Ilkka Mellin

Tilastolliset menetelmät

Osa 3: Tilastolliset testit

Yhteensopivuuden, homogeenisuuden ja riippumattomuuden testaaminen

Yhteensopivuuden, homogeenisuuden ja riippumattomuuden testaamien

>> Jakaumaoletuksien testaaminen

Yhteensopivuuden testaaminen

Homogeenisuuden testaaminen

Riippumattomuuden testaaminen

Normaalisuuden testaaminen

χ^2-yhteensopivuustesti 1/2

- Tavanomaisen *t-testin yleisessä hypoteesissa* oletetaan, että havainnot muodostavat *satunnaisotoksen normaalijakaumasta*.
- Siten *t*-testin yleiseen hypoteesiin sisältyy havaintojen *normaalisuutta koskeva* **jakaumaoletus**.
- *Normaalisuusoletuksesta* pidetään kiinni *t*-testiä tehtäessä, mutta *oletusta havaintojen normaalisuudesta voidaan – ja on tavallisesti myös syytä – testata erikseen*.
- Huomautus:

  Jos havainnot eivät muodosta yksinkertaista satunnaisotosta normaalijakaumasta, tavanomainen *t-testisuure ei ole jakautunut Studentin t-jakauman mukaan*.

χ^2-yhteensopivuustesti 2/2

- Jakaumaoletuksia koskevia tilastollisia testejä kutsutaan tavallisesti **yhteensopivuustesteiksi**.
- Nimitys johtuu siitä, että yhteensopivuustesteissä tutkitaan *sopivatko havainnot ja tehty jakaumaoletus toisiinsa* eli *ovatko havainnot sopusoinnussa tehdyn jakauma-oletuksen kanssa*.
- *Yleisenä yhteensopivuustestinä* tilastotieteessä käytetään **χ^2-testiä**.
- Koska normaalijakaumalla on niin keskeinen asema tilastotieteessä, *normaalisuuden testaamiseen* on kehitetty nimenomaan tähän erikoistarkoitukseen tarkoitettuja testejä; ks. kappaletta **Normaalisuuden testaaminen**.

χ^2-homogeenisuustesti

- Oletetaan, että tilastollisen tutkimuksen kohteena oleva perusjoukko voidaan jakaa *kahteen* tai *useampaan ryhmään*.
- Tehtävänä on selvittää noudattaako tutkimuksen kohteena olevaa perusjoukon alkioiden ominaisuutta kuvaava muuttuja kaikissa ryhmissä *samaa jakaumaa*.
- Jos muuttuja noudattaa kaikissa ryhmissä *samaa jakaumaa*, havaintoaineisto on tutkimuksen kohteena olevan perusjoukon ominaisuuden suhteen *homogeeninen*.
- *Yleisenä homogeenisuustestinä* tilastotieteessä käytetään **χ^2-testiä**.

χ^2-riippumattomuustesti

- Oletetaan, että tilastollisen tutkimuksen kohteena olevan perusjoukon alkiot voidaan luokitella ristiin kahden *faktorin* eli *tekijän* A ja B suhteen.
- Tehtävänä on selvittää ovatko tekijät A ja B *riippumattomia*.
- Jos tekijät A ja B ovat riippumattomia, tekijöitä A ja B voidaan tarkastella *erillisinä*.
- *Yleisenä riippumattomuustestinä* tilastotieteessä käytetään **χ^2-testiä**.
- Huomautus:

  Testi voidaan yleistää koskemaan *useamman kuin kahden tekijän* riippumattomuutta.

χ^2-testien jakaumista riippumattomuus ja ei-parametrisuus

- χ^2-testit *yhteensopivuudelle*, *homogeenisuudelle* ja *riippumattomuudelle* ovat **jakaumista riippumattomia**, **ei-parametrisia** testejä:

  (i) Testien yleiset hypoteesit *eivät kiinnitä havaintojen jakaumaa*.

  (ii) Testeissä *ei testata todennäköisyysjakauman parametreja koskevia hypoteeseja*.

Normaalisuuden testaaminen

- Koska normaalijakaumalla on niin keskeinen asema tilastotieteessä, *havaintojen normaalisuuden* tutkimista varten on kehitetty useita erilaisia menetelmiä.
- Havaintojen normaalisuutta voidaan *testata* yleisellä χ^2*-yhteensopivuustestillä* tai erityisesti *normaalisuus-oletuksen testaamista varten konstruoiduilla testeillä*.
- **Bowmanin ja Shentonin testi** normaalisuudelle perustuu havaintojen *vinouden* ja *huipukkuuden* mittoihin.
- **Wilkin ja Shapiron testi** normaalisuudelle perustuu ns. *rankit plot -kuvioon*, jonka avulla havaintojen normaalisuutta voidaan tutkia *graafisesti*.

Testit

- Tässä esityksessä tarkastellaan seuraavia sekä *diskreeteille* että *jatkuville* muuttujille tarkoitettuja testejä:
  - **χ^2-yhteensopivuustesti**
  - **χ^2-homogeenisuustesti**
  - **χ^2-riippumattomuustesti**
  - **Bowmanin ja Shentonin testi normaalisuudelle**
  - **Wilkin ja Shapiron testi normaalisuudelle**

Yhteensopivuuden, homogeenisuuden ja riippumattomuuden testaaminen

Jakaumaoletuksien testaaminen

>> Yhteensopivuuden testaaminen

Homogeenisuuden testaaminen

Riippumattomuuden testaaminen

Normaalisuuden testaaminen

χ^2-yhteensopivuustesti: Testausasetelma 1/2

- Tarkastellaan tutkimustilannetta, jossa perusjoukon S alkioita kuvataan *faktorilla* eli *tekijällä* A.
- Tekijä A saa olla *laatuero*-, *järjestys*-, *välimatka*- tai *suhdeasteikollinen muuttuja*.
- Tehdään oletus, että tekijä *A noudattaa perusjoukossa S jotakin määrättyä todennäköisyysjakaumaa*.

χ^2-yhteensopivuustesti: Testausasetelma 2/2

- Poimitaan perusjoukosta S *yksinkertainen satunnaisotos*.
- Haluamme *testata* otostietojen perusteella tehtyä *jakaumaoletusta*, joka voidaan muotoilla seuraavilla tavoilla:

  (i) Voidaanko havaintojen jakaumaa otoksessa *kuvata* oletuksen määrittelemällä todennäköisyysjakaumalla?

  (ii) Voiko otos olla oletuksen määrittelemän todennäköisyysjakauman *generoima* eli *tuottama*?
- **Yhteensopivuustestissä** tutkitaan ovatko otos ja tehty jakaumaoletus *yhteensopivia*.

χ^2-yhteensopivuustesti: Testin suoritus

- **χ^2-yhteensopivuustestissä** havaintojen jakaumaa otoksessa ja havaintojen jakaumasta tehdyn oletuksen *yhteensopivuutta mitataan* seuraavalla tavalla:

  (1) Valitaan havainnoille sopiva *luokitus*.

  (2) Määrätään *havaitut luokkafrekvenssit*.

  (3) Määrätään tehdyn jakaumaoletuksen mukaiset *odotetut luokkafrekvenssit*.

  (4) *Verrataan* havaittuja ja odotettuja luokkafrekvenssejä toisiinsa *χ^2-testisuureella*.

χ^2-yhteensopivuustesti: Hypoteesit

- *Yleinen hypoteesi* H :

  Havainnot X_1 , X_2 , … , X_n on saatu poimimalla *yksinkertainen satunnaisotos* perusjoukosta S.
- *Nollahypoteesi* H_0 :

  Havainnot X_1 , X_2 , … , X_n noudattavat *todennäköisyysjakaumaa* $f(x\ ;\ \theta)$, jonka parametrit ei välttämättä tunneta.
- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

  Havainnot X_1 , X_2 , … , X_n *eivät noudata* nollahypoteesin H_0 määrittelemää todennäköisyysjakaumaa.

χ^2-yhteensopivuustesti: Havaitut luokkafrekvenssit

- *Luokitellaan* havainnot $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *toisensa pois-sulkeviin luokkiin*, joiden lukumäärä olkoon m.
- Olkoon

  $$O_k , k = 1, 2, \ldots , m$$

  niiden havaintojen *frekvenssi* eli *lukumäärä* jotka kuuluvat luokkaan k.
- Frekvenssi O_k on luokkaan k kuuluvien havaintojen **havaittu frekvenssi**.

χ^2-yhteensopivuustesti: Havaittujen luokkafrekvenssien määrääminen 1/2

- Olkoot $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ havaintoja **diskreetin** satunnais-muuttujan X jakaumasta ja oletetaan, että satunnais-muuttujan X *mahdolliset arvot* ovat

$$y_1 , y_2 , \ldots , y_m , \ldots$$

- *Luokitellaan* havainto X_i luokkaan k, jos

$$X_i = y_k , i = 1, 2, \ldots , n , k = 1, 2, \ldots , m, \ldots$$

- Luokkaan k kuuluvien havaintojen X_i *havaittu frekvenssi* O_k on niiden havaintojen *lukumäärä*, jotka saavat arvon y_k .

χ^2-yhteensopivuustesti: Havaittujen luokkafrekvenssien määrääminen 2/2

- Olkoot $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ havaintoja **jatkuvan** satunnaismuuttujan X jakaumasta ja oletetaan, että

  $$X \in (a , b)$$

  jossa voi olla $a = -\infty$, $b = +\infty$.
- Jaetaan väli (a , b) pisteillä

  $$a = a_0 < a_1 < a_2 < \quad \cdots \quad < a_{m-1} < a_m = b$$

  pistevieraisiin *osaväleihin* $(a_{k-1} , a_k] , k = 1, 2, \ldots , m$
- *Luokitellaan* havainto X_i luokkaan k, jos

  $$X_i \in (a_{k-1} , a_k] , i = 1, 2, \ldots , n , k = 1, 2, \ldots , m$$
- Luokkaan k kuuluvien havaintojen X_i *havaittu frekvenssi* O_k on niiden havaintoarvojen *lukumäärä*, jotka kuuluvat väliin k.

χ^2-yhteensopivuustesti: Havaittujen luokkafrekvenssien taulukko

- *Havaitut luokkafrekvenssit* O_k voidaan esittää **frekvenssi-taulukkona** seuraavassa muodossa:

Luokka	1	2	…	*m*	Summa
Havaittu frekvenssi	O_1	O_2	…	O_m	*n*

- Frekvenssiä O_k kutsutaan tavallisesti *havaituksi solu-frekvenssiksi frekvenssitaulukon solussa k*.
- Havaitut solufrekvenssit O_k toteuttavat yhtälön

$$\sum_{k=1}^{m} O_k = n$$

χ^2-yhteensopivuustesti: Odotetut luokkafrekvenssit 1/3

- Olkoot X_1 , X_2 , … , X_n havaintoja satunnaismuuttujan X jakaumasta ja oletetaan, että havainnot on *luokiteltu* toisensa poissulkeviin luokkiin, joiden lukumäärä on m.

