Ilkka Mellin

Tilastolliset menetelmät

Osa 3: Tilastolliset testit

Testit järjestysasteikollisille muuttujille

Testit järjestysasteikollisille muuttujille

>> Järjestysasteikollisten muuttujien testit

Merkkitesti

Wilcoxonin rankitesti

Mannin ja Whitneyn testi

Wilcoxonin rankisummatesti

Testit järjestysasteikollisille muuttujille

- Tarkastelemme seuraavia testejä (jatkuville) *järjestys-asteikollisille* muuttujille:
  - **Merkkitesti**
  - **Wilcoxonin rankitesti**
  - **Mannin ja Whitneyn testi** eli **Wilcoxonin rankisummatesti**
- On syytä huomata, että testejä saa – ja on usein myös järkevää – käyttää *välimatka*- ja *suhdeasteikollisille muuttujille*.
- Mitta-asteikot: ks. lukua **Tilastollisten aineistojen kerääminen ja mittaaminen.**

Testit järjestysasteikollisille muuttujille: Huomautuksia

- Tässä käsiteltäviä testejä kutsutaan *ei-parametrisiksi* tai *jakaumista riippumattomiksi*, koska testi eivät kohdistu minkään tarkasti määritellyn todennäköisyysjakauman parametreihin.
- *Merkkitesti* ja *Wilcoxonin rankitesti* ovat luonteeltaan **yhden otoksen testejä**, mutta niitä voidaan soveltaa myös **parivertailuasetelmissa**.
- *Mannin ja Whitneyn testi* eli *Wilcoxonin rankisummatesti* on luonteeltaan **kahden otoksen testi**.
- Kaikissa käsiteltävissä testeissä testataan tarkemmin määrittelemättömän todennäköisyysjakauman **sijainti-parametria** (**mediaania**) koskevia hypoteeseja

Testit järjestysasteikollisille muuttujille

Järjestysasteikollisten muuttujien testit

\>> Merkkitesti

Wilcoxonin rankitesti

Mannin ja Whitneyn testi

Wilcoxonin rankisummatesti

Testausasetelma

- Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$, *yksinkertainen satunnaisotos* perusjoukosta S, jonka jakauma on *symmetrinen*.
- Asetetaan jakauman *mediaanille Me nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : Me = Me_0$$

- Testausongelma:

  Ovatko havainnot *sopusoinnussa* nollahypoteesin H_0 kanssa?
- Erään ratkaisun tarjoaa **merkkitesti**, joka on *yhden otoksen t-testin* ei-parametrinen vastine.

Testisuureet

- Määritellään *erotukset*

$$D_i = X_i - Me_0 \text{ , } i = 1, 2, \dots , n'$$

ja olkoon

$$n \leq n'$$

niiden erotusten D_i lukumäärä, jotka ovat $\neq 0$.

- Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*, positiivisten ja negatiivisten erotusten on *jakauduttava suunnilleen tasan*.
- Määritellään **testisuureet** S^- ja S^+ :

$$S^- = \text{negatiivisten erotusten } D_i = X_i - Me_0 \text{ lukumäärä}$$

$$S^+ = \text{positiivisten erotusten } D_i = X_i - Me_0 \text{ lukumäärä}$$

Testisuureiden S^- ja S^+ ominaisuudet

(i) $S^- + S^+ = n$

(ii) Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*, testisuureet S^- ja S^+ noudattavat *binomijakaumaa* $\mathrm{Bin}(n, q)$ parametrein n ja $q = 1/2$:

$S^- \sim \mathrm{Bin}(n, 1/2)$

$S^+ \sim \mathrm{Bin}(n, 1/2)$

(iii) Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*,

$$\mathrm{E}(S^-) = \mathrm{E}(S^+) = nq = \tfrac{1}{2}n$$

(iv) Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*,

$$\mathrm{D}^2(S^-) = \mathrm{D}^2(S^+) = nq(1-q) = \tfrac{1}{4}n$$

Merkkitesti
Eksakti testi

- Testisuureiden S^- ja S^+ jakaumat on taulukoitu ja monet tietokoneohjelmat laskevat testin p-arvoja.
- Merkkitestin *p-arvot* määrätään seuraavilla kaavoilla, joissa s^- (s^+) on testisuureen S^- (S^+) havaittu arvo:

