Mat-1.150 Reaalianalyysi

2. välikoe, 13.12.2004

Ratkaisuehdotuksia (WM)

Kokeessa vaitiin olettaa, että $f \in L^1(X,\mu)$, $f : X \to \underline{\underline{\mathbb{R}}}$.

1. Tehdään vastaoletus, että on olemassa $\varepsilon > 0$ ja joukot $E_n \in \mathfrak{M}$, $n = 1, 2, \ldots$, s.e.

$$\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$$

ja

$$|\lambda(E_n)| \geq \varepsilon \quad ,$$

Näytetään, että tämä johtaa siihen, että $\lambda \ll \mu$ ei päde, mikä on ristiriita.

Selvästi $|\lambda|(E_n) \geq |\lambda(E_n)| \geq \varepsilon \quad \forall n = 1, 2, \ldots$

Merkitään

$$A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \quad , \quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad .$$

Tällöin $A_{n+1} \subset A_n$, $\mu(A_1) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \infty$, $\mu(A_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall n = 1, 2, \ldots$ ja

$$E_n \subset A_n \Rightarrow |\lambda|(A_n) \geq |\lambda|(E_n) \geq |\lambda(E_n)| \geq \varepsilon \quad \forall n,$$

Näin ollen (Lause 1.19(e), Rudin s.16)

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq 0 \quad \Rightarrow \mu(A) = 0$$

ja

$$|\lambda|(A) = \lim_{n\to\infty} |\lambda|(A_n) \geq \varepsilon > 0 \quad \left(|\lambda|(A_n) \leq |\lambda|(X) < \infty \;\forall n!\right)$$

Siis $|\lambda| \not\ll \mu \Rightarrow \lambda \not\ll \mu$ (Propositio 6.8(e), Rudin s.120).

Entä, jos korvataan kompleksinen mitta $\lambda : M \to \mathbb{C}$ ei-negatiivisella $\lambda : M \to [0, \infty]$, $\lambda \ll \mu$?

Tällöin väite ei päde, ellei tehdä lisäoletusta $\lambda(X) < \infty$ (kompleksisen mitan tapauksessa $|\lambda|(A) = \lim_{n \to \infty} |\lambda|(A_n) \geq \varepsilon$, koska $|\lambda|(A_n) < |\lambda|(X) < \infty \ \forall n$ määritelmän mukaan). Syy: olkoon $\mu = m$ ja $\lambda = x^{-2} m$. Tällöin selvästi $\lambda \ll \mu$, mutta esimerkiksi

$$\mu((0, \delta]) = m((0, \delta]) = \delta$$

$$\lambda((0, \delta]) = \int_0^\delta x^{-2} \, dm > \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 .$$

2. a)

Kuten muistamme, mielivaltaiselle ei-negatiiviselle mitalliselle funktiolle f löytyy jono mitallisia yksinkertaisia funktioita s_i s.e. $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le f$ ja $s_i(x) \longrightarrow f(x)$, kun $i \to \infty$, jokaisella $x \in X$. Tämä voidaan tehdä esimerkiksi jakamalla jokaisella $i \in \mathbb{N}$ väli $[0, i)$ $i \cdot 2^i$:n puoliavoimeen väliin $[\frac{k-1}{2^i}, \frac{k}{2^i})$, $k = 1, 2, \ldots, i \cdot 2^i$. Olkoot

$$A_{k,i} = f^{-1}([\tfrac{k-1}{2^i}, \tfrac{k}{2^i})) \text{ ja } A_i = f^{-1}([i, \infty]).$$

Nämä joukot ovat pareittain pistevieraita ja muodostavat X:n osituksen. Yksinkertaiset funktiot voidaan määritellä

$$s_i(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^i} & , x \in A_{k,i} \\ i & , x \in A_i . \end{cases}$$

Kun f on mitallinen, joukot $A_{k,i}$ ja A_i sekä funktiot s_i ovat mitallisia. Lisäksi $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le f$ ja $|s_i(x) - f(x)| \le \frac{1}{2^i}$, kun $x \in A_{k,i}$. Koska $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ ja $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = f^{-1}(\infty)$, $\lim_{i \to \infty} s_i(x) = f(x)$ $\forall x \in X$.

