Mat-1.150 Reaalianalyysi

Harjoitus 5, 20.10.2004

Ratkaisuehdotuksia (MM)

1.

Olk. $A := \{x \in X : f_n(x) \longrightarrow f(x)\}$. Tällöin $\mu(X \setminus A) = 0$ ja $\mu(X) = \mu(A)$ (ts. siis $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in X \setminus A$). Olkoon $\varepsilon > 0$. Asetetaan $A_n := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$. Pitää siis näyttää, että löytyy $N \in \mathbb{N}$ s.e. $\forall n \geq N$ $\mu(A_n) < \varepsilon$. Olkoon edelleen $B_n := X \setminus \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$. Selvästi $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$

Olk. $x \in A$. Tällöin $\exists n \in \mathbb{N}$ s.e.

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall k \geq n,$$

jolloin $x \in B_n$. Siis $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Näin ollen $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset X$ ja $\mu(X) = \mu(A)$, joten

$$\lim_{n \to \infty} \mu(B_n) = \mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\Big) = \mu(A) = \mu(X) < \infty.$$

saadaan

$$\mu(A_n) \leq \mu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\Big) = \mu(X) - \mu(B_n) \longrightarrow 0, \; n \to \infty,$$

mistä väite seuraa. Oletus $\mu(X) < \infty$ oleellinen: $X = \mathbb{R}$ (ts. $\mu(X) = \infty$) ja $f_n(x) = \chi_{[n, n+1]}$. Tällöin f_n suppenee pisteittäin, mutta ei mitassa.

2.

$$\mu(\{x\in X : |f(x)|\geq \varepsilon\}) = \int_{\{x\in X: |f(x)|\geq\varepsilon\}} 1 \, d\mu = \varepsilon^{-r}\int_{\{x\in X: |f(x)|\geq\varepsilon\}} \varepsilon^{r}\, d\mu$$

$$\leq \varepsilon^{-r}\int_X |f|^r d\mu .$$

3.

Konveksille funktiolle φ pätee aina

$\forall \lambda\in[0,1],\ x,y\in(a,b)$

$$\varphi(x+\lambda(y-x)) = \varphi((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x)+\lambda\varphi(y)$$
$$= \varphi(x) + \lambda(\varphi(y)-\varphi(x)) .$$

Lisäksi $t < u \leq v < b \Rightarrow$

$$(1) \quad \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t} \leq \frac{\varphi(v)-\varphi(t)}{v-t} \quad . \text{ Syy:}$$

Olkoon $\lambda := \frac{u-t}{v-t}$. Tällöin $(\lambda(v-t) = u-t)$

$$\frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t} = \frac{\varphi(t+\lambda(v-t))-\varphi(t)}{\lambda(v-t)}$$
$$\leq \frac{\varphi(t)+\lambda(\varphi(v)-\varphi(t))-\varphi(t)}{\lambda(v-t)} = \frac{\lambda(\varphi(v)-\varphi(t))}{\lambda(v-t)} .$$

Olkoon $a < t < b$. Koska yllä oleva kulmakerroin on kasvava (vähenevä, kun $u\to t+$), niin

$$\frac{d^+}{dt}\varphi(t) \overset{(*)}{=} \lim_{u\to t+}\frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t} = \inf_{u>t}\frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t} < \infty .$$

(jokaisella ei-tyhjällä joukolla on infimum.)

Valitaan $t' \in (a, t)$. Kaavan Rudin 3.1 (2), s. 61, perusteella

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t')}{t - t'} \leq \frac{d^+}{dt}\varphi(t),$$

joten $\frac{d^+}{dt}\varphi(t) > -\infty$. Näin ollen $\frac{d^+}{dt}\varphi(t) \in \mathbb{R}$.

Samoin päättelyin nähdään, että

$$\frac{d^-}{dt}\varphi(t) = \lim_{s \to t-} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} = \sup_{s<t} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s}$$

Kaavan Rudin 3.1 (2) nojalla

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{d^+}{dt}\varphi(t) \quad \forall s \in (a, t),$$

mistä seuraa $\frac{d^-}{dt}\varphi(t) \leq \frac{d^+}{dt}\varphi(t)$.

((*): Olk. $\varepsilon > 0$ ja $\beta = \inf_{u>t} \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}$. Tällöin $\exists\, u_\varepsilon > t$ s.e.

$$\frac{\varphi(u_\varepsilon) - \varphi(t)}{u_\varepsilon - t} - \beta < \varepsilon .$$

Siispä epäyhtälön (1) nojalla

$$0 \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t} - \beta < \varepsilon \quad \forall u \in (t, u_\varepsilon).)$$

4.

a)
$$\ln(1+e^{t}) < c+t$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+e^{t} < e^{c+t} = e^{c}e^{t}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-t}+1 < e^{c}.$$

Koska funktio $t \longrightarrow e^{-t}$ on vähenevä, yllä oleva epäyhtälö pätee kaikilla $0<t<\infty$ jos se pätee, kun $t=0$: $2 \leq e^{c}$

$\therefore \quad c = \ln 2$.

b) Olkoon $f \in L^1([0,1])$ ja $x \in [0,1]$.
Olkoon $g_n(x) = \frac{1}{n}\ln(1+e^{nf(x)})$.