χ^2-yhteensopivuustesti: Odotetut luokkafrekvenssit 2/3

- Oletetaan, että *nollahypoteesi* H_0 *määrää täydellisesti satunnaismuuttujan* X *jakauman*.
- Olkoon P_k *todennäköisyys* sille, että satunnaismuuttuja X saa arvon luokasta k, kun *nollahypoteesi* H_0 *pätee*.
- Tällöin luokkaan k kuuluvien havaintoarvojen **odotettu frekvenssi** E_k on

$$E_k = nP_k \ , k = 1, 2, \ldots, m$$

χ^2-yhteensopivuustesti: Odotetut luokkafrekvenssit 3/3

- Oletetaan, että *nollahypoteesi* H_0 *määrää satunnaismuuttujan* X *jakauman tyypin*, *mutta jakauman parametrit ovat tuntemattomia*.
- Koska jakauman parametreja ei tunneta, ne on *estimoitava* havainnoista.
- Olkoon P_k *estimoitu todennäköisyys* sille, että satunnaismuuttuja X saa arvon luokasta k, kun *nollahypoteesi* H_0 *pätee*.
- Tällöin luokkaan k kuuluvien havaintoarvojen **odotettu frekvenssi** E_k on

$$E_k = nP_k \ , k = 1, 2, \ldots, m$$

χ^2-yhteensopivuustesti: Luokkatodennäköisyydet 1/2

- Oletetaan, että X on *diskreetti* satunnaismuuttuja, jonka mahdolliset arvot ovat $y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$.
- Tällöin

$$P_k = \Pr(X = y_k) \ , k = 1, 2, \ldots , m$$

jossa todennäköisyys $\Pr(X = y_k)$ määrätään olettaen, että *nollahypoteesi* H_0 *pätee*.
- Todennäköisyydet $\Pr(X = y_k)$ voidaan määrätä satunnaismuuttujan X *kertymäfunktion* tai *pistetodennäköisyysfunktion* avulla.

χ^2-yhteensopivuustesti: Luokkatodennäköisyydet 2/2

- Oletetaan, että X on *jatkuva* satunnaismuuttuja, joka saa arvoja väliltä $(a\ ,\ b)$ ja, että väli $(a\ ,\ b)$ on jaettu pisteillä

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \quad \cdots \quad < a_{m-1} < a_m = b$$

pistevieraisiin osaväleihin.

- Tällöin

$$P_k = \Pr\left(a_{k-1} < X \le a_k\right), k = 1, 2, \ldots, m$$

jossa todennäköisyys $\Pr\left(a_{k-1} < X \le a_k\right)$ määrätään olettaen, että *nollahypoteesi* H_0 *pätee*.

- Todennäköisyydet $\Pr\left(a_{k-1} < X \le a_k\right)$ voidaan määrätä satunnaismuuttujan X *kertymäfunktion* tai *tiheysfunktion* avulla.

χ^2-yhteensopivuustesti: Odotettujen luokkafrekvenssien taulukko

- *Odotetut frekvenssit* E_k voidaan esittää **frekvenssi-taulukkona** seuraavassa muodossa:

Luokka	**1**	**2**	**…**	***m***	**Summa**
Odotettu frekvenssi	E_1	E_2	…	E_m	n

- Frekvenssiä E_k kutsutaan tavallisesti *odotetuksi solu-frekvenssiksi frekvenssitaulukon solussa* k.
- Odotetut solufrekvenssit E_k toteuttavat yhtälön

$$\sum_{k=1}^{m} E_k = n$$

χ^2-yhteensopivuustesti: Testin idea

- *Testi nollahypoteesille* H_0 *perustuu* havaittujen frekvenssien O_k ja odotettujen frekvenssien E_k *vertailuun*.
- *Jos* havaittujen frekvenssien O_k ja odotettujen frekvenssien E_k *jakaumat muistuttavat toisiaan*, havainnot *ovat sopusoinnussa* nollahypoteesin H_0 kanssa.

χ^2-yhteensopivuustesti: Testisuure – muoto 1

- Määritellään **χ^2-testisuure**

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

jossa

O_k = *havaittu frekvenssi* luokassa k

E_k = *odotettu frekvenssi* luokassa k

m = luokkien lukumäärä

- Testisuure χ^2 *mittaa* havaittujen ja odotettujen frekvenssien *jakaumien yhteensopivuutta* tai *etäisyyttä* ja sitä kutsutaan usein χ^2-*etäisyydeksi*.

χ^2-yhteensopivuustesti: Testisuure – muoto 2

- χ^2-testisuure voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\chi^2 = n\sum_{k=1}^{m}\frac{(\hat{p}_k - P_k)^2}{P_k}$$

jossa

$\hat{p}_k$ = O_k/n = *havaittu suhteellinen frekvenssi* luokassa k

P_k = *todennäköisyys*, että havainto kuuluu luokkaan k, *kun nollahypoteesi* H_0 *pätee*

m = luokkien lukumäärä

χ^2-yhteensopivuustesti: Testisuureen asymptoottinen jakauma

- *Jos nollahypoteesi* H_0 *pätee*, testisuure χ^2 noudattaa *suurissa otoksissa approksimatiivisesti* χ^2*-jakaumaa vapausastein* $f = m - 1 - p$:

$$\chi^2 \sim_a \chi^2(f)$$

jossa

$m =$ luokkien lukumäärä

$p =$ odotettujen frekvenssien E_k määräämiseksi estimoitujen parametrien lukumäärä

χ^2-yhteensopivuustesti: Jakauma-approksimaation hyvyys

- Testisuure χ^2 noudattaa *suurissa otoksissa approksimatiivisesti* χ^2-jakaumaa, jos nollahypoteesi H_0 pätee:

$$\chi^2 \sim_a \chi^2(f)\,,\; f = m - 1 - p$$

- Approksimaatio on tavallisesti *riittävän hyvä*, jos *odotetut frekvenssit* E_k toteuttavat ehdot

$$E_k > 5\,,\; k = 1, 2, \ldots, m$$

- Ehdot saadaan toteutumaan valitsemalla havaintoarvoille *sopiva luokitus*.

χ^2-yhteensopivuustesti: Testisuureen normaaliarvo ja testi

- Testisuureen χ^2 *normaaliarvo* eli *odotusarvo nolla-hypoteesin* H_0 *pätiessä* on

  $$\mathrm{E}(\chi^2) = f$$

  jossa

  $$f = m - 1 - p$$

- Normaaliarvoaan *merkitsevästi suuremmat* χ^2-testisuureen arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi H_0 *ei päde*.
- Normaaliarvoaan *merkitsevästi pienemmät* χ^2-testisuureen arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi H_0 *pätee liian hyvin*:

  Havainnot saattavat olla *väärennettyjä*.

χ^2-yhteensopivuustesti: Kommentteja

- χ^2-yhteensopivuustesti on **jakaumista riippumaton**, **ei-parametrinen** testi:

  (i) Testin yleinen hypoteesi *ei kiinnitä havaintojen jakaumaa*, joten se soveltuu kaikille todennäköisyys-jakaumille.

  (ii) Testissä *ei testata todennäköisyysjakauman parametreja koskevaa hypoteesia*, vaan oletusta havaintojen jakaumasta.

χ^2-yhteensopivuustesti: Esimerkki 1/13

- Luvuissa

  Tilastollisten aineistojen kuvaaminen

  Väliestimointi

  Tilastollinen testaus

  on käsitelty seuraavaa esimerkkiä :
- Kone tekee *ruuveja*, joiden *tavoitepituus* on 10 cm.
- *Ruuvien pituus saa vaihdella satunnaisesti* jonkin verran, *kunhan valmistettujen ruuvien keskimääräinen pituus on mahdollisimman lähellä tavoitearvoaan*.

χ^2-yhteensopivuustesti: Esimerkki 2/13

- Ruuvien laadunvalvonnassa niiden *keskimääräistä pituutta* tutkitaan siten, että jokaisesta ruuvierästä poimitaan *yksinkertainen satunnaisotos* ja otokseen poimittujen ruuvien pituudet mitataan.
- Olemme aikaisemmin soveltaneet näin kerättyyn esimerkkiaineistoon seuraavia tilastollisia menetelmiä:

(i) Luvussa **Tilastollisten aineistojen kuvaaminen** näytettiin, miten ruuvien *pituuden jakaumaa otoksessa voidaan kuvata luokitellulla frekvenssijakaumalla* ja sitä vastaavalla *histogrammilla*.

(ii) Luvussa **Väliestimointi** näytettiin, miten koneen tekemien ruuvien *keskipituudelle voidaan konstruoida* otostietojen perusteella *luottamusväli*.

(iii) Luvussa **Tilastollinen testaus** näytettiin, miten voidaan *testata ovatko otoksessa saadut tiedot* ruuvien *keskipituudesta sopusoinnussa* ruuvien *tavoitepituuden kanssa*.

χ^2-yhteensopivuustesti: Esimerkki 3/13

- Sekä ruuvien keskipituuden *luottamusväli* (ks. lukua **Väliestimointi**) että *testi* ruuvien keskipituuden tavoitearvolle (ks. lukua **Tilastollinen testaus**) perustuivat oletukseen, jonka mukaan *ruuvien pituus vaihtelee normaalijakauman mukaan*.
- *Tätä* **jakaumaoletusta** *voidaan testata* **χ^2-yhteensopivuustestillä** seuraavassa esitettävällä tavalla.
- **Yleinen hypoteesi H** :

  Ruuvit on poimittu *yksinkertaisella satunnaisotannalla* koneen tekemien ruuvien joukosta.
- **Nollahypoteesi H_0** :

  Koneen tekemien ruuvien pituudet *noudattavat normaalijakaumaa*.
- **Vaihtoehtoinen hypoteesi H_1** :

  Koneen tekemien ruuvien pituudet *eivät noudata normaalijakaumaa*.

