Mat-1.150 Reaalianalyysi
Harjoitus 10, 24.11.2004
Ratkaisuehdotuksia (WM)

1.

Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$, K kompakti mielivaltainen.

Olkoon $g := |f|\,|_K$ ja $A := \{x \in K : g(x) > 1\}$.

Nähin ollen

$$\int_K |f|^q \, dm = \int_K g^q \, dm = \int_A g^q \, dm + \int_{K \setminus A} g^q \, dm$$

$$\leq \int_A g^q \, dm + \mu(K \setminus A)$$

$$\leq \int_A g^q \, dm + \mu(K),$$

missä

$$\int_A g^q \, dm = \int_K (g \chi_A)^q \, dm = \int_0^\infty q t^{q-1} m(\{x \in K : g\chi_A(x) > t\}) \, dt$$

$$= \int_0^1 m(A) q t^{q-1} \, dt + q \int_1^\infty m(\{x \in K : g(x) > t\}) t^{q-1} \, dt$$

$$\leq m(A) + q \int_1^\infty c t^{-p} t^{q-1} \, dt$$

$$= m(A) + qc \int_1^\infty t^{q-p-1} \, dt < \infty,$$

koska $q - p - 1 < -1$.

Siispä $f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, koska K oli mielivaltainen.

2.

Olkoon $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Maksimaalifunktio $Mf : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ on määritelty funktiolle $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$Mf(x) = \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f| \, dm$$

$$=: \sup_{0<r<\infty} \fint_{B(x,r)} |f| \, dm \, .$$

a) $$M(f+g)(x) = \sup_{0<r<\infty} \fint_{B(x,r)} |f+g| \, dm$$

$$\leq \sup_{0<r<\infty} \left(\fint_{B(x,r)} |f| \, dm + \fint_{B(x,r)} |g| \, dm \right)$$

$$\leq \sup_{0<r<\infty} \fint_{B(x,r)} |f| \, dm + \sup_{0<r<\infty} \fint_{B(x,r)} |g| \, dm$$

$$= Mf(x) + Mg(x) .$$

b) $$M(\lambda f)(x) = \sup_{0<r<\infty} \fint_{B(x,r)} |\lambda f| \, dm = \sup_{0<r<\infty} |\lambda| \fint_{B(x,r)} |f| \, dm$$

$$= |\lambda| \sup_{0<r<\infty} \fint_{B(x,r)} |f| \, dm = |\lambda| Mf(x) .$$

c) Olkoon $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^2} \chi_{(0,1/2)}(x)$. Tällöin

$$\int_{\mathbb{R}} |f| \, dm = \int_0^{1/2} \frac{1}{t} (\log t)^{-2} \, dt = \Big/_{\!0}^{1/2} -(\log t)^{-1} = (\log 2)^{-1} < \infty .$$

$$Mf(x) = \sup_{0<r<\infty} \fint_{B(x,r)} |f|\,dm \geq \fint_{B(x,x)} |f|\,dm$$

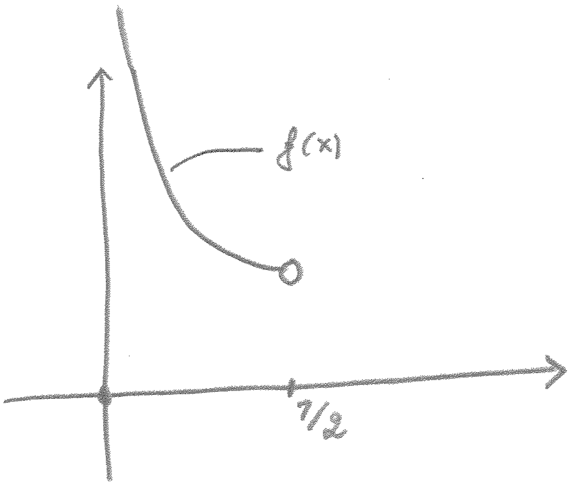
$$= m(B(x,x))^{-1} \int_0^{2x} \frac{1}{t}(\log t)^{-2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2x} \Big/_{0}^{2x} -(\log t)^{-1} = \frac{1}{2x}\,\frac{1}{\log 1/2x}. \quad \forall x \in (0, 1/4)$$

$$\int_0^{1/4} Mf(x)\,dx \geq \frac{1}{2}\int_0^{1/4} \frac{1}{x}\left(\log (2x)^{-1}\right)^{-1} dx = \int_0^{1/4} \frac{dx}{2x \log \frac{1}{2x}}$$

$$= -\frac{1}{2} \Big/_{0}^{1/4} \log\left(\log \frac{1}{2x}\right)$$

$$= \infty. \quad \Rightarrow \quad Mf \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}).$$



3.