(i) *Vaihtoehtoinen hypoteesi* $\mathrm{H}_1 : Me > Me_0$

Testin *p-arvo*: $p = \Pr(S^+ > s^+)$

(ii) *Vaihtoehtoinen hypoteesi* $\mathrm{H}_1 : Me < Me_0$

Testin *p-arvo*: $p = \Pr(S^- < s^-)$

(iii) *Vaihtoehtoinen hypoteesi*: $\mathrm{H}_1 : Me \neq Me_0$

Testin *p-arvo*: $p = 2\times\min\{\Pr(S^+ > s^+)\ ,\ \Pr(S^- < s^-)\}$

Standardoitu *S*-testisuure ja sen jakauma 1/2

- Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*,

$$\mathrm{E}(S^-) = \mathrm{E}(S^+) = \tfrac{1}{2}n$$

$$\mathrm{D}^2(S^-) = \mathrm{D}^2(S^+) = \tfrac{1}{4}n$$

- Määritellään **testisuure**

$$z = \frac{S^* - \mathrm{E}(S^*)}{\mathrm{D}(S^*)}$$

jossa $S^* = S^-$ tai S^+ .

Standardoitu *S*-testisuure ja sen jakauma 2/2

- Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*, niin testisuure

$$z = \frac{S^* - \mathrm{E}(S^*)}{\mathrm{D}(S^*)}$$

noudattaa suurissa otoksissa *approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa* N(0,1):

$$z \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

- Approksimaatio on tavallisesti *riittävän hyvä*, jos $n > 20$.
- *Pienissä otoksissa* nojataan testisuureeseen S^* *tarkkaan jakaumaan*.

Asymptoottinen testi

- Testisuureen

$$z = \frac{S^* - \mathrm{E}(S^*)}{\mathrm{D}(S^*)}$$

normaaliarvo = 0, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$\mathrm{E}(z) = 0$$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen z arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *hylätään*, jos testin p-arvo on *kyllin pieni*.
- Hylkäysalueen valinta ja p-arvon määrääminen: ks. lukua **Tilastollinen testaus.**

Kommentteja

- Merkkitesti voidaan tulkita *yhden otoksen t-testin ei-parametriseksi vastineeksi*.
- Merkkitestissä *ei tehdä*

  – toisin kuin yhden otoksen t-testissä –

  mitään *oletuksia perusjoukon jakauman tyypistä*.
- Merkkitestin testisuureen arvo *ei riipu havaintoarvoista*, vaan ainoastaan niiden keskinäisestä *järjestyksestä*.

Merkkitestin soveltaminen parivertailuasetelmiin 1/2

- Merkkitestiä voidaan soveltaa *parivertailuasetelmiin*, joissa havainnot muodostuvat toisistaan *riippumattomista mittauspareista*

$$(X_i\,, Y_i)\,,\ i = 1, 2, \ldots\,, n'$$

- Oletetaan, että X- ja Y-mittausten jakaumat ovat muuten samat, mutta niiden *mediaaneilla* (*sijaintiparametreilla*) *saattaa olla eri arvot*.
- Määritellään havaintojen X_i ja Y_i *erotukset*

$$D_i = X_i - Y_i\,,\ i = 1, 2, \ldots\,, n'$$

ja olkoon n niiden erotusten D_i lukumäärä, jotka ovat $\neq 0$.

Merkkitestin soveltaminen parivertailuasetelmiin 2/2

- Tehdään oletus, että erotusten

$$D_i = X_i - Y_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

jakauma on *symmetrinen*.

- Määritellään **testisuureet** S^- ja S^+ erotuksille D_i kuten edellä.

- Olkoon

$$Me_D$$

erotusten $D_i = X_i - Y_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n$ *mediaani*.

- Tällöin *nollahypoteesin*

$$\mathrm{H}_0 : Me_D = 0$$

testaamiseen voidaan soveltaa **merkkitestiä**.

