Mat-1.150 Reaalianalyysi

Harjoitus 6, 27.10.2004

Ratkaisuehdotuksia (WW)

1.

a)

Olkoon $A := \{x \in X : |f(x)| \geq 1\}$. Tällöin

$|f|^r \leq |f|^s$ joukossa A ja

$|f|^r \leq |f|^p$ joukossa $X \setminus A$. Niinpä

$$\int_X |f|^r \, d\mu = \int_A |f|^r \, d\mu + \int_{X\setminus A} |f|^r \, d\mu$$

$$\leq \int_A |f|^s \, d\mu + \int_{X\setminus A} |f|^p \, d\mu$$

$$\leq \int_X (|f|^s + |f|^p) \, d\mu < \infty .$$

$\therefore \; r \in E$.

b) Huomaa, että oletus "$\|f\|_r < \infty$ jollakin $r < \infty$" on oleellinen: $\left.\begin{array}{l} f = \chi_{\mathbb{R}} \\ d\mu = dm \end{array}\right\} \Rightarrow \infty = \|\chi_{\mathbb{R}}\|_p \not\to 1 = \|\chi_{\mathbb{R}}\|_\infty$.

Olkoon $0 \leq \lambda < \|f\|_\infty$. L^∞-normin määritelmän nojalla joukko

$$A_\lambda := \{x \in X : |f(x)| \geq \lambda\}$$

ei ole nollamittainen, ts. $\mu(A_\lambda) > 0$. Näin ollen

$$\|f\|_p \geq \Big(\int_{A_\lambda} |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \geq \big(\lambda^p \mu(A_\lambda)\big)^{1/p}$$
$$= \lambda \mu(A_\lambda)^{1/p}.$$

jos $0 < \mu(A_\lambda) < \infty$, $\mu(A_\lambda)^{1/p} \longrightarrow 1$, kun $p \to \infty$;

jos $\mu(A_\lambda) = \infty$, $\mu(A_\lambda)^{1/p} = \infty$, mistä seuraa

$\liminf\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \infty$ ja edelleen $\|f\|_p \to \infty$, $p \to \infty$.

Siis

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq \lambda.$$

koska $\lambda < \|f\|_\infty$ oli mielivaltainen,

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty.$$

Toisaalta, kun $r < p < \infty$, saadaan

$$\|f\|_p = \Big(\int_X |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} = \Big(\int_X |f|^{p-r} |f|^r \, d\mu\Big)^{1/p}$$
$$\leq \|f\|_\infty^{1-\frac{r}{p}} \Big(\int_X |f|^r \, d\mu\Big)^{1/p} = \|f\|_\infty^{1-r/p} \|f\|_r^{\frac{r}{p}}.$$

koska $\|f\|_r < \infty$, saadaan

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

kaikkiaan

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \leq \liminf_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

2.

a) <u>$s=\infty$:</u> koska $|f| \leq \|f\|_\infty$ m.k. $x \in X$, saadaan

$$\|f\|_r^r = \int_X |f|^r \, d\mu \leq \int_X \|f\|_\infty^r = \|f\|_\infty^r \mu(X).$$

Toisin sanoen $\|f\|_r \leq M(r)\|f\|_\infty$, missä $M(r) = \mu(X)^{1/r}$.

<u>$s<\infty$:</u>

$$\|f\|_r^r = \int_X |f|^r \, d\mu \leq \left(\int_X |f|^{r\cdot\frac{s}{r}} \, d\mu\right)^{r/s} \mu(X)^{\frac{s-r}{s}}$$

$$= \left(\int_X |f|^s \, d\mu\right)^{r/s} \mu(X)^{1-r/s}$$

$\iff \|f\|_r \leq M(r,s)\|f\|_s$, missä

$M(r,s) = \mu(X)^{1/r - 1/s}$. Yllä käytettiin Hölderin epäyhtälöä eksponenteilla $p = \frac{s}{r}$, $q = \frac{s}{s-r}$.

b) Olk. $f \in L^s(\mu)$. Tällöin

$$\|f\|_r \leq M(r,s)\|f\|_s < \infty \quad \Longrightarrow$$

$f \in L^r(\mu)$.

c) Olkoon $M = \{\emptyset, X\}$, tällöin

$f^{-1}(V) \in M \quad \forall V \in \mathcal{T}$ toisaalta,

jos $f(x) = a$, $f(y) = b$, $a \neq b$, $a, b \in \mathbb{C}$,

niin $f^{-1}(V) \notin M$, kun $a \in V$, $b \notin V \Rightarrow a = b$.

