4	6	5	6.249	-1.249
5	7	7.5	7.033	0.467
6	8	8	7.818	0.182
Summa	29	32	32.000	0.000

- Esimerkiksi, kun $i = 3$, niin

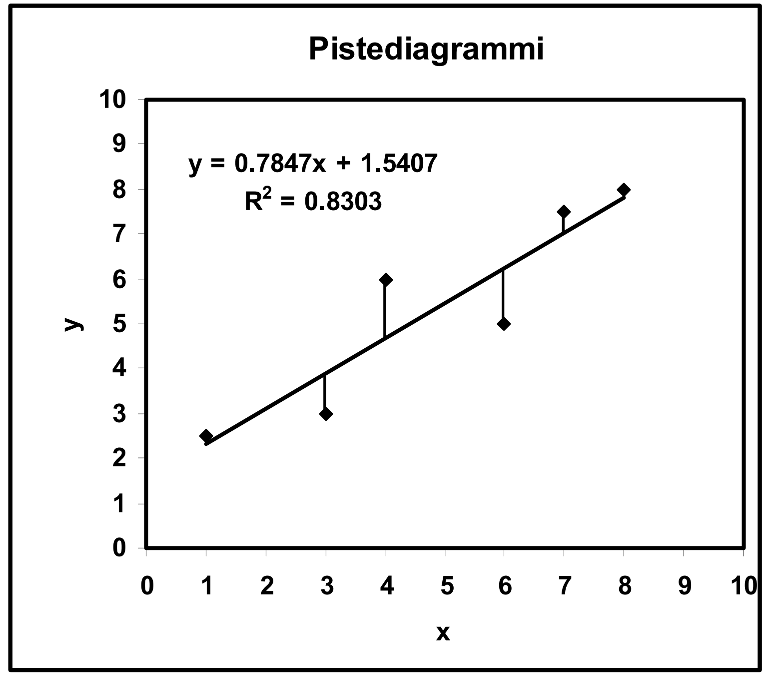
$$\hat{y}_3 = 1.5407 + 0.7847x_3 = 1.5407 + 0.7847 \times 4 = 4.679$$

$$e_3 = y_3 - \hat{y}_3 = 6 - 4.679 = 1.321$$

Sovitteet ja residuaalit: Havainnollistava esimerkki 3/3

- Kuvioon oikealla on lisätty estimoidun regressiomallin *residuaaleja* vastaavat janat.
- Huomautus:

  Pienimmän neliösumman menetelmässä regressiosuoran kertoimet tulevat valituiksi siten, että estimoidun mallin *residuaaleja vastaavien janojen pituuksien neliöiden summa on pienin mahdollinen*.



Jäännösvarianssin estimointi 1/2

- Jos yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin *jäännös-* eli *virhetermejä* ε_i *koskevat standardioletukset* (i)-(iii) *pätevät*, *jäännösvarianssin* $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ **harhaton estimaattori** on

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

jossa

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - b_0 - b_1 x_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

= estimoidun mallin *residuaali*

n = havaintojen lukumäärä

Jäännösvarianssin estimointi 2/2

- Jäännösvarianssin σ^2 estimaattori

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

kuvaa *havaintopisteiden* (x_i , y_i) , $i = 1, 2, \ldots , n$ *vaihtelua estimoidun regressiosuoran ympärillä*.

Jäännösvarianssin estimointi: Kommentti

- Estimaattori s^2 on todellakin *residuaalien e_i varianssi*.
- Tämä seuraa siitä, että mallissa on *vakioselittäjä*, jolloin

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$

ja siten myös

$$\bar{e} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$

jolloin

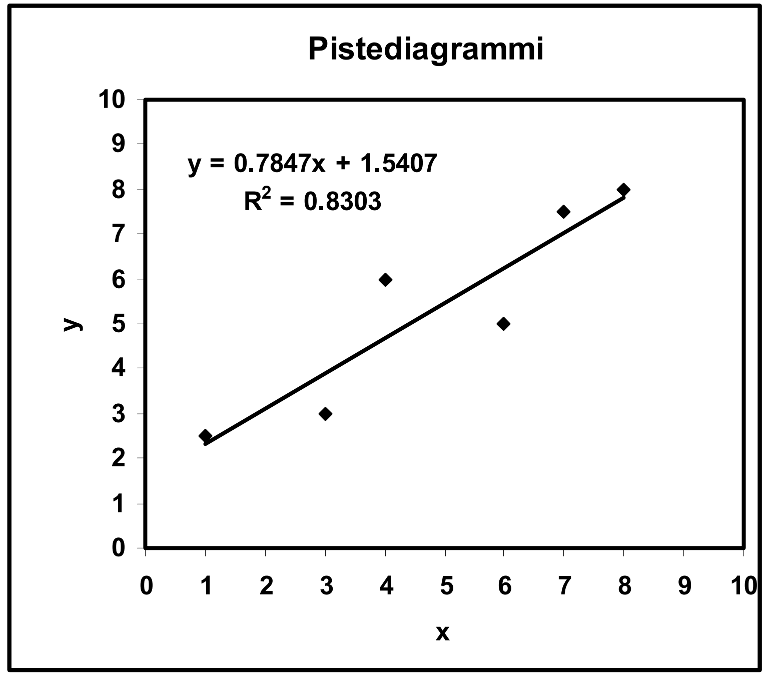
$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(e_i - \bar{e})^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

Jäännösvarianssin estimointi: Havainnollistava esimerkki 1/2

- Taulukossa alla on keinotekoisen kahden muuttujan aineiston havaintoarvot (n = 6):

i	*x*	*y*
1	1	2.5
2	3	3
3	4	6
4	6	5
5	7	7.5
6	8	8

- Aineistoa kuvaava *pistediagrammi* on oikealla.
- Kuvioon on merkitty myös aineistosta *estimoidun regressiosuoran yhtälö*.



Jäännösvarianssin estimointi: Havainnollistava esimerkki 2/2

- Alla olevassa taulukossa on laskettu estimoidun mallin *sovitteet* $\hat{y}$, *residuaalit e* (sovitteiden ja residuaalien laskemista on käsitelty edellä) ja *residuaalien neliöt* e^2.

i	*x*	*y*	*Sovite*	*Residuaali*	*Res*^{2}
1	1	2.5	2.325	0.175	0.030
2	3	3	3.895	-0.895	0.801
3	4	6	4.679	1.321	1.744
4	6	5	6.249	-1.249	1.560
5	7	7.5	7.033	0.467	0.218
6	8	8	7.818	0.182	0.033
Summa	29	32	32.000	0.000	4.385

- *Jäännösvarianssin* σ^2 *harhaton estimaattori* on

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \frac{1}{6-2}\times 4.385 = 1.096$$

Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli

Varianssianalyysihajotelman idea

- Yhden selittäjän regressiomallin tehtävänä on selittää *selitettävän muuttujan y havaittujen arvojen vaihtelu selittävän muuttujan x havaittujen arvojen vaihtelulla*.
- Onnistumista tässä tehtävässä voidaan kuvata ns. **varianssianalyysihajotelman** avulla.
- Hajotelmassa *selitettävän muuttujan y havaittujen arvojen kokonaisvaihtelua kuvaava* ns. *kokonaisneliösumma jaetaan kahden osatekijän summaksi*:

  (i) Toinen osatekijä kuvaa *estimoidun mallin selittämää osaa kokonaisvaihtelusta*.

  (ii) Toinen osatekijä kuvaa *mallilla selittämättä jäänyttä osaa kokonaisvaihtelusta*.

Malli ja sen osat 1/2

- Oletetaan, että havaintoarvojen y_i ja x_i välillä on *lineaarinen tilastollinen riippuvuus*, joka voidaan ilmaista yhtälöllä

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

- Yhtälö määrittelee **yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin**, jossa

y_i = **selitettävän muuttujan** y *satunnainen* ja *havaittu* arvo havaintoyksikössä i

x_i = **selittävän muuttujan** eli **selittäjän** x *ei-satunnainen* ja *havaittu* arvo havaintoyksikössä i

ε_i = **jäännös-** eli **virhetermin** ε *satunnainen* ja *ei-havaittu* arvo havaintoyksikössä i

Malli ja sen osat 2/2

- Yhden selittäjän lineaarisessa regressiomallissa

  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

  on seuraavat *kertoimet*:

  β_0 = **vakioselittäjän regressiokerroin**;
  β_0 on *ei-satunnainen* ja *tuntematon vakio*

  β_1 = **selittäjän** x **regressiokerroin**;
  β_1 on *ei-satunnainen* ja *tuntematon vakio*

Oletukset

- Oletetaan, että yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

  jäännös- eli *virhetermiä* ε_i koskevat **standardioletukset** pätevät:

  (i) $\mathrm{E}(\varepsilon_i) = 0 \ , i = 1, 2, \ldots , n$

  (ii) Jäännöstermit ovat *homoskedastisia*:

  $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 \ , i = 1, 2, \ldots , n$

  (iii) Jäännöstermit ovat *korreloimattomia*:

  $\mathrm{Cor}(\varepsilon_i, \varepsilon_l) = 0 \ , i \neq l$

Otostunnusluvut

- Määritellään havaintojen x_i ja y_i , $i = 1, 2, \dots , n$ *aritmeettiset keskiarvot*, *otosvarianssit*, *otoskovarianssi* ja *otoskorrelaatiokerroin* tavanomaisilla kaavoillaan:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

Regressiokertoimien PNS-estimaattorit

- Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

regressiokertoimien β_0 ja β_1 **pienimmän neliösumman (PNS-) estimaattorit** ovat

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

$$b_1 = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = r_{xy} \frac{s_y}{s_x}$$

Sovitteet ja residuaalit

- Olkoot b_0 ja b_1 yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \text{ , } i = 1, 2, \ldots, n$$
regressiokertoimien β_0 ja β_1 PNS-estimaattorit.
- Määritellään estimoidun mallin **sovitteet** kaavalla
$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i \text{ , } i = 1, 2, \ldots, n$$
- Määritellään estimoidun mallin **residuaalit** kaavalla
$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - b_0 - b_1 x_i \text{ , } i = 1, 2, \ldots, n$$

Jäännösvarianssin estimointi

- Jos yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin *jäännös-* eli *virhetermejä* ε_i *koskevat standardioletukset* (i)-(iii) *pätevät*, *jäännösvarianssin* $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ **harhaton estimaattori** on

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

jossa

$e_i =$ estimoidun mallin *residuaali*

$n =$ havaintojen lukumäärä

Kokonaisneliösumma

- Neliösumma

$$SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$$

kuvaa *selitettävän muuttujan y havaittujen arvojen* y_j *vaihtelua* ja sitä kutsutaan **kokonaisneliösummaksi**.