Testit järjestysasteikollisille muuttujille

Järjestysasteikollisten muuttujien testit
Merkkitesti
>> Wilcoxonin rankitesti
Mannin ja Whitneyn testi
Wilcoxonin rankisummatesti

Testausasetelma

- Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$, *yksinkertainen satunnaisotos* perusjoukosta S, jonka jakauma on *symmetrinen*.
- Asetetaan jakauman *mediaanille Me nollahypoteesi*

  $$\mathrm{H}_0 : Me = Me_0$$

- Testausongelma:

  Ovatko havainnot *sopusoinnussa* nollahypoteesin H_0 kanssa?

- Erään ratkaisun tarjoaa **Wilcoxonin rankitesti**, joka on *yhden otoksen t-testin* ei-parametrinen vastine.

Testisuure 1/2

- Olkoon

$$|D_i| = |X_i - Me_0| \text{ , } i = 1, 2, \dots , n'$$

ja olkoon

$$n \le n'$$

niiden erotusten D_i lukumäärä, jotka ovat $\neq 0$.

- Olkoot

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$$

itseisarvot $|D_i|$ järjestettyinä *suuruusjärjestykseen* pienimmästä suurimpaan ja olkoon

$$R(Z_i) = \text{itseisarvon } Z_i \text{ järjestysnumero eli } \textit{ranki}, \quad i = 1, 2, \dots , n$$

Testisuure 2/2

- Määritellään **testisuure**

$$W^- = \sum_{D_i<0} R(Z_i)$$

- W^- on niiden *rankien summa*, joita vastaavat erotukset

$$D_i = X_i - Me_0 < 0$$

- Määritellään **testisuure**

$$W^+ = \sum_{D_i>0} R(Z_i)$$

- W^+ on niiden *rankien summa*, joita vastaavat erotukset

$$D_i = X_i - Me_0 > 0$$

Testisuureiden W^- ja W^+ ominaisuudet

(i) $W^- + W^+ = \tfrac{1}{2}n(n+1)$

(ii) Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*,

$$\mathrm{E}(W^-) = \mathrm{E}(W^+) = \tfrac{1}{4}n(n+1)$$

(iii) Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*,

$$\mathrm{D}^2(W^-) = \mathrm{D}^2(W^+) = \tfrac{1}{24}n(n+1)(2n+1)$$

Eksakti testi

- Testisuureiden W^- ja W^+ jakaumat on taulukoitu ja monet tietokoneohjelmat laskevat testin *p*-arvoja.
- Wilcoxonin rankitestin *p-arvot* määrätään seuraavilla kaavoilla, joissa w^- ja w^+ ovat testisuureiden W^- ja W^+ havaitut arvot:

(i) *Vaihtoehtoinen hypoteesi* $\mathrm{H}_1 : Me > Me_0$

Testin *p-arvo*: $p = \Pr(W^+ > w^+)$

(ii) *Vaihtoehtoinen hypoteesi* $\mathrm{H}_1 : Me < Me_0$

Testin *p-arvo*: $p = \Pr(W^- < w^-)$

(iii) *Vaihtoehtoinen hypoteesi* $\mathrm{H}_1 : Me \neq Me_0$

Testin *p-arvo*: $p = 2\times\min\{\Pr(W^+ > w^+)\ ,\ \Pr(W^- < w^-)\}$

Standardoitu *W*-testisuure ja sen jakauma 1/2

- Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*,

$$\mathrm{E}(W^-) = \mathrm{E}(W^+) = \tfrac{1}{4}n(n+1)$$

$$\mathrm{D}^2(W^-) = \mathrm{D}^2(W^+) = \tfrac{1}{24}n(n+1)(2n+1)$$

- Määritellään **testisuure**

$$z = \frac{W^* - \mathrm{E}(W^*)}{\mathrm{D}(W^*)}$$

jossa $W^* = W^-$ tai W^+ .