Näin ollen mitalliset funktiot ovat

vakiofunktioita (ja päinvastoin).

Jos $f(x) = \alpha \quad \forall x \in X$, niin

$$\|f\|_p^p = \int_X |\alpha|^p \, d\mu = |\alpha|^p \mu(X) \iff$$

$$\|f\|_p = |\alpha| \, \mu(X)^{1/p} < \infty \quad \forall p \in (0, \infty].$$

Vastaus kysymykseen: Kyllä.

3.

Olkoon Q joukko funktioita, jotka ovat muotoa $c\chi_{[a,b)}$, missä $c \in \mathbb{Q}$ ja

$$[a,b) := [a_1,b_1) \times [a_2,b_2) \times \dots \times [a_n,b_n)$$

$$a_k, b_k \in \mathbb{Q} \quad \forall k \in \{1,2,\dots,n\}.$$

Olkoon D joukko, jossa on kaikki äärelliset summat Q:n funktioista. Näin määritelty joukko D on numeroituva. Syy: (1) Jos $\{E_n\}$, $n=1,2,3,\dots$ on jono numeroituvia joukkoja, niin $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ on numeroituva, (2) olkoon A numeroituva joukko ja B_n joukko, jonka alkiot ovat muotoa $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, missä $a_k \in A$ $(k=1,2,\dots,n)$. Tällöin B_n on numeroituva. Tulosten todistukset löytyvät kirjasta W. Rudin, Principles of mathematical analysis, Theorem 2.12 ja 2.13, s. 29.

Näytetään vielä, että D on tiheä $L^p(\mathbb{R}^n)$:ssä. Täytyy osoittaa jokaiselle $f \in L^p$ ja $\varepsilon > 0$ on olemassa $s \in D$ s.e. $\|f - s\|_p < \varepsilon$.

Koska $C_c(\mathbb{R}^n)$ on $L^p(\mathbb{R}^n)$:n tiheä osajoukko, voidaan olettaa, että $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

Liitetään jokaiseen $m \in \mathbb{N}$ perhe P_m, joka sisältää joukot muotoa $[a, b)$, missä $a_j = j2^{-m}$, $b_j = (j+1)2^{-m}$, $j \in \mathbb{Z}$. Perhe P_m jakaa $\mathbb{R}^n$ suorakulmaisiin (puoliavoimiin), joiden halkaisija on $2^{-m}\sqrt{n}$.

Voimme luetella nämä esimerkiksi seuraavasti:

$$P_m = \{[x_{m,k}, y_{m,k}) : x_{m,k}, y_{m,k} \in \mathbb{R}^n\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

Tällöin $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [x_{m,k}, y_{m,k})$. Valitaan $c_{m,k} \in \mathbb{Q}$ s.e. $|f(x_{m,k}) - c_{m,k}| < 5^{-m}$ ja $|c_{m,k}| \le |f(x_{m,k})|$. Olkoon

$$s_{m,i} := \sum_{i\in\mathbb{N}} c_{m,i}\, \chi_{[x_{m,i}, y_{m,i})}.$$

Koska $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ ja $f(x_{m,i}) = 0$ lukuunottamatta äärellisen monella i, $s_m \in D$ (kun asetetaan $c_{m,i} = 0$, kun $f(x_{m,i}) = 0$).

Olkoon $\varepsilon' > 0$. Valitaan M s.e. $|x-y| < 2^{-M}$ $\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon'/3$ ja $5^{-M} < \varepsilon'/2$. Näin ollen jokaiselle $m \geq M$

$$|f(x) - s(x)| = |f(x) - c_{m,i}| \le |f(x) - f(x_{m,i})| + |f(x_{m,i}) - c_{m,i}|$$

$< \varepsilon/3 + 5^{-m} < \varepsilon'$,

missä i on valittu s.e. $x \in [x_{m,i}, y_{m,i})$.