Itse tehtävään. Koska $f \in L^{\infty}(X, \mu)$ $(\mu(X) < \infty)$, f on mitallinen ja $|f| \le \|f\|_{\infty} < \infty$ μ-m.k. $x \in X$. Näin ollen f on rajoitettu. Olkoon $f \geq 0$. Tällöin $A_i = \emptyset$ $\forall i > \|f\|_{\infty}$ ja täten

$$|s_i(x) - f(x)| \le \frac{1}{2^i} \quad \forall i > \|f\|_{\infty}, \mu\text{-m.k. } x \in X,$$

tai siis

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |s_i(x) - f(x)| \le \frac{1}{2^i} \quad \forall i > \|f\|_{\infty}.$$

Näin ollen $s_i \xrightarrow{i\to\infty} f$ tasaisesti. Siispä saadaan

$$\|s_i - f\|_\infty \le \frac{1}{2^i} \quad \forall\ i > \|f\|_\infty ,$$

mistä väite seuraa, kun $f \ge 0$. Yleisessä tapauksessa, olkoon $f^+ = \max(f, 0)$ ja $f^- = -\min(f, 0)$. Tällöin $f^+ \ge 0$ ja $f^- \ge 0$ sekä $f = f^+ - f^-$. Soveltamalla saatua tulosta erikseen funktion f positiivi- ja negatiiviosaan, f^+ ja f^-, erikseen saadaan haluttu tulos.

<u>Huomio:</u> $|f| \le \|f\|_\infty$ μ-m.k. Syy:

merkitään $\|f\|_\infty = \inf\{\lambda \ge 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) = 0\}$
$=: \inf \Gamma$.

Jos $\Gamma = \emptyset$, $\|f\|_\infty = \infty$. Jos $\Gamma \ne \emptyset$ eli $\|f\|_\infty < \infty$, niin $\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\} \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{j}\}$

$$\Rightarrow \quad \mu(\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\}) \le \sum_{j \in \mathbb{N}} \underbrace{\mu(\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty + \tfrac{1}{j}\})}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_\infty \in \Gamma \text{ ja täten } |f| \le \|f\|_\infty \ \mu\text{-m.k.}$$

Siksi merkitään usein $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$.

b)

yksikäsitteisyys:

jos h ja $\tilde{h}$ ovat ko. funktioita

$$\int_X (h-\tilde{h}) f \, d\mu = 0$$

kaikilla $f = \chi_E$, $E \in M$, $\mu(E) < \infty$. Näin ollen $h = \tilde{h}$ μ-m.k.

olemassaolo:

(jos $|A(f)| = 0$ $\forall f \in L^1(X,\mu)$ väite pätee asettamalla $h \equiv 0$. Oletetaan, että $|A(f)| > 0$.)

Mitalliselle joukolle $E \subset X$ määritellään

$$\lambda(E) = A(\chi_E) .$$

Koska A on lineaarinen ja $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$, kun $A \cap B = \emptyset$, saadaan pistevieraille $E_j \in M$

$$\lambda\Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big) = A\Big(\chi_{\bigcup_{j=1}^{n} E_j}\Big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(E_j) \quad , n < \infty .$$

olkoon

$$A_n = \bigcup_{j=1}^{n} E_j \quad , \quad \hat{A} = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j ,$$

missä joukot E_j ovat kuten yllä. Tällöin

$$\|\chi_{\hat{A}} - \chi_{A_n}\|_1 = \mu(\hat{A} \setminus A_n) \longrightarrow 0 , \text{ kun } n \to \infty .$$