Standardoitu *W*-testisuure ja sen jakauma 2/2

- Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*, niin testisuure

$$z = \frac{W^* - \mathrm{E}(W^*)}{\mathrm{D}(W^*)}$$

noudattaa suurissa otoksissa *approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa* N(0,1):

$$z \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

- Approksimaatio on tavallisesti *riittävän hyvä*, jos $n > 20$.
- *Pienissä otoksissa* nojataan testisuureen W^* *tarkkaan jakaumaan*.

Asymptoottinen testi

- Testisuureen

$$z = \frac{W^* - \mathrm{E}(W^*)}{\mathrm{D}(W^*)}$$

normaaliarvo = 0, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$\mathrm{E}(z) = 0$$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen z arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *hylätään*, jos testin p-arvo on *kyllin pieni*.
- Hylkäysalueen valinta ja p-arvon määrääminen: ks. lukua **Tilastollinen testaus.**

Kommentteja

- Wilcoxonin rankitesti voidaan tulkita *yhden otoksen t-testin ei-parametriseksi vastineeksi*.
- Wilcoxonin rankitestissä *ei tehdä*

  – toisin kuin yhden otoksen *t*-testissä –

  mitään oletuksia perusjoukon jakauman tyypistä.
- Wilcoxonin rankitestin testisuureen arvo ei riipu *havaintoarvoista*, vaan ainoastaan niiden keskinäisestä *järjestyksestä*.
- Wilcoxonin rankitesti käyttää merkkitestiä *enemmän informaatiota havaintojen järjestyksestä*.
- Wilcoxonin rankitesti on *voimakkaampi* kuin merkkitesti.

Wilcoxonin rankitestin soveltaminen parivertailuasetelmiin 1/2

- Wilcoxonin rankitestiä voidaan soveltaa *parivertailu-asetelmiin*, joissa havainnot muodostuvat toisistaan *riippumattomista mittauspareista*

$$(X_i , Y_i) , i = 1, 2, \ldots , n'$$

- Oletetaan, että X- ja Y-mittausten jakaumat ovat muuten samat, mutta niiden *mediaaneilla* (*sijaintiparametreilla*) *saattaa olla eri arvot*.
- Määritellään havaintojen X_i ja Y_i *erotukset*

$$D_i = X_i - Y_i , i = 1, 2, \ldots , n'$$

ja olkoon n niiden erotusten D_i lukumäärä, jotka ovat $\neq 0$.

Wilcoxonin rankitestin soveltaminen parivertailuasetelmiin 2/2

- Oletetaan, että erotusten

  $$D_i = X_i - Y_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

  jakauma on *symmetrinen*.
- Määritellään **testisuureet** W^- ja W^+ erotuksille D_i kuten edellä.
- Olkoon

  $$Me_D$$

  erotusten $D_i = X_i - Y_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n$ *mediaani*.
- Tällöin *nollahypoteesin*

  $$\mathrm{H}_0 : Me_D = 0$$

  testaamiseen voidaan soveltaa **Wilcoxonin rankitestiä**.

Testit järjestysasteikollisille muuttujille

Järjestysasteikollisten muuttujien testit

Merkkitesti

Wilcoxonin rankitesti

>> Mannin ja Whitneyn testi

Wilcoxonin rankisummatesti

Testausasetelma 1/2

- Oletetaan, että

  $$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

  ovat *riippumattomia havaintoja* satunnaismuuttujan X jakaumasta perusjoukossa S_1 (otos 1).

- Oletetaan, että

  $$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$$

  ovat *riippumattomia havaintoja* satunnaismuuttujan Y jakaumasta perusjoukossa S_2 (otos 2).

- Olkoot otokset lisäksi toisistaan *riippumattomia*.

Testausasetelma 2/2

- Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat muuten *samaa jakaumaa*, mutta niiden *mediaanit* (*sijaintiparametrit*) saattavat *erota toisistaan*.
- Asetetaan *nollahypoteesi*, että satunnaismuuttujilla X ja Y on sama *mediaani* (*sijaintiparametri*).
- Testausongelma:

  Ovatko havainnot *sopusoinnussa* nollahypoteesin H_0 kanssa?
- Erään ratkaisun tarjoaa **Mannin ja Whitneyn testi**, joka on *kahden riippumattoman otoksen t-testin* ei-parametrinen vastine.