- *Selitettävän muuttujan y havaittujen arvojen* y_i *varianssi* voidaan määritellä kaavalla

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1} SST$$

Jäännösneliösumma

- Neliösumma

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

kuvaa *residuaalien* e_i *vaihtelua* ja sitä kutsutaan **jäännös-neliösummaksi**.

- Koska mallissa on vakioselittäjä, jolloin $\sum e_i = 0$, *residuaalien* e_i *varianssi* voidaan määritellä kaavalla

$$s^2 = \frac{1}{n-2} SSE$$

- s^2 on jäännösvarianssin σ^2 *harhaton estimaattori*.

Kokonais- ja jäännösneliösumman yhteys 1/4

- Voidaan osoittaa, että yhden selittäjän lineaarisessa regressiomallissa jäännösneliösumma *SSE* ja kokonais-neliösumma *SST* toteuttavat yhtälöt

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = (1 - r_{xy}^2)\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = (1 - r_{xy}^2)SST$$

jossa

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

= selitettävän muuttujan *y* ja selittäjän *x* havaittujen arvojen otoskorrelaatiokerroin

Varianssianalyysihajotelma ja selitysaste

Kokonais- ja jäännösneliösumman yhteys 2/4

- Koska otoskorrelaatiokerroin r_{xy} toteuttaa epäyhtälöt

  $$-1 \le r_{xy} \le +1$$

  yhtälöistä

  $$SSE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = (1 - r_{xy}^2)\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = (1 - r_{xy}^2)SST$$

  nähdään välittömästi, että

  $$SSE \le SST$$

Kokonais- ja jäännösneliösumman yhteys 3/4

- Yhtälöistä

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = (1 - r_{xy}^2) \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 = (1 - r_{xy}^2) SST$$

  nähdään, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

  (i) $SSE = 0$

  (ii) $e_i = 0$ kaikille $i = 1, 2, \ldots, n$

  (iii) $r_{xy} = \pm 1$

- Jos ehdot (i)-(iii) pätevät, niin kaikki havaintopisteet (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \ldots, n$ ovat samalla suoralla ja tätä suoraa vastaava *lineaarinen regressiomalli selittää täydellisesti selitettävän muuttujan y havaittujen arvojen vaihtelun*.

Kokonais- ja jäännösneliösumman yhteys 4/4

- Yhtälöistä

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = (1 - r_{xy}^2)\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = (1 - r_{xy}^2)SST$$

nähdään, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i)´ $SSE = SST$

(ii)´ $e_i = y_i - \bar{y}$ kaikille $i = 1, 2, \ldots, n$

(iii)´ $r_{xy} = 0$

- Jos ehdot (i)´-(iii)´ pätevät, niin *selitettävän muuttujan y havaittujen arvojen vaihtelua ei voida selittää lineaarisella regressiomallilla*.

Mallineliösumma 1/2

- Määritellään suure SSM yhtälöllä

$$SSM = SST - SSE$$

- Koska

$$0 \le SSE \le SST$$

niin

$$SSM \ge 0$$

- Koska voidaan osoittaa, että

$$SSM = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \overline{y})^2$$

suuretta SSM kutsutaan **mallineliösummaksi**.

Mallineliösumma 2/2

- Mallineliösumma *SSM* voidaan esittää myös muodossa

$$SSM = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \overline{\hat{y}})^2$$

jossa

$$\overline{\hat{y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \overline{y}$$

Varianssianalyysihajotelma 1/2

- Edellä esitetyn mukaan kokonaisneliösumma

  $$SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$$

  voidaan esittää kahden osatekijän *SSM* ja *SSE* summana:

  $$SST = SSM + SSE$$

  jossa

  $$SSM = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \overline{y})^2$$

  ja

  $$SSE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

Varianssianalyysihajotelma 2/2

- **Varianssianalyysihajotelmassa**

  $$SST = SSM + SSE$$

  selitettävän muuttujan y havaittujen arvojen vaihtelua kuvaava **kokonaisneliösumma** SST on esitetty kahden osatekijän SSM ja SSE summana:

  (i) **Mallineliösumma** SSM kuvaa sitä osaa selitettävän muuttujan y havaittujen arvojen vaihtelusta, jonka *estimoitu malli on selittänyt*.

  (ii) **Jäännösneliösumma** SSE kuvaa sitä osaa selitettävän muuttujan y havaittujen arvojen vaihtelusta, jota *estimoitu malli ei ole selittänyt*.

Varianssianalyysihajotelman tulkinta

- Varianssianalyysihajotelma

  $$SST = SSM + SSE$$

  kuvaa estimoidun regressiomallin *hyvyyttä*:

  (i) Mitä *suurempi* on *mallineliösumman SSM osuus* kokonaisneliösummasta *SST*, sitä paremmin estimoitu malli selittää selitettävän muuttujan havaittujen arvojen vaihtelun.

  (ii) Mitä *pienempi* on *jäännösneliösumman SSE osuus* kokonaisneliösummasta *SST*, sitä paremmin estimoitu malli selittää selitettävän muuttujan havaittujen arvojen vaihtelun.

Selitysaste

- Varianssianalyysihajotelma

  $$SST = SSM + SSE$$

  motivoi tunnusluvun

  $$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = \frac{SSM}{SST}$$

  käytön *regressiomallin hyvyyden mittarina*.
- Tunnuslukua R^2 kutsutaan **selitysasteeksi** ja se *mittaa regressiomallin selittämää osuutta* selitettävän muuttujan y havaittujen arvojen kokonaisvaihtelusta.
- Selitysaste R^2 ilmaistaan tavallisesti prosentteina:

  $$100 \times R^2 \ \%$$

Selitysaste ja korrelaatio

- Voidaan osoittaa, että

  $$R^2 = [\mathrm{Cor}(y, \hat{y})]^2$$

  jossa

  $$\mathrm{Cor}(y, \hat{y})$$

  on selitettävän muuttujan y havaittujen arvojen y_j ja sovitteiden $\hat{y}_j$ *otoskorrelaatiokerroin*.
- *Yhden selittäjän lineaarisessa regressiomallissa* pätee lisäksi se, että selitysaste R^2 on selitettävän ja selittävän muuttujan havaittujen arvojen *otoskorrelaatiokertoimen* r_{xy} *neliö*:

  $$R^2 = r_{xy}^2$$

Selitysasteen ominaisuudet 1/2

- *Selitysasteella* R^2 on seuraavat ominaisuudet:

  (i) $0 \leq R^2 \leq 1$

  (ii) Seuraavat ehdot ovat *yhtäpitäviä*:

  (1) $R^2 = 1$

  (2) Kaikki residuaalit häviävät:

  $e_i = 0$ kaikille $i = 1, 2, \ldots , n$

  (3) Kaikki havaintopisteet (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \ldots , n$ asettuvat *samalle suoralle*.

  (4) $r_{xy} = \pm 1$

  (5) Määritelty malli *selittää täydellisesti* selitettävän muuttujan y havaittujen arvojen vaihtelun.

Selitysasteen ominaisuudet 2/2

(iii) Seuraavat ehdot ovat *yhtäpitäviä*:

(1) $R^2 = 0$

(2) $b_1 = 0$

(3) $r_{xy} = 0$

(4) Määritelty malli *ei ollenkaan selitä* selitettävän muuttujan y havaittujen arvojen vaihtelua.

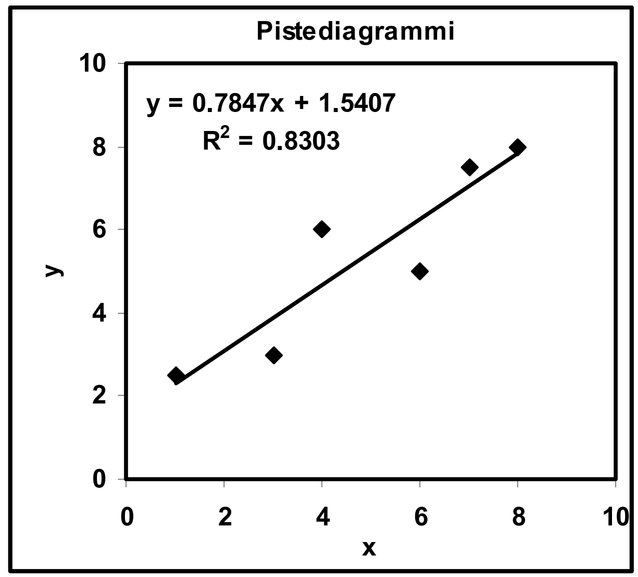
Selitysasteen laskeminen: Havainnollistava esimerkki 1/3

- Taulukossa oikealla on keinotekoisen kahden muuttujan aineiston havaintoarvot ($n = 6$).
- Aineistosta *estimoidun regressiosuoran* yhtälöksi saatiin kappaleessa **Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin estimointi**

$$y = 1.5407 + 0.7847x$$

ks. kuviota oikealla.

i	*x*	*y*
1	1	2.5
2	3	3
3	4	6
4	6	5
5	7	7.5
6	8	8



Selitysasteen laskeminen: Havainnollistava esimerkki 2/3

- Alla olevassa taulukossa on laskettu havaintoarvojen summat ja neliösummat sekä estimoidun mallin *sovitteet* $\hat{y}$, *residuaalit e* (sovitteiden ja residuaalien laskemista on käsitelty em. kappaleessa) ja *residuaalien neliöt* e^2.

i	*x*	*y*	x^2	y^2	*Sovite*	*Residuaali*	*Res* ^{2}
1	1	2.5	1	6.25	2.325	0.175	0.030
2	3	3	9	9	3.895	-0.895	0.801
3	4	6	16	36	4.679	1.321	1.744
4	6	5	36	25	6.249	-1.249	1.560
5	7	7.5	49	56.25	7.033	0.467	0.218
6	8	8	64	64	7.818	0.182	0.033
Summa	29	32	175	196.5	32	0.000	4.385

- Estimoidun mallin *selitysaste* saadaan taulukon sarakesummista seuraavalla kalvolla esitettävällä tavalla.