Näin ollen, koska A on rajoitettuna lineaarisena operaattorina jatkuva,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j) = \lim_{n\to\infty} A(\chi_{A_n}) = A(\chi_{\hat{A}}) = \lambda(\hat{A})$$
$$= \lambda\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big),$$

joten λ on mitta $(\lambda(\emptyset) = A(\underbrace{\chi_\emptyset}_{=0}) \overset{A \text{ lineaarinen}}{=} 0)$. Selvästi $\lambda(E) = 0$, kun $\mu(E) = 0$ $(|\lambda(E)| = |A(\chi_E)| \leq \|\chi_E\|_1 = \mu(E))$. Näin ollen $\lambda \ll \mu$ ja Radon-Nikodym lauseen nojalla on olemassa yksikäsitteinen $h \in L^1(X,\mu)$ s.e.

$$\lambda = h\mu \; ;$$

tai siis jokaiselle $E \in M$, $E \subset X$,

$$\lambda(E) = A(\chi_E) = \int_E h \, d\mu = \int_X h \chi_E \, d\mu .$$

Koska operaattori A on lineaarinen,

$$A(f) = \int_X h f \, d\mu$$

jokaisella yksinkertaisella funktiolla f. Operaattorin A jatkuvuuden ja kohdan a nojalla yllä oleva pätee $\forall f \in L^\infty(X,\mu)$. Koska $\mu(X) < \infty$,

$$f_n \xrightarrow{n\to\infty} f \; L^\infty(X,\mu)\text{:ssä} \Rightarrow f_n \xrightarrow{n\to\infty} f \; L^1(X,\mu)\text{:ssä},$$

joten $A(f_n) \longrightarrow A(f)$, kun $n \to \infty$. Erityisesti koska $\mu(X) < \infty$ yllä oleva yhtälö pätee $\forall f \in L^1(X,\mu)$.

koska $\forall f \in L^1(X,\mu)$

$$A(f) = \int_X f h \, d\mu,$$

$\forall E \in \mathcal{M}$

$$\left| \int_E h \, d\mu \right| \leq |A(\chi_E)| \leq \|\chi_E\|_1 = \mu(E)$$

$\Rightarrow$ $|h(x)| \leq 1$ μ-m.k., koska asettamalla

$E_n := \{ x \in X : h^+(x) \geq 1 + \frac{1}{n} \}$, saadaan

$$(1 + \tfrac{1}{n}) \chi_{E_n} \leq h^+.$$

integroimalla puolittain saadaan

$$(1 + \tfrac{1}{n}) \mu(E_n) \leq \int_{E_n} h^+ \leq \mu(E_n).$$

Siispä $\mu(E_n) = 0$. Koska $E_n \subset E_{n+1}$

$$\mu(\{x \in X : h^+(x) > 1\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = 0.$$

Siis $h^+(x) \leq 1$ μ-m.k. Samalla tavalla $h^-(x) \leq 1$ μ-m.k. Kaikkiaan siis $\|h\|_\infty \leq 1 < \infty \Rightarrow h \in L^\infty(X,\mu)$.

3.

Olkoon $f \in C_c(\mathbb{R})$ ja valitaan $R>0$ s.e.

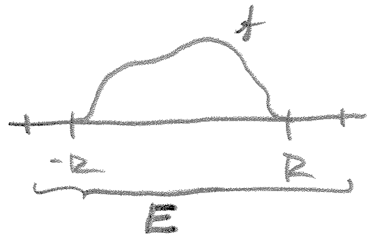
$$\operatorname{supp}(f) \subset [-R, R].$$

Koska f on jatkuva

$$f(x+h) \longrightarrow f(x), \quad \text{kun } h \to 0,$$

jokaisella $x \in \mathbb{R}$. Asetetaan $E := [-R-1, R+1]$.
Tällöin tarpeeksi pienellä h:n arvolla

$$\operatorname{supp}(T_h f) \subset E.$$



Koska f on jatkuva, $M := \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty$ (* ja

$$|T_h f - f|^p \le (2M)^p \chi_E =: g \in L^1(\mathbb{R})$$

((* $f \neq 0$ kompaktissa joukossa!). Näin ollen

$$\int_{\mathbb{R}} |T_h f - f|^p \longrightarrow 0, \quad \text{kun } h \to 0$$

Lebesguen dominoidun konvergenssin nojalla. Olk. $\varepsilon > 0$. Kun $f \in L^p(\mathbb{R}, m)$, $\exists\, g \in C_c(\mathbb{R})$ s.e. $\|f-g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$.
On olemassa $\delta > 0$ s.e.