Mannin ja Whitneyn testi

Yleinen hypoteesi

- *Yleinen hypoteesi* H :
  (1) Havainnot $X_i \sim F_X , i = 1, 2, \ldots, n$
  (2) Havainnot $Y_j \sim F_Y , j = 1, 2, \ldots, m$
  (3) Kertymäfunktiot F_X ja F_X ovat muuten samat, mutta niiden *mediaanit* (*sijaintiparametrit*) saattavat *erota toisistaan*.
  (4) Havainnot X_i ja Y_j ovat *riippumattomia* kaikille *i* ja *j*
- Huomautus:

  Oletus (3) sisältää *kolme riippumattomuusoletusta*:
  - Havainnot ovat riippumattomia otoksien 1 ja 2 *sisällä*.
  - Havainnot ovat riippumattomia otoksien 1 ja 2 *välillä*.

Nollahypoteesi ja vaihtoehtoinen hypoteesi

- *Nollahypoteesi* H_0 :

$$\mathrm{H}_0 : F_X = F_Y$$

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 :

$$\mathrm{H}_1 : F_X \neq F_Y$$

Mannin ja Whitneyn testi
Testin idea

- *Yhdistetään* X- ja Y-havainnot *yhdeksi otokseksi* ja *järjestetään* yhdistetyn otoksen havainnot *suuruus-järjestykseen* pienimmästä suurimpaan.
- Tarkastellaan sitä, miten X- ja Y-havainnot *seuraavat* yhdistetyssä otoksessa *toisiaan*.
- Jos kaikki X-havainnot (Y-havainnot) *edeltävät* kaikkia Y-havaintoja (X-havaintoja), *ei ole uskottavaa*, *että nolla-hypoteesi* H_0 *pätee*.
- Jos satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat samaa jakaumaa, on ilmeistä, että X- ja Y-havaintojen *on sekoituttava* sopivasti toisiinsa.
- Mannin ja Whitneyn testisuure *mittaa* tätä sekoittumista.

Testisuure U_1 – muoto 1

- Määritellään satunnaismuuttujat

$$D_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 1 \text{ , jos } X_i < Y_j \\ 0 \text{ , jos } X_i > Y_j \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots , n \text{ , } j = 1, 2, \ldots , m$$

ja **testisuure**

$$U_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} D_{ij}^{(1)}$$

Testisuure U_1 – muoto 2

- Määritellään satunnaismuuttujat

$R(X_i)$ = havainnon X_i järjestysnumero eli *ranki* yhdistetyssä otoksessa
$i = 1, 2, \ldots , n$

ja **testisuure**

$$U_1 = nm + \tfrac{1}{2}n(n+1) - \sum_{i=1}^{n} R(X_i)$$

- Testisuureen U_1 muodot 1 ja 2 ovat *ekvivalentteja*.

Mannin ja Whitneyn testi
Testisuureen U_1 ominaisuudet

- Testisuureen U_1 arvo ei riipu X- ja Y-havaintoarvojen *suuruudesta*, vaan ainoastaan niiden keskinäisestä *järjestyksestä*.
- Aina pätee

$$0 \leq U_1 \leq nm$$

ja erityisesti

$$U_1 = 0 \text{ , jos } X_i > Y_j \text{ kaikille } i \text{ ja } j$$

$$U_1 = nm \text{ , jos } X_i < Y_j \text{ kaikille } i \text{ ja } j$$

Testisuure U_2 – muoto 1

- Määritellään satunnaismuuttujat

$$D_{ji}^{(2)} = \begin{cases} 1\,, \text{jos } Y_j < X_i \\ 0\,, \text{jos } Y_j > X_i \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \ldots, m\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

ja **testisuure**

$$U_2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} D_{ji}^{(2)}$$

Testisuure U_2 – muoto 2

- Määritellään satunnaismuuttujat

  $R(Y_j)$ = havainnon Y_j järjestysnumero eli *ranki* yhdistetyssä otoksesessa
  $j = 1, 2, \dots, m$

  ja **testisuure**

$$U_2 = nm + \tfrac{1}{2}m(m+1) - \sum_{j=1}^{m} R(Y_j)$$

- Testisuureen U_2 muodot 1 ja 2 ovat *ekvivalentteja*.

Testisuureen U_2 ominaisuudet

- Testisuureen U_2 arvo ei riipu X- ja Y-havaintoarvojen *suuruudesta*, vaan ainoastaan niiden keskinäisestä *järjestyksestä*.
- Aina pätee

$$0 \leq U_2 \leq nm$$

ja erityisesti

$$U_2 = 0 \text{ , jos } Y_j > X_i \text{ kaikille } i \text{ ja } j$$

$$U_2 = nm \text{ , jos } Y_j < X_i \text{ kaikille } i \text{ ja } j$$

Testisuureiden U_1 ja U_2 ominaisuudet

(i) $U_1 + U_2 = nm$

(ii) Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*,

$$\mathrm{E}(U_1) = \mathrm{E}(U_2) = \tfrac{1}{2}nm$$

(iii) Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*,

$$\mathrm{D}^2(U_1) = \mathrm{D}^2(U_2) = \tfrac{1}{12}nm(n+m+1)$$

Standardoitu U_1-testisuure ja sen jakauma

- Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*, niin standardoitu satunnais-muuttuja

$$z_1 = \frac{U_1 - \mathrm{E}(U_1)}{\mathrm{D}(U_1)}$$

noudattaa suurissa otoksissa *approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa*:

$$z_1 \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

- Approksimaatio on tavallisesti *riittävän hyvä*, jos $n > 10$ ja $m > 10$.
- *Pienissä otoksissa* nojataan testisuureen U_1 *tarkkaan jakaumaan*.

Asymptoottinen testi – muoto 1

- **Testisuureen**

$$z_1 = \frac{U_1 - \mathrm{E}(U_1)}{\mathrm{D}(U_1)}$$

normaaliarvo = 0, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$\mathrm{E}(z_1) = 0$$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen z_1 arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *hylätään*, jos testin *p*-arvo on *kyllin pieni*.
- Hylkäysalueen valinta ja *p*-arvon määrääminen: ks. lukua **Tilastollinen testaus**.

Standardoitu U_2-testisuure ja sen jakauma

- Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*, niin standardoitu satunnaismuuttuja

$$z_2 = \frac{U_2 - \mathrm{E}(U_2)}{\mathrm{D}(U_2)}$$

noudattaa suurissa otoksissa *approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa*:

$$z_2 \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

- Approksimaatio on tavallisesti *riittävän hyvä*, jos $n > 10$ ja $m > 10$.
- *Pienissä otoksissa* nojataan testisuureen U_2 *tarkkaan jakaumaan*.

Asymptoottinen testi – muoto 2

- **Testisuureen**

$$z_2 = \frac{U_2 - \mathrm{E}(U_2)}{\mathrm{D}(U_2)}$$

normaaliarvo = 0, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$\mathrm{E}(z_2) = 0$$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen z_2 arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *hylätään*, jos testin p-arvo on *kyllin pieni*.
- Hylkäysalueen valinta ja p-arvon määrääminen: ks. lukua **Tilastollinen testaus**.

Kommentteja 1/2

- Mannin ja Whitneyn testi voidaan tulkita *kahden riippumattoman otoksen t-testin ei-parametriseksi vastineeksi*.
- Mannin ja Whitneyn testissä *ei tehdä*
  – toisin kuin kahden riippumattoman otoksen t-testissä –
  mitään oletuksia perusjoukkojen jakaumasta.
- Mannin ja Whitneyn testisuureiden arvo ei riipu muuttujien X ja Y *arvoista*, vaan ainoastaan niiden keskinäisestä *järjestyksestä*.

Kommentteja 2/2

- Jos havainnot *ovat normaalijakautuneita*, Mannin ja Whitneyn testi *ei ole yhtä voimakas* kuin kahden riippumattoman otoksen *t*-testi.
- Jos havainnot *eivät ole normaalijakautuneita*, Mannin ja Whitneyn testi *saattaa olla paljon voimakkaampi* kuin kahden riippumattoman otoksen *t*-testi.
- Mannin ja Whitneyn testi *on varteenotettava vaihtoehto kahden riippumattoman otoksen t-testille*, jos *otoskoot eivät ole kovin isoja* ja *perusjoukot eivät ole normaalijakautuneita*.

Testit järjestysasteikollisille muuttujille

Järjestysasteikollisten muuttujien testit

Merkkitesti

Wilcoxonin rankitesti

Mannin ja Whitneyn testi

>> Wilcoxonin rankisummatesti

Wilcoxonin rankisummatesti ja Mannin ja Whitneyn testi

- *Wilcoxonin rankisummatesti* perustuu Mannin ja Whitneyn testisuureiden muodoissa 2 esiintyviin havaintojen *rankisummiin* eli *järjestyslukujen summiin*.
- Wilcoxonin rankisummatesti on *ekvivalentti* Mannin ja Whitneyn testin kanssa.

Testisuure T_1

- Määritellään satunnaismuuttujat

$R(X_i)$ = havainnon X_i järjestysnumero eli *ranki* yhdistetyssä otoksessa
$i = 1, 2, \ldots , n$

ja **testisuure**

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} R(X_i)$$

Testisuure T_2

- Määritellään satunnaismuuttujat

  $R(Y_j)$ = havainnon Y_j järjestysnumero eli *ranki* yhdistetyssä otoksessa

  $j = 1, 2, \ldots, m$

  ja **testisuure**

$$T_2 = \sum_{j=1}^{m} R(Y_j)$$

Testisuureiden T_1 ja T_2 ominaisuudet

(i) $T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(n+m)(n+m+1)$

(ii) Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*,

$$\mathrm{E}(T_1) = \tfrac{1}{2}n(n+m+1)$$

$$\mathrm{E}(T_2) = \tfrac{1}{2}m(n+m+1)$$

(iii) Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*,

$$\mathrm{D}^2(T_1) = \mathrm{D}^2(T_2) = \tfrac{1}{12}nm(n+m+1)$$

Standardoitu T_1-testisuure ja sen jakauma

- Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*, niin standardoitu satunnaismuuttuja

$$z_1 = \frac{T_1 - \mathrm{E}(T_1)}{\mathrm{D}(T_1)}$$

noudattaa suurissa otoksissa *approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa*:

$$z_1 \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

- Approksimaatio on tavallisesti *riittävän hyvä*, jos $n > 10$ ja $m > 10$.
- *Pienissä otoksissa* nojataan testisuureen T_1 *tarkkaan jakaumaan*.

Asymptoottinen testi – muoto 1

- **Testisuureen**

$$z_1 = \frac{T_1 - \mathrm{E}(T_1)}{\mathrm{D}(T_1)}$$

normaaliarvo = 0, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$\mathrm{E}(z_1) = 0$$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen z_1 arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *hylätään*, jos testin *p*-arvo on *kyllin pieni*.
- Hylkäysalueen valinta ja *p*-arvon määrääminen:
ks. lukua **Tilastollinen testaus.**

Standardoitu T_2-testisuure ja sen jakauma

- Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*, niin standardoitu satunnaismuuttuja

$$z_2 = \frac{T_2 - \mathrm{E}(T_2)}{\mathrm{D}(T_2)}$$

noudattaa suurissa otoksissa *approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa*:

$$z_2 \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

- Approksimaatio on tavallisesti *riittävän hyvä*, jos $n > 10$ ja $m > 10$.
- *Pienissä otoksissa* nojataan testisuureeseen T_2 *tarkkaan jakaumaan*.

Asymptoottinen testi – muoto 2

- **Testisuureen**

$$z_2 = \frac{T_2 - \mathrm{E}(T_2)}{\mathrm{D}(T_2)}$$

normaaliarvo = 0, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$\mathrm{E}(z_2) = 0$$

- Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen z_2 arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.
- *Nollahypoteesi* H_0 *hylätään*, jos testin *p*-arvo on *kyllin pieni*.
- Hylkäysalueen valinta ja *p*-arvon määrääminen: ks. lukua **Tilastollinen testaus**.