Mat-1.150 Reaalianalyysi

Harjoitus 4, 13.10.2004

Ratkaisuehdotuksia (WM)

1\. Valitsemalla esimerkiksi $A = \mathbb{R}$ ja $B = \{(x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, $A \cap B = \emptyset$.

Toisaalta

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} = 0 .$$

2\. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $A, B \subset X$ s.e.

$$d(A,B) > \varepsilon .$$

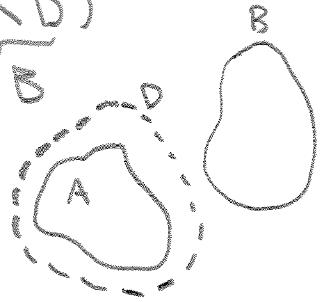
Määritellään

$$D := \{x \in X : d(x,A) \leq \tfrac{\varepsilon}{2}\} .$$

Joukko D on Borelin joukko, $D \in \mathcal{M}$, koska se on suljettu $^{(*)}$. Näin ollen asettamalla $F = A \cup B \subset X$, saadaan

$$\mu(A \cup B) = \mu(F) \underset{D \in \mathcal{M}}{=} \mu(\underbrace{F \cap D}_{=A}) + \mu(\underbrace{F \setminus D}_{=B})$$

$$= \mu(A) + \mu(B) .$$



(*) Näytetään, että joukko D on suljettu $\iff$ $D^c = \{x \in X : d(x,A) > \frac{\varepsilon}{2}\}$ on avoin. Todetaan, että

$$D^c = \{x \in X : d(x,A) > \tfrac{\varepsilon}{2}\} = f^{-1}((\tfrac{\varepsilon}{2}, \infty)),$$

missä $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = d(x,A)$. Jos $x, y \in X$ ja $a \in A$ saadaan

$$d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a).$$

Ottamalla infimum yli kaikkien $a \in A$ saadaan

$$d(x,A) \leq d(x,y) - d(y,A) \iff$$

$$d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y).$$

Vaihtamalla x:n ja y:n roolit saadaan

$$d(y,A) - d(x,A) \leq d(y,x) = d(x,y)$$

ja kaikkiaan

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y).$$

Siis määrittelemämme kuvaus f on tämän nojalla jatkuva (tarkemmin 1-Lipschitz).

Koska f on jatkuva ja $(\frac{\varepsilon}{2}, \infty) \subset \mathbb{R}$ avoin, $f^{-1}((\frac{\varepsilon}{2}, \infty))$ on avoin ja näin ollen myös D^c.

3.

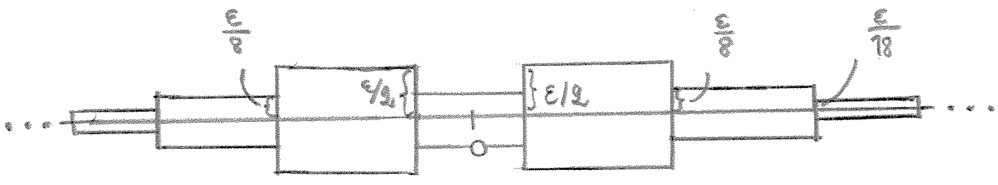
$P = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0 \}$. $\varepsilon > 0$.

Peitetään joukko P joukoilla

$I_n^+ := [n, n+1] \times [-\frac{\varepsilon}{2n^2}, \frac{\varepsilon}{2n^2}]$, kun $n \in \mathbb{Z}_+$

$I_n^- := [-n-1, -n] \times [-\frac{\varepsilon}{2n^2}, \frac{\varepsilon}{2n^2}]$, kun $n \in \mathbb{Z}_+$

$I_0 := [-1, 1] \times [-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}]$, kun $n = 0$.



Koska yllä olevat välit ovat suljettuja n-välejä, $\lambda^*(I) = v(I)$ ([GZ], lause 4.23).

Selvästi $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^+ \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^- \cup I_0$. Koska

$$v(I_n^\pm) = (n+1-n)\frac{2\varepsilon}{2n^2} = \frac{\varepsilon}{n^2}$$

$$\lambda(P) = \lambda^*(P) \le 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{n^2} + \varepsilon \le C\varepsilon, \quad 0 < C < \infty .$$

Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, $\lambda(P) = 0$.