Selitysasteen laskeminen: Havainnollistava esimerkki 3/3

- *Kokonaisneliösumma*:

$$SST = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 = 196.5 - \frac{1}{6}\times 32^2 = 25.833$$

- *Jäännösneliösumma*:

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = 4.385$$

- *Selitysaste*:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{4.385}{25.833} = 0.830$$

- Siten estimoitu malli on selittänyt

  83.0 %

  selitettävän muuttujan arvojen vaihtelusta.

Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli

Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli ja sitä koskevat oletukset
Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin estimointi
Varianssianalyysihajotelma ja selitysaste
\>> Päättely yhden selittäjän lineaarisesta regressiomallista
Ennustaminen yhden selittäjän lineaarisella regressiomallilla
Yhden selittäjän lineaarisen regressiomalli ja satunnainen selittäjä
2-ulotteisen normaalijakauman regressiofunktioiden estimointi

Mallia koskeva tilastollinen päättely

- Tarkastellaan seuraavia yhden selittäjän lineaarista regressiomallia koskevia päättelyn ongelmia:
  - **Regressiokertoimien estimaattoreiden odotusarvot ja varianssit**
  - **Regressiokertoimien estimaattoreiden otosjakaumat**
  - **Regressiokertoimien luottamusvälit**
  - **Testit regressiokertoimille**
  - **Testi selitysasteelle**

Malli ja sen osat 1/3

- Oletetaan, että havaintoarvojen y_i ja x_i välillä on *lineaarinen tilastollinen riippuvuus*, joka voidaan ilmaista yhtälöllä

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

- Yhtälö määrittelee **yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin**, jossa

y_i = **selitettävän muuttujan** y *satunnainen* ja *havaittu* arvo havaintoyksikössä i

x_i = **selittävän muuttujan** eli **selittäjän** x *ei-satunnainen* ja *havaittu* arvo havaintoyksikössä i

ε_i = **jäännös-** eli **virhetermin** ε *satunnainen* ja *ei-havaittu* arvo havaintoyksikössä i

Malli ja sen osat 2/3

- Yhden selittäjän lineaarisessa regressiomallissa

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

on seuraavat *kertoimet*:

β_0 = **vakioselittäjän regressiokerroin**;
β_0 on *ei-satunnainen* ja *tuntematon vakio*

β_1 = **selittäjän** x **regressiokerroin**;
β_1 on *ei-satunnainen* ja *tuntematon vakio*

Malli ja sen osat 3/3

- Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

  määrittelemän **regressiosuoran**

  $$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

  yhtälössä

  $\beta_0 =$ regressiosuoran ja y-akselin **leikkauspiste** eli regressiosuoran **vakio**

  $\beta_1 =$ regressiosuoran **kulmakerroin**

Oletukset

- Oletetaan, että yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

  jäännös- eli *virhetermiä* ε_i koskevat *standardioletukset* pätevät:

  (i) $\mathrm{E}(\varepsilon_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots , n$

  (ii) Jäännöstermit ovat *homoskedastisia*:

  $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $i = 1, 2, \ldots , n$

  (iii) Jäännöstermit ovat *korreloimattomia*:

  $\mathrm{Cor}(\varepsilon_i, \varepsilon_l) = 0$, $i \neq l$

- Lisäksi oletetaan, että virhetermit ε_i ovat *normaalisia*:

  (iv) $\varepsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots , n$

Otostunnusluvut

- Määritellään havaintojen x_i ja y_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *aritmeettiset keskiarvot*, *otosvarianssit*, *otoskovarianssi* ja *otoskorrelaatiokerroin* tavanomaisilla kaavoillaan:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

Regressiokertoimien PNS-estimaattorit

- Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

regressiokertoimien β_0 ja β_1 **pienimmän neliösumman (PNS-) estimaattorit** ovat

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

$$b_1 = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = r_{xy} \frac{s_y}{s_x}$$

Sovitteet ja residuaalit

- Olkoot b_0 ja b_1 yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

regressiokertoimien β_0 ja β_1 PNS-estimaattorit.

- Määritellään estimoidun mallin **sovitteet** kaavalla

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

- Määritellään estimoidun mallin **residuaalit** kaavalla

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - b_0 - b_1 x_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

Jäännösvarianssin estimointi

- Jos yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin *jäännös-* eli *virhetermejä* ε_i *koskevat standardioletukset* (i)-(iii) *pätevät*, *jäännösvarianssin* $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ **harhaton estimaattori** on

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

jossa

$e_i =$ estimoidun mallin *residuaali*

$n =$ havaintojen lukumäärä

Regressiokertoimien estimaattorit: Odotusarvot ja varianssit

- *Jos standardioletukset* (i)-(iii) *pätevät*, niin regressiokertoimien β_0 ja β_1 PNS-estimaattoreilla b_0 ja b_1 on seuraavat *odotusarvot* ja *varianssit*:

$$\mathrm{E}(b_1) = \beta_1 \qquad \mathrm{Var}(b_1) = \mathrm{D}^2(b_1) = \frac{\sigma^2}{(n-1)s_x^2}$$

$$\mathrm{E}(b_0) = \beta_0 \qquad \mathrm{Var}(b_0) = \mathrm{D}^2(b_0) = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{(n-1)s_x^2}\right)$$

- Siten PNS-estimaattorit b_0 ja b_1 ovat *oletuksien* (i)-(iii) *pätiessä harhattomia*.

Regressiokertoimien estimaattorit: Otosjakaumat

- *Jos standardioletuksien* (i)-(iii) *lisäksi normaalisuusoletus* (iv) *pätee*, regressiokertoimien β_0 ja β_1 PNS-estimaattorit b_0 ja b_1 ovat *normaalijakautuneita*:

$$b_1 \sim \mathrm{N}\left(\beta_1 \, , \frac{\sigma^2}{(n-1)\, s_x^2} \right)$$

$$b_0 \sim \mathrm{N}\left(\beta_0 \, , \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{(n-1)\, s_x^2} \right) \right)$$

Regressiosuoran kulmakertoimen luottamusväli

- *Jos standardioletuksien* (i)-(iii) *lisäksi normaalisuusoletus* (iv) *pätee*, niin regressiokertoimen β_1 eli regressiosuoran *kulmakertoimen* **luottamusväli** luottamustasolla $(1-\alpha)$ on muotoa

$$b_1 \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n-1}\,s_x}$$

jossa $-t_{\alpha/2}$ ja $+t_{\alpha/2}$ ovat luottamustasoon $(1-\alpha)$ liittyvät luottamuskertoimet Studentin *t-jakaumasta*, jonka vapausasteiden luku on $(n-2)$ ja s^2 on jäännösvarianssin σ^2 harhaton estimaattori.

Regressiosuoran kulmakertoimen luottamusväli: Kommentti

- Huomaa, että regressiokertoimen β_1 luottamusväli on *tavanomaista muotoa*

$$b_1 \pm t_{\alpha/2}\,\hat{\mathrm{D}}(b_1)$$

jossa

$$\hat{\mathrm{D}}^2(b_1) = \frac{s^2}{(n-1)\,s_x^2}$$

on kertoimen β_1 PNS-estimaattorin b_1 *varianssin estimaattori*.

Regressiosuoran vakion luottamusväli

- *Jos standardioletuksien* (i)-(iii) *lisäksi normaalisuusoletus* (iv) *pätee*, niin regressiokertoimen β_0 eli regressiosuoran vakion **luottamusväli** luottamustasolla $(1 - \alpha)$ on muotoa
$$b_0 \pm t_{\alpha/2} s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{(n-1)s_x^2}}$$
jossa $-t_{\alpha/2}$ ja $+t_{\alpha/2}$ ovat luottamustasoon $(1 - \alpha)$ liittyvät luottamuskertoimet Studentin *t-jakaumasta*, jonka vapaus-asteiden luku on $(n - 2)$ ja s^2 on jäännösvarianssin σ^2 harhaton estimaattori.

Regressiosuoran vakion luottamusväli: Kommentti

- Huomaa, että regressiokertoimen β_0 luottamusväli on *tavanomaista muotoa*

$$b_0 \pm t_{\alpha/2}\,\hat{\mathrm{D}}(b_0)$$

jossa

$$\hat{\mathrm{D}}^2(b_0) = s^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{(n-1)\,s_x^2}\right)$$

on kertoimen β_0 PNS-estimaattorin b_0 *varianssin estimaattori*.

Testi regressiosuoran kulmakertoimelle

- Oletetaan, että *standardioletuksien* (i)-(iii) *lisäksi normaalisuusoletus* (iv) *pätee*.
- Olkoon *nollahypoteesina*

$$\mathrm{H}_{01} : \beta_1 = \beta_1^0$$

- Määritellään ***t*-testisuure**

$$t_1 = \frac{b_1 - \beta_1^0}{s/(\sqrt{n-1}\, s_x)}$$

- *Jos nollahypoteesi* H_{01} *pätee*,

$$t_1 \sim t(n-2)$$

- Itseisarvoltaan *suuret* testisuureen t_1 arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi H_{01} *ei päde*.

Testi regressiosuoran kulmakertoimelle: Kommentti

- Huomaa, että *t*-testisuure nollahypoteesille $\mathrm{H}_{01} : \beta_1 = \beta_1^0$ on *tavanomaista muotoa*

$$t_1 = \frac{b_1 - \beta_1^0}{\hat{\mathrm{D}}(b_1)}$$

jossa

$$\hat{\mathrm{D}}^2(b_1) = \frac{s^2}{(n-1)\,s_x^2}$$

on regressiokertoimen β_1 PNS-estimaattorin b_1 *varianssin estimaattori*, kun nollahypoteesi H_{01} pätee.