χ^2-yhteensopivuustesti: Esimerkki 4/13

- Koneen valmistamien ruuvien joukosta poimittiin siis *yksinkertainen satunnaisotos*, jonka *koko* $n = 30$ ja otokseen poimittujen ruuvien pituudet mitattiin.
- Ruuvien pituuksien *aritmeettinen keskiarvo* otoksessa oli

  $$\bar{X} = 10.09 \text{ cm}$$

  ja *otoskeskihajonta* oli

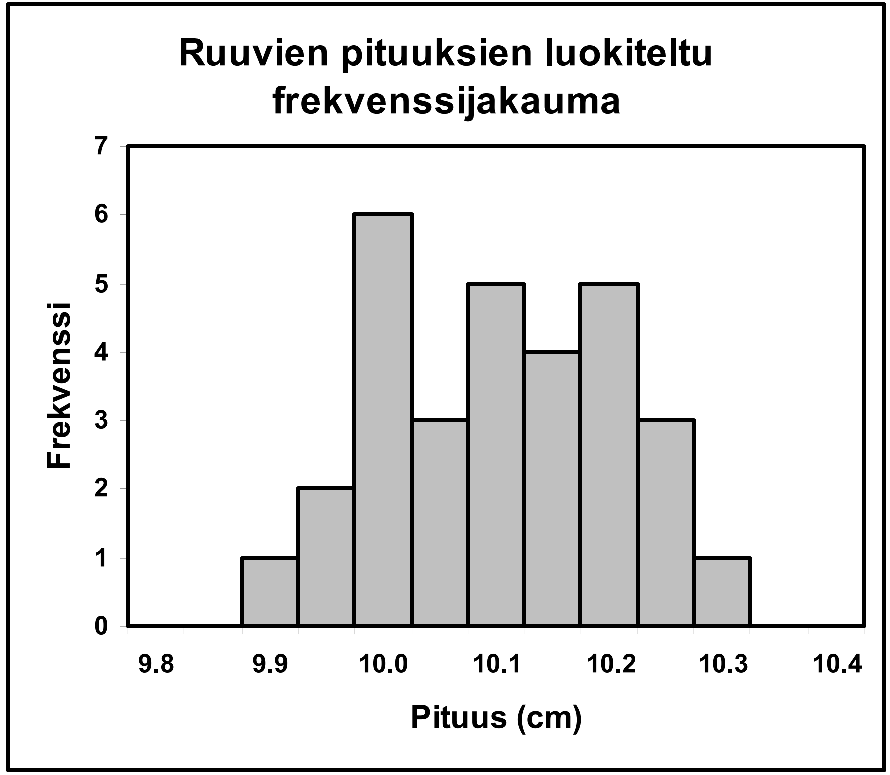
  $$s = 0.1038 \text{ cm}$$

- Taulukko oikealla esittää pituuksien *luokiteltua frekvenssi-jakaumaa*.

Luokkavälit	Luokkafrekvenssit
(9.85,9.90]	1
(9.90,9.95]	2
(9.95,10.00]	6
(10.00,10.05]	3
(10.05,10.10]	5
(10.10,10.15]	4
(10.15,10.20]	5
(10.20,10.25]	3
(10.25,10.30]	1

χ^2-yhteensopivuustesti: Esimerkki 5/13

- Kuva oikealla esittää otokseen poimittujen ruuvien pituuksien luokiteltua frekvenssijakaumaa vastaavaa *histogrammia*.
- Voisiko tällainen pituuksien jakauma syntyä *normaalijakautuneesta perusjoukosta* poimitusta yksinkertaisesta satunnaisotoksesta?
- Tähän kysymykseen antaa vastauksen **χ^2-yhteensopivuustesti**.



χ^2-yhteensopivuustesti: Esimerkki 6/13

- *χ^2-yhteensopivuustestin vaatimat laskutoimitukset* voidaan järjestää seuraavan taulukon muotoon (taulukko on luotu *Microsoft Excel* -ohjelmalla):

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Luokka	Luokan yläraja	Havaittu luokka-frekvenssi	Standardoitu luokan yläraja	Kertymä-funktion arvo	Kertymä-funktion arvojen erotus	Odotettu luokka-frekvenssi	Khi^2-arvo
k	a_k	O_k	z_k	$F(z_k)$	$F(z_k) - F(z_{k-1})$	E_k	χ_k^2
1	9.90	1	-1.79444	0.03637	0.03637	1.09115	0.00762
2	9.95	2	-1.31292	0.09460	0.05823	1.74698	0.03665
3	10.00	6	-0.83141	0.20287	0.10827	3.24799	2.33177
4	10.05	3	-0.34990	0.36321	0.16034	4.81010	0.68116
5	10.10	5	0.13161	0.55235	0.18915	5.67443	0.08016
6	10.15	4	0.61313	0.73010	0.17775	5.33245	0.33295
7	10.20	5	1.09464	0.86316	0.13306	3.99177	0.25466
8	10.25	3	1.57615	0.94250	0.07934	2.38026	0.16136
9	10.30	1	2.05766	0.98019	0.05750	1.72487	0.30462
Summa	*	30	*	*	1	30	4.190937

χ^2-yhteensopivuustesti: Esimerkki 7/13

- Kalvon 6/13 taulukon *sarakkeet*:

(1) Luokka: $k = 1, 2, \ldots, m = 9$

(2) Luokan k yläraja: a_k

(3) *Havaittu luokkafrekvenssi* luokassa k: O_k

$$\sum_{k=1}^{m} O_k = n = 30$$

(4) Luokan k yläraja a_k standardoituna:

$$z_k = \frac{a_k - \bar{X}}{s} = \frac{a_k - 10.09}{0.1038}$$

jossa $\bar{X} = 10.09$ cm on ruuvien pituuksien aritmeettinen keskiarvo ja $s = 0.1038$ cm on pituuksien keskihajonta otoksessa.

χ^2-yhteensopivuustesti: Esimerkki 8/13

- Kalvon 6/13 taulukon *sarakkeet* (jatkuu):

(5) Standardoidun normaalijakauman N(0,1) kertymäfunktion $F(\cdot)$ arvo pisteessä z_k : $F(z_k)$

(6) Kertymäfunktion arvojen erotus

$$F(z_k) - F(z_{k-1}) = \Pr(z_{k-1} < z \le z_k) = P_k$$

on todennäköisyys, että havainto kuuluu luokkaan k, *jos nolla-hypoteesi* H_0 *ruuvien pituuden normaalijakautuneisuudesta pätee*.

$$\sum_{k=1}^{m} P_k = 1$$

koska valitun luokituksen ulkopuolelle jääneet normaalijakauman häntäalueiden todennäköisyysmassat on yhdistetty reunaluokkiin.

(7) *Odotettu luokkafrekvenssi* luokassa k: $E_k = nP_k$

$$\sum_{k=1}^{m} E_k = n = 30$$

χ^2-yhteensopivuustesti: Esimerkki 9/13

- Kalvon 6/13 taulukon *sarakkeet* (jatkuu):

  (8) Luokan k χ^2-arvo:

  $$\chi_k^2 = \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

  jossa

  O_k = havaittu frekvenssi luokassa k

  E_k = odotettu frekvenssi luokassa k

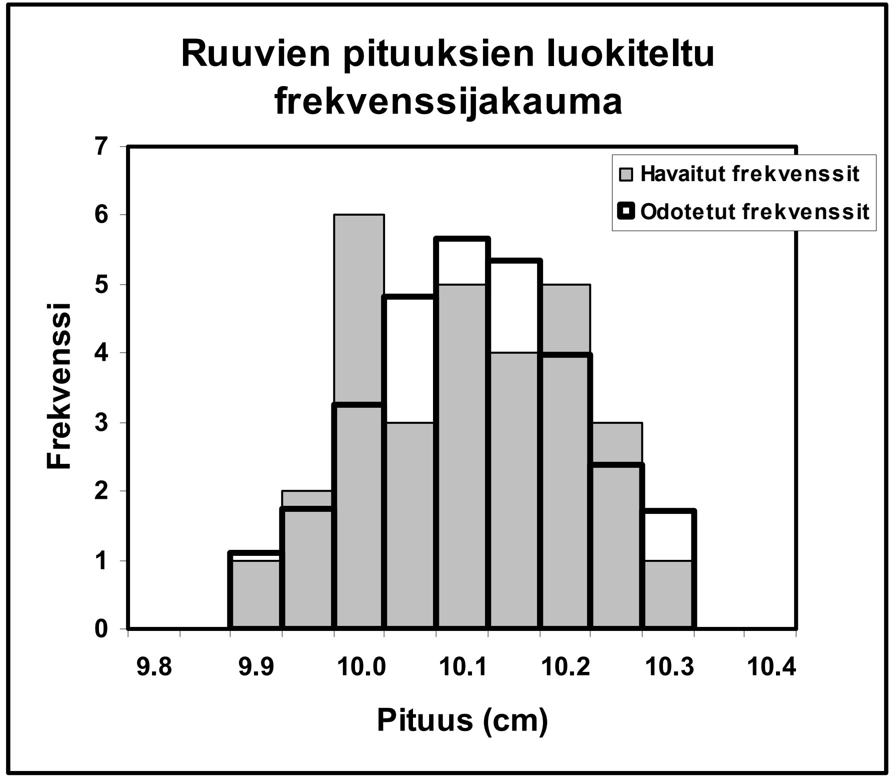
- **χ^2-yhteensopivuustestin** testisuureen arvo saadaan sarakkeen (8) lukujen sarakesummana:

  $$\chi^2 = \sum_{k=1}^{m} \chi_k^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = 4.20$$

Yhteensopivuuden testaaminen

χ^2-yhteensopivuustesti: Esimerkki 10/13

- χ^2-yhteensopivuustesti *vertaa havaittuja frekvenssejä* O_k ja *nollahypoteesin mukaan odotettuja frekvenssejä* E_k *toisiinsa*.
- *Geometrisesti* vertailu merkitsee havaittuja luokka-frekvenssejä vastaavien suora-kaiteiden *pinta-alojen* O_k *vertaamista* odotettuja frekvenssejä E_k vastaavien suorakaiteiden *pinta-aloihin*; ks. kuvaa oikealla.



χ^2-yhteensopivuustesti: Esimerkki 11/13

- *Nollahypoteesin*

  H_0 : Ruuvien pituudet noudattavat *normaalijakaumaa*

  pätiessä testisuure χ^2 *noudattaa* χ^2**-jakaumaa** vapausastein $m-1-p$:

  $$\chi^2 \sim \chi^2(m-1-p)$$

  jossa

  m = luokkien lukumäärä

  p = odotettujen frekvenssien E_k määräämiseksi estimoitujen parametrien lukumäärä

- Esimerkissä

  $$m-1-p = 9-1-2 = 6$$

χ^2-yhteensopivuustesti: Esimerkki 12/13

- Valitaan **merkitsevyystasoksi**

$$\alpha = 0.05$$

- Merkitsevyystasoa $\alpha = 0.05$ vastaava **kriittinen arvo** on

$$\chi^2_{0.05} = 12.592$$

koska χ^2-jakauman taulukoiden mukaan

$$\Pr(\chi^2 \geq 12.592) = 0.05$$

jossa

$$\chi^2 \sim \chi^2(6)$$

- Merkitsevyystasoa $\alpha = 0.05$ vastaava **hylkäysalue** on siten muotoa

$$(12.592, +\infty)$$

χ^2-yhteensopivuustesti: Esimerkki 13/13

- Koska χ^2-yhteensopivuustestin testisuureen arvo

  $$\chi^2 = 4.20 < 12.592$$

  niin *nollahypoteesi jää voimaan* merkitsevyystasolla $\alpha = 0.05$:

  Havainnot ovat sopusoinnussa normaalisuusoletuksen kanssa.
- Huomautuksia:
  - Microsoft Excel -ohjelman mukaan χ^2-yhteensopivuustestin testisuureen arvoa 4.20 vastaava ***p*-arvo** on 0.65.

    Siten normaalisuusoletuksen hylkäämiseen ei ole myöskään testin *p*-arvon mukaan mitään perusteita.
  - Tarkkaan ottaen *luokkia olisi pitänyt yhdistää* niin, että ehdot

    $$E_k > 5\,,\ k = 1, 2, \ldots, m$$

    olisivat toteutuneet. Tällä ei kuitenkaan pitäisi *tässä* olla vaikutusta testin tulokseen.