Näin ollen $\lim_{m\to\infty} s_m(x) = f(x)$ tasaisesti,

ts. $\sup |s_m - f| \longrightarrow 0$, kun $m \longrightarrow \infty$.

Siispä

$$\|s_m - f\|_p^p \le \int_E \sup |s_m - f|^p \, d\mu$$

$$= \sup |s_m - f|^p \mu(E)$$

$$\longrightarrow 0, \text{ kun } m \longrightarrow \infty.$$

(Tässä valittiin $R > 0$ s.e. $\operatorname{supp}(f) \subset [-R, R]^n$

ja $E := [-R-1, R+1]^n$, joten $\mu(E) < \infty$,

sm ja $f \equiv 0$ joukossa $\mathbb{R}^n \setminus E$ $\forall m$.)

b) Olkoon $I_n := [n, n+1]^n \subset \mathbb{R}^n$

$e_n := \chi_{I_n} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Määritellään

$$f_\alpha := \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n \in L^\infty,$$

missä $\alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} =: 2^{\mathbb{N}}$.

Tällöin $\alpha_n \neq \beta_n \Rightarrow$

$$\|f_\alpha - f_\beta\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f_\alpha(x) - f_\beta(x)|$$

$$\geq \operatorname*{ess\,sup}_{x \in I_n} |f_\alpha(x) - f_\beta(x)|$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{x \in I_n} |\alpha_n - \beta_n| = 1 .$$

Näin ollen pallot $B(f_\alpha, \frac{1}{2})$ ovat pistevieraat, kun $\alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Siis jos $\mathcal{G} \subset L^\infty$ on numeroituva, eräs palloista $B(f_\alpha, \frac{1}{2}) = \{f \in L^\infty : \|f - f_\alpha\|_\infty < \frac{1}{2}\}$ ei sisällä lainkaan $\mathcal{G}$:n alkioita, koska jokainen $g \in \mathcal{G}$ voi olla korkeintaan yhdessä pallossa ja $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$:llä suurempi mahtavuus kuin $\mathbb{N}$:llä.

Huomio:

$A \subset X$ on tiheä jos $A \cap V \neq \emptyset$ kaikilla ei-tyhjillä avoimilla joukoilla $V \subset X$.

4.

Kuvauksen f translaatiolla tarkoitetaan operaatiota

$$h \longmapsto \tau^h f \quad \text{, missä}$$

$\tau^h f$ on kuvaus $x \longmapsto f(x+h)$. Niinpä

$\tau^{\cdot} f : \mathbb{R} \longrightarrow L^p$, kun $f \in L^p$.

Näytetään, että $\lim\limits_{h\to 0} \tau^h f = f$ $L^p(\mathbb{R}^n)$:ssä

$\iff \|\tau^h f - f\|_p \longrightarrow 0$, kun $h \to 0$ $\iff$

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p \, d\mu = 0$$

jokaiselle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Olkoon $f \in C_c(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ ja jono $\{h_n\}$ s.e. $h_n \to 0$, $n \to \infty$. Saadaan

$$f_n(x) := f(x+h_n) \longrightarrow f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

koska f on jatkuva. Valitaan $R > 0$ s.e.

$$\operatorname{supp}(f) \subset [-R,R]^n$$

ja asetetaan

$$E := [-R-1, R+1]^n .$$

Tällöin

$$\operatorname{supp}(f_n) \subset E$$

tarpeeksi isoilla n. Näin ollen

$$|f_n - f|^p \leq (2M)^p \chi_E =: g$$

missä $M := \max|f| < \infty$, kaikilla kun n tarpeeksi iso. Koska $g \in L^1$, voidaan soveltaa Lebesguen dominoidun konvergenssin lausetta:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_n - f|^p \longrightarrow 0 \iff$$

$f_n \to f$ $L^p(\mathbb{R}^n)$:ssä $\iff \tau^{h_n} f \longrightarrow f$ $L^p(\mathbb{R}^n)$:ssä, kun $n \longrightarrow \infty$. Koska jono $\{h_n\}$ oli mielivaltainen, $\tau^h f \longrightarrow f$, kun $h \longrightarrow 0$ (koska $\lim_{x \to p} f(x) = q$ jos $\lim_{n\to\infty} f(p_n) = q$ jokaiselle jonolle $\{p_n\}$ jolle $p_n \neq p$ ja $\lim_{n\to\infty} p_n = p$).