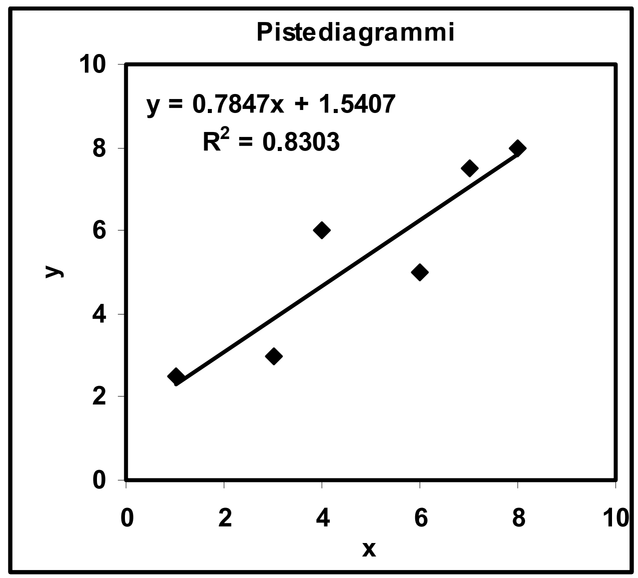
Testi regressiosuoran kulmakertoimelle: Havainnollistava esimerkki 1/5

- Taulukossa oikealla on keinotekoisen kahden muuttujan aineiston havaintoarvot ($n = 6$).
- Aineistosta *estimoidun regressiosuoran* yhtälöksi saatiin kappaleessa **Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin estimointi**

$$y = 1.5407 + 0.7847x$$

ks. kuviota oikealla.

i	*x*	*y*
1	1	2.5
2	3	3
3	4	6
4	6	5
5	7	7.5
6	8	8



Testi regressiosuoran kulmakertoimelle: Havainnollistava esimerkki 2/5

- Alla olevassa taulukossa on laskettu havaintoarvojen summat ja neliösummat sekä estimoidun mallin *sovitteet* $\hat{y}$, *residuaalit e* (sovitteiden ja residuaalien laskemista on käsitelty em. kappaleessa) ja *residuaalien neliöt* e^2.

i	*x*	*y*	x^2	y^2	*Sovite*	*Residuaali*	*Res* ^{2}
1	1	2.5	1	6.25	2.325	0.175	0.030
2	3	3	9	9	3.895	-0.895	0.801
3	4	6	16	36	4.679	1.321	1.744
4	6	5	36	25	6.249	-1.249	1.560
5	7	7.5	49	56.25	7.033	0.467	0.218
6	8	8	64	64	7.818	0.182	0.033
Summa	29	32	175	196.5	32	0.000	4.385

- Tarkastellaan testiä mallin

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

regressiokerrointa β_1 koskevalle nollahypoteesille

$$\mathrm{H}_{01} : \beta_1 = 0$$

Testi regressiosuoran kulmakertoimelle: Havainnollistava esimerkki 3/5

- *Kertoimen* β_1 *estimaatti*:

$$b_1 = 0.7847$$

- *Selittäjän x varianssi*:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) = \frac{1}{6-1}\left(175 - \frac{1}{6}\times 29^2\right) = 6.967$$

- *Jäännösvarianssi*:

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \frac{1}{6-2}\times 4.385 = 1.096$$

- *t-testisuureen arvo*:

$$t_1 = \frac{b_1 - \beta_1^0}{s/(\sqrt{n-1}\,s_x)} = \frac{0.7847 - 0}{\sqrt{1.096/((6-1)\times 6.967)}} = 4.423$$

Testi regressiosuoran kulmakertoimelle: Havainnollistava esimerkki 4/5

- Jos nollahypoteesi $H_{01} : \beta_1 = 0$ pätee, testisuure t_1 on jakautunut *Studentin t-jakauman* mukaan vapausastein $(n - 2) = (6 - 2) = 4$:

  $$t_1 \sim t(4)$$

- Valitaan *merkitsevyystasoksi* 0.05.
- Olkoon *vaihtoehtoinen hypoteesi* muotoa

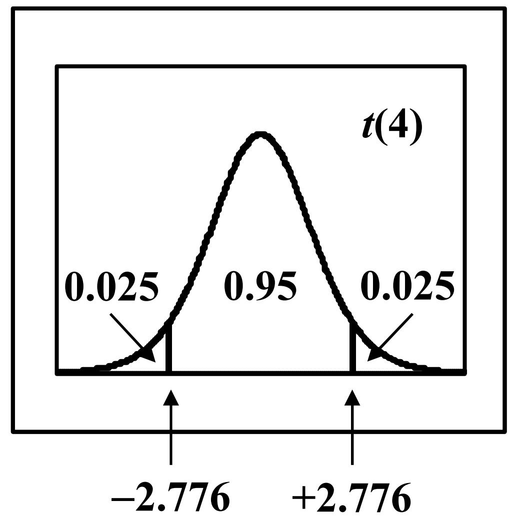
  $$H_{11} : \beta_1 \neq 0$$

- Tällöin merkitsevyystasoa 0.05 vastaavat *kriittiset rajat* ovat

  $$-2.776 \text{ ja } +2.776$$

  ks. kuviota oikealla.
- Siten testin *hylkäysalue* on muotoa

  $$\{t_1 \mid t_1 < -2.776\} \cup \{t_1 \mid t_1 > +2.776\}$$



Testi regressiosuoran kulmakertoimelle: Havainnollistava esimerkki 5/5

- Koska

  $$t_1 = 4.423 > 2.776$$

  niin testisuureen t_1 arvo on hylkäysalueella ja *voimme hylätä nollahypoteesin*

  $$\mathrm{H}_{01} : \beta_1 = 0$$

  ja *hyväksyä vaihtoehtoisen hypoteesin*

  $$\mathrm{H}_{11} : \beta_1 \neq 0$$

  merkitsevyystasolla 0.05.

Testi regressiosuoran vakiolle

- Oletetaan, että *standardioletuksien* (i)-(iii) *lisäksi normaalisuusoletus* (iv) *pätee*.
- Olkoon *nollahypoteesina*

$$\mathrm{H}_{00} : \beta_0 = \beta_0^0$$

- Määritellään ***t*-testisuure**

$$t_0 = (b_0 - \beta_0^0) \Bigg/ \left(s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{(n-1)s_x^2}} \right)$$

- *Jos nollahypoteesi* H_{00} *pätee*,

$$t_0 \sim t(n-2)$$

- Itseisarvoltaan *suuret* testisuureen t_0 arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi H_{00} *ei päde*.

Testi regressiosuoran vakiolle: Kommentti

- Huomaa, että *t*-testisuure nollahypoteesille $\mathrm{H}_{00} : \beta_0 = \beta_0^0$ on *tavanomaista muotoa*

$$t_0 = \frac{b_0 - \beta_0^0}{\hat{\mathrm{D}}(b_0)}$$

jossa

$$\hat{\mathrm{D}}^2(b_0) = s^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{(n-1)s_x^2}\right)$$

on regressiokertoimen β_0 PNS-estimaattorin b_0 *varianssin estimaattori*, kun nollahypoteesi H_{00} pätee.

Testi selitysasteelle 1/4

- Oletetaan, että *standardioletuksien* (i)-(iii) *lisäksi normaalisuusoletus* (iv) *pätee*.
- Olkoon *nollahypoteesina*

$$\mathrm{H}_{01} : \beta_1 = 0$$

- Määritellään ***F*-testisuure**

$$F = (n-2)\frac{R^2}{1-R^2}$$

jossa R^2 on estimoidun mallin *selitysaste*.

Testi selitysasteelle 2/4

- *Jos nollahypoteesi*

  $$\mathrm{H}_{01} : \beta_1 = 0$$

  pätee, testisuure

  $$F = (n-2)\frac{R^2}{1-R^2} \sim F(1, n-2)$$

  jossa $F(1, n-2)$ on Fisherin *F-jakauma* vapausastein 1 ja $(n-2)$.

- *Suuret* testisuureen F arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi H_{01} *ei päde*.

Testi selitysasteelle 3/4

- Koska $R^2 = r_{xy}^2$, em. F-testisuure voidaan esittää muodossa

$$F = (n-2)\frac{r_{xy}^2}{1-r_{xy}^2}$$

- Ottamalla tästä neliöjuuri saadaan testisuure

$$t = \sqrt{n-2}\,\frac{r_{xy}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}$$

  joka noudattaa *nollahypoteesin* H_{01} *pätiessä* Studentin *t-jakaumaa* vapausastein $(n-2)$:

$$t \sim t(n-2)$$

- Itseisarvoltaan *suuret* testisuureen t arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi H_{01} *ei päde*.

Päättely yhden selittäjän lineaarisesta regressiomallista

Testi selitysasteelle 4/4

- Voidaan osoittaa, että

$$t = \sqrt{n-2}\,\frac{r_{xy}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} = \frac{b_1}{s/\sqrt{n-1}\,s_x} = t_1$$

jossa testisuure t_1 on tavanomainen t-testisuure nolla-hypoteesille

$$\mathrm{H}_{01} : \beta_1 = 0$$

- F- ja t-jakaumien yhteyden perusteella on selvää, että

$$t_1^2 = F$$

jossa F on em. F-testisuure nollahypoteesille H_{01} .

- Huomaa, että yllä esitetty t-testisuure ja t-testisuure *korreloimattomuudelle* ovat ekvivalentteja.

Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli

Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli ja sitä koskevat oletukset
Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin estimointi
Varianssianalyysihajotelma ja selitysaste
Päättely yhden selittäjän lineaarisesta regressiomallista
>> Ennustaminen yhden selittäjän lineaarisella regressiomallilla
Yhden selittäjän lineaarisen regressiomalli ja satunnainen selittäjä
2-ulotteisen normaalijakauman regressiofunktioiden estimointi

Ennustaminen

- Oletetaan, että muuttujien x ja y havaittujen arvojen x_i ja y_i välillä on *lineaarinen tilastollinen riippuvuus*, joka voidaan ilmaista muodossa
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$
- Haluamme *ennustaa selitettävää muuttujaa y*, kun selittävä muuttuja x saa arvon $\tilde{x}$.
- Jaetaan tarkastelu kahteen osaan:

(i) Tavoitteena on ennustaa selitettävän muuttujan y **odotettavissa oleva** eli *keskimääräinen* **arvo**.