$$\|T_h g - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{kun } |h| < \delta.$$

Siispä, kun $|h|<\delta$

$$\|T_h f - f\|_p = \|T_h f - T_h g + T_h g - g + g - f\|_p$$
$$\le \|T_h f - T_h g\|_p + \|T_h g - g\|_p + \|g - f\|_p$$
$$< \varepsilon.$$

Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, väite seuraa.
Yllä siis vedottiin siihen, että $C_c(\mathbb{R})$ on tiheässä avaruudessa $L^p(\mathbb{R}, m)$, $1 \le p < \infty$.

Tapaus $p = \infty$.

Olkoon $f = \chi_{[0,1]}$. Tällöin

$$\|T_h f - f\|_\infty = \|\chi_{[-h,1-h]} - \chi_{[0,1]}\|_\infty$$
$$= 1 \ne 0, \text{ kun } h \ne 0.$$

$\therefore$ Väite ei päde tapauksessa $p = \infty$.

4.

Todistetaan aluksi, että f kuvaa 0-mittaiset joukot 0-mittaisiksi ja että kuvajoukko $f(E)$, $E \in \mathcal{M}_{Leb}$, on mitallinen. Olkoon $E \in \mathcal{M}_{Leb}$ s.e. $m(E) = 0$. Yleisyyttä menettämättä, voidaan olettaa, että $E \subset (a, b)$, sillä $m(\{f(a), f(b)\}) = 0$.

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $\delta > 0$ sellainen, että $f \in AC([a, b])$. Valitaan avoin joukko V s.e.

$$E \subset V \subset (a, b)$$

ja

$$m(V) < \delta .$$

Joukko V voidaan kirjoittaa muodossa

$$V = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\alpha_j, \beta_j) ,$$

missä (α_j, β_j) ovat pistevieraita, $j = 1, 2, \ldots$

Nyt

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon$$

jokaisella $n > 0$. Viemällä $n \to \infty$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| = m\Big(f\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (\alpha_j, \beta_j)\Big)\Big) < \varepsilon .$$

Siispä

$$m(f(E)) \leq m(f(V)) < \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \quad m(f(E)) = 0 .$$ (Lebesgue-mitta täydellinen!)

Olkoon $E \subset (a,b)$, $E \in \mathcal{M}_{Leb}$ mielivaltainen. Tällöin säännöllisyyden nojalla löytyy kompaktit joukot $K_j \subset E$ s.e.

$$E = E_0 \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j,$$

missä $m(E_0) = 0$. Näin ollen

$$f(E) = f(E_0) \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} f(K_j),$$

missä $m(f(E_0)) = 0$ ja $f(K_j)$ on kompakti ja siis mitallinen. $\therefore$ $f(E) \in \mathcal{M}_{Leb}$.

Määritellään

$$\mu(E) = m(f(E)), \quad E \subset [a,b], E \in \mathcal{M}_{Leb}.$$

Koska $f \in AC([a,b])$ ja aidosti kasvava, f on injektio ja täten kuvaa erilliset joukot erillisiksi. Siispä, jos $A_j \in \mathcal{M}_{Leb}$, $j = 1, 2, \ldots$ ovat pistevieraita ja $A_j \subset [a,b]$ $\forall j$

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = m\left(f\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)\right) = m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} f(A_j)\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} m(f(A_j))$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Lisäksi $\mu(\emptyset) = m(f(\emptyset)) = 0$. Koska $\mu(E) = 0$, aina kun $m(E) = 0$ ($\Rightarrow f(E) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0$), $\mu \ll m$.