$f \in AC([a,b]) \Rightarrow f$ on differentioituva m.k. $x \in [a,b]$, $f' \in L^1([a,b])$ ja

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt \quad , \quad a \le x \le b .$$

Tämä on lause 7.20, Rudin s. 148. Toisaalta lause 7.21, Rudin s. 149, sanoo, että jos f on differentioituva $\forall x \in [a,b]$ ja $f' \in L^1([a,b])$, niin

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt \quad , \quad a \le x \le b$$

eli siis $f \in AC([a,b])$. Huomaa, että löytyy kuitenkin kuvaus, joka on differentioituva m.k. $x \in [a,b]$, mutta kuvaus ei ole $AC([a,b])$ (ks. Rudin s. 144 (b)).

Olkoon $a \le y \le x \le b$. Tällöin

$$|f(x) - f(y)| = \left|\int_y^x f'(t)\,dt\right| \le \int_y^x |f'(t) \cdot 1|\,dt$$

$$\le \left(\int_a^b |f'(t)|^p\,dt\right)^{1/p} |x-y|^{1/q}$$

$$= L_f |x-y|^{\alpha} ,$$

missä $\alpha = \frac{1}{q} = 1 - 1/p$.

4.

Olk. $f, g \in AC([a,b])$. Tästä seuraa, että

f ja g ovat jatkuvia ja

$$1 \leq M := \max\{ \max_{x \in [a,b]} |f(x)|, \max_{x \in [a,b]} |g(x)|, 1 \} < \infty \ (M \neq 0).$$

Annetulle $\varepsilon > 0$ löytyy $\delta(f, \frac{\varepsilon}{3M})$ ja $\delta(g, \frac{\varepsilon}{2M})$ s.e.

$$\sum_{i=1}^{n} |(fg)(\beta_i) - (fg)(\alpha_i)|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(|f(\beta_i)| |g(\beta_i) - g(\alpha_i)| + |g(\alpha_i)| |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| \right)$$

$$\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} < \varepsilon,$$

kun $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i - \alpha_i| < \delta(fg, \varepsilon) := \min(\delta(f, \frac{\varepsilon}{3M}), \delta(g, \frac{\varepsilon}{2M}))$

ja välit (α_i, β_i) ovat erillisiä.

Lause

Jos $f, g \in AC([a,b])$, niin

$$\int_{\alpha}^{\beta} f' g \, dt = \Big/_{\alpha}^{\beta} fg - \int_{\alpha}^{\beta} f g' \, dt \quad \forall \ \alpha, \beta \in [a,b].$$

Todistus. $f, g \in AC([a,b]) \Rightarrow fg \in AC([a,b]) \Rightarrow$

$$\frac{(fg)(t) - (fg)(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(t)[g(t) - g(t_0)]}{t - t_0} + \frac{g(t_0)[f(t) - f(t_0)]}{t - t_0}$$

$$\longrightarrow f(t_0) g'(t_0) + g(t_0) f'(t_0)$$

melkein kaikilla $t_0 \in [a,b]$, kun $t \to t_0$.

(Absoluuttisesti jatkuva funktio on differentioituva vain melkein kaikkialla.)

Näin ollen

$$\int_\alpha^\beta fg = (fg)(\beta) - (fg)(\alpha) = \int_\alpha^\beta (fg)'\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f'g\,dt + \int_\alpha^\beta fg'\,dt \quad \forall\, \alpha,\beta \in [a,b].$$

5. Tehdään aluksi muutama huomio. $\mathbb{R}$:n avoimet joukot ovat korkeintaan numeroituvia yhdisteitä avoimista väleistä. Toisaalta Lebesgue-mitalliselle joukolle A, jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa avoin joukko G s.e. $A \subset G$ ja $m(G \setminus A) \leq \varepsilon$, edelleen $m(A) = \inf\{m(G) : G \supset A, G \text{ avoin}\}$. Todistetaan aluksi pari aputulosta (lue lemma 1 ennikä alta).