(ii) Tavoitteena on ennustaa selitettävän muuttujan y **arvo**.

Malli ja sen osat 1/2

- Oletetaan, että havaintoarvojen y_i ja x_i välillä on *lineaarinen tilastollinen riippuvuus*, joka voidaan ilmaista yhtälöllä

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

- Yhtälö määrittelee **yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin**, jossa

y_i = **selitettävän muuttujan** y *satunnainen* ja *havaittu* arvo havaintoyksikössä i

x_i = **selittävän muuttujan** eli **selittäjän** x *ei-satunnainen* ja *havaittu* arvo havaintoyksikössä i

ε_i = **jäännös-** eli **virhetermin** ε *satunnainen* ja *ei-havaittu* arvo havaintoyksikössä i

Malli ja sen osat 2/2

- Yhden selittäjän lineaarisessa regressiomallissa

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

on seuraavat *kertoimet*:

β_0 = **vakioselittäjän regressiokerroin**;
β_0 on *ei-satunnainen* ja *tuntematon vakio*

β_1 = **selittäjän** x **regressiokerroin**;
β_1 on *ei-satunnainen* ja *tuntematon vakio*

Oletukset

- Oletetaan, että yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

  jäännös- eli *virhetermiä* ε_i koskevat *standardioletukset* pätevät:

  (i) $\mathrm{E}(\varepsilon_i) = 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots , n$

  (ii) Jäännöstermit ovat *homoskedastisia*:

  $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 \ , \ i = 1, 2, \ldots , n$

  (iii) Jäännöstermit ovat *korreloimattomia*:

  $\mathrm{Cor}(\varepsilon_i, \varepsilon_l) = 0 \ , \ i \neq l$

- Lisäksi oletetaan, että virhetermit ε_i ovat *normaalisia*:

  (iv) $\varepsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2) \ , \ i = 1, 2, \ldots , n$

Otostunnusluvut

- Määritellään havaintojen x_i ja y_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *aritmeettiset keskiarvot*, *otosvarianssit*, *otoskovarianssi* ja *otoskorrelaatiokerroin* tavanomaisilla kaavoillaan:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \qquad s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

Regressiokertoimien PNS-estimaattorit

- Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

  regressiokertoimien β_0 ja β_1 **pienimmän neliösumman (PNS-) estimaattorit** ovat

  $$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

  $$b_1 = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = r_{xy} \frac{s_y}{s_x}$$

Sovitteet ja residuaalit

- Olkoot b_0 ja b_1 yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$
regressiokertoimien β_0 ja β_1 PNS-estimaattorit.
- Määritellään estimoidun mallin **sovitteet** kaavalla
$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$
- Määritellään estimoidun mallin **residuaalit** kaavalla
$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - b_0 - b_1 x_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

Jäännösvarianssin estimointi

- Jos yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin *jäännös-* eli *virhetermejä* ε_i *koskevat standardioletukset* (i)-(iii) *pätevät*, *jäännösvarianssin* $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ **harhaton estimaattori** on

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

jossa

$e_i =$ estimoidun mallin *residuaali*

$n =$ havaintojen lukumäärä

y:n odotusarvon ennustaminen

- Oletetaan, että selitettävä muuttuja y saa arvon
$$\tilde{y} = \beta_0 + \beta_1 \tilde{x} + \tilde{\varepsilon}$$
kun selittäjä x saa arvon $\tilde{x}$.
- Mikä on *paras ennuste selitettävän muuttujan y* **odotettavissa olevalle arvolle**
$$\mathrm{E}(\tilde{y} \mid \tilde{x}) = \beta_0 + \beta_1 \tilde{x}$$
kun selittäjä x saa arvon $\tilde{x}$?
- Selitettävän muuttujan y ehdollinen odotusarvo $\mathrm{E}(\tilde{y} \mid \tilde{x})$ kuvaa *selitettävän muuttujan y keskimäärin saamia arvoja selittäjän x saamien arvojen funktiona*.

y:n odotusarvon ennustaminen: Ennuste

- Valitaan *selitettävän muuttujan odotusarvon* $\mathrm{E}(\tilde{y}|\tilde{x})$ **ennusteeksi** (*estimaattoriksi*) lauseke

  $$\hat{y}|\tilde{x} = b_0 + b_1\tilde{x}$$

  jossa b_0 ja b_1 ovat regressiokertoimien β_0 ja β_1 PNS-estimaattorit.
- Voidaan osoittaa, että $\hat{y}|\tilde{x}$ on (ennustevirheen keskineliövirheen mielessä) *paras lineaarinen* ja *harhaton ennuste* ehdolliselle odotusarvolle $\mathrm{E}(\tilde{y}|\tilde{x})$.
- Huomautus:

  Ehdollinen odotusarvo $\mathrm{E}(\tilde{y}|\tilde{x})$ on kiinteälle $\tilde{x}$ *vakio*, kun taas ennuste $\hat{y}|\tilde{x}$ on *satunnaismuuttuja*.

y:n odotusarvon ennustaminen: Otosjakauma

- Oletetaan, että yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin *jäännös*- eli *virhetermiä* ε_i koskevat *standardioletuksien* (i)-(iii) *lisäksi normaalisuusoletus* (iv) *pätee*.
- Tällöin ennusteen

$$\hat{y}\,|\,\tilde{x} = b_0 + b_1\tilde{x}$$

otosjakauma on normaalijakauma:

$$\hat{y}\,|\,\tilde{x} \sim \mathrm{N}\left(\beta_0 + \beta_1\tilde{x}\,,\, \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(\tilde{x}-\bar{x})^2}{(n-1)\,s_x^2}\right]\right)$$

Ennustaminen yhden selittäjän lineaarisella regressiomallilla

y:n odotusarvon ennustaminen: Luottamusväli

- Odotusarvon

  $$\mathrm{E}(\tilde{y}\,|\,\tilde{x}) = \beta_0 + \beta_1 \tilde{x}$$

  luottamusväli luottamustasolla $(1-\alpha)$ on

  $$b_0 + b_1\tilde{x} \pm t_{\alpha/2}\, s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\tilde{x}-\bar{x})^2}{(n-1)\,s_x^2}}$$

  jossa $-t_{\alpha/2}$ ja $+t_{\alpha/2}$ ovat luottamustasoon $(1-\alpha)$ liittyvät luottamuskertoimet Studentin *t-jakaumasta*, jonka vapausasteiden luku on $(n-2)$ ja s^2 on jäännösvarianssin σ^2 harhaton estimaattori.
- Väli muodostaa selittäjän x arvojen $\tilde{x}$ funktiona *luottamusvyön* estimoidun regressiosuoran $y = b_0 + b_1x$ ympärille.

y:n odotusarvon ennustaminen: Luottamusvälin ominaisuuksia

- Odotusarvon

  $$\mathrm{E}(\tilde{y}|\tilde{x}) = \beta_0 + \beta_1\tilde{x}$$

  luottamusväli

  $$b_0 + b_1\tilde{x} \pm t_{\alpha/2}\, s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\tilde{x}-\overline{x})^2}{(n-1)\,s_x^2}}$$

  kaventuu, jos havaintojen lukumäärä n tai selittäjän otos-varianssi s_x^2 kasvaa.
- Toisaalta luottamusväli on sitä *leveämpi*, mitä kauempana piste $\tilde{x}$ on selittäjän x havaittujen arvojen aritmeettisesta keskiarvosta $\overline{x}$.

y:n arvon ennustaminen

- Oletetaan, että selitettävä muuttuja y saa arvon
  $$\tilde{y} = \beta_0 + \beta_1 \tilde{x} + \tilde{\varepsilon}$$
  kun selittäjä x saa arvon $\tilde{x}$.
- Mikä on *paras ennuste selitettävän muuttujan y* **arvolle** $\tilde{y}$, kun selittäjä x saa arvon $\tilde{x}$?

y:n arvon ennustaminen: Ennuste

- Valitaan *selitettävän muuttujan arvon* $\tilde{y}$ **ennusteeksi** (*estimaattoriksi*) lauseke

$$\hat{y} \,|\, \tilde{x} = b_0 + b_1\tilde{x}$$

  jossa b_0 ja b_1 ovat regressiokertoimien β_0 ja β_1 PNS-estimaattorit.
- Voidaan osoittaa, että $\hat{y} \,|\, \tilde{x}$ on (ennustevirheen keskineliövirheen mielessä) *paras lineaarinen* ja *harhaton ennuste* ehdolliselle odotusarvolle $\mathrm{E}(\tilde{y} \,|\, \tilde{x})$.
- Huomautus:

  Sekä selitettävän muuttujan y arvo $\tilde{y}$ että ennuste $\hat{y} \,|\, \tilde{x}$ ovat *satunnaismuuttujia*.

y:n arvon ennustaminen: Otosjakauma

- Oletetaan, että yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin *jäännös*- eli *virhetermiä* ε_i koskevat *standardioletuksien* (i)-(iii) *lisäksi normaalisuusoletus* (iv) *pätee*.
- Tällöin *ennustevirheen*

$$\tilde{y} - \hat{y} \,|\, \tilde{x}$$

otosjakauma on normaalijakauma:

$$\tilde{y} - \hat{y} \,|\, \tilde{x} \sim \mathrm{N}\left(0\,,\sigma^2\left[1+\frac{1}{n}+\frac{(\tilde{x}-\overline{x})^2}{(n-1)\,s_x^2}\right]\right)$$

y:n arvon ennustaminen: Luottamusväli

- Selitettävän muuttujan y arvon $\tilde{y}$ **luottamusväli** luottamustasolla $(1-\alpha)$ on
$$b_0 + b_1\tilde{x} \pm t_{\alpha/2}\, s\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(\tilde{x}-\overline{x})^2}{(n-1)\,s_x^2}}$$
jossa $-t_{\alpha/2}$ ja $+t_{\alpha/2}$ ovat luottamustasoon $(1-\alpha)$ liittyvät luottamuskertoimet Studentin *t-jakaumasta*, jonka vapausasteiden luku on $(n-2)$ ja s^2 on jäännösvarianssin σ^2 harhaton estimaattori.
- Väli muodostaa selittäjän x arvojen $\tilde{x}$ funktiona *luottamusvyön* estimoidun regressiosuoran $y = b_0 + b_1x$ ympärille.

y:n arvon ennustaminen: Luottamusvälin ominaisuuksia

- Selitettävän muuttujan y arvon $\tilde{y}$ luottamusväli

$$b_0 + b_1\tilde{x} \pm t_{\alpha/2}\, s\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(\tilde{x}-\overline{x})^2}{(n-1)\,s_x^2}}$$

kaventuu, jos havaintojen lukumäärä n tai selittäjän otosvarianssi s_x^2 kasvaa.