Yhteensopivuuden, homogeenisuuden ja riippumattomuuden testaaminen

Jakaumaoletuksien testaaminen

Yhteensopivuuden testaaminen

>> Homogeenisuuden testaaminen

Riippumattomuuden testaaminen

Normaalisuuden testaaminen

χ^2-homogeenisuustesti: Testausasetelma 1/3

- Tarkastellaan tutkimusasetelmaa, jossa perusjoukon S alkioita kuvataan *yhdellä faktorilla* eli *tekijällä* A.
- Tekijä A saa olla *laatuero*-, *järjestys*-, *välimatka*- tai *suhdeasteikollinen muuttuja*.
- Oletetaan, että perusjoukko S voidaan jakaa *kahteen tai useampaan ryhmään*.
- Poimitaan ryhmistä *toisistaan riippumattomat yksinkertaiset satunnaisotokset*.
- Tarkastellaan tekijän *A vaihtelua* otoksissa.
- Tehdään oletus, että *tekijä A noudattaa kaikissa ryhmissä samaa*, tarkemmin määrittelemätöntä *todennäköisyysjakaumaa*.

χ^2-homogeenisuustesti: Testausasetelma 2/3

- Haluamme *testata* tehtyä *jakaumaoletusta*:

  (i) Voidaanko eri otoksista (ryhmistä) muodostettuja havaintoarvojen jakaumia *kuvata samalla todennäköisyysjakaumalla*?

  (ii) Voivatko otokset olla *saman todennäköisyysjakauman generoimia* eli *tuottamia*?

χ^2-homogeenisuustesti: Testausasetelma 3/3

- Jos tehty jakaumaoletus *pätee*, jolloin *tekijä A noudattaa kaikissa ryhmissä samaa jakaumaa*, niin *perusjoukko on* **homogeeninen** ja *perusjoukkoa ei tarvitse jakaa tekijää A koskevissa tarkasteluissa erillisiksi ryhmiksi*.
- Jos tehty jakaumaoletus *ei päde* ja *tekijä A noudattaa eri ryhmissä eri jakaumia*, *perusjoukko on* **heterogeeninen** ja *ryhmiä on syytä tarkastella erillisinä*.
- Tällaisten *jakaumaoletuksien* testaamiseen tarkoitettuja testejä kutsutaan **homogeenisuustesteiksi**.
- Huomautus:

  Monissa tutkimusasetelmissa toivotaan, että homogeenisuus-oletus *tulee* testissä *hylätyksi*.

χ^2-homogeenisuustesti: Testin suoritus

- **χ^2-homogeenisuustestissä** havaintojen ja niiden jakaumasta eri ryhmissä tehdyn homogeenisuusoletuksen *yhteensopivuutta mitataan* seuraavalla tavalla:
  (1) Valitaan havainnoille *yhteinen luokitus*, jota siis käytetään jokaisessa otoksessa.
  (2) Määrätään *havaintojen luokkafrekvenssit* jokaisesta otoksesta.
  (3) Määrätään tehdyn homogeenisuusoletuksen mukaiset *odotetut luokkafrekvenssit*.
  (4) *Verrataan* havaittuja ja odotettuja frekvenssejä toisiinsa *χ^2-testisuureella*.

χ^2-homogeenisuustesti: Hypoteesit

- *Yleinen hypoteesi* H :

  Perusjoukko on jaettu r ryhmään, joista on poimittu *toisistaan riippumattomat yksinkertaiset satunnaisotokset*.
- *Nollahypoteesi* H_0 :

  Havainnot *noudattavat* otoksissa $i = 1, 2, \ldots , r$ *samaa todennäköisyysjakaumaa*.
- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

  Havainnot *eivät noudata* otoksissa $i = 1, 2, \ldots , r$ *samaa todennäköisyysjakaumaa*.

χ^2-homogeenisuustesti: Havaitut frekvenssit

- Oletetaan, että tutkimuksen kohteena oleva perusjoukko S on jaettu r *ryhmään*.
- Poimitaan ryhmistä *toisistaan riippumattomat yksinkertaiset satunnaisotokset*, joiden koot ovat

$$n_i \,,\, i = 1, 2, \ldots , r$$

- *Luokitellaan* havainnot jokaisessa otoksessa *samaa luokitusta käyttäen* toisensa poissulkeviin luokkiin, joiden lukumäärä olkoon c.
- Määrätään ryhmässä i luokkaan j kuuluvien havaintojen **havaittu frekvenssi** eli *lukumäärä* O_{ij} , kun $i = 1, 2, \ldots , r$ ja $j = 1, 2, \ldots , c$.

χ^2-homogeenisuustesti: Havaittujen frekvenssien taulukko 1/3

- Muodostetaan havaintojen *havaituista frekvensseistä* O_{ij} $(r \times c)$-**frekvenssitaulukko** $[O_{ij}]$:

Luokat

Ryhmät	1	2	…	c	Summa
1	O_{11}	O_{12}	…	O_{1c}	n_1
2	O_{21}	O_{22}	…	O_{2c}	n_2
…	…	…	…	…	…
r	O_{r1}	O_{r2}	…	O_{rc}	n_r
Summa	C_1	C_2	…	C_c	n

χ^2-homogeenisuustesti: Havaittujen frekvenssien taulukko 2/3

- Olkoon $[O_{ij}]$ havaintojen *havaittujen frekvenssien* O_{ij} muodostama $(r \times c)$-*frekvenssitaulukko*.

  r = ryhmien lukumäärä
  c = luokkien lukumäärä
  O_{ij} = havaintojen *havaittu frekvenssi* ryhmän i luokassa j, $i = 1, 2, \ldots , r$, $j = 1, 2, \ldots , c$
  n_i = *otoskoko* ryhmässä i
  C_j = havaintojen *havaittu frekvenssi* yhdistetyn havaintoaineiston luokassa j
  n = havaintojen kokonaislukumäärä

- Frekvenssiä O_{ij} kutsutaan havaintojen *havaituksi solufrekvenssiksi frekvenssitaulukon solussa* (i, j).

χ^2-homogeenisuustesti: Havaittujen frekvenssien taulukko 3/3

- *Havaittujen frekvenssien* O_{ij} frekvenssitaulukossa pätee:

(i) *Rivisummat* yhtyvät ryhmäkohtaisiin otoskokoihin:

$$\sum_{j=1}^{c} O_{ij} = n_i \ , i = 1, 2, \ldots, r$$

(ii) *Sarakesummat* yhtyvät yhdistetyn havaintoaineiston luokkafrekvensseihin:

$$\sum_{i=1}^{r} O_{ij} = C_j \ , \ j = 1, 2, \ldots, c$$

(iii) *Havaintojen kokonaislukumäärä*:

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} O_{ij} = \sum_{i=1}^{r} n_i = \sum_{j=1}^{c} C_j = n$$

χ^2-homogeenisuustesti: Nollahypoteesin tulkinta

- *Jos nollahypoteesi* H_0 pätee, havaintojen *pitäisi jakautua* (*satunnaisvaihtelua lukuun ottamatta*) *jokaisessa ryhmässä* $i = 1, 2, \ldots, r$ *samalla tavalla luokkiin* $j = 1, 2, \ldots, c$.
- *Jos nollahypoteesi* H_0 pätee, *havaintojen jakautuminen* luokkiin $j = 1, 2, \ldots, c$ *ei saa riippua* siitä, mihin ryhmään $i = 1, 2, \ldots, r$ ne kuuluvat.
- *Jos nollahypoteesi* H_0 *pätee*, *todennäköisyys*, että havainto kuuluu luokkaan $j = 1, 2, \ldots, c$ *ei saa riippua* siitä, mihin ryhmään $i = 1, 2, \ldots, r$ se kuuluu.

χ^2-homogeenisuustesti: Odotetut frekvenssit 1/4

- Olkoon x on tarkastelun kohteena olevan perusjoukon S alkio.
- Määritellään seuraavat todennäköisyydet:

$$
\begin{aligned}
p_{ij} &= \Pr(x \text{ kuuluu ryhmään } i \text{ } ja \text{ luokkaan } j) \\
p_{j|i} &= \Pr(x \text{ kuuluu luokkaan } j \,|\, x \text{ kuuluu ryhmään } i) \\
p_{i\bullet} &= \Pr(x \text{ kuuluu ryhmään } i) \\
p_{\bullet j} &= \Pr(x \text{ kuuluu luokkaan } j)
\end{aligned}
$$

- Todennäköisyyslaskennan *yleisen tulosäännön* mukaan

$$p_{ij} = p_{j|i} p_{i\bullet}$$

χ^2-homogeenisuustesti: Odotetut frekvenssit 2/4

- *Jos nollahypoteesi* H_0 *pätee*, todennäköisyys, että perusjoukon S alkio x kuuluu luokkaan j *ei saa riippua* siitä, mihin ryhmään i alkio x kuuluu.
- Siten nollahypoteesi H_0 *perusjoukon homogeenisuudesta* voidaan ilmaista muodossa

$$\mathrm{H}_0 : p_{j|i} = p_{\bullet j} \ , i = 1, 2, \ldots, r \ , \ j = 1, 2, \ldots, c$$

tai muodossa

$$\mathrm{H}_0 : p_{ij} = p_{i\bullet} p_{\bullet j} \ , i = 1, 2, \ldots, r \ , \ j = 1, 2, \ldots, c$$

χ^2-homogeenisuustesti: Odotetut frekvenssit 3/4

- Todennäköisyydet p_{ij} , $p_{i\bullet}$, $p_{\bullet j}$ voidaan estimoida havaintojen havaituista frekvensseistä O_{ij} , n_i , C_j kaavoilla

$$\hat{p}_{ij} = \frac{O_{ij}}{n} \qquad \hat{p}_{i\bullet} = \frac{n_i}{n} \qquad \hat{p}_{\bullet j} = \frac{C_j}{n}$$

- *Jos nollahypoteesi* H_0 *pätee*, niin *solutodennäköisyydet* p_{ij} *voidaan estimoida kaavoilla*

$$P_{ij} = \hat{p}_{i\bullet}\hat{p}_{\bullet j} = \frac{n_i}{n} \cdot \frac{C_j}{n} \ , \ \ i = 1, 2, \ldots, r \ , \ j = 1, 2, \ldots, c$$

χ^2-homogeenisuustesti: Odotetut frekvenssit 4/4

- Määrätään *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä* havaintojen **odotetut solufrekvenssit** E_{ij} yhtälöillä

$$E_{ij} = nP_{ij} = n \cdot \frac{n_i}{n} \cdot \frac{C_j}{n} = \frac{n_i C_j}{n}$$

$$i = 1, 2, \ldots, r \,,\; j = 1, 2, \ldots, c$$

- Tällöin havaintojen *odotetut suhteelliset frekvenssit* E_{ij}/n_i *jakautuvat jokaisessa ryhmässä i samalla tavalla luokkiin* $j = 1, 2, \ldots, c$:

$$\frac{E_{ij}}{n_i} = \frac{C_j}{n} \,,\; j = 1, 2, \ldots, c \,,\; i = 1, 2, \ldots, r$$

χ^2-homogeenisuustesti: Odotettujen frekvenssien taulukko 1/3

- Muodostetaan havaintojen *odotetuista frekvensseistä* E_{ij} $(r \times c)$-**frekvenssitaulukko** $[E_{ij}]$:

Luokat

Ryhmät

	1	2	…	c	Summa
1	E_{11}	E_{12}	…	E_{1c}	n_1
2	E_{21}	E_{22}	…	E_{2c}	n_2
…	…	…	…	…	…
r	E_{r1}	E_{r2}	…	E_{rc}	n_r
Summa	C_1	C_2	…	C_c	n

χ^2-homogeenisuustesti: Odotettujen frekvenssien taulukko 2/3

- Olkoon $[E_{ij}]$ havaintojen *odotettujen frekvenssien* E_{ij} muodostama $(r \times c)$-*frekvenssitaulukko*.

  r = ryhmien lukumäärä
  c = luokkien lukumäärä
  E_{ij} = havaintojen *odotettu frekvenssi* ryhmän i luokassa j, $i = 1, 2, \ldots , r$, $j = 1, 2, \ldots , c$
  n_i = *otoskoko* ryhmässä i
  C_j = havaintojen *havaittu frekvenssi* yhdistetyn havaintoaineiston luokassa j
  n = havaintojen kokonaislukumäärä

- Frekvenssiä E_{ij} kutsutaan havaintojen *odotetuksi solufrekvenssiksi frekvenssitaulukon solussa* (i, j).

χ^2-homogeenisuustesti: Odotettujen frekvenssien taulukko 3/3

- *Odotettujen frekvenssien* E_{ij} frekvenssitaulukossa pätee:

(i) *Rivisummat* yhtyvät ryhmäkohtaisiin otoskokoihin:

$$\sum_{j=1}^{c} E_{ij} = n_i \ , i = 1, 2, \ldots, r$$

(ii) *Sarakesummat* yhtyvät yhdistetyn havaintoaineiston luokkafrekvensseihin:

$$\sum_{i=1}^{r} E_{ij} = C_j \ , \ j = 1, 2, \ldots, c$$

(iii) *Havaintojen kokonaislukumäärä*:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} E_{ij} = \sum_{i=1}^{r} n_i = \sum_{j=1}^{c} C_j = n$$

χ^2-homogeenisuustesti: Testisuure – muoto 1

- Määritellään **χ^2-testisuure**

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

jossa

O_{ij} = havaintojen *havaittu frekvenssi* solussa (i, j)
E_{ij} = havaintojen *odotettu frekvenssi* solussa (i, j)
r = ryhmien lukumäärä
c = luokkien lukumäärä

- Testisuure χ^2 *mittaa* havaittujen ja odotettujen frekvenssien *jakaumien yhteensopivuutta* tai *etäisyyttä* ja sitä kutsutaan usein *χ^2-etäisyydeksi*.

χ^2-homogeenisuustesti: Testisuure – muoto 2

- χ^2-testisuure voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(\hat{p}_{ij}-P_{ij})^2}{P_{ij}}$$

jossa

$$\hat{p}_{ij} = \frac{O_{ij}}{n}$$

$$P_{ij} = \frac{E_{ij}}{n} = \frac{n_i}{n}\cdot\frac{C_j}{n} = \hat{p}_{i\bullet}\hat{p}_{\bullet j}$$

$$\hat{p}_{i\bullet} = \frac{n_i}{n} \qquad \hat{p}_{\bullet j} = \frac{C_j}{n}$$

$$i = 1,2,\ldots,r\ ,\ j = 1,2,\ldots,c$$

χ^2-homogeenisuustesti: Testisuureen asymptoottinen jakauma

- *Jos nollahypoteesi* H_0 *pätee*, testisuure χ^2 noudattaa *suurissa otoksissa approksimatiivisesti* χ^2*-jakaumaa vapausastein* $f = (r - 1)(c - 1)$:

  $$\chi^2 \sim_a \chi^2(f)$$

  jossa

  r = *ryhmien* lukumäärä

  c = *luokkien* lukumäärä

χ^2-homogeenisuustesti: Jakauma-approksimaation hyvyys

- Testisuure χ^2 noudattaa *suurissa otoksissa approksimatiivisesti* χ^2-jakaumaa, jos nollahypoteesi H_0 pätee:

$$\chi^2 \sim_a \chi^2(f)\ ,\ f = (r-1)(c-1)$$

- Approksimaatio on tavallisesti *riittävän hyvä*, jos havaintojen *odotetut frekvenssit* E_{ij} ja *keskimääräiset odotetut frekvenssit* C_j/r toteuttavat ehdot

$$E_{ij} > 1\ ,\ i = 1, 2, \ldots, r\ ,\ j = 1, 2, \ldots, c$$

$$C_j / r > 5\ ,\ j = 1, 2, \ldots, c$$

- Ehdot saadaan toteutumaan valitsemalla havainnoille *sopiva luokitus*.

χ^2-homogeenisuustesti: Testisuureen normaaliarvo ja testi

- Testisuureen χ^2 *normaaliarvo* eli *odotusarvo nolla-hypoteesin* H_0 *pätiessä*, on

  $$\mathrm{E}(\chi^2) = f$$

  jossa

  $$f = (r - 1)(c - 1)$$

- Normaaliarvoaan *merkitsevästi suuremmat* χ^2-testisuureen arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi H_0 *ei päde*.
- Normaaliarvoaan *merkitsevästi pienemmät* χ^2-testisuureen arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi H_0 *pätee liian hyvin*:

  Havainnot saattavat olla *väärennettyjä*.

χ^2-homogeenisuustesti: Kommentteja

- χ^2-homogeenisuustesti on **jakaumista riippumaton**, **ei-parametrinen** testi:

  (i) Testin yleinen hypoteesi *ei kiinnitä havaintojen jakaumaa*.

  (ii) Testissä *ei testata todennäköisyysjakauman parametreja koskevaa hypoteesia*, vaan oletusta havaintojen jakaumasta.

χ^2-homogeenisuustesti ja χ^2-riippumattomuustesti

- χ^2-*homogeenisuustesti* ja seuraavassa kappaleessa esitettävä χ^2-*riippumattomuustesti* muistuttavat toisiaan.
- Frekvenssitaulukosta *ei voi sellaisenaan nähdä* kummasta testausasetelmasta on kyse.
- χ^2-homogeenisuustesti ja χ^2-riippumattomuustesti tehdään teknisesti täsmälleen *samalla tavalla*:
  - *Odotetut frekvenssit* määrätään *samalla kaavalla*.
  - *Testisuureet* lasketaan *samalla kaavalla*.
  - *Testisuureet noudattavat* nollahypoteesin pätiessä approksimatiivisesti *samaa jakaumaa*.
- Testien testausasetelmat ovat kuitenkin *täysin erilaiset*.

Homogeenisuustesti *vs* riippumattomuustesti 1/2

- *Homogeenisuustestin* testausasetelma:
  (i) Perusjoukko koostuu *r ryhmästä* ja testissä tarkastellaan perusjoukon alkioiden *jakautumista luokkiin eri ryhmissä*, kun *luokittelu on tehty kaikissa ryhmissä samaa luokitusta käyttäen*.
  (ii) Havaintoaineisto muodostuu *toisistaan riippumattomista ryhmäkohtaisista satunnais-otoksista*.
  (iii) Sekä ryhmäkohtaiset otoskoot n_i että havaintojen kokonaislukumäärä n ovat *kiinteitä* eli *ei-satunnaisia* (so. valittuja) lukuja, kun taas *sattuma määrää miten havainnot jakautuvat luokkiin* ryhmien sisällä.

Homogeenisuustesti *vs* riippumattomuustesti 2/2

- *Riippumattomuustestin* testausasetelma:

(i) Testissä tarkastellaan *kahden tekijän A ja B assosiaatiota* eli *riippuvuutta*, kun havainnot on luokiteltu tekijöiden A ja B suhteen *ristiin*.

(ii) Havaintoaineisto muodostuu *yhdestä satunnais-otoksesta*.

(iii) Vain havaintojen kokonaislukumäärä n on *kiinteä* eli *ei-satunnainen* (so. valittu) luku, kun taas *sattuma määrää miten havainnot jakautuvat luokkiin tekijöiden A ja B ristiluokituksen suhteen*.

Yhteensopivuuden, homogeenisuuden ja riippumattomuuden testaamien

Jakaumaoletuksien testaaminen

Yhteensopivuuden testaaminen

Homogeenisuuden testaaminen

>> Riippumattomuuden testaaminen

Normaalisuuden testaaminen

Riippumattomuuden testaaminen laatueroasteikollisilla muuttujilla

- Tarkastellaan kahden *laatueroasteikollisen muuttujan* tai *tekijän riippumattomuuden testaamista*.
- Esitämme **χ^2-testin riippumattomuudelle**.
- χ^2-testi riippumattomuudelle sopii myös *järjestys*-, *välimatka*- tai *suhdeasteikollisille* muuttujille.
- χ^2-testi riippumattomuudelle on *jakaumista riippumaton*, *ei-parametrinen* testi.

χ^2-riippumattomuustesti: Testausasetelma 1/2

- Tarkastellaan tutkimusasetelmaa, jossa perusjoukon S alkioita kuvataan *kahdella faktorilla* eli *tekijällä* A ja B.
- Tekijät A ja B saavat olla *laatuero*-, *järjestys*-, *välimatka*- tai *suhdeasteikollisia muuttujia*.
- Poimitaan perusjoukosta S *yksinkertainen satunnaisotos*.
- Tarkastellaan tekijöiden A ja B *vaihtelua* otoksessa.
- Tehdään oletus, että *tekijät* A ja B *ovat riippumattomia*.
- Haluamme *testata* tehtyä *riippumattomuusoletusta*:

  Ovatko havainnot *sopusoinnussa* tehdyn riippumattomuus-oletuksen kanssa?

χ^2-riippumattomuustesti: Testausasetelma 2/2

- Jos tehty oletus *pätee* ja *tekijät A* ja *B ovat riippumattomia*, *tekijöitä A* ja *B voidaan tarkastella erillisinä*.
- Jos tehty oletus *ei päde* ja *tekijät eivät ole riippumattomia*, *tekijät A* ja *B ovat* **assosioituneita**.
- Riippumattomuusoletuksen testaamiseen tarkoitettuja testejä kutsutaan **riippumattomuustesteiksi**.
- Huomautus:

  Monissa tutkimusasetelmissa toivotaan, että riippumattomuus-oletus *tulee* testissä *hylätyksi*.

χ^2-riippumattomuustesti: Testin suoritus

- ***χ^2-riippumattomuustestissä*** havaintojen ja tehdyn riippumattomuusoletuksen *yhteensopivuutta mitataan* seuraavalla tavalla:

  (1) Valitaan havainnoille sopivat *luokitukset* tekijöiden A ja B suhteen.