Koska $\tau^{h_0+h} f = \tau^h \tau^{h_0} f$ $\forall f \in C_c$ ja olemme todistaneet jatkuvuuden 0:ssa, saadaan

$$\lim_{h\to h_0} \tau^h f = \lim_{h \to h_0} \tau^{h-h_0}\tau^{h_0} f = \lim_{h-h_0 \to 0} \tau^{h-h_0}\tau^{h_0} f = \tau^{h_0} f.$$

Todistetaan vielä yleinen tapaus, ts. tapaus $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

koska $\overline{C_c(\mathbb{R}^n)} = L^p(\mathbb{R}^n)$, t.s. $C_c(\mathbb{R}^n)$ on $L^p(\mathbb{R}^n)$:n tiheä osajoukko, löytyy $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ s.e. $\|f-g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Yllä olevan nojalla löytyy $\delta > 0$ s.e. $\|\tau^h g - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$, kun $|h| < \delta$.

Kun $|h| < \delta$, saadaan

$$\|\tau^h f - f\|_p = \|\tau^h f - \tau^h g + \tau^h g - g + g - f\|_p$$
$$\leq \|\tau^h f - \tau^h g\|_p + \|\tau^h g - g\|_p + \|g - f\|_p$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad .$$

Tapaus $L^\infty(\mathbb{R}^n)$:

Olkoon $f = \chi_{[0,1]}$. Tällöin

$$\|f - \tau^h f\|_\infty = \|\chi_{[0,1]} - \chi_{[-h,1-h]}\|_\infty$$
$$\equiv 1 \neq 0, \text{ kun } h \neq 0 .$$

Siis tulos ei ole ~~voimassa~~ $L^\infty(\mathbb{R}^n)$:ssä.

5.

a) Kun $p < \infty$, $C([0,1])$ on tiheä osajoukko näissä avaruuksissa ($C_c([0,1]) = C([0,1])$).

Kun $p = \infty$, tulos ei ole totta.

Yksinkertaiset funktiot ovat tiheässä molemmissa avaruuksissa. Todistus mukailee luentomonisteen todistusta.

b) Koska Lebesguen ulkomitta λ^* ($\lambda = \lambda^*|_{\mathbb{M}}$) on Borel-säännöllinen (luentomonisteen lause 9.2), jokaiselle $A \in \mathbb{M}$ löytyy $B \in \mathbb{B} \subset \mathbb{M}$ s.e. $\lambda(B) = \lambda(A)$. Toisaalta jokaiselle Lebesgue-mitalliselle yksinkertaiselle funktiolle $s \in S_{\mathbb{M}}$ löytyy $\tilde{s} \in S_{\mathbb{B}}$ s.e. $s = \tilde{s}$ m.k.

Edelleen $\forall f \in L^r([0,1], \mathbb{M}, \lambda)$ $\exists s_n \in S_{\mathbb{M}}$ s.e. $s_n \longrightarrow f$ m.k. Tämän voi tehdä myös Borel-mitalliselle $s \in S_{\mathbb{B}}$, ts. $\exists \tilde{s}_n \in S_{\mathbb{B}}$ s.e. $\tilde{s}_n \longrightarrow f$ m.k.

c) Tiedetään, että $([0,1], \overline{\mathbb{B}}, \overline{\lambda}) = ([0,1], \mathbb{M}, \lambda)$, ts. λ on Borelin mitan täydellistymä. L^r-teoriassa tällä ei ole mitään vaikutusta.