<u>Lemma 2</u>

Jos A on mitallinen (Lebesgue-mitan suhteen), niin $f(A)$ on myös mitallinen.

Todistus. Olkoon $m(A) < \infty$. Tällöin Lebesgue-mitan säännöllisyyden nojalla, löytyy kompaktit joukot $K_j \subset A$ s.e.

$$A = A_1 \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \quad ,$$

missä $m(A_1) = 0$. Koska f on Lipschitz-jatkuva, erityisesti siis jatkuva, kompaktin joukon K_j kuvajoukko $f(K_j)$ on kompakti (ja mitallinen). Näin ollen

$$f(A) = f(A_1) \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} f(K_j)$$

on mitallinen, missä $m(f(A_1)) = 0$ lemman 1 nojalla.

<u>Lemma 1</u>

Jos $A \subset \mathbb{R}$ on nollamittainen ja f Lipschitz-jatkuva, niin myös kuvajoukko $f(A)$ on mitallinen ja $m(f(A)) = 0$.

Todistus. Riittää näyttää, että $m^*(f(A)) = 0$ (*), missä m^* on Lebesguen ulkomitta. Olkoon annettu $\varepsilon > 0$ ja $\{I_i\}$ sellainen A:n peite, että

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu(I_i) \leq \frac{\varepsilon}{L}.$$

Koska f on jatkuva, joukko $f(I_i)$ on väli jokaisella $i \in \mathbb{N}$. Näin ollen $m^*(f(I_i)) = m(f(I_i)) = \nu(f(I_i))$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$. Lisäksi, koska f on Lipschitz, jokaisella $i \in \mathbb{N}$

$$\nu(f(I_i)) \leq L\,\nu(I_i),$$

sillä kaikilla $x, y \in I_i$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \leq L\,\nu(I_i).$$

Koska $f(A) \subset f(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(I_i)$, niin

$$m^*(f(A)) \leq m^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} f(I_i)\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(f(I_i)) \leq L \sum_{i=1}^{\infty} \nu(I_i) \leq \varepsilon.$$

Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, väite seuraa.

Itse tehtävään. Olkoon $\tilde{A} \subset \mathbb{R}$ avoin Lebesgue-mitallinen joukko ja $\{I_i\}$ $\tilde{A}$:n peite, missä kukin I_i on $\mathbb{R}$:n avoin väli (a_i, b_i), $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Samoin päättelyin kuin yllä, saadaan

$$m(f(\tilde{A})) \leq m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} f(I_{n,i})\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(f(I_{n,i})) \leq L \sum_{i=1}^{\infty} v(I_{n,i}) .$$

ottamalla infimum kaikkien tällaisten peitteiden $\{I_{n,i}\}$ yli, saadaan

$$m(f(\tilde{A})) \leq L\, m(\tilde{A}) .$$

Koska

$$m(A) = \inf\{ m(\tilde{A}) : \tilde{A} \supset A,\ \tilde{A} \text{ avoin}\},$$

missä $A \subset \mathbb{R}$ on Lebesgue-mitallinen, niin

$$m(f(A)) \leq m(f(\tilde{A})) \leq L\, m(\tilde{A}),$$

missä käytimme tietoa $A \subset \tilde{A} \Rightarrow f(A) \subset f(\tilde{A})$. Jälleen ottamalla infimum kaikkien tällaisten avointen joukkojen $\tilde{A} \supset A$ yli, väite seuraa.

(*)
$m^*(A) = 0 \Rightarrow A$ mitallinen. Syy:
Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ testijoukko. $E \cap A \subset A \Rightarrow m^*(E \cap A) = 0$ monotonisuuden nojalla. Toisaalta $E \supset E \setminus A \Rightarrow$
$m^*(E) \geq m^*(E \setminus A) = \underbrace{m^*(E \cap A)}_{=0} + m^*(E \setminus A)$. Koska E oli mielivaltainen, A on mitallinen. Muista, että subadditiivisuuden nojalla, mitallisuuteen riittää, että

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A) \quad \forall E \subset \mathbb{R}.$$