$g_n(x) > \frac{1}{n}\ln(1) = 0 \quad \forall n$. jos

(1) $f(x) \leq 0$:
$$g_n(x) \leq \frac{1}{n}\ln(1+1) = \frac{\ln 2}{n} \longrightarrow 0,$$
kun $n \rightarrow \infty$.

(2) $f(x) > 0$:
$$\lim_{n\rightarrow\infty} g_n(x) = \frac{\ln(1+e^{nf(x)})}{n} \quad \left(= \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}\right)$$
$$= \frac{f(x)e^{nf(x)} / 1+e^{nf(x)}}{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{f(x)}{e^{-nf(x)}+1} = f(x) .$$

Siis $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \max(f(x), 0)$

jokaisella $x \in [0,1]$.

Edelleen $n g_n(x) = \ln(1+e^{nf(x)})$

$$< \ln 2 + n f(x)$$

$$\Rightarrow \quad g_n(x) < \frac{\ln 2}{n} + f(x) =: h(x) .$$

Koska $|g_n(x)| \le h(x) \quad \forall x \in [0,1], n$ ja

$h(x) \in L^1([0,1])$, Lebesguen dominoidun

konvergenssin nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+e^{nf(x)})\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \max(f(x), 0)\,dx .$$

5.

(1) $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$

$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^p}\,dx$. Tarkastellaan

tapausta $x \geq 0$:

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(1+x)^p}\,dx = \int_0^\infty (1+x)^{-p}\,dx = \frac{1}{1-p} \Big/_0^\infty (1+x)^{-p+1},$$

joka on äärellinen, kun $p \neq 1$.

$\therefore f \in L^p(\mathbb{R})$, kun $p > 1$.

(2) Nyt $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$,

$\alpha(n) =$ yksikköpallon $B(0,1)$ tilavuus $\mathbb{R}^n$:ssä

$\left(= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \right)$,

$\omega_{n-1} = n\alpha(n) =$ yksikköpallonkuoren $\partial B(0,1)$ ala $\mathbb{R}^n$:ssä $(= S(\partial B(0,1)))$.

Siis $\partial B(0,R) = \omega_{n-1} R^{n-1}$.

Nyt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-r}\,dx = \int_0^\infty \int_{\partial B(0,R)} (1+|x|)^{-r}\,dS\,dR$$

$$= \omega_{n-1} \int_0^\infty (1+R)^{-r} \cdot R^{n-1}\,dR$$

$$= \omega_{n-1} \int_0^\infty \frac{R^{n-1}}{(1+R)^{r}}\,dR$$

$$\begin{cases} \geq 2^{-r}\omega_{n-1} \int_1^\infty R^{-r+n-1}\,dR \\ \leq \omega_{n-1} \int_0^\infty (1+R)^{-r+n-1}\,dR \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2^{-r}\omega_{n-1}}{n-r} \Big|_1^\infty R^{n-r}\,dR \\ \dfrac{\omega_{n-1}}{n-r} \Big|_0^\infty (1+R)^{n-r}\,dR \end{cases}.$$

$\therefore$ $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$, kun $r > n$.

Funktio $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ ja $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, koska

$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{R}^n)} = 1 < \infty$.

(3) $g(x) = \frac{1}{|x|^{1/2}} \chi_{\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x| < 1\}}$

$$\|g\|^p_{L^p(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} g(x)^p \, dx = \int_{\{x\in\mathbb{R} \,:\, |x|<1\}} \frac{1}{|x|^{p/2}} \, dx$$

$$= \lim_{a \to 0-} \int_{-1}^{a} (-x)^{-p/2} \, dx + \lim_{a \to 0+} \int_{a}^{1} x^{-p/2} \, dx$$

$$= \lim_{a \to 0-} \left(-\frac{2}{2-p}\right)\left((-a)^{(2-p)/2} - 1\right) + \lim_{a \to 0+} \left(\frac{2}{2-p}\right)\left(1 - a^{(2-p)/2}\right),$$

mikä on äärellinen, kun $p \neq 2$ ja $1 - \frac{p}{2} > 0$
$\Leftrightarrow$ $p < 2$.

$\therefore$ $g \in L^p(\mathbb{R})$, kun $1 \leq p < 2$.

$g \notin L^\infty(\mathbb{R})$, koska g singulaarinen origossa.