  (2) Luokitellaan havainnot tekijöiden A ja B suhteen *ristiin* ja määrätään *havaitut luokkafrekvenssit*.

  (3) Määrätään tehdyn riippumattomuusoletuksen mukaiset *odotetut luokkafrekvenssit*.

  (4) *Verrataan* havaittuja ja odotettuja frekvenssejä toisiinsa *χ^2-testisuureella*.

χ^2-riippumattomuustesti: Hypoteesit

- *Yleinen hypoteesi* H :

  Perusjoukosta on poimittu *yksinkertainen satunnaisotos* ja havaintoyksiköt voidaan *luokitella ristiin tekijöiden A* ja *B suhteen*.

- *Nollahypoteesi* H_0 :

  Tekijät *A* ja *B ovat riippumattomia*.

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

  Tekijät *A* ja *B eivät ole riippumattomia*.

χ^2-riippumattomuustesti: Havaitut frekvenssit 1/2

- Poimitaan tutkimuksen kohteena olevasta perusjoukosta S *yksinkertainen satunnaisotos*, jonka koko on n.
- *Luokitellaan* havaintoyksiköt *tekijän A suhteen* toisensa poissulkeviin luokkiin, joiden lukumäärä on r.
- *Luokitellaan* havaintoyksiköt *tekijän B suhteen* toisensa poissulkeviin luokkiin, joiden lukumäärä on c.
- *Luokitellaan* havaintoyksiköt *tekijöiden A ja B suhteen ristiin* toisensa poissulkeviin luokkiin, joiden lukumäärä on $r \times c$.

χ^2-riippumattomuustesti: Havaitut frekvenssit 2/2

- Määrätään tekijän A luokkaan i kuuluvien havaintojen **havaittu frekvenssi** eli lukumäärä R_i , kun $i = 1, 2, \ldots , r$.
- Määrätään tekijän B luokkaan j kuuluvien havaintojen **havaittu frekvenssi** eli lukumäärä C_j , kun $j = 1, 2, \ldots , c$.
- Määrätään tekijän A luokkaan i *ja* tekijän B luokkaan j kuuluvien havaintojen **havaittu frekvenssi** eli *lukumäärä* O_{ij} , kun $i = 1, 2, \ldots , r$ ja $j = 1, 2, \ldots , c$.

χ^2-riippumattomuustesti: Havaittujen frekvenssien taulukko 1/3

- Muodostetaan havaintojen *havaituista frekvensseistä* O_{ij} $(r \times c)$-**frekvenssitaulukko** $[O_{ij}]$:

***B*-luokat** (sarakkeet), ***A*-luokat** (rivit)

	1	2	…	c	Summa
1	O_{11}	O_{12}	…	O_{1c}	R_1
2	O_{21}	O_{22}	…	O_{2c}	R_2
…	…	…	…	…	…
r	O_{r1}	O_{r2}	…	O_{rc}	R_r
Summa	C_1	C_2	…	C_c	n

χ^2-riippumattomuustesti: Havaittujen frekvenssien taulukko 2/3

- Olkoon $[O_{ij}]$ havaintojen *havaittujen frekvenssien* O_{ij} muodostama $(r \times c)$-*frekvenssitaulukko*.

  r = A-luokkien lukumäärä
  c = B-luokkien lukumäärä
  O_{ij} = havaintojen *havaittu frekvenssi* luokassa, jonka määrää A-luokka i *ja* B-luokka j,
  $i = 1, 2, \ldots , r$, $j = 1, 2, \ldots , c$
  R_i = havaintojen *havaittu frekvenssi* A-luokassa i
  C_j = havaintojen *havaittu frekvenssi* B-luokassa j
  n = havaintojen kokonaislukumäärä

- Frekvenssiä O_{ij} kutsutaan havaintojen *havaituksi solufrekvenssiksi frekvenssitaulukon solussa* (i, j).

χ^2-riippumattomuustesti: Havaittujen frekvenssien taulukko 3/3

- *Havaittujen frekvenssien* O_{ij} frekvenssitaulukossa pätee:

(i) *Rivisummat* yhtyvät havaintojen havaittuihin frekvensseihin A-luokituksessa:

$$\sum_{j=1}^{c} O_{ij} = R_i \ , i = 1, 2, \ldots, r$$

(ii) *Sarakesummat* yhtyvät havaintojen havaittuihin frekvensseihin B-luokituksessa:

$$\sum_{i=1}^{r} O_{ij} = C_j \ , \ j = 1, 2, \ldots, c$$

(iii) *Havaintojen kokonaislukumäärä*:

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} O_{ij} = \sum_{i=1}^{r} R_i = \sum_{j=1}^{c} C_j = n$$

χ^2-riippumattomuustesti: Nollahypoteesin tulkinta

- *Jos nollahypoteesi* H_0 *pätee*, *havaintojen jakautuminen* *A*-luokkiin *ei saa riippua* siitä, mihin *B*-luokkaan havainnot kuuluvat.

  Jos nollahypoteesi H_0 *pätee*, *todennäköisyys*, että havainto kuuluu *A*-luokkaan $i = 1, 2, \ldots , r$ *ei saa riippua* siitä, mihin *B*-luokkaan $j = 1, 2, \ldots , c$ se kuuluu.
- *Jos nollahypoteesi* H_0 *pätee*, *havaintojen jakautuminen* *B*-luokkiin *ei saa riippua* siitä, mihin *A*-luokkaan havainnot kuuluvat.

  Jos nollahypoteesi H_0 *pätee*, *todennäköisyys*, että havainto kuuluu *B*-luokkaan $j = 1, 2, \ldots , c$ *ei saa riippua* siitä, mihin *A*-luokkaan $i = 1, 2, \ldots , r$ se kuuluu.

χ^2-riippumattomuustesti: Odotetut frekvenssit 1/5

- Olkoon x on tarkastelun kohteena olevan perusjoukon S alkio.
- Määritellään seuraavat todennäköisyydet:

$$
\begin{aligned}
p_{ij} &= \Pr(x \text{ kuuluu } A\text{-luokkaan } i \text{ } ja \text{ } B\text{-luokkaan } j) \\
p_{i\bullet} &= \Pr(x \text{ kuuluu } A\text{-luokkaan } i) \\
p_{\bullet j} &= \Pr(x \text{ kuuluu } B\text{-luokkaan } j)
\end{aligned}
$$

χ^2-riippumattomuustesti: Odotetut frekvenssit 2/5

- *Jos nollahypoteesi* H_0 *pätee*, tapahtumat

$$\{x \in S \mid x \text{ kuuluu } A\text{-luokkaa } i\}$$

$$\{x \in S \mid x \text{ kuuluu } B\text{-luokkaa } j\}$$

  ovat riippumattomia kaikille $i = 1, 2, \ldots , r$, $j = 1, 2, \ldots , c$.

- Siten nollahypoteesi H_0 *tekijöiden A* ja *B riippumattomuudesta* voidaan ilmaista muodossa

$$\mathrm{H}_0 : p_{ij} = p_{i\bullet} p_{\bullet j} \text{ , } i = 1, 2, \ldots, r \text{ , } j = 1, 2, \ldots, c$$

χ^2-riippumattomuustesti: Odotetut frekvenssit 3/5

- Todennäköisyydet p_{ij} , $p_{i\bullet}$, $p_{\bullet j}$ voidaan estimoida havaintojen havaituista frekvensseistä O_{ij} kaavoilla

$$\hat{p}_{ij} = \frac{O_{ij}}{n} \qquad \hat{p}_{i\bullet} = \frac{R_i}{n} \qquad \hat{p}_{\bullet j} = \frac{C_j}{n}$$

- *Jos nollahypoteesi* H_0 *pätee*, niin *solutodennäköisyydet* p_{ij} *voidaan estimoida kaavoilla*

$$P_{ij} = \hat{p}_{i\bullet}\hat{p}_{\bullet j} = \frac{R_i}{n} \cdot \frac{C_j}{n} \,, \; i = 1, 2, \ldots, r \,, \; j = 1, 2, \ldots, c$$

χ^2-riippumattomuustesti: Odotetut frekvenssit 4/5

- Määrätään *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä* havaintojen **odotetut solufrekvenssit** E_{ij} yhtälöillä

$$E_{ij} = nP_{ij} = n \cdot \frac{R_i}{n} \cdot \frac{C_j}{n} = \frac{R_i C_j}{n}$$

$$i = 1, 2, \ldots, r \,,\; j = 1, 2, \ldots, c$$

Riippumattomuuden testaaminen

χ^2-riippumattomuustesti: Odotetut frekvenssit 5/5

- Odotettujen solufrekvenssien määritelmästä seuraa, että havaintojen *odotetut suhteelliset frekvenssit* E_{ij}/R_i *jakautuvat jokaisessa A-luokassa i samalla tavalla B-luokkiin* $j = 1, 2, \ldots, c$:

$$\frac{E_{ij}}{R_i} = \frac{C_j}{n}\ ,\ j = 1,2,\ldots,c\ ,\ i = 1,2,\ldots,r$$

- Odotettujen solufrekvenssien määritelmästä seuraa, että havaintojen *odotetut suhteelliset frekvenssit* E_{ij}/C_j *jakautuvat jokaisessa B-luokassa j samalla tavalla A-luokkiin* $i = 1, 2, \ldots, c$:

$$\frac{E_{ij}}{C_j} = \frac{R_i}{n}\ ,\ i = 1,2,\ldots,r\ ,\ j = 1,2,\ldots,c$$

Riippumattomuuden testaaminen

χ^2-riippumattomuustesti: Odotettujen frekvenssien taulukko 1/3

- Muodostetaan havaintojen *odotetuista frekvensseistä* E_{ij} $(r \times c)$-**frekvenssitaulukko** $[E_{ij}]$:

***B*-luokat**

A-luokat		1	2	…	*c*	Summa
	1	E_{11}	E_{12}	…	E_{1c}	R_1
	2	E_{21}	E_{22}	…	E_{2c}	R_2
	…	…	…	…	…	…
	r	E_{r1}	E_{r2}	…	E_{rc}	R_r
	Summa	C_1	C_2	…	C_c	*n*

χ^2-riippumattomuustesti: Odotettujen frekvenssien taulukko 2/3

- Olkoon $[E_{ij}]$ havaintojen *odotettujen frekvenssien* E_{ij} muodostama $(r \times c)$-frekvenssitaulukko.

  r = A-luokkien lukumäärä
  c = B-luokkien lukumäärä
  E_{ij} = havaintojen *odotettu frekvenssi* luokassa, jonka määrää A-luokka i *ja* B-luokka j,
  $i = 1, 2, \ldots , r$, $j = 1, 2, \ldots , c$
  R_i = havaintojen *havaittu frekvenssi* A-luokassa i
  C_j = havaintojen *havaittu frekvenssi* B-luokassa j
  n = havaintojen kokonaislukumäärä

- Frekvenssiä E_{ij} kutsutaan havaintojen *odotetuksi solufrekvenssiksi frekvenssitaulukon solussa* (i, j).

χ^2-riippumattomuustesti: Odotettujen frekvenssien taulukko 3/3

- *Odotettujen frekvenssien* E_{ij} frekvenssitaulukossa pätee:

(i) *Rivisummat* yhtyvät havaintojen havaittuihin frekvensseihin *A*-luokituksessa:

$$\sum_{j=1}^{c} E_{ij} = R_i \ , i = 1,2,\ldots,r$$

(ii) *Sarakesummat* yhtyvät havaintojen havaittuihin frekvensseihin *B*-luokituksessa:

$$\sum_{i=1}^{r} E_{ij} = C_j \ , \ j = 1,2,\ldots,c$$

(iii) *Havaintojen kokonaislukumäärä*:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} E_{ij} = \sum_{i=1}^{r} R_i = \sum_{j=1}^{c} C_j = n$$

χ^2-riippumattomuustesti: Testisuure – muoto 1

- Määritellään **χ^2-testisuure**

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

jossa

O_{ij} = havaintojen *havaittu frekvenssi* solussa (i, j)
E_{ij} = havaintojen *odotettu frekvenssi* solussa (i, j)
r = A-luokkien lukumäärä
c = B-luokkien lukumäärä

- Testisuure χ^2 *mittaa* havaittujen ja odotettujen frekvenssien *jakaumien yhteensopivuutta* tai *etäisyyttä* ja sitä kutsutaan usein χ^2*-etäisyydeksi*.

χ^2-riippumattomuustesti: Testisuure – muoto 2

- χ^2-testisuure voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(\hat{p}_{ij} - P_{ij})^2}{P_{ij}}$$

jossa

$$\hat{p}_{ij} = \frac{O_{ij}}{n}$$

$$P_{ij} = \frac{E_{ij}}{n} = \frac{R_i}{n}\cdot\frac{C_j}{n} = \hat{p}_{i\bullet}\hat{p}_{\bullet j}$$

$$\hat{p}_{i\bullet} = \frac{R_i}{n} \qquad \hat{p}_{\bullet j} = \frac{C_j}{n}$$

$$i = 1, 2, \ldots, r\ ,\ j = 1, 2, \ldots, c$$

χ^2-riippumattomuustesti: Testisuureen asymptoottinen jakauma

- *Jos nollahypoteesi* H_0 *pätee*, testisuure χ^2 noudattaa *suurissa otoksissa approksimatiivisesti* χ^2*-jakaumaa vapausastein* $f = (r - 1)(c - 1)$:

$$\chi^2 \sim_a \chi^2(f)$$

jossa

r = A-luokkien lukumäärä

c = B-luokkien lukumäärä

χ^2-riippumattomuustesti: Jakauma-approksimaation hyvyys

- Testisuure χ^2 noudattaa *suurissa otoksissa approksimatiivisesti* χ^2-jakaumaa, jos nollahypoteesi H_0 pätee:

$$\chi^2 \sim_a \chi^2(f)\,,\; f = (r-1)(c-1)$$

- Approksimaatio on tavallisesti *riittävän hyvä*, jos *odotetut frekvenssit* E_{ij} ja *keskimääräiset odotetut frekvenssit* R_j/c ja C_j/r toteuttavat ehdot

$$E_{ij} > 1\,,\; i = 1,2,\ldots,r\,,\; j = 1,2,\ldots,c$$

$$R_i/c > 5\,,\; i = 1,2,\ldots,r \qquad C_j/r > 5\,,\; j = 1,2,\ldots,c$$

- Ehdot saadaan toteutumaan valitsemalla havainnoille *sopiva luokitus*.

χ^2-riippumattomuustesti: Testisuureen normaaliarvo ja testi

- Testisuureen χ^2 *normaaliarvo* eli *odotusarvo nolla-hypoteesin* H_0 *pätiessä* on

  $$\mathrm{E}(\chi^2) = f$$

  jossa

  $$f = (r-1)(c-1)$$

- Normaaliarvoaan *merkitsevästi suuremmat* χ^2-testisuureen arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi H_0 *ei päde*.
- Normaaliarvoaan *merkitsevästi pienemmät* χ^2-testisuureen arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi H_0 *pätee liian hyvin*:

  Havainnot saattavat olla *väärennettyjä*.

χ^2-riippumattomuustesti: Kommentteja

- χ^2-riippumattomuustesti on **jakaumista riippumaton**, **ei-parametrinen** testi:
  (i) Testin yleinen hypoteesi *ei kiinnitä havaintojen jakaumaa*.
  (ii) Testissä *ei testata todennäköisyysjakauman parametreja koskevaa hypoteesia*, vaan oletusta havaintojen jakaumasta.

χ^2-riippumattomuustesti ja χ^2-homogeenisuustesti

- χ^2-*riippumattomuustesti* ja edellisessä kappaleessa esitetty χ^2-*homogeenisuustesti* muistuttavat toisiaan.
- Frekvenssitaulukosta *ei voi sellaisenaan nähdä* kummasta testausasetelmasta on kyse.
- χ^2-riippumattomuustesti ja χ^2-homogeenisuustesti tehdään teknisesti täsmälleen *samalla tavalla*:
  - *Odotetut frekvenssit* määrätään *samalla kaavalla*.
  - *Testisuureet* lasketaan *samalla kaavalla*.
  - *Testisuureet noudattavat* nollahypoteesin pätiessä approksimatiivisesti *samaa jakaumaa*.
- Testien testausasetelmat ovat kuitenkin *täysin erilaiset*.

Riippumattomuustesti *vs* homogeenisuustesti 1/2

- *Riippumattomuustestin* testausasetelma:
  (i) Testissä tarkastellaan *kahden tekijän A ja B assosiaatiota* eli *riippuvuutta*, kun havainnot on luokiteltu tekijöiden *A* ja *B* suhteen *ristiin*.
  (ii) Havaintoaineisto muodostuu *yhdestä satunnais-otoksesta*.
  (iii) Vain havaintojen kokonaislukumäärä *n* on *kiinteä* eli *ei-satunnainen* (so. valittu) luku, kun taas *sattuma määrää miten havainnot jakautuvat luokkiin tekijöiden A ja B ristiluokituksen suhteen*.

Riippumattomuustesti *vs* homogeenisuustesti 2/2

- *Homogeenisuustestin* testausasetelma:

(i) Perusjoukko koostuu *r ryhmästä* ja testissä tarkastellaan perusjoukon alkioiden *jakautumista luokkiin eri ryhmissä*, kun *luokittelu on tehty kaikissa ryhmissä samaa luokitusta käyttäen*.

(ii) Havaintoaineisto muodostuu *toisistaan riippumattomista ryhmäkohtaisista satunnais-otoksista*.

(iii) Sekä ryhmäkohtaiset otoskoot n_i että havaintojen kokonaislukumäärä n ovat *kiinteitä* eli *ei-satunnaisia* (so. valittuja) lukuja, kun taas *sattuma määrää miten havainnot jakautuvat luokkiin* ryhmien sisällä.

Yhteensopivuuden, homogeenisuuden ja riippumattomuuden testaaminen

Jakaumaoletuksien testaaminen

Yhteensopivuuden testaaminen

Homogeenisuuden testaaminen

Riippumattomuuden testaaminen

>> Normaalisuuden testaaminen

Normaalisuusoletuksen tutkiminen

- *Normaalijakaumalla* on *keskeinen asema* tilastotieteessä.
- Esimerkiksi tavanomaisen *t-testin yleisessä hypoteesissa* oletetaan, että *havainnot noudattavat normaalijakaumaa*.
- Siksi tilastotieteessä on kehitetty useita erilaisia menetelmiä *havaintojen normaalisuuden tutkimiseen*.
- Normaalisuutta voidaan testata edellä esitetyllä **χ^2-testillä**, joka on *yleinen yhteensopivuustesti*.
- Seuraavassa tarkastellaan kahta *erityisesti normaalisuuden tutkimiseen tarkoitettua testausmenetelmää*:
  – **Bowmanin ja Shentonin testi**
  – **Rankit Plot -kuvio** sekä **Wilkin ja Shapiron testi**

Bowmanin ja Shentonin testi: Testausasetelma

- Olkoot γ_1 ja γ_2 tavanomaiset keskusmomentteihin perustuvat tunnusluvut todennäköisyysjakaumien *vinoudelle* ja *huipukkuudelle*.
- *Normaalijakaumalle*

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

- *Bowmanin ja Shentonin testissä* havaintojen normaalisuuden testaaminen perustuu testisuureeseen, joka on *vastaavien otossuureiden funktio*.
- Testisuure saa *suuria arvoja*, jos havaintojen vinous ja/tai huipukkuus *poikkeavat* paljon normaalijakautuneen satunnaismuuttujan vinoudesta ja/tai huipukkuudesta.

Bowmanin ja Shentonin testi: Satunnaismuuttujan momentit

- Satunnaismuuttujan X ***k*. origomomentti** on

$$\alpha_k = \mathrm{E}(X^k)\ ,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Satunnaismuuttujan X ***k*. keskusmomentti** on

$$\mu_k = \mathrm{E}\left[(X - \alpha_1)^k\right], \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Erityisesti

$$\alpha_1 = \mathrm{E}(X) = \mu_X$$

on satunnaismuuttujan X *odotusarvo* ja

$$\mu_2 = \mathrm{E}\left[(X - \mu_X)^2\right] = \sigma_X^2$$

on satunnaismuuttujan X *varianssi*.

Bowmanin ja Shentonin testi: Satunnaismuuttujan vinous ja huipukkuus

- Tunnuslukua

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

käytetään *todennäköisyysjakauman* **vinouden** *mittana*.

- Tunnuslukua

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

käytetään *todennäköisyysjakauman* **huipukkuuden** *mittana*.

- *Normaalijakaumalle*

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

Bowmanin ja Shentonin testi: Havaintojen momentit 1/2

- Olkoot X_1 , X_2 , … , X_n *välimatka-* tai *suhdeasteikollisen satunnaismuuttujan* X havaittuja arvoja.
- Havaintojen X_1 , X_2 , … , X_n ***k*. origomomentti** on

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \ , k = 1,2,\ldots$$

- Havaintojen X_1 , X_2 , … , X_n ***k*. keskusmomentti** on

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - a_1)^k \ , k = 1,2,\ldots$$

Bowmanin ja Shentonin testi: Havaintojen momentit 2/2

- Erityisesti

$$a_1 = \bar{X}$$

on havaintojen $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *aritmeettinen keskiarvo* ja

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \hat{\sigma}_X^2$$

on havaintojen $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *otosvarianssi*.

Bowmanin ja Shentonin testi: Havaintojen vinous ja huipukkuus

- Tunnuslukua

$$c_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}$$

käytetään *havaintoarvojen jakauman* **vinouden** *mittana*.

- Tunnusluku

$$c_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$$

käytetään *havaintoarvojen jakauman* **huipukkuuden** *mittana*.

Bowmanin ja Shentonin testi: Hypoteesit

- *Yleinen hypoteesi* H :

  Havainnot X_1 , X_2 , … , X_n on poimittu *yksinkertaisella satunnaisotannalla* perusjoukosta *S*.
- *Nollahypoteesi* H_0 :

  Havainnot X_1 , X_2 , … , X_n *noudattavat normaalijakaumaa*.
- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

  Havainnot X_1 , X_2 , … , X_n *eivät noudata normaalijakaumaa*.

Bowmanin ja Shentonin testi: Testisuure ja sen jakauma

- Määritellään χ^2**-testisuure**

$$\chi^2 = \frac{n}{6}c_1^2 + \frac{n}{24}c_2^2$$

- *Jos nollahypoteesi* H_0 *pätee*, testisuure χ^2 noudattaa suurissa otoksissa *approksimatiivisesti* χ^2*-jakaumaa* 2:lla *vapausasteella*:

$$\chi^2 \sim_a \chi^2(2)$$

Bowmanin ja Shentonin testi: Testisuure ja sen jakauma

- Testisuureen χ^2 *normaaliarvo* eli *odotusarvo nolla-hypoteesin* H_0 *pätiessä* on

$$\mathrm{E}(\chi^2) = 2$$

- Normaaliarvoaan *merkitsevästi suuremmat* χ^2-testisuureen arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi H_0 *ei päde*.
- Normaaliarvoaan *merkitsevästi pienemmät* χ^2-testisuureen arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi H_0 *pätee liian hyvin*:

  Havainnot saattavat olla *väärennettyjä*.

Normaalisuusoletuksen tutkiminen graafisesti

- Tietokonegrafiikka mahdollistaa havaintoaineiston normaalisuuden tutkimisen *graafisin keinoin*.
- Normaalisuuden tutkimiseen tarkoitetut graafiset menetelmät perustuvat kuvioihin, joissa ideana on se, että *normaalijakautuneet havainnot asettuvat kuvioissa* (*satunnaisvaihtelua lukuun ottamatta*) *suoralle viivalle* ja *havaintojen epänormaalisuus tulee kuviossa esille poikkeamina tästä suorasta*.
- Tällainen kuvio voidaan muodostaa usealla eri periaatteella; tässä tarkastellaan ns. *Rankit Plot* -kuviota.

Rankit Plot -kuvio: Kuvion idea 1/2

- Olkoot

  $$Z_1 , Z_2 , \ldots , Z_n$$

  havainnot $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ *suuruusjärjestyksessä* pienimmästä suurimpaan.
- Olkoon $\mathrm{E}(Y_i)$ *i. havainnon* Y_i *odotusarvo*, jossa Y_i on suuruusjärjestyksessä *i*. havainto standardoidusta normaalijakaumasta N(0,1) poimitusta satunnaisotoksesta, $i = 1, 2, \ldots , n$.
- Piirretään *pistediagrammi*

  $$(\mathrm{E}(Y_i), Z_i) , i = 1, 2, \ldots , n$$

Rankit Plot -kuvio: Kuvion idea 2/2

- Jos havainnot $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ noudattavat *samaa normaalijakaumaa*, *pisteet*

  $$(\mathrm{E}(Y_i), Z_i) \text{ , } i = 1, 2, \ldots , n$$

  asettuvat (*satunnaisvaihtelua lukuun ottamatta*) *suoralle viivalle*.
- *Poikkeamat* suorasta viittaavat epänormaalisuuteen.
- Kuviosta voidaan tunnistaa:
  - Havaintoarvojen jakauman *vinous*
  - Havaintoarvojen jakauman *huipukkuus*
  - *Poikkeavat havainnot* (*engl*. outliers)

Wilkin ja Shapiron testi: Testin idea

- **Wilkin ja Shapiron testisuure** on *Rankit Plot -kuvion pisteistä*

  $$(\mathrm{E}(Y_i), Z_i)\ , i = 1, 2, \ldots , n$$

  lasketun *otoskorrelaatiokertoimen neliö*.
- *Pienet* testisuureen arvot viittaavat siihen, että *normaalisuusoletus ei päde*.
- *Suuret* testisuureen arvot ovat sopusoinnussa *normaalisuusoletuksen* kanssa.
- Testisuureen jakauma on *epästandardi*, mutta monet tilasto-ohjelmistot osaavat laskea Wilkin ja Shapiron testisuureen arvoa vastaavia *p-arvoja*.

Wilkin ja Shapiron testi: Esimerkki 1/5

- Kappaleessa

  Yhteensopivuuden testaaminen

  tarkasteltiin seuraavaa esimerkkiä:

  (i) Kone tekee *ruuveja*, joiden *tavoitepituus* on 10 cm.

  (ii) Ruuvien *pituus vaihtelee satunnaisesti* jonkin verran.

  (iii) Ruuvien pituuksien oletetaan kuitenkin noudattavan *normaalijakaumaa*.

Wilkin ja Shapiron testi: Esimerkki 2/5

- Koneen valmistamien ruuvien joukosta poimittiin *yksinkertainen satunnaisotos*, jonka *koko* $n = 30$ ja otokseen poimittujen ruuvien pituudet mitattiin.
- Ruuvien pituuksien *aritmeettinen keskiarvo* otoksessa oli

  $$\bar{X} = 10.09 \text{ cm}$$

  ja *otoskeskihajonta* oli

  $$s = 0.1038 \text{ cm}$$
- Taulukko oikealla esittää pituuksien *luokiteltua frekvenssi-jakaumaa*.

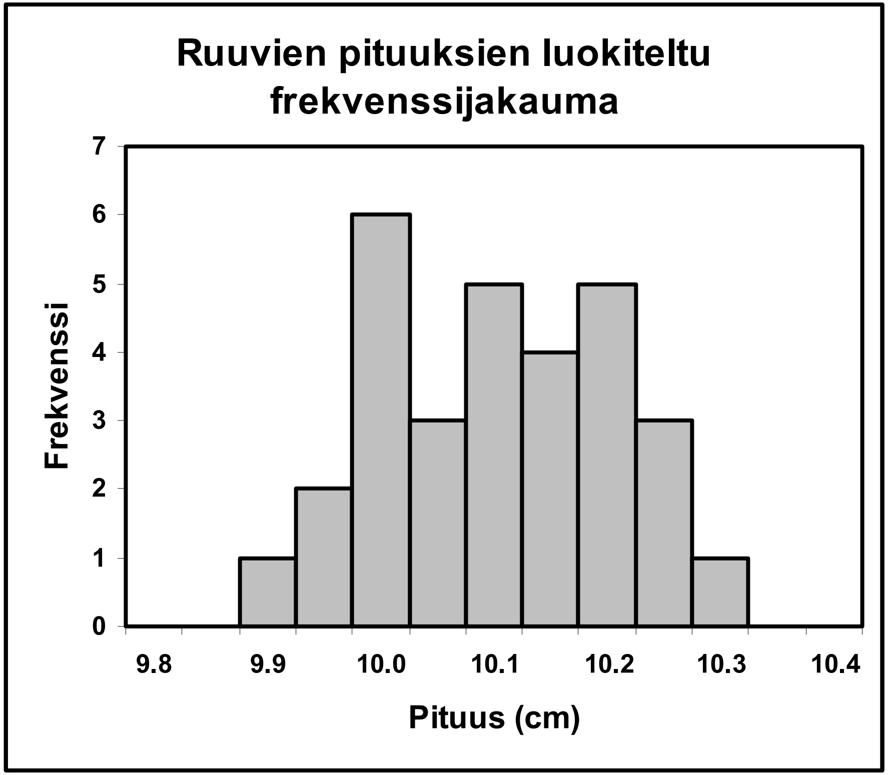
Luokkavälit	Luokkafrekvenssit
(9.85,9.90]	1
(9.90,9.95]	2
(9.95,10.00]	6
(10.00,10.05]	3
(10.05,10.10]	5
(10.10,10.15]	4
(10.15,10.20]	5
(10.20,10.25]	3
(10.25,10.30]	1

Wilkin ja Shapiron testi: Esimerkki 3/5

- Kuva oikealla esittää otokseen poimittujen ruuvien pituuksien luokiteltua frekvenssijakaumaa vastaavaa *histogrammia*.
- Kappaleessa

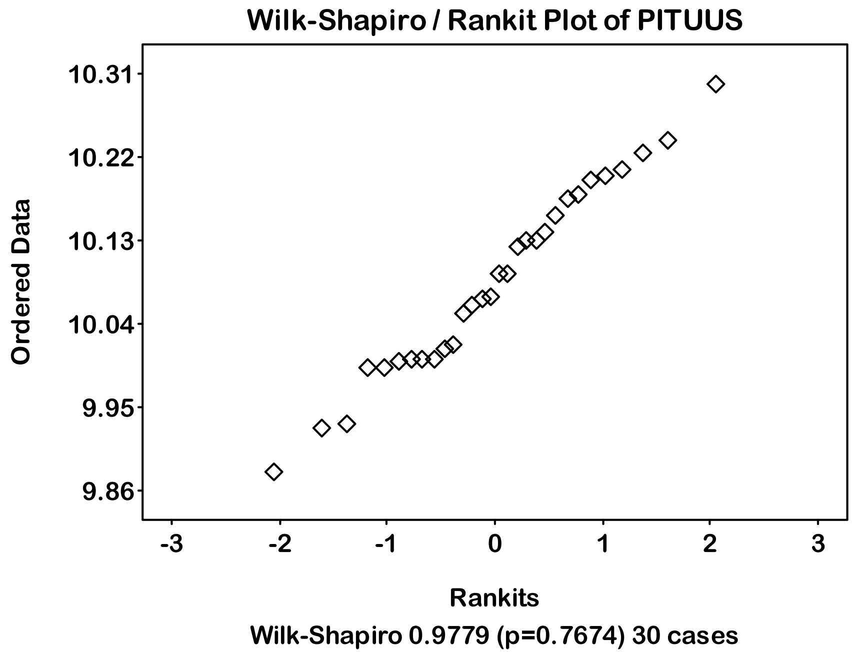
  Yhteensopivuuden testaaminen

  todettiin, että *havainnot ovat sopusoinnussa normaalisuus-oletuksen kanssa yleisen χ^2-yhteensopivuustestin perusteella*.
- Tarkastellaan normaalisuus-oletusta vielä *Shapiron ja Wilkin testin* valossa.



Wilkin ja Shapiron testi: Esimerkki 4/5

- Oikealla on otokseen poimittujen ruuvien pituuksista piirretty *Rankit Plot -kuvio*.
- Havaintoja vastaavien pisteiden poikkeamat suorasta viivasta ovat niin vähäisiä, että *normaalisuusoletusta ei ole mitään syytä asettaa kyseen-alaiseksi Rankit Plot -kuvion perusteella*.



Wilkin ja Shapiron testi: Esimerkki 5/5

- Rankit Plot -kuvioon liittyvä *Wilkin ja Shapiron testisuureen arvo* on esimerkkiaineiston tapauksessa

  0.9779

  ja testisuureen arvoa vastaava *p-arvo* on

  0.7674

- Siten *normaalisuusoletusta ei ole syytä asettaa kyseen-alaiseksi myöskään Wilkin ja Shapiron testin perusteella*.