- Toisaalta luottamusväli on sitä *leveämpi*, mitä kauempana piste $\tilde{x}$ on selittäjän x havaittujen arvojen aritmeettisesta keskiarvosta $\overline{x}$.

y:n arvon luottamusväli *vs* *y*:n odotusarvon luottamusväli

- Selitettävän muuttujan y arvon $\tilde{y}$ luottamusvyö *on leveämpi* kuin selitettävän muuttujan y arvon $\tilde{y}$ odotus-arvon $\mathrm{E}(\tilde{y}|\tilde{x})$ luottamusvyö.
- Tämä johtuu siitä, että selitettävän muuttujan y *keskimääräisen arvon ennustaminen on helpompaa kuin sen yksittäisen arvon ennustaminen*.

Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli

Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli ja sitä koskevat oletukset
Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin estimointi
Varianssianalyysihajotelma ja selitysaste
Päättely yhden selittäjän lineaarisesta regressiomallista
Ennustaminen yhden selittäjän lineaarisella regressiomallilla
>> Yhden selittäjän lineaarisen regressiomalli ja satunnainen selittäjä
2-ulotteisen normaalijakauman regressiofunktioiden estimointi

Selitettävä muuttuja ja selittävä muuttuja

- Oletetaan, että **selitettävän muuttujan** *y havaittujen arvojen vaihtelu* halutaan **selittää selittävän muuttujan** eli **selittäjän** *x havaittujen arvojen vaihtelun avulla*.
- Tehdään seuraavat oletukset:

  (i) Sekä selitettävä muuttuja *y* että selittäjä *x* ovat *satunnaismuuttujia*.

  (ii) Selitettävä muuttuja *y* on *suhdeasteikollinen muuttuja*.

Havainnot

- Olkoot

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

selitettävän muuttujan y ja

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

selittävän muuttujan x **havaittuja arvoja**.
- Oletetaan lisäksi, että havaintoarvot x_i ja y_i liittyvät *samaan havaintoyksikköön kaikille* $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Tällöin havaintoarvot x_i ja y_i muodostavat pisteitä 2-ulotteisessa avaruudessa:

$$(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \, , i = 1, 2, \ldots, n$$

Malli ja sen osat 1/2

- Oletetaan, että havaintojen y_i ja x_i välillä on *lineaarinen tilastollinen riippuvuus*, joka voidaan ilmaista yhtälöllä

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \; , i = 1, 2, \ldots, n$$

- Yhtälö määrittelee **yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin**, jossa

y_i = **selitettävän muuttujan** y *satunnainen* ja *havaittu* arvo havaintoyksikössä i

x_i = **selittävän muuttujan** x *satunnainen* ja *havaittu* arvo havaintoyksikössä i

ε_i = **jäännös-** eli **virhetermin** ε *satunnainen* ja *ei-havaittu* arvo havaintoyksikössä i

Malli ja sen osat 2/2

- Yhden selittäjän lineaarisessa regressiomallissa

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

on seuraavat kertoimet:

β_0 = **vakioselittäjän regressiokerroin**;
β_0 on *ei-satunnainen* ja *tuntematon vakio*

β_1 = **selittäjän** x **regressiokerroin**;
β_1 on *ei-satunnainen* ja *tuntematon vakio*

- Huomautus:

Regressiokertoimet β_0 ja β_1 oletetaan *samoiksi* kaikille havaintoyksiköille i.

Selittäjän satunnaisuuden seuraukset 1/4

- Yhden selittäjän lineaarisen mallin

  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

  selittäjän x satunnaisuus saattaa aiheuttaa vakavia ongelmia mallin estimoinnille ja mallia koskevalle tilastolliselle päättelylle.

Selittäjän satunnaisuuden seuraukset 2/4

- **Jos selittäjä x on satunnainen, PNS-menetelmä *ei välttämättä tuota harhattomia* tai *edes tarkentuvia estimaattoreita regressiokertoimille*.**

  Näin käy esimerkiksi silloin, kun virhetermi ja selittäjä *korreloivat*.
- **Jos regressiokertoimien PNS-estimaattorit *eivät ole harhattomia* tai *tarkentuvia*, mallia koskevaa *tavanomaista tilastollista päättelyä ei saa soveltaa*.**

Selittäjän satunnaisuuden seuraukset 3/4

- Kysymys:

  Milloin kiinteälle, ei-satunnaiselle selittäjälle esitettyä teoriaa saa soveltaa myös satunnaiselle selittäjälle?

- Vastaus:

  Kiinteälle, **ei-satunnaiselle selittäjälle esitettyä teoriaa saadaan soveltaa ainakin silloin**, **kun *jäännös-* eli *virhetermit* ε_j toteuttavat kiinteälle selittäjälle esitetyt standardioletukset *ehdollisesti selittäjän x havaittujen arvojen suhteen*.**

Selittäjän satunnaisuuden seuraukset 4/4

- Tässä kappaleessa tarkastellaan lähemmin yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin määrittelemistä sellaisella tavalla, joka takaa sen, että kiinteälle selittäjälle esitetty teoria pätee.

Modifioidut oletukset jäännöstermeistä

- Oletetaan, että mallin

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

jäännös- eli *virhetermit* ε_j toteuttavat seuraavat oletukset:

(i) $\mathrm{E}(\varepsilon_i \mid x_i) = 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$

(ii) Jäännöstermit ovat (ehdollisesti) *homoskedastisia*.

$\mathrm{Var}(\varepsilon_i \mid x_i) = \sigma^2 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$

(iii) Jäännöstermit ovat (ehdollisesti) *korreloimattomia*.

$\mathrm{Cor}(\varepsilon_i, \varepsilon_l \mid x_i, x_l) = 0 \ , \ i \neq l$

- Lisäksi jäännöstermeistä ε_i tehdään tavallisesti *normaalisuusoletus*:

(iv) $\varepsilon_i \mid x_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2) \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$

Mallin selitettävän muuttujan ominaisuudet

- Jos yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin
  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$
  jäännös- eli *virhetermejä ε_i koskevat modifioidut oletukset* (i)-(iii) *pätevät*, mallin selitettävän muuttujan y havaituilla arvoilla y_i on seuraavat *stokastiset ominaisuudet*:
  (i)′ $\mathrm{E}(y_i \mid x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$
  (ii)′ $\mathrm{Var}(y_i \mid x_i) = \sigma^2 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$
  (iii)′ $\mathrm{Cor}(y_i, y_l \mid x_i, x_l) = 0 \ , \ i \neq l$
- Jos jäännöstermejä ε_i koskeva *normaalisuusoletus* (iv) *pätee*, niin
  (iv)′ $y_i \mid x_i \sim \mathrm{N}(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2) \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$

Mallin selitettävän muuttujan ominaisuudet: Kommentti

- Jos muuttujan y arvojen y_i stokastiset ominaisuudet (i)´-(iv)´ *otetaan oletuksiksi*, ne määrittelevät täsmälleen *saman tilastollisen mallin* kuin mallin
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$
jäännös- eli virhetermeistä ε_i tehdyt oletukset (i)-(iv).
- Oletukset (i)-(iv) ja (i)´-(iv)´ ovat tässä mielessä *ekvivalentteja*.
- Siten myös ominaisuudet (i)´-(iv)´ voidaan ottaa yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin määritteleviksi standardioletuksiksi.

Selitettävän muuttujan ehdollisen odotusarvon tulkinta regressiofunktiona

- Oletuksen

  (i)´ $\mathrm{E}(y_i \mid x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$

  mukaan selitettävän muuttujan *y ehdollinen odotusarvo* eli **regressiofunktio on selittävän muuttujan *x* havaittujen arvojen suhteen lineaarinen funktio**.
- Koska *regressiofunktiot ovat yleisessä tapauksessa epälineaarisia*, (i)´ on *hyvin voimakas oletus*.
- Huomautus:

  Jos havainnot x_i ja y_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ noudattavat 2-*ulotteista normaalijakaumaa*, oletus (i)´ pätee.

Yhteys kiinteän selittäjän tapaukseen

- Oletetaan, että mallin
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$
selittävän muuttujan *x arvot* x_i *ovat kiinteitä eli ei-satunnaisia* ja mallin *jäännös*- eli *virhetermit* ε_i toteuttavat standardioletukset
(i) $\mathrm{E}(\varepsilon_i) = 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$
(ii) $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$
(iii) $\mathrm{Cor}(\varepsilon_i, \varepsilon_l) = 0 \ , \ i \neq l$
(iv) $\varepsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma_\varepsilon^2) \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$
- Tällöin edellä satunnaisen selittäjän tapauksessa tehdyt oletukset mallin virhetermistä pätevät triviaalisti.

Selittäjän satunnaisuuden seuraukset: Kommentteja

- **Tässä kappaleessa esitetyt modifioidutkin ehdot jäännös- eli virhetermeille ovat melko rajoittavia ja *etenkin aikasarjojen regressiomalleissa kohdataan sellaisia tilanteita*, *joissa eivät edes nämä modifioidut ehdot päde*.**
- **Tällaisissa tilanteissa *PNS-menetelmää ei yleensä saa käyttää mallin parametrien estimointiin*.**
- Tilastotiede tuntee kuitenkin menetelmiä, joilla regressiomallin parametrit *voidaan estimoida* (*ainakin*) *tarkentuvasti* myös monissa sellaisissa tilanteissa, joissa tässä kappaleessa esitetyt modifioidut ehdot jäännöstermeille *eivät päde*.

Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli

Oletukset

- Oletetaan, että toisistaan *riippumattomat* havaintoparit

$$(x_i, y_i)\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

noudattavat **2-ulotteista normaalijakaumaa**; ks. monisteen **Todennäköisyyslaskenta** lukua **Moniulotteisia jakaumia.**

- Tällöin *ehdolliset odotusarvot* ovat muotoa

$$\mathrm{E}(x_i \mid y_i) = \alpha_0 + \alpha_1 y_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\mathrm{E}(y_i \mid x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

ja siis *lineaarisia*.

Regressiomalleja on kaksi

- Voimme kirjoittaa

$$x_i = \alpha_0 + \alpha_1 y_i + \delta_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

ja

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

jossa jäännöstermit ε_i ja δ_i ovat *keskenään korreloimattomia* satunnaismuuttujia.

Mallien jäännöstermit 1/2

- Mallin

  $$x_i = \alpha_0 + \alpha_1 y_i + \delta_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

  jäännös- eli *virhetermit* δ_i toteuttavat seuraavat ehdot:

  (i) $\mathrm{E}(\delta_i \mid y_i) = 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$

  (ii) Jäännöstermit ovat *homoskedastisia*:

  $$\mathrm{Var}(\delta_i \mid y_i) = \sigma_\delta^2 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

  (iii) Jäännöstermit ovat *korreloimattomia*:

  $$\mathrm{Cor}(\delta_i, \delta_l \mid y_i, y_l) = 0 \ , \ i \neq l$$

  (iv) Jäännöstermit ovat *normaalisia*:

  $$\delta_i \mid y_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma_\delta^2) \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

Mallien jäännöstermit 2/2

- Mallin

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

jäännös- eli *virhetermit* ε_i toteuttavat seuraavat ehdot:

(i) $\mathrm{E}(\varepsilon_i \mid x_i) = 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$

(ii) Jäännöstermit ovat *homoskedastisia*:

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_i \mid x_i) = \sigma_\varepsilon^2 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

(iii) Jäännöstermit ovat *korreloimattomia*:

$$\mathrm{Cor}(\varepsilon_i, \varepsilon_l \mid x_i, x_l) = 0 \ , \ i \neq l$$

(iv) Jäännöstermit ovat *normaalisia*:

$$\varepsilon_i \mid x_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma_\varepsilon^2) \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

Otostunnusluvut

- Määritellään havaintojen x_i ja y_i , $i = 1, 2, \dots , n$ *aritmeettiset keskiarvot*, *otosvarianssit*, *otoskovarianssi* ja *otoskorrelaatiokerroin* tavanomaisilla kaavoillaan:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

Parametrien PNS-estimaattorit

- Mallin

  $$x_i = \alpha_0 + \alpha_1 y_i + \delta_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

  regressiokertoimien α_1 ja α_0 *PNS-estimaattorit* ovat

  $$a_1 = \frac{s_{xy}}{s_y^2} = r_{xy}\frac{s_x}{s_y} \qquad a_0 = \overline{x} - a_1\overline{y}$$

- Mallin

  $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , i = 1, 2, \ldots, n$$

  regressiokertoimien β_1 ja β_0 *PNS-estimaattorit* ovat

  $$b_1 = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = r_{xy}\frac{s_y}{s_x} \qquad b_0 = \overline{y} - b_1\overline{x}$$

Estimoidut regressiosuorat 1/3

- Muuttujan *x estimoitu regressiosuora* muuttujan *y* suhteen voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{x-\bar{x}}{s_x} = r_{xy}\left(\frac{y-\bar{y}}{s_y}\right)$$

- Muuttujan *y estimoitu regressiosuora* muuttujan *x* suhteen voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{y-\bar{y}}{s_y} = r_{xy}\left(\frac{x-\bar{x}}{s_x}\right)$$

Estimoidut regressiosuorat 2/3

- *Molemmat* estimoidut regressiosuorat voidaan esittää muuttujan x funktioina:

  (i) Muuttujan x *estimoitu regressiosuora* muuttujan y suhteen:

  $$\frac{y-\overline{y}}{s_y} = \frac{1}{r_{xy}}\left(\frac{x-\overline{x}}{s_x}\right)$$

  (ii) Muuttujan y *estimoitu regressiosuora* muuttujan x suhteen:

  $$\frac{y-\overline{y}}{s_y} = r_{xy}\left(\frac{x-\overline{x}}{s_x}\right)$$

Estimoidut regressiosuorat 3/3

- Estimoitujen regressiosuorien yhtälöistä nähdään:

  Seuraavat ehdot ovat *yhtäpitäviä*:

  (1) Suorat *yhtyvät*.

  (2) $r_{xy} = \pm 1$

  Seuraavat ehdot ovat *yhtäpitäviä*:

  (1)′ Suorat ovat *kohtisuorassa* toisiaan vastaan.

  (2)′ $r_{xy} = 0$
- Lisäksi yhtälöistä nähdään, että *suorat leikkaavat havaintojen painopisteessä* $(\bar{x}, \bar{y})$.

Estimoidut regressiosuorat ja 2-ulotteisen normaalijakauman regressiofunktiot 1/2

- Olkoon satunnaismuuttujien x ja y yhteisjakauma 2-*ulotteinen normaalijakauma*.
- Tällöin muuttujan x *regressiofunktion yhtälö* muuttujan y suhteen on

$$\mu_{x|y} = \mathrm{E}(x \mid y) = \mu_x + \rho_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y)$$

- Siten muuttujien x ja y havaituista arvoista x_j ja y_j , $j = 1, 2, \ldots , n$ *estimoitu regressiosuora*

$$x = \overline{x} + r_{xy} \frac{s_x}{s_y}(y - \overline{y})$$

saadaan muodollisesti *korvaamalla* regressiofunktion *parametrit* μ_x, μ_y, σ_x^2, σ_y^2, ρ_{xy} *vastaavilla otossuureilla*.

Estimoidut regressiosuorat ja 2-ulotteisen normaalijakauman regressiofunktiot 2/2

- Olkoon satunnaismuuttujien x ja y yhteisjakauma 2-*ulotteinen normaalijakauma*.
- Tällöin muuttujan y *regressiofunktion yhtälö* muuttujan x suhteen on

$$\mu_{y|x} = \mathrm{E}(y \,|\, x) = \mu_y + \rho_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$$

- Siten muuttujien x ja y havaituista arvoista x_j ja y_j , $j = 1, 2, \ldots , n$ *estimoitu regressiosuora*

$$y = \bar{y} + r_{xy} \frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x})$$

saadaan muodollisesti *korvaamalla* regressiofunktion *parametrit* μ_x, μ_y, σ_x^2, σ_y^2, ρ_{xy} *vastaavilla otossuureilla*.

Regressiosuorien estimointi: Esimerkki 1/8

- Perinnöllisyystieteen mukaan lapset perivät geneettiset ominaisuutensa vanhemmiltaan.
- Periytyykö isän pituus heidän pojilleen?
- Havaintoaineisto koostuu 300:n isän ja heidän poikiensa pituuksien muodostamasta lukuparista

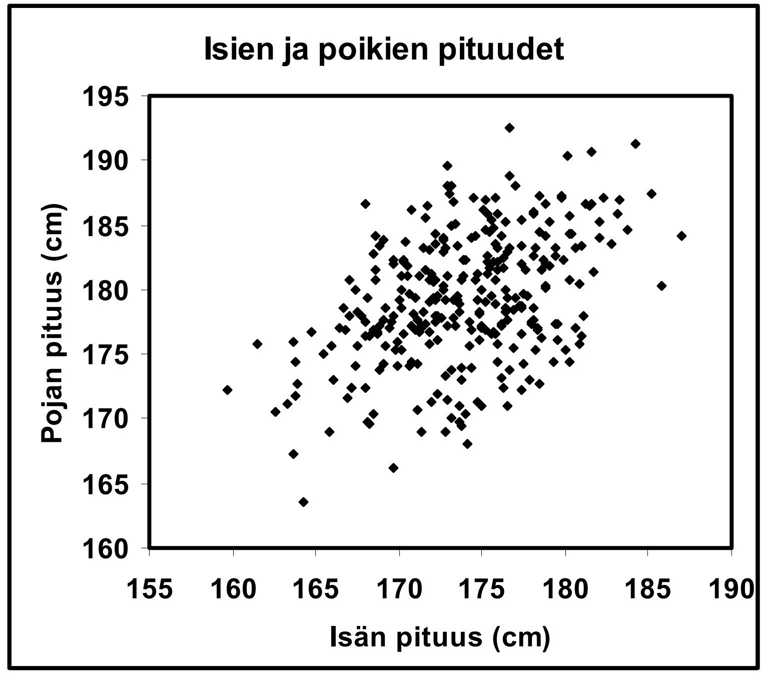
$$(x_i\,,\,y_i)\;,\;i = 1, 2, \ldots, 300$$

jossa

x_i = isän i pituus

y_i = isän i pojan pituus

- Ks. pistediagrammia oikealla.



Regressiosuorien estimointi: Esimerkki 2/8

- Taulukko oikealla esittää isien ja heidän poikiensa pituuksien *ehdollisia keskiarvoja*

  $M_k(x|x)$ ja $M_k(y|x)$

  jossa

  $M_k(x|x) =$ niiden *isien* pituuksien keskiarvo, joiden pituus kuuluu x-väliin k

  $M_k(y|x) =$ niiden *poikien* pituuksien keskiarvo, joiden *isien* pituus kuuluu x-väliin k

  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

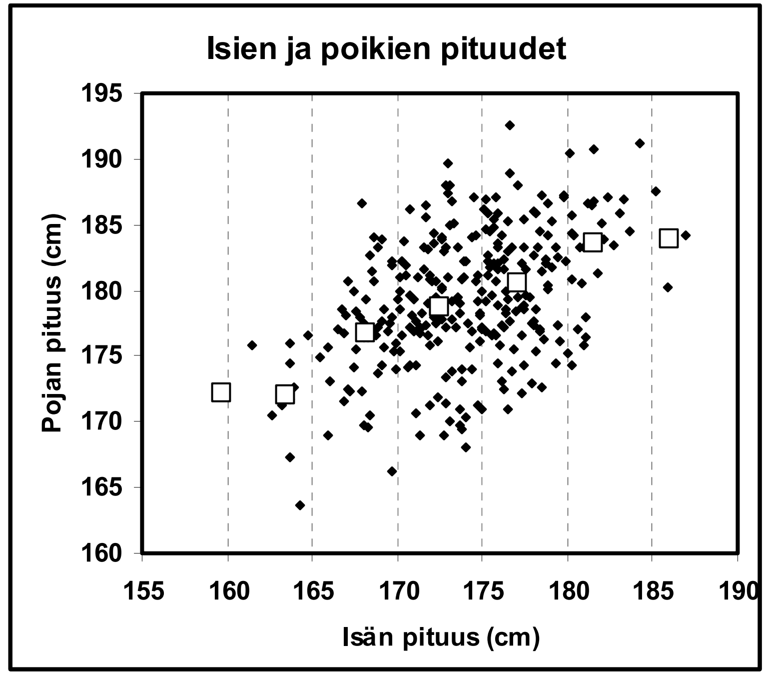
x-välin nro	x-väli	$M_k(x\|x)$	$M_k(y\|x)$
1	(155,160]	159.7	172.2
2	(160,165]	163.5	172.0
3	(165,170]	168.2	176.8
4	(170,175]	172.6	178.8
5	(175,180]	177.1	180.6
6	(180,185]	181.5	183.6
7	(185,190]	186.0	184.0

Regressiosuorien estimointi: Esimerkki 3/8

- *Ehdollisten keskiarvojen*

  $$(M_k(x|x), M_k(y|x))$$

  määräämiä pisteitä on merkitty kuviossa oikealla *neliöillä*.
- Havainnot on siis luokiteltu *isien* pituuden mukaan 7 luokkaan.
- Kuviossa luokkia on kuvattu katkoviivojen erottamilla pystyvöillä.
- Jokaisen *neliön koordinaatit* on saatu laskemalla keskiarvot ko. neliötä vastaavaan pystyvyöhön kuuluvien havaintopisteiden koordinaateista.



Regressiosuorien estimointi: Esimerkki 4/8

- Olkoon mallina

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

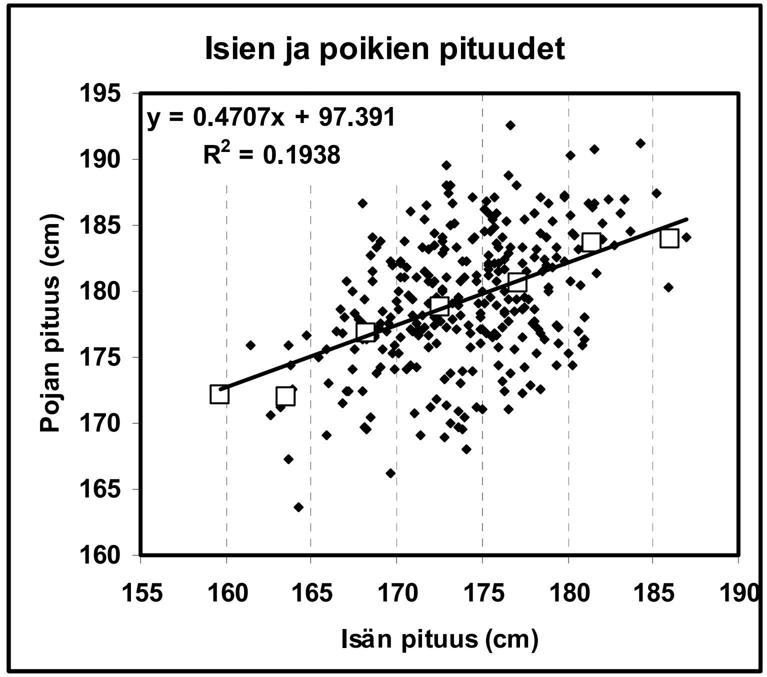
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

- Alkuperäisistä havainnoista *estimoidun regressiosuoran* yhtälö on

$$y = 97.391 + 0.4707x$$

- Selitysaste on

$$R^2 = 0.194$$



Regressiosuorien estimointi: Esimerkki 5/8

- Taulukko oikealla esittää isien ja heidän poikiensa pituuksien *ehdollisia keskiarvoja*

  $M_k(x|y)$ ja $M_k(y|y)$

  jossa

  $M_k(x|y) =$ niiden *isien* pituuksien keskiarvo, joiden *poikien* pituus kuuluu y-väliin k

  $M_k(y|y) =$ niiden *poikien* pituuksien keskiarvo, joiden pituus kuuluu y-väliin k

  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

y-välin nro	y-väli	$M_k(x\|y)$	$M_k(y\|y)$
1	(160,165]	164.3	163.6
2	(165,170]	170.1	168.7
3	(170,175]	171.4	172.7
4	(175,180]	173.1	177.6
5	(180,185]	175.2	182.4
6	(185,190]	176.9	186.6
7	(190,195]	180.6	191.2

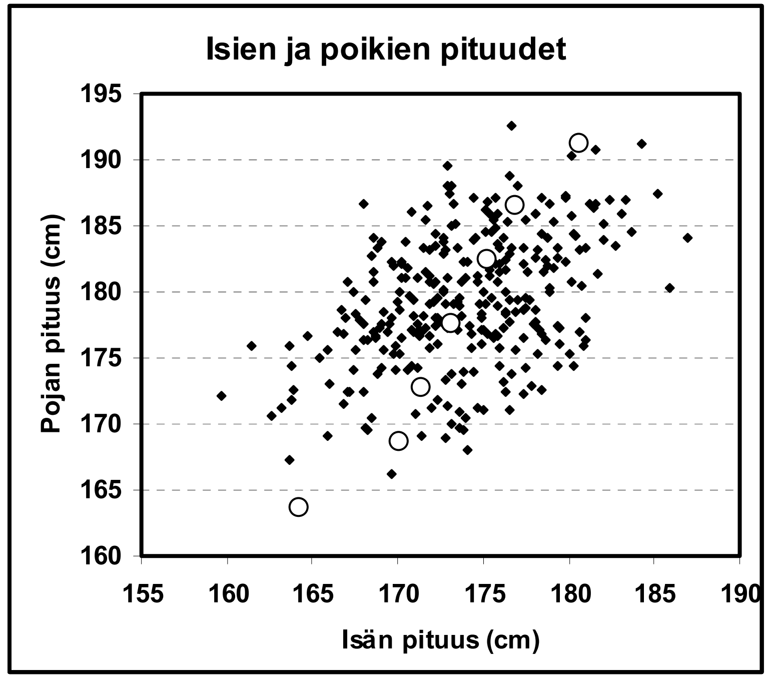
2-ulotteisen normaalijakauman regressiofunktioiden estimointi

Regressiosuorien estimointi: Esimerkki 6/8

- *Ehdollisten keskiarvojen*

  $M_k(x|y)$ ja $M_k(y|y)$

  määräämiä pisteitä on merkitty kuviossa oikealla *ympyröillä*.
- Havainnot on siis luokiteltu *poikien* pituuden mukaan 7 luokkaan.
- Kuviossa luokkia on kuvattu katkoviivojen erottamilla *vaakavöillä*.
- Jokaisen *ympyrän koordinaatit* on saatu laskemalla keskiarvot ko. ympyrää vastaavaan *vaakavyöhön* kuuluvien havaintopisteiden koordinaateista.



Regressiosuorien estimointi: Esimerkki 7/8

- Olkoon mallina

$$x_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \delta_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

- Alkuperäisistä havainnoista *estimoidun regressiosuoran* yhtälö on

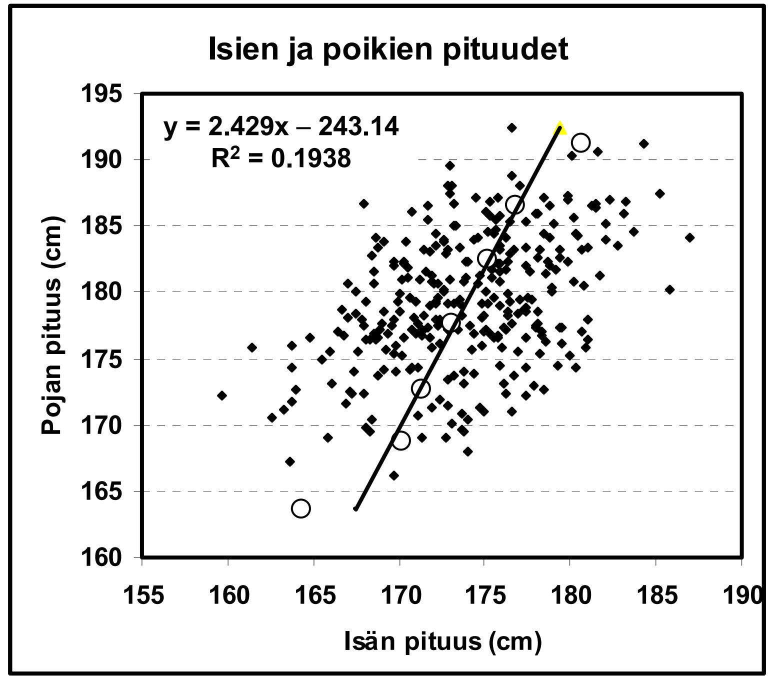
$$x = 100.10 + 0.4117y$$

joka voidaan x:n funktiona kirjoittaa muotoon

$$y = -243.14 + 2.429x$$

- Selitysaste on

$$R^2 = 0.194$$



2-ulotteisen normaalijakauman regressiofunktioiden estimointi

Regressiosuorien estimointi: Esimerkki 8/8

- Kuvioon oikealla on lisätty malleja

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

$$x_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \delta_i$$

vastaavat *estimoidut regressio-suorat*.

- Muuttujan y regressiosuora muuttujan x suhteen:

$$y = 97.391 + 0.4707x$$

- Muuttujan x regressiosuora muuttujan y suhteen muuttujan x funktiona:

$$y = -243.14 + 2.429x$$