4.

Todistetaan aluksi muutama kompakteja joukkoja koskeva tulos.

<u>Lemma 1</u>

Kompaktin avaruuden suljettu osajoukko on kompakti.

Todistus. Olkoon K kompakti ja $A \subset K$ suljettu. Olkoon $\mathcal{C}$ A:n avoin peite. Tällöin $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cup \{K \setminus A\}$ on K:n avoin peite. ~~Koska~~ K on kompakti, $\mathcal{C}_1$:llä on äärellinen osapeite $\mathcal{C}_0 \cup \{K \setminus A\}$, jossa $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$. Nyt $\mathcal{C}_0$ peittää myös A:n. $\square$

Periaatteessa kaikki, mitä voidaan sanoa avoimien joukkojen avulla, voidaan sanoa myös suljettujen joukkojen avulla. Näin allen myös kompaktius: jos $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$, merkitään $\mathcal{C}^* = \{A^c : A \in \mathcal{C}\}$. Koska $\bigcup \mathcal{C} = (\bigcap \mathcal{C}^*)^c$, todetaan, että $\mathcal{C}$ on X:n peite $\Leftrightarrow \bigcap \mathcal{C}^* = \emptyset$.

Sanomme, että kokoelmalla $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ on äärellisten leikkausten ominaisuus (ÄLO), jos $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ $\forall$ äärellisillä $\mathcal{A}$, joilla $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{F}$.

Lemma 2

Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(1) X on kompakti.

(2) Olkoon $\mathcal{F}$ kokoelma X:n suljettuja joukkoja ja olkoon $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Tällöin löytyy äärellinen $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$, että $\bigcap \mathcal{F}_0 = \emptyset$.

(3) Jos $\mathcal{F}$ on kokoelma X:n suljettuja joukkoja ja jos $\mathcal{F}$:llä on ÄLO, niin $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Todistus. Siirry kompaktiuden määritelmässä komplementteihin. $\square$

Itse tehtävään.

Huomataan aluksi, että voidaan olettaa joukot E_k kompakteiksi koska mitan säännöllisyyden nojalla löytyy suljettu (ja siis kompakti, koska $\tilde{E}_k \subset K$) joukko $\tilde{E}_k \subset E_k$ s.e. $\mu(E_k \setminus \tilde{E}_k) < \frac{\varepsilon}{2}$ (jolloin $\mu(\tilde{E}_k) = \mu(E_k) - \mu(E_k \setminus \tilde{E}_k) > \frac{\varepsilon}{2}$). Oletetaan siis joukot E_k kompakteiksi $\forall k$.

Määritellään joukko

$$A_n := \{x \in K : x \in E_k \text{ ainakin n:llä eri k:n arvolla}\}.$$

Osoitetaan, että $\mu(A_n) > 0$ tekemällä vastaoletus:

oletetaan, että $\mu(A_n) = 0$. Tällöin

$$\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k} \leq n \qquad \text{m.k.}$$

Näin ollen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mu(E_k)}_{>\varepsilon/2} \overset{(*)}{=} \int_K \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k} \, d\mu \leq \underbrace{\mu(K)}_{<\infty} \cdot n < \infty \Rightarrow \text{RR.}$$

$\left((*) : f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}(x) \;,\; f_n \leq f_{n+1} \text{ ja lause 1.27 Rudinissa} \right)$

Siispä $\mu(A_n) \neq 0$.

Selvästi $A_n \supset A_{n+1}$, lisäksi voidaan kirjoittaa

$$A_n = \bigcap_{\substack{J \subset \mathbb{N} \\ \#J = n}} \bigcup_{j \in J} E_j \;,$$

joten joukot A_n ovat kompakteja (E_j:t oletettiin kompakteiksi!). Sovelletaan nyt äärellisten leikkausten ominaisuutta. koska

$\bigcap_{n \in J} A_n \neq \emptyset$ jokaisella äärellisellä J

niin $